

А.В. Белицкий, А.С. Долгушин, Е.Р. Трефилина

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 531.2

РАСЧЕТ ПРОГИБА ПЛАСТИНЫ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ ЛОМАНЫХ

Аннотация. В статье представлено описание расчета по методу ломаных прогиба вязкоупругой пластины постоянной толщины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой.

Ключевые слова: вязкоупругий материал, прогиб пластины, переход от изображения к оригиналу, метод ломаных.

Одним из важных элементов конструкций строительных сооружений являются различного вида пластины. Поэтому вопросы, связанные с теоретическими исследованиями работы пластин, остаются актуальными.

На первый план решения проблемы о надежности выдвигаются задачи расчета на прогиб, несущую способность, долговечность. Для их решения требуется знание напряженно-деформированного состояния, что в итоге позволит сделать расчеты надежности и ресурса.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую шарнирно опертую пластину постоянной толщины из вязкоупругого материала, напряженно-деформированное состояние которого изменяется во времени. Прогиб и изгибающие моменты вдоль граней равны нулю.

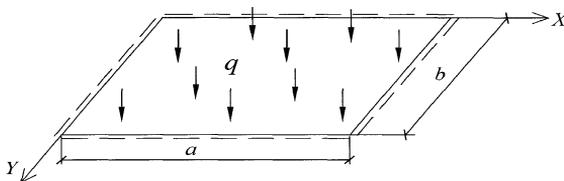


Рис. 1. Распределение нагрузки

Решение вязкоупругой задачи предложено разбивать на два этапа: а) упругий этап, б) вязкоупругий этап. На упругом этапе решается задача в упругой постановке, при которой механические характеристики материала являются числами. Приведем систему уравнений упругой задачи и ее решение [7].

Деформации и напряжения заданы следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy}\end{aligned}$$

Перемещение w , т.е. прогиб пластины, находится из уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

с соответствующими граничными условиями:

$$w|_{x=0} = 0, M_x|_{x=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = 0;$$

$$w|_{x=a} = 0, M_x|_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0;$$

$$w|_{y=0} = 0, M_y|_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0} = 0;$$

$$w|_{y=a} = 0, M_y|_{y=a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=a} = 0.$$

Функция прогибов при удержании в ее разложении m членов ряда в направлении x и n членов ряда в направлении y примет вид:

$$w_{mn}(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)}{ij \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right)^2}$$

Приближенное значение прогиба в центре пластинки определяется по формуле:

$$W = \frac{192qa^4b^4 \sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\pi^6 (a^2 + b^2)^2 D}, \frac{1}{D} = \frac{12(1 - \mu^2)}{Eh^3},$$

что отличается от точного примерно на 2,5 %. Здесь a, b (m) – размеры пластины в плане, h (m) – толщина, E (МПа) – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, D (МН·м) – цилиндрическая жесткость.

На вязкоупругом этапе в соответствии с принципом Вольтерры [6] осуществляется система переобозначений:

$$w \rightarrow w^*(p), \frac{1}{E} \rightarrow \Pi^*(p), \mu \rightarrow \mu^*(p), q \rightarrow q^*(p).$$

В соответствии с системой переобозначений механические характеристики (числа) заменяются изображениями вязкоупругих характеристик материала. Вводится система пространственных точек, интересных для разворачивания решения во времени $x = x_i, y = y_i, z = z_i, (i = \overline{1, n})$. Для каждой фиксированной точки координат получаем известную в изображении функцию одного аргумента:

$$w^*(p) = \alpha \left(1 - (\mu^*(p))^2\right) * \Pi^*(p) * q^*(p).$$

От изображения приближенно переходят к оригиналу по тому или другому методу. В литературе [3,4,6] известны следующие приближенные методы перехода от изображения к оригиналу: а) метод аппроксимации А.А. Ильюшина, б) метод алгебры операторов Ю.Н. Работнова, в) метод Пестрениных, д) метод ломаных Л.Е. Мальцева. Перечисленные методы

составляют часть методов приближенного перехода от изображения к оригиналу, предложенных механиками. Эти методы применяются на практике для монотонно возрастающих или монотонно убывающих функций.

Сложность перехода от изображения к оригиналу заключается в некорректности этой операции. Две функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ могут отличаться между собой на значительную величину на малом локальном участке. Изображения этих функций будут отличаться между собой уже на значительно меньшую величину из-за сглаживающего влияния экспоненциального ядра интегрального преобразования Лапласа-Карсона. Малое отличие между изображениями функций может привести к существенному, но локальному различию в оригинале.

Представление экспериментальных характеристик материала.

Для записи решения в изображениях необходимо экспериментальные данные (характеристики материала) [8] представить аналитически. Используем для этого метод ломаных. Представим оригинал функции ползучести в следующем виде:

$$\frac{1}{E}(t) = \frac{1}{E_0} \left\{ h(t) - \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) \cdot (t - T_i) \cdot h(t - T_i) \right\},$$

$$a_0 = a_{n+1} = 0, T_0 = 0.$$

Достоинства записи функции в виде ломаной: возможность аппроксимации с заданной точностью (количество звеньев можно увеличивать); наличие элементарного изображения по Лапласу-Карсону.

Недостатки записи: в точке $t = 0$ у ломаной будет конечная производная, у функции $\frac{1}{E}(t)$ производная может быть бесконечной; выход на асимптотическое значение у ломаной линии происходит на конечном значении t .

Так как первый участок разбиения соответствует участку неустановившейся ползучести, применим для аппроксимации кривую $\frac{1}{E}(t) = \frac{1}{E_0} + \bar{a} \cdot t^\alpha$ при дополнительном условии: $0 < \alpha \leq 1$.

Записываем условие минимума погрешности, то есть приравняем частные производные к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial \left(\frac{1}{E_0}\right)} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{E_0} + \bar{a} \cdot t_i^\alpha - \left[\frac{1}{E}(t_i) \right]_3 \right) = 0 \\ \frac{\partial \delta}{\partial \bar{a}} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{E_0} + \bar{a} \cdot t_i^\alpha - \left[\frac{1}{E}(t_i) \right]_3 \right) \cdot t_i^\alpha = 0 \\ \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{E_0} + \bar{a} \cdot t_i^\alpha - \left[\frac{1}{E}(t_i) \right]_3 \right) \cdot \bar{a} \cdot t_i^\alpha \cdot \ln(t_i) = 0. \end{cases}$$

Введем систему переобозначений:

$$b = \sum_{i=1}^n t_i^\alpha, c = \sum_{i=1}^n t_i^{2\alpha}, d = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{E}(t_i) \right]_3, e = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{E}(t_i) \right]_3 \cdot t_i^\alpha, \\ f = \sum_{i=1}^n t_i^\alpha \cdot \ln(t_i), g = \sum_{i=1}^n t_i^{2\alpha} \ln(t_i), h = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{E}(t_i) \right]_3 \cdot t_i^\alpha \cdot \ln(t_i).$$

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} n \cdot \frac{1}{E_0} + b \cdot \bar{a} = d \\ b \cdot \frac{1}{E_0} + c \cdot \bar{a} = e \\ f \cdot \frac{1}{E_0} + g \cdot \bar{a} = h \end{cases}$$

Найденные решения подставляем в третье уравнение системы и получаем трансцендентное уравнение для нахождения α .

$$\varphi(\alpha) = f \cdot \frac{1}{E_0} + g \cdot \bar{a} - h = f \cdot \left(\frac{cd - be}{cn - b^2} \right) + g \cdot \left(\frac{ne - bd}{cn - b^2} \right) - h$$

Из условия стремления $\varphi(\alpha)$ к нулю найдем α и $1/E_0$.

Для каждого промежутка снова составим уравнение для квадратичной погрешности:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{E}(t_i) - \left[\frac{1}{E}(t_i) \right]_3 \right)^2.$$

Получаем одно уравнение с одним неизвестным:

$$\frac{\partial \delta}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{E_0} + a_1 \cdot t_i - \left[\frac{1}{E} (t_i) \right]_3 \right] = 0,$$

$$\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n t_i + a_1 \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{E} (t_i) \right]_3 \cdot t_i.$$

Запишем формулу для определения параметра a_i :

$$a_i = \frac{1}{\frac{1}{E_0}} \cdot \frac{\left(\sum_{j=1}^k \left[\frac{1}{E} (t_j) \right]_3 \cdot (t_j - T_{i-1}) \right) - A_i \sum_{j=1}^k (t_j - T_{i-1})}{\sum_{j=1}^k (t_j - T_{i-1})^2},$$

$$A_i = \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^i a_j \cdot (T_j - T_{j-1}).$$

Определив все необходимые параметры, получаем аналитический вид функции ползучести. График функции представлен на рис. 2.

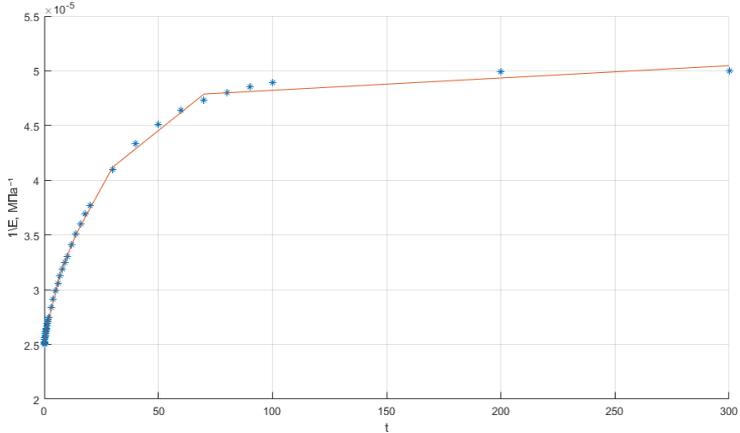


Рис.2 Аппроксимация функции ползучести

Максимальная относительная погрешность аппроксимации составляет 1.157%.

Переход к оригиналу. Система фиксированных пространственных точек, для которых интересно получить (развернуть) решение во времени в каждой задаче подбирается индивидуально. Известную в изображениях функцию $w^*(p)$ аппроксимируем функцией специального вида:

$$\varphi^*(p) = \varphi(0) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i+1}) \frac{1}{p} e^{-pT_i} \right\}, \quad 0 \leq p \leq \infty,$$

$$c_0 = c_{n+1} = 0, T_0 = 0.$$

Оригинал функции $\varphi(t)$ известен заранее и имеет вид ломаной линии

$$\varphi(t) = \varphi(0) \left\{ h(t) - \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i+1}) \cdot (t - T_i) \cdot h(t - T_i) \right\}.$$

Здесь $h(t)$ – функция Хевисайда, которая равна нулю при отрицательном аргументе и единице при положительном аргументе, $\varphi(0), c_i, T_i$ – параметры, которые нужно определить. Параметр $\varphi(0)$ обязательно является размерным, c_i, T_i – безразмерны. Аргументы t и p тоже безразмерны.

Для определения параметров приравниваем значения двух функций $\varphi^*(p)$ и $w^*(p)$ при фиксированных значениях аргумента $p_j, j = 0, \dots, L$.

Такой способ получения системы уравнений называется методом коллокаций (совпадений). Полученная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^*(p_0) = w^*(p_0) \\ \varphi^*(p_1) = w^*(p_1) \\ \dots \\ \varphi^*(p_L) = w^*(p_L). \end{cases}$$

В этой системе имеется перемножение параметра $\varphi(0)$ на параметры c_i , число которых совпадает с числом звеньев ломаной линии. Поэтому специальным образом выбираем одну из точек коллокации $p_0 = \infty$.

$$\varphi^*(p_0 = \infty) = w^*(p_0 = \infty),$$

что позволяет отделить параметр $\varphi(0)$, т.к. каждое из слагаемых $c_i \frac{1}{p_0} e^{-pT_i}$ обратится в нуль, и найти его по более простой формуле.

$$\varphi(0) = w^*(p_0 = \infty).$$

Тогда вместо системы нелинейных уравнений получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения параметров c_i .

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i (e^{-p_1 T_{i-1}} - e^{p_1 T_i}) = \left(\frac{w^*(p_1)}{\varphi_0} - 1 \right) p_1 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n c_i (e^{-p_L T_{i-1}} - e^{p_L T_i}) = \left(\frac{w^*(p_L)}{\varphi_0} - 1 \right) p_L \\ \sum_{i=1}^n c_i (T_i - T_{i-1}) = \frac{w^*(p_0)}{\varphi_0} - 1. \end{cases}$$

Систему точек T назначаем так, чтобы они образовывали возрастающую последовательность, и при этом с ростом номера участка $[T_{i-1}, T_i]$ существенно увеличивалась его длина по сравнению с предыдущим. Решая систему из L линейных уравнений с L неизвестными, находим все необходимые параметры и, следовательно, получаем выражение $\varphi(t)$, приближенно описывающее искомым оригинал функции $w^*(p)$.

Точность полученного решения при одном и том же порядке системы уравнений сильно зависит от выбора точек T_i и точек коллокации p_j . Точки коллокации можно выбрать по-разному. При решении задачи реализован способ, который основан на том, что изображение переменной $t^* = 1/p$. Этот результат переносим на численные значения и получают $p_j = 1/T_j$, то есть точки коллокации назначаем по узлам ломаной. Численный анализ точности решения по методу ломаных и рационального назначения точек коллокации был проведен в работе [9].

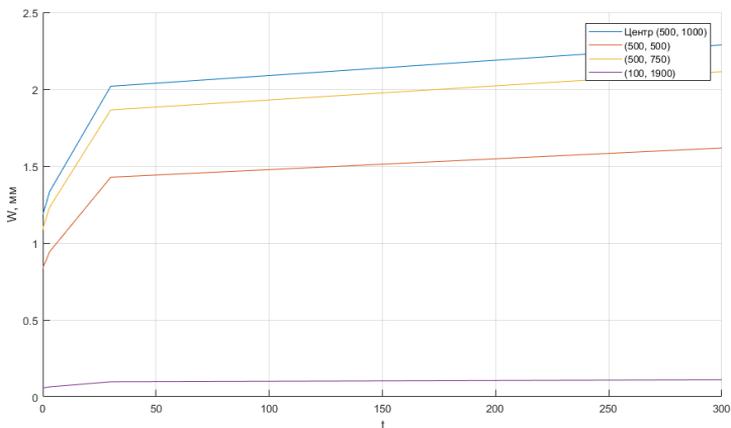


Рис. 3. График изменения во времени прогиба в центре пластины

Из графика видно, что прогиб в центре пластины наибольший по сравнению с остальными точками пластины.

Для решения поставленной задачи разработано приложение, которое аппроксимирует значение прогиба пластины по t в фиксированной точке и отображает график полученной функции. Разработанное программное обеспечение позволит провести прогнозирование во времени напряженно-деформированного состояния вязкоупругой пластины с учетом старения и сделать расчеты надежности и ресурса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Киселев, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.
2. Иванов, В.Н. Вариационные принципы и методы решения задач теории упругости: учеб. пособие / В.Н. Иванов. – М.: Изд-во РУДН, 2004. – 176 с.

3. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В. Карпова, А.М. Масленникова. – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 425 с.
4. Ильюшин, А.А. Труды. Т. 3. Теория термовязкоупругости / А.А. Ильюшин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 288 с.
5. Каюмов, Р.А. Приближенный метод вычисления деформаций ползучести по наследственной теории и сравнение ее с инкрементальной теорией / Р.А. Каюмов, Ф.Р. Шакирзянов, А.В. Бутенко // Известия КГАСУ. – 2014. - №3. – С. 179-185
6. Мальцев, Л.Е. Теория вязкоупругости для инженернов-строителей / Л.Е. Мальцев, Ю.И. Карпенко. – Тюмень: Изд-во «Вектор Бук», 1999. – 240 с.
7. Основы теории упругости: учеб. пособие / В.Н. Барашков [и др.]. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 184 с.
8. Радченко, В.П. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях / В.П. Радченко, М.Н. Саушкин – М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с.
9. Шалабодов В.И. Развитие и приложение метода ломаных к расчету вязкоупругих элементов строительных конструкций: дис. канд. ф-м наук / В.И. Шалабодов; ТюмГАСА. – Тюмень, 1995. – 151 с.
10. Щербо, А.Г. Основы теории упругости и пластичности: учеб.-метод. комплекс / А.Г. Щербо. – Новополюцк: ПГУ, 2008. – 240 с.