В.Н. Алексеев, Т.П. Земляных, Н.А. Никитина
Ишимский педагогический институт им. П.П. Ершова
(филиал) Тюменского государственного университета, г. Ишим
УДК 372.851,519.2, 681.3

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЗАДАЧИ

Аннотация.В статье представлено решение вероятностной задачи, которая может быть использована для олимпиад или творческих заданий. Также приведена программа, дающая оценку вычисляемой вероятности методом Монте-Карло.

Ключевые слова: вероятность, метод Монте-Карло, олимпиадная задача.

В одном из туров Internet-олимпиады для младших школьников нужно было решить задачу о количестве прямоугольников, которые можно было выделить в сетке размером 2×5. Обобщим эту задачу. Найти количество прямоугольников выделяемых в сетке размером $m \times n$, где для определенности будем считать $m \geq n$ (стороны прямоугольников лежат на линиях сетки). Пусть также ячейки рассматриваемой сетки являются квадратами. Тогда естественным образом возникает теоретико-вероятностная задача, которая с успехом может быть предложена для студенческих олимпиад различного уровня (или для российского тура олимпиад школьников). Сформулируем эту задачу.

Найти вероятность того, что наудачу выбранный прямоугольник в прямоугольной сетке размером $m \times n$ ($m \geq n$) с квадратными ячейками окажется квадратом.

Решим эту задачу на основе формулы классической вероятности. Также построим математическую модель проведения испытаний в виде Pascal-программы. Иными словами будем оценивать вероятность описанного события методом статистических испытаний (или, иначе, методом Монте-Карло) [1].

Расположим сетку в первой координатной четверти таким образом, что более длинная сторона лежит на оси абсцисс. Тогда произвольный выбор прямоугольника равносилен случайному выбору пары вертикальных линий сетки и пары горизонтальных линий. По комбинаторному правилу умножения находим общее количество N равновозможных исходов такого выбора:

$$N = C_{m+1}^{2} \cdot C_{n+1}^{2} = \frac{mn(m+1)(n+1)}{4}. \qquad (1)$$

Теперь вычислим количество исходов благоприятствующих наступлению интересующего нас события. Найдем количество квадратов размером $k \times k$, где $k \in \{1, 2, \ldots n\}$. Для получения такого квадрата нужно выбрать полосу ширины k параллельную оси ординат и полосу такой же ширины параллельную оси абсцисс. Вычислим количество таких полос, параллельных оси ординат. Будем фиксировать положение выбранной полосы по правому краю. Этот край имеет уравнение $x = C$, где $C \in \{k, \ldots m\}$. Таким образом, можно выбрать $m - k + 1$ различных вертикальных полос ширины k. Аналогично (отмечая положение верхнего края) находим, что количество горизонтальных полос ширины k будет равно $n - k + 1$. Значит, по правилу умножения, количество различных квадратов со стороной k, которые можно выбрать в исходной сетке, будет равно $(m - k + 1) \cdot (n - k + 1)$. Следовательно, количество M благоприятствующих исходов выбора найдется как результат суммирования количеств квадратов всех допустимых размеров, то есть $M = \sum\limits_{k=1}^{n} (m - k + 1)(n - k + 1)$. Произведем в этой сумме замену индекса суммирования, положив $t = k - 1$. Тогда, с учетом изменения границ нового индекса суммирования, получим $M = \sum\limits_{t=0}^{n-1} (m - t)(n - t)$. Для отдельного слагаемого в этой сумме получаем следующее соотношение $(m - t)(n - t) = mn - (m + n)t + t^2$. Теперь сгруппируем слагаемые в сумме в три суммы

$$M = mn^2 - (m + n)\sum_{t=0}^{n-1} t + \sum_{t=0}^{n-1} t^2. \qquad (2)$$

Первое слагаемое в алгебраической сумме (2) получено как результат суммирования n одинаковых слагаемых равных mn. Сумма во втором слагаемом, очевидно, является суммой членов арифметической прогрессии. Поэтому

$$(m+n)\sum_{t=0}^{n-1} t = \frac{n(n-1)(m+n)}{2}. \qquad (3)$$

Остается вычислить третье слагаемое в формуле (2). Для этого применим прием, описанный в известной книге Пойа [2, с.88-89]. Рассмотрим разность $(t+1)^3 - t^3 = 3t^2 + 3t + 1$. Просуммировав обе части этого равенства для всех значений t от 0 до n, получим $n^3 = 3\sum_{t=0}^{n-1} t^2 + 3\sum_{t=0}^{n-1} t + n$. Из этого равенства, после очевидных преобразований находим

$$\sum_{t=0}^{n-1} t^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}. \qquad (4)$$

Примечание: для студентов, знакомых с дискретным преобразованием Лапласа или с применением производящих функций, результат (4) можно получить с помощью этого инструментария.

Подставляя (3) и (4) в (2) после некоторых преобразований получим:

$$M = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}. \qquad (5)$$

Результаты (1) и (5) позволяют получить искомую формулу для вычисления вероятности события A, описанного выше:

$$P(A) = \frac{2(3m-n+1)}{3m(m+1)}. \qquad (6)$$

Приведем текст Pascal-программы (freewareсистема PascalABC) оценивающей вероятность этого события методом статистических испытаний. В программе производится выбор пары различных чисел от 0 до m (переменные x_1 и x_2), а также пары разных чисел от 0 до n (переменные y_1 и y_2). После этого выбора счетчик общего количества испытаний увеличивается на единицу. Проверяется условие $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$ (полосы одинаковой ширины), при выполнении которого счетчик количества благоприятных исходов увеличивается на единицу. Испытания ведутся непрерывно до нажатия на любую клавишу. На экран, в одни и те же точки непрерывно выдается информация об общем количестве проведенных испытаний в серии, о количестве успешно завершившихся испытаний и относительная частота появления события A. Также на экране представлена постоянная информация о выбранных значениях m и n , а также значение, вычисленное по формуле (6).

```
PROGRAM Probability;
  Uses
Crt;
  Var
    m,n,x1,x2,y1,y2,k,p:Integer;
Ch:Char;
BEGIN
  //ввод исходных размеров сетки
CRTWindowSize(25,12); ClrScr;
Write(' m > ');ReadLn(m);
Write(' n > ');ReadLn(n);
//начальная инициализация счетчиков, вывод значения по формуле
Randomize; k:=0; p:=0;
GoToXY(2,4); Write('P_formula = ',2*(3*m-n+1)/3/m/(m+1):10:7);
GoToXY(2,6); Write('Counter M = ');
GoToXY(2,8); Write('Counter N = ');
GoToXY(2,10); Write('P_compute = ');
  //очисткабуфераклавиатуры
  While KeyPressed do Ch:=ReadKey;
//проведение испытаний с выводом текущих значений
Repeat
    Repeat
x1:=Random(m+1);
x2:=Random(m+1);
until x1<>x2;
    Repeat
      y1:=Random(n+1);
      y2:=Random(n+1);
until y1<>y2;
Inc(p);
    If abs(x1-x2)=abs(y1-y2) then Inc(k);
```

```
GoToXY(14,6);Write(k:8);
GoToXY(14,8);Write(p:8);
GoToXY(14,10);Write(k/p:10:7);
until KeyPressed
END.
```

Приведем результаты нескольких пробных запусков.

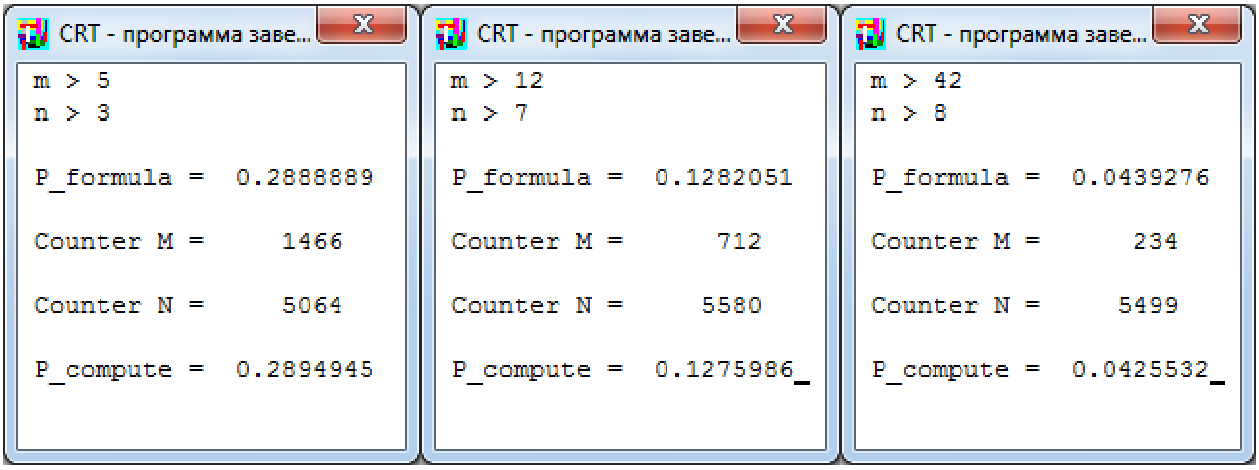

Рис. 1. Результаты пробных запусков.

Как видно из рисунка 1, экспериментальные результаты достаточно хорошо согласуются с теоретически вычисленными.

В статье описано решение задачи, которая может быть предложена на математических олимпиадах школьников и/или студентов. Также эту задачу можно ставить как задачу для моделирования методом статистических испытаний на олимпиадах по программированию. Возможно обобщение задачи на трехмерный (а также и на большую размерность) случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)/ Н.П. Бусленко и др.; под ред. Ю.А. Шрейдера. М.: Физматгиз, 1962. 332 с. (Справочная математическая библиотека).
2. Пойа Д. Математическое открытие / Д. Пойа. Изд. 2-е, стер. М.: Наука, 1976. 448с.