Н.Ф. Бельмецев, Д.Д. Кроликова

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 532.546.2

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Аннотация. В статье представлено исследование задачи о форме контура ограничивающего тонкий слой из идеально пластичного материала. То есть, рассматривается свободное растекание пластического слоя между параллельно сближающимися пластинами.

Ключевые слова: группа преобразований, оптимальная система подалгебр, инвариантные решения.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать нелинейное эволюционное уравнение

$$\varphi_t - \frac{\varphi^2}{2}\varphi_{xx} - \varphi(1+\varphi_x^2) = 0, \tag{1}$$

где $y = \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ – это уравнение дуги контура, расположенного в верхней полуплоскости. Впервые, задача о растекании, была поставлена в работах А.А.Ильюшина [1]. Позже уравнение (1) было выведено и получено, отличными друг от друга способами, в работах [1,2], с приведением некоторых частных решений. Исследование уравнения (1) будем проводить в рамках решения нелинейных уравнений в частных производных, вид которых определяется интегрированием некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Симметрии.

Для уравнения (1) найдём локальную группу Ли точечных преобразований. Оператор группы, его первое и второе продолжение имеют вид соответственно

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\underset{1}{X} = X + \varsigma_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_t} + \varsigma_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_x},$$

$$\underset{2}{X} = \underset{1}{X} + \varsigma_{11} \frac{\partial}{\partial \varphi_{xx}} + \varsigma_{12} \frac{\partial}{\partial \varphi_{tx}} + \varsigma_{22} \frac{\partial}{\partial \varphi_{tt}}.$$

По формулам продолжения имеем:

$$\varsigma_1 = D_x\eta - \varphi_x D_x\xi^x - \varphi_t D_x\xi^t, \qquad \varsigma_2 = D_t\eta - \varphi_x D_t\xi^x - \varphi_t D_t\xi^t,$$

$$\varsigma_{11} = D_x\varsigma_1 - \varphi_{xx} D_x\xi^x - \varphi_{xt} D_x\xi^t, \qquad \varsigma_{22} = D_t\varsigma_2 - \varphi_{tt} D_t\xi^t - \varphi_{xt} D_t\xi^x,$$

$$\varsigma_{12} = D_x\varsigma_2 - \varphi_{xx} D_t\xi^x - \varphi_{xt} D_t\xi^t,$$

где используются операторы дифференцирования

$$D_x = \frac{\partial}{\partial t} + \varphi_t\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varphi_{tx}\frac{\partial}{\partial\varphi_x} + \varphi_{tt}\frac{\partial}{\partial\varphi_t}, \qquad D_t = \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_x\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varphi_{tx}\frac{\partial}{\partial\varphi_t} + \varphi_{xx}\frac{\partial}{\partial\varphi_x}.$$

Используя критерий инвариантности [5], получим

$$X_2\left(\varphi_t - \varphi(\varphi_x)^2 - \frac{1}{2}\varphi^2\varphi_{xx} - \varphi\right)\Bigg|_{\varphi_{xx}=\frac{2\varphi(1+\varphi_x^2)-2\varphi_t}{\varphi^2}} = 0,$$

где $t, x, \varphi, \varphi_t, \varphi_x, \varphi_{xx}$ следует рассматривать как независимые координаты в продолженном пространстве. А коэффициенты оператора X зависят только от (t, x, φ). Проведя все необходимые выкладки, получаем следующий результат

$$\begin{gathered}
\eta_t + \varphi_t\eta_\varphi - \varphi_x\xi_t^x - (\varphi_t)^2\xi_\varphi^t - \varphi_t\xi_t^t - \varphi_t\varphi_x\xi_\varphi^x + \frac{1}{2}\varphi^2(\varphi_x)^3\xi_{\varphi\varphi}^x + \varphi^2(\varphi_x)^2\xi_{\varphi\varphi}^x + \\
+\frac{1}{2}\varphi^2\varphi_t(\varphi_x)^2\xi_{\varphi\varphi}^t + 3\varphi\varphi_x\xi_\varphi^x + 3\varphi(\varphi_x)^3\xi_\varphi^x - 6\varphi_x\varphi_t\xi_\varphi^x + 2\varphi_t\varphi\xi_\varphi^t + 2\varphi\varphi_t(\varphi_x)^2\xi_\varphi^t - \\
-2(\varphi_t)^2\xi_\varphi^t + \varphi^2\varphi_x\varphi_{tx}\xi_\varphi^t + \varphi^2\varphi_x\varphi_t - \xi_{x\varphi}^t - 2\eta_\varphi\varphi - 2\eta_\varphi\varphi(\varphi_x)^2 + 4\eta_\varphi\varphi_t + 3\varphi\xi_x^x + \qquad (2) \\
+3\varphi(\varphi_x)^2\xi_x^x - 6\varphi_t\xi_x^x + \varphi^2\varphi_{tx}\xi_x^t - \frac{1}{2}\varphi^2\varphi_x(2\eta_{\varphi x} + \varphi_{\varphi\varphi} - \xi_{xx}^t - 2\xi_\varphi^x) + \frac{1}{2}\varphi^2\varphi_t\xi_{xx}^t - \\
-\frac{1}{2}\varphi^2\eta_{xx} - 2\varphi\varphi_x\eta_x - 2\varphi(\varphi_x)^2\eta_\varphi + 2\varphi(\varphi_x)^2\xi_x^x + 2\varphi(\varphi_x)^3\xi_\varphi^x + 2\varphi\varphi_x\varphi_t\xi_x^t + 2\varphi\varphi_t(\varphi_x)^2 - \xi_\varphi^t - \\
-3\eta(\varphi_x)^2 - 3\eta + 2\eta\frac{\varphi_t}{\varphi} = 0.
\end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть определяющее уравнение имеет вид* $\varphi_t - \frac{\varphi^2}{2}\varphi_{xx} - \varphi(1+\varphi_x^2) = 0,$ *где* $y = \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ *– это уравнение дуги контура, расположенного в верхней полуплоскости. Начальное уравнение в результате действия критерия инвариантности имеет вид (2). Расщипляя по* *производным функции φ получаем следующую линейную однородную систему дифференциальных уравнений в частных производных:*

$$\begin{aligned}
&\xi^t_\varphi = 0\\
&\xi^t_x = 0\\
&4\xi^x_x\varphi - 2\eta_t + \eta_{xx}\varphi^2 - 2\varphi\eta_\varphi - 2\eta = 0\\
&-2\varphi\xi^t_t + \xi^t_{xx}\varphi^3 - 4\eta - 2\xi^t_\varphi\varphi^2 + 4\xi^x_x\varphi = 0\\
&-4\varphi\eta_x - 6\varphi\xi^x_\varphi - 2\eta_{xx}\varphi^2 + \xi^x_{xx}\varphi^2 - 2\xi^x_t = 0\\
&4\varphi^2\xi^t_x + 4\varphi\xi^x_\varphi + 2\xi^t_{\varphi x}\varphi^3 = 0\\
&\varphi\xi^x_{\varphi\varphi} - 2\xi^x_\varphi = 0\\
&\varphi\xi^x_{\varphi\varphi} + 2\xi^x_\varphi = 0\\
&-\eta_{tt}\varphi^3 + 2\varphi(\xi^x_{\varphi x}\varphi^2 - \eta_{tt}\varphi + \eta) = 0
\end{aligned}$$

(3)

и ее решением будет: $\xi^t = \tilde{C}_3 + \tilde{C}_5 e^{-2t}$, $\xi^x = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$, $\eta = \varphi(\tilde{C}_5 e^{-2t} + \tilde{C}_1)$, *где* $\tilde{C}_i$ *– это произвольные константы интегрирования.*

Доказательство. Из системы (3) можно видеть, что ξ^t зависит только от $t \Rightarrow \xi^t = a(\mathrm{t})$. Также, решая одно из получившихся дифференциальных уравнений имеем, что $\xi^x = f_1 + f_2\varphi^3$. Учитывая полученный результат, оставшиеся уравнения системы принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\xi^t = a(\mathrm{t})\\
&\xi^x = f_1 + f_2\varphi^3\\
&4\varphi f_{1,x} + 4\varphi^4 f_{2,x} - 2\eta_t + \eta_{xx}\varphi^2 - 2\varphi\eta_\varphi - 2\eta = 0\\
&-2\varphi a'(\mathrm{t}) - 4\eta + 4\varphi f_{1,x} + 4\varphi^4 f_{2,x} = 0\\
&-4\varphi\eta_x - 18\varphi^3 f_2 - 2\eta_{xx}\varphi^2 - \varphi^2 f_{1,xx} - \varphi^5 f_{2,xx} - 2\varphi f_{1,t} - 2\varphi^3 f_{2,t} = 0\\
&12\varphi^3 f_2 = 0\\
&\eta_{tt}\varphi^3 + 2\varphi(\xi^x_{\varphi x}\varphi^2 - \eta_{tt}\varphi + \eta) = 0
\end{aligned} \qquad (4)$$

Из промежуточных результатов (4) решения системы (3) видно, что $f_1 = 0$, и сразу выражая из последнего уравнения системы (4) η, имеем:

$$
\begin{aligned}
&\xi^{t} = a(\mathrm{t}) \\
&\xi^{x} = f_1(x,\mathrm{t}) \\
&\eta = -\frac{1}{2}\varphi a'(\mathrm{t}) + \varphi f_{1,x} \\
&\varphi a''(\mathrm{t}) + 2\varphi \mathrm{a}'(\mathrm{t}) = 2\varphi f_{1,xt} - \varphi^3 f_{1,xxx} \\
&-2\varphi^3 f_{1,xxx} - 5\varphi^2 f_{1,xx} - 2\varphi f_{1,\mathrm{t}} = 0 \\
&\varphi^3 a'''(\mathrm{t}) - \varphi^2 a'(\mathrm{t}) = 2\varphi^3 f_{1,xtt} - 2\varphi^2 f_{1,x}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Четвертое уравнение промежуточного результата (4.1) разделим на φ:

$$a''(\mathrm{t}) + 2a'(\mathrm{t}) = 2 f_{1,xt} - \varphi^2 f_{1,xxx}. \tag{5}$$

Видим, что $f_{1,xxx} = 0$, так как $\varphi = const \Rightarrow f_1 = g_1(\mathrm{t})x^2 + g_2(\mathrm{t})x + g_3(\mathrm{t})$, тогда уравнение (5) примет вид: $a''(\mathrm{t}) + 2a'(\mathrm{t}) = 2 f_{1,xt}$.Учитывая этот результат имеем

$$\begin{matrix} f_{1,t} = 0 \\ f_{1,xx} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} g_1(\mathrm{t}) = 0 \\ g_2(\mathrm{t}) = const \Rightarrow \xi^{x} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2. \\ g_3(\mathrm{t}) = const \end{matrix}$$

Далее решая дифференциальное уравнение $a''(\mathrm{t}) + 2a'(\mathrm{t}) = 0$, получаем $a(\mathrm{t}) = \tilde{C}_3 + \tilde{C}_4 t + \tilde{C}_5 e^{-2t}$. Подставляя $a(\mathrm{t})$ в четвертое уравнение системы (4.1) видим, что $\tilde{C}_4 = 0$, тогда $\xi^{t} = \tilde{C}_3 + \tilde{C}_5 e^{-2t}$. Тогда, учитывая полученные результаты выше, получаем решение системы (3):

$$\xi^{t} = \tilde{C}_3 + \tilde{C}_5 e^{-2t},\ \xi^{x} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2,\ \eta = \varphi(\tilde{C}_5 e^{-2t} + \tilde{C}_1).$$

□

3. Оптимальные системы подалгебр и инвариантные решения.

Будем рассматривать конечномерную алгебру Ли, допускаемую уравнением (1). Базис допускаемой алгебры образуют следующие операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = e^{-2t}\frac{\partial}{\partial t} + \varphi e^{-2t}\frac{\partial}{\partial \varphi}, X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + \varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}, X_4 = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{6}$$

Таблица коммутаторов алгебры выглядит следующим образом:

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-2X_2$	0	0
X_2	$2X_2$	0	0	0
X_3	0	0	0	$-X_4$
X_4	0	0	X_4	0

Автоморфизмом алгебры является, например, преобразование:

$$\bar{X}_1 = X_1 + t_1 X_3,\ \bar{X}_2 = X_1 + t_2 X_4,\ \bar{X}_3 = X_3 + t_3 X_4,\ \bar{X}_4 = X_4. \tag{7}$$

с произвольными параметрами t_i. Рассмотрим выкладки для первого оператора (7). Построим внутренние дифференцирования, отвечающие базисным операторам X_i. Результатом их действие на произвольный элемент алгебры $X = \varepsilon^i X_i \in L$ получается $\left[X_1, X\right] = -2\varepsilon^2 X_2$. Внутренний автоморфизм, порождаемый внутренним дифференцированием, вычисляется следующим образом:

$$\frac{d\bar{X}}{dt_1} = \left[X_1, \bar{X}\right] = -2\bar{\varepsilon} X_2, \quad \bar{\varepsilon}^i\Big|_{t=0} = \varepsilon^i, \quad i = 1,...,4. \tag{8}$$

То есть достаточно вычислить внутренние автоморфизмы, порождаемые базисными элементами алгебры. Далее приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных элементах X_i в обеих частях равенства (8), получаем систему уравнений на координаты преобразованного оператора $\tilde{X}$:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^1}{t_1} = 0,\ \frac{d\bar{\varepsilon}^2}{t_1} = -2\bar{\varepsilon}^2,\ \frac{d\bar{\varepsilon}^3}{t_1} = 0,\ \frac{d\bar{\varepsilon}^4}{t_1} = 0,\ \bar{\varepsilon}^i\Big|_{t=0} = \varepsilon^i,\quad i = 1,...,4.$$

Под действием внутреннего автоморфизма преобразования координат оператора X, соответствующего элементу X_1, имеет вид:

$$A_1(\mathrm{t}_1):\ \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1,\ \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2 e^{-2t},\ \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3,\ \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^4.$$

Порождаемые остальными базисными элементами внутренние автоморфизмы, вычисляются аналогичным образом и в результате получаем систему внутренних автоморфизмов:

$$A_1:\bar{\varepsilon}^2=\varepsilon^2 e^{-2t_1}$$
$$A_2:\bar{\varepsilon}^2=2\varepsilon^1 t_2+\varepsilon^2$$
$$A_3:\bar{\varepsilon}^3=-\varepsilon^4 t_3+\varepsilon^3$$
$$A_4:\bar{\varepsilon}^4=\varepsilon^3 t_4+\varepsilon^4$$

Найдем оптимальную систему подалгебр, считая, что произвольный оператор алгебры представим в виде разложения по базису $X=\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^i X_i$. Рассмотрим вектор координат такого оператора в алгебре $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. Подействуем на него внутренним автоморфизмом A_1 и получим $(\alpha_1,\alpha_2 e^{-2t},\alpha_3,\alpha_4)$. Здесь возможно два случая: если $\alpha_1=0$, то $(\alpha_1,0,\alpha_3,\alpha_4)$ и если $\alpha_1\neq 0$, то $(\alpha_1,\pm 1,\alpha_3,\alpha_4)$.

В случае $\alpha_1\neq 0$, вектор $(\alpha_1,\pm 1,\alpha_3,\alpha_4)$, под действием внутреннего автоморфизма A_2, примет вид $(\gamma,0,\alpha_3,\alpha_4)\to(1,0,\alpha_3,\alpha_4)$. И на данном этапе имеем три вектора:

$$(\alpha_1,0,\alpha_3,\alpha_4),\quad (1,0,\alpha_3,\alpha_4),\alpha_1\neq 0,\quad (0,\pm 1,\alpha_3,\alpha_4),\alpha_1=0.$$

Подействовав на вектора автоморфизмами A_3 и A_4, получаем:

$$(\alpha_1,0,0,1),\alpha_1\neq 0$$
$$(1,0,0,\gamma),\gamma\neq 0$$
$$(0,\pm 1,0,\gamma),\gamma\neq 0$$
$$(1,0,\alpha_3,0),\alpha_3\neq 0$$
$$(0,\pm 1,\alpha_3,0),\alpha_3\neq 0$$
$$(1,0,\alpha_3,0),\alpha_3\neq 0$$
$$(0,0,1,0).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение. *Оптимальную систему одномерных подалгебр алгебры с* *базисом (6) образуют подалгебры* $\langle \alpha_1 X_1 + X_4 \rangle, \langle X_1 + \gamma X_4 \rangle, \langle \pm X_2 + \gamma X_4 \rangle,$ $\langle X_1 + \alpha_3 X_3 \rangle, \langle X_3 \rangle, \langle X_1 + \alpha_3 X_3 \rangle, \langle \pm X_2 + \alpha_3 X_3 \rangle.$

Основываясь на результатах изложенных выше, получаем, что оптимальная система состоит из следующих элементов:

$$B_1 = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x},$$

$$B_2 = e^{-2t} \frac{\partial}{\partial t} + \varphi e^{-2t} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial}{\partial x},$$

$$B_3 = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x},$$

$$B_4 = \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + x \frac{\partial}{\partial x},$$

$$B_5 = e^{-2t} \frac{\partial}{\partial t} + \varphi e^{-2t} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha_3 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha_3 x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Построим инвариантные решения относительно групп Ли с операторами B_2 и B_4.

1) $B_2 = e^{-2t} \frac{\partial}{\partial t} + \varphi e^{-2t} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial}{\partial x}$

Составляем характеристическое уравнение $\frac{dt}{e^{-2t}} = \frac{d\varphi}{\varphi e^{-2t}} = \frac{dx}{\gamma}$ и попарно интегрируем, получаем универсальный инвариант $I = \left\{ \frac{e^{2t}}{2} - \frac{x}{\gamma}, \varphi e^{-t} \right\}$.

Используя универсальный инвариант, можем записать представление B_2 – инвариантного решения в виде $\varphi = e^t f(\lambda)$, где $\lambda = \frac{e^{2t}}{2} - \frac{x}{\gamma}$. После подстановки его в уравнение (1) получаем фактор-уравнение в виде:

$$f(\lambda) f''(\lambda) - 2 f'^2(\lambda) = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение является уравнением

Лиувилля второго порядка. В результате решения получаем: $f = \dfrac{1}{C_1\lambda + C_2}$.

Подставляем этот результат в равенство $\varphi = e^t f(\lambda)$:

$$\varphi(x,\mathrm{t}) = \frac{2\gamma e^t}{C_1(\gamma e^{2t} - 2x) + \mathrm{C}_2},$$

что и является решением уравнения (1).

2) $B_4 = \varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + x\dfrac{\partial}{\partial x}$

Составляем характеристическое уравнение $\dfrac{dt}{0} = \dfrac{dx}{x} = \dfrac{d\varphi}{\varphi}$ и попарно интегрируем, получаем универсальный инвариант $I = \left\{t, \dfrac{\varphi}{x}\right\}$.

Используя универсальный инвариант, можем записать представление B_4 – инвариантного решения в виде $\varphi = xf(\lambda)$, где $\lambda = t$. После подстановки его в уравнение (1) получаем фактор-уравнение в виде:

$$f'(\lambda) - f(\lambda) + f^3(\lambda) = 0$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли. В результате решения получаем: $f = \pm\sqrt{(C_1^{e^{-2t}} - 1)}$. Подставляем этот результат в равенство $\varphi = xf(\lambda)$:

$$\varphi(x,t) = \pm x\sqrt{(C_1^{e^{-2t}} - 1)},$$

что и является решением уравнения (1).

В результате проведенного исследования была найдена основная допускаемая группа Ли преобразований уравнения (1), построена оптимальная система одномерных подалгебр, позволяющая построить все инвариантные решения ранга один данного уравнения, некоторые из которых представлены выше. Данные точные решения уравнения (1) обладают симметрией и полезны для проверки численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 265–288.
2. Безухов В.Н. Об осадке пластического слоя некруговой формы в плане. Канд.
   дисс., М., МГУ, 1955, 78с.
3. Кийко И.А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 1. С. 15–26.
4. С.В. Головин, А.А.Чесноков. Групповой анализ дифференциальных уравнений: Учебное пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2008. – 113 с.
5. Л.В. Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений: Учебник. – М.: Издательство сибирского отделения АН СССР, 1962. – 242 с.