

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Д.Д. Баранникова, Г.А. Герасев

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 519.63+533.6

ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК СВОБОДНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВИХРЕЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКА НАГРЕВА

Аннотация. В статье представлены некоторые результаты численного моделирования сложных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа, возникающих в результате локального нагрева нижней плоскости расчетной области при учете влияния сил тяжести и Кориолиса.

Ключевые слова: полная система уравнений Навье-Стокса, газовая динамика, свободные тепловые вихри.

А. Ю. Вараксин и его коллеги провели серию экспериментов [1] по генерации свободных тепловых воздушных вихрей. В исследованиях изучались различные тепловые режимы нагрева подстилающей поверхности, приводящие к генерации вихрей. Получены данные о времени жизни, геометрических размерах, скорости перемещения и других параметрах теплового вихря. Кроме того, установлено превышение вертикальной компоненты вектора скорости над тангенциальными составляющими в изучаемых воздушных вихрях.

С. П. Баутиным предложена схема возникновения воздушных вихрей, таких как торнадо и циклоны [2]. Множественные теоретические и численные исследования подтвердили эту схему[3].

Цель данной работы – изучить изменение газодинамических характеристик при различных режимах нагрева нижней плоскости расчетной области в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

Для этого находится численное решение полной системы уравнений Навье-Стокса с поставленными начальными и граничными условиями. В безразмерной векторной форме данная система имеет следующий вид [3]:

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + \right. \\ \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \right\}. \end{cases} \quad (1)$$

В данной системе безразмерные постоянные значения коэффициентов вязкости и теплопроводности следующие: $\mu_0 = 0.001$, $\kappa_0 \approx 1.46 \mu_0$.

В системе (1): t – время; x, y, z – декартовы координаты; ρ – плотность газа; $\vec{V} = (u, v, w)$ – вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси; T – температура газа; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ – вектор ускорения силы тяжести; $\gamma = 1.4$ – показатель политропы для воздуха; $-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = (av - bw, -au, bu)$ – вектор ускорения Кориолиса, где $a = 2\Omega \sin \psi$, $b = 2\Omega \cos \psi$, $\Omega = |\vec{\Omega}|$ – модуль вектора угловой скорости вращения Земли; ψ – широта точки O – начала декартовой системы координат $Oxyz$, вращающейся вместе с Землей.

В качестве начальных условий при описании рассматриваемых течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа принимаются функции, задающие точное решение [4] системы (1):

$$\begin{aligned} u = 0, v = 0, w = 0, T_0(z) = 1 - kz, k = \frac{l x_{00}}{T_{00}}, \quad (2) \\ l = 0.0065 \text{ К/м}, x_{00} = 10 \text{ м}, T_{00} = 288^\circ \text{ К}, \\ \rho_0(z) = (1 - kz)^{\gamma-1}; \quad v = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Расчеты проводились в прямоугольном параллелепипеде с длинами сторон $x^0 = 1$, $y^0 = 1$ и $z^0 = 0.2$ вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно. Что соответствует размерам лаборатории.

Граничные условия были выбраны следующие. На четырех боковых гранях расчетного параллелепипеда значения плотности задаются из стационарного состояния, а на нижней и верхней гранях ставится условие непрерывности потока. Это означает, что на границе значения плотности вычисляются с помощью линейной интерполяции в направлении нормали к данной грани из внутренних точек расчетной области.

По периметру расчетной области для всех компонент вектора скорости устанавливаются условия непрерывности. На верхней и нижней гранях – условия непротекания. При этом третья компонента вектора скорости равна нулю, а первая и вторая компоненты вектора скорости определяются из условия симметрии, то есть считаются из условия равенства нулю их производной по нормали к данной грани.

Для температуры на всех боковых гранях задаются значения из стационарного распределения. На нижней грани температура задается функцией, моделирующей локальный нагрев подстилающей поверхности.

На плоскости $z = 0$ температура задается функцией

$$T(x, y, t) = 1 + M(1 - \exp(-10t)) \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{r_0^2}\right), \quad (3)$$

где M – превышение максимального безразмерного значения температуры над масштабным единичным значением, r_0 – безразмерное значение радиуса области нагрева.

Расчетная область заполняется трехмерной сеткой узлов $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$, где $x_i = i \cdot \Delta x$, $y_j = j \cdot \Delta y$, $z_k = k \cdot \Delta z$, $0 \leq i \leq L$, $0 \leq j \leq M$, $0 \leq k \leq N$. Разностные шаги по трем пространственным переменным $\Delta x = x^0 / L$, $\Delta y = y^0 / M$, $\Delta z = z^0 / N$.

Входные параметры были следующие: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны соответственно

$$\rho_{00} = 1,2928 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, u_{00} = 333 \text{ м/с}, x_{00} = 10 \text{ м}, t_{00} = x_{00} / u_{00} = 0,3 \text{ с}. \quad (4)$$

Безразмерное значение коэффициента вязкости $\mu_0 = 0,001$. Разностные шаги по трем пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,01$, а шаг по времени $\Delta t = 0,001$.

Была проведена серия расчетов при следующих значениях радиуса области нагрева и максимальной температуре нагрева. Изучалась зависимость основных характеристик воздушного потока от изменения радиуса и температуры источника нагрева.

Таблица 1

| | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| r_0 , м | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
| T, К | 345 | 403 | 461 | 518 | 576 |

Расчеты показали, что у сформировавшегося теплового вихря вертикальная составляющая в полтора раза превышает окружную скорость. Так окружная составляющая скорости в центре расчетной области постепенно достигает 80 м/с, после чего происходит разрушение образовавшегося вихря. Вертикальная составляющая вектора скорости достигает 136 м/с. Наибольшее время жизни теплового вихря наблюдается при минимальном значении температуры и минимальном радиусе пятна нагрева. Возможные причины разрушения теплового вихря: очень большие значения скоростей, влияние граничных условий.

Чем больше максимальная температура нагрева, тем раньше возникает вихревой поток, закрученный против хода часовой стрелки. Так при радиусе пятна нагрева в 0,6 м и максимальной температуре 345°К закрученное восходящее течение воздуха наблюдается на 1200 расчетном шаге по времени, а при этом же радиусе пятна нагрева, но температуре 576°К – на 900 расчетном шаге.

Следующая серия расчетов была произведена при фиксированном максимальном значении температуры нагрева в 461°K , но различных радиусах нагрева. Было установлено, что время возникновения восходящего теплового закрученного потока в этих расчетах практически одинаково (900 расчетный шаг).

Если тепловой вихрь внутри расчетной области существует достаточно долго, то формируется, так называемый, «глаз вихря» - свободная от линий тока область диаметром 0,2-0,3 м. «Глаз вихря» наблюдался при радиусе пятна нагрева 0,6 м и максимальных значениях температуры 345°K и 403°K , а также при радиусе 0,2 м и температуре 460°K .

По результатам расчетов построены линии тока, иллюстрирующие течение газа в начальные моменты времени. На рисунках 1 приведен вид сбоку и вид сверху на свободный тепловой вихрь при радиусе пятна нагрева 0,2 м и максимальной температуре нагрева 461°K в один и тот же момент времени 2,5 мин.

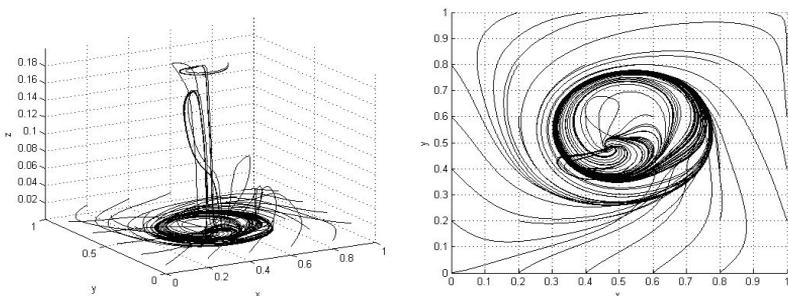


Рис. 1. Вид сбоку и вид сверху на линии тока в момент времени 2,5 мин

Численное моделирование позволило установить, что в результате локального нагрева нижней плоскости расчетной области возникает закрученное против хода часовой стрелки течение. Структура его очень

динамично меняется и после 4 минут происходит разрушение вихря. Полученные в результате расчетов данные не противоречат результатам лабораторных экспериментов [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Вараксин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н. Торнадо. – М.: Физматлит, 2011. – 312 с.
2. Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. – 96с.
3. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г., Баутин К. В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. – Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. – 215 с.
4. Баутин С. П., Обухов А. Г. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2013. – № 4. – С. 81-86.