В.А. Баринов, Д.А.Григорьев.

Тюменский государственный университет, г.Тюмень

УДК 532.59, 537.84

Моделирование магнитогидродинамических волн на поверхности жидкости конечной проводимости

Аннотация. Рассмотрена задача о распространении магнитогидродинамических волн на свободной поверхности жидкости с конечной проводимостью. Система уравнений магнитной гидродинамики сведена к одному уравнению в частных производных второго порядка для вихря магнитного поля. Представлено решение этого уравнения в виде прогрессивной волны.

Ключевые слова: декремент затухания, магнитная вязкость, магнитная гидродинамика, свободная поверхность.

Введение. Магнитогидродинамические (МГД) поверхностные волны распространяются по свободной поверхности электропроводной (проводящей) жидкости при наличии магнитного поля. Поэтому исследование этого процесса представляет практический интерес в ядерной энергетике, металлургии и астрофизике. Для идеально (бесконечно) проводящей жидкости решение нелинейной задачи о МГД поверхностных волнах приведено в работах [1], [2]. Для случая свободной поверхности слоя текущей идеально проводящей жидкости решение получено в [3]. Линейная задача о МГД волнах на поверхности бесконечно глубокого слоя жидкости конечной проводимости рассмотрена в [4]. Полученное в ней решение представляет незатухающую по глубине волну, что физически мало содержательно. В настоящей работе эта задача сведена к одному уравнению, решение которого дает затухающую по глубине волну.

Математическая модель. Рассмотрим систему уравнений магнитной гидродинамики для несжимаемой жидкости, обладающей конечной проводимостью [5], [6]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t}+(\vec{\mathrm{v}}\nabla)\vec{\mathrm{v}}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{B_1^2}{8\pi\rho\mu_1}\right)+\frac{1}{\rho\mu_1}\left(\vec{B}_1\nabla\right)\vec{B}_1+\vec{g},\\
&div\ \vec{\mathrm{v}}=0,\\
&\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}=rot\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}_1\right)+\nu_m\Delta\vec{B}_1,\\
&div\,\vec{B}_1=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь ρ - плотность, P - давление, $\vec{\mathrm{v}}$ - скорость, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения, $\vec{B}_1$ - вектор магнитной индукции, $\nu_m=\frac{1}{\sigma\mu_1}$ - магнитная вязкость, в которой c - скорость света, σ - электропроводность, μ_1 - магнитная проницаемость.

В вакууме уравнения Максвелла запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&rot\,\vec{B}_2=0,\\
&div\,\vec{B}_2=0
\end{aligned}\tag{2}$$

Аналогично для твердого основания

$$\begin{aligned}
&rot\,\vec{B}_3=0,\\
&div\,\vec{B}_3=0
\end{aligned}\tag{3}$$

Введем декартовую систему координат так, что невозмущенная свободная поверхность жидкости совпадет с плоскостью $z=0$, а ось z направлена против вектора $\vec{g}$. Далее предположим, что величины не зависят от y и компонента скорости по оси y равна $\mathrm{w}=0$.

В выбранной системе координат при сделанных предположениях граничные условия запишутся следующим образом:

1. На свободной поверхности, заданной уравнением $z=\xi(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathrm{u}\frac{\partial \xi}{\partial x},\\
&B_{1z} = B_{1x}\frac{\partial \xi}{\partial x},\\
&B_{2z} = B_{2x}\frac{\partial \xi}{\partial x},\\
&\frac{B_{2z}^2}{2\rho\mu_2} - p - \frac{B_{1z}^2}{2\rho\mu_1} = \alpha\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right].
\end{aligned} \qquad (4)$$

2. На дне, $z = -l$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v} = 0\\
&B_{1z} = 0,\\
&B_{3z} = 0.
\end{aligned} \qquad (5)$$

3. $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ не должны возрастать при $z \to \pm\infty$

Краевая задача. Рассмотрим плоское волновое движение жидкости в случае распространения по свободной поверхности установившейся волны. Ось x выберем в направлении распространения поверхностной волны. Предполагается, что векторы магнитной индукции невозмущенного магнитного поля $\vec{B}_{01}, \vec{B}_{02}, \vec{B}_{03}$ в областях 1,2,3 параллельны оси x. При распространении волны магнитное поле будет записываться в виде $\vec{B}_i = \vec{B}_{0i} + \vec{B}_{wi}$, $i = 1,2,3$.

В качестве малого параметра примем

$$\varepsilon = k\xi_{\max}$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число, λ - длина волны, $\xi_{\max}$ - максимальное значение смещения свободной поверхности

Введем безразмерные параметры:

$$
\begin{aligned}
&x = kx,\\
&\mathrm{z} = kz,\\
&t = c_0 kt,\\
&\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\varepsilon c_0},\\
&\xi = \frac{k\xi}{\varepsilon},\\
&\vec{b}_i = \frac{\vec{B}_{wi}}{\varepsilon\left|\vec{B}_{oi}\right|},\\
&p = \frac{1}{\varepsilon\rho c_0^2}\left(p - \rho g z - p_0\right), p_0 = \frac{1}{8\pi}\left(B_{02}^2 - B_{01}^2\right).
\end{aligned}
$$

Тогда уравнения в безразмерном виде запишутся следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \varepsilon\left(\vec{\mathrm{v}}\nabla\right)\vec{\mathrm{v}} = -\nabla p - \frac{v_{A1}^2}{c_0^2\mu_1}\nabla\left(b_{1x} + \varepsilon\frac{b_1^2}{2}\right) + \frac{v_{A1}^2}{c_0^2\mu_1}\frac{\partial\vec{b}_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{v_{A1}^2}{c_0^2\mu_1}\left(\vec{b}_1\nabla\right)\vec{b}_1,\\
&div\ \vec{\mathrm{v}} = 0,\\
&\frac{\partial\vec{b}_1}{\partial t} = rot\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{e}_x\right) + \varepsilon rot\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{b}_1\right) + v_m\Delta\vec{B}_1,\\
&div\vec{b}_1 = 0.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

где $\vec{e}_x$ - единичный вектор оси x , $v_{A1}^2 = \dfrac{B_{01}^2}{\rho\mu_1}$ - квадрат альфвеновской скорости.

Граничные условия

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{v} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial x} + \varepsilon\mathrm{u}\frac{\partial\xi}{\partial x},\\
&b_{1z} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \varepsilon b_{1x}\frac{\partial\xi}{\partial x},\\
&b_{2z} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \varepsilon b_{2x}\frac{\partial\xi}{\partial x}\\
&\Theta_2^2\frac{b_{2x}}{\mu_2} + \Theta_2^2\frac{\varepsilon b_2^2}{2\mu_2} - \Theta_1^2\frac{b_{1x}}{\mu_1} - \Theta_1^2\frac{\varepsilon b_2^2}{2\mu_1} - p + \frac{g\xi}{kc_1^2} = \frac{v_c^2}{c_1^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\left[1 - \frac{3\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right].
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Положив $\varepsilon = 0$ в (6) и (7) (что соответствует линейной задаче), имеем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p - \frac{v_{A1}^2}{c_0^2}\nabla b_{1x} + \frac{v_{A1}^2}{c_0^2}\frac{\partial \vec{b}_1}{\partial x},\\
&div\,\vec{v} = 0,\\
&\frac{\partial \vec{b}_1}{\partial t} = rot\left(\vec{v}\times\vec{e}_x\right) + \nu_m \Delta \vec{B}_1,\\
&div\,\vec{b}_1 = 0.
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Граничные условия при $z = 0$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x},\\
&b_{1z} = \frac{\partial \xi}{\partial x},\\
&b_{2z} = \frac{\partial \xi}{\partial x},\\
&\Theta_2^2\frac{b_{2x}}{\mu_2} - \Theta_1^2\frac{b_{1x}}{\mu_1} - p + \frac{g\xi}{kc_1^2} = \frac{v_c^2}{c_1^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\left[1 - \frac{3\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right].
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

где $\frac{v_{A1}^2}{c_0^2} = \Theta^2$, c_0- фазовая скорость гравитационной волны. Возьмем дивергенцию от первого уравнения системы (8):

$$\Delta\left(p + \Theta^2 b_{1x}\right) = 0. \qquad (10)$$

Взяв от первого уравнения системы (7) ротор, получим:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \Theta^2 \frac{\partial \omega_A}{\partial x}, \qquad (11)$$

где $\omega = rot\,\vec{v}$, $\omega_A = rot\,\vec{b}_1$.

Применив ротор к третьему уравнению системы, получим:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} = -\Delta \mathrm{v} + \nu_m \Delta \omega_A, (12)$$

Продифференцируем уравнение (11) по x:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}\right) = -\Delta v_z = \Theta^2 \frac{\partial^2 \omega_A}{\partial x^2},$$

Используя это, получим уравнение для магнитогидродинамического вихря:

$$\frac{\partial\omega_A}{\partial t}=\Theta^2\frac{\partial^2\omega_A}{\partial x^2}+\nu_m\Delta\omega_A,\ (13)$$

Решение задачи. Решение будем искать в комплексной форме:

$$\omega_A = Ae^{mz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t)}$$

где

$$m=b+ia,\ a,b=const,\ A=A_R+iA_I,\ \gamma=\gamma_R+i\gamma_I,$$
$$\gamma_R=-\beta,\ \gamma_I=-\alpha,\ \alpha=\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{c}{c_0}$$

Подставим это решение в уравнения (13). Выпишем значения всех производных

$$\partial^2_{xx}\omega_A = -\omega_A,$$
$$\partial_t\omega_A = \gamma\omega_A,$$
$$\triangle\omega_A = \left(m^2-1\right)\omega_A$$

Тогда уравнение (13) примет вид:

$$\left[\gamma-v_m\left(m^2-1\right)+\theta^2\right]\omega_A=0$$

Из уравнения получаем $\gamma=v_m\left(m^2-1\right)-\theta^2$

Найдем компоненты магнитного поля из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}\Delta b_{1z} = -iAe^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)}\\ \Delta b_{1x} = mAe^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)}\end{cases}$$

Т.к. $\frac{\partial b_{1z}}{\partial z}=-\frac{\partial b_{1x}}{\partial x}$,то $\frac{\partial b_{1x}}{\partial x} = -mBe^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)}$.

Отсюда $\frac{\partial b_{1x}}{\partial x} = -\frac{m}{i}Be^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)}$.

Выразим коэффициент B через A :

$$\begin{cases} -Be^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)} + m^2 Be^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)} = -iAe^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)} \\ -miBe^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)} - \dfrac{m^3}{i} Be^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)} = mAe^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -B + m^2 = -iA \\ B - m^2 = iA \end{cases},$$

$$B = -\frac{i}{m^2-1}A.$$

Тогда компоненты поля имеют вид

$$B_z = H_0 e^{z+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t)} - \frac{i}{m^2-1}Ae^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)},$$

$$B_x = iH_0 e^{z+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t)} + \frac{m}{m^2-1}Ae^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)}$$

Найдем компоненты скорости из уравнения из уравнения (13)

Будем искать v - компоненту скорости в виде:

$$\mathrm{v} = Ve^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)}$$

Тогда

$$m^2 Ve^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)} - Ve^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)} = -\gamma Ae^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)} + v_m(m^2-1)e^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)},$$

$$(m^2-1)V = (\gamma v_m(m^2-1) - \gamma)A,$$

$$V = \left(v_m - \frac{\gamma}{m^2-1}\right)A$$

Из равенство нулю дивергенции скорости найдем u-компоненту скорости, тогда компоненты скорости имеют вид:

$$\mathrm{v} = V_0 e^{z+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t)} + \left(v_m - \frac{\gamma}{m^2-1}\right)Ae^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)},$$

$$\mathrm{u} = iV_0 e^{z+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t)} + im\left(v_m - \frac{\gamma}{m^2-1}\right)Ae^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)}$$

Выразим давление из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \theta^2 \dfrac{\partial B_z}{\partial z} + \theta^2 \dfrac{\partial B_z}{\partial x} \end{cases}$$

Отсюда находим

$$P = -\gamma V_0 e^{z+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t)} - \gamma m\left(v_m - \frac{\gamma}{m^2-1}\right) A e^{bz+\gamma_R t+i(x+\gamma_I t+az)}$$

Из граничного условия $B_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ найдем форму свободной поверхности:

$$\xi = -iH_0 e^{\gamma_R t+i(x+\gamma_I t)} - \frac{A}{m^2-1} e^{\gamma_R t+i(x+\gamma_I t)}$$

Таким образом, исходная линейная система уравнений сведена к уравнению второго порядка для вихря магнитного поля. На основании найденного решения для вихря магнитного поля определены скорость, давление и форма свободной поверхности

Список литературы:

1. Алешков Ю.З, Баринов В.А., Тактаров Н.Г. О распространении нелинейных магнитогидродинамических поверхностных волн // Магнитная гидродинамика.1989. №4. С. 79-86
2. Баринов В.А., Тактаров Н.Г. Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн. Саранск: Изд-во Мордов.ун-та, 1991. 96 с.
3. Баринов В.А., Тактаров.Н.Г. Нелинейные магнитогидродинамические поверхностные волны на слое движущейся жидкости // Магнитная гидродинамика. 1990. №4. С. 71-76
4. Задорожный А.И, Грунтфест Р.А. Собственные колебания жидкости конечной электропроводимости при наличии внешнего магнитного поля. //Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т.41.№2. С. 3-10.
5. Куликовский А.Г, Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2011. 328с.
6. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики . М.: Мир, 1967. 320с.