Г.М. Джайков
Нукусский филиал Ташкентского Университета
Информационных Технологий

УДК 517.946

ВОЛЬТЕРРОВСКИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Рассматривается задача интегральной геометрии если известны интегралы от нее по семейству конических поверхностей в R^3. Получено аналитическое представление решения поставленной задачи. Представлена оценки решения задачи в соболевских пространствах.

Ключевые слова: задачи интегральной геометрии, преобразование Фурье, формула обращения, устойчивость.

1. Введение

В настоящей главе рассматривается задача восстановления функции, если известны интегралы от нее по семейству конических поверхностей в R^3. Задача о восстановлении функции, заданной интегралами на $n-$ параметрическом семействе конических поверхностей с вершинами, пробегающими фиксированную координатную ось, была рассмотрена С. В. Успенским [1]. В операторной форме аналогичные задачи изучались А. Л. Бухгеймом [2]. В статье [3] рассматривается задача интегральной геометрии для семейства конусов в $n-$ мерном пространстве.

Обозначим $x=\left(x_1,x_2\right)$, $\xi=\left(\xi_1,\xi_2\right)$, $y\in R^1$, $\eta\in R^1$, $M\left(x,y\right)$ конус с вершинами в точках $\left(x,y\right)$, которые определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{2}\left(x_k-\xi_k\right)^2=\left(y-\eta\right)^2, \quad 0\le\eta\le y$$

Постановка задачи. Рассмотрим операторное уравнение

$$\iint\limits_{M(x,y)} g\left(x,\xi\right)u\left(\xi,\eta\right)dk=f\left(x,y\right), \tag{1}$$

где $dk-$ элемент площади поверхности M .

Обозначим через U класс функций $u(x,y)$, которые всюду имеют все непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно и финитна в слое Ω.

Введем функцию

$$\varphi_2(x(y-\eta)) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{R^2} e^{-i\lambda x}\frac{J_0(\lambda(y-\eta))}{1+|\lambda|^2}d\lambda$$

где $J_0 -$ функция Бесселя нулевого порядка, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

2. Основная часть

Теорема. Пусть $g(x,\xi) = \dfrac{1}{|x-\xi|}$. Тогда решение уравнение (1) в классе U единственно и имеет место представление

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^y\int_{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial\eta^2} - \Delta_\xi\right)\cdot\left(E-\Delta_\xi\right)f(\xi,\eta)\varphi_2((x-\xi)(y-\eta))d\xi d\eta$$

и выполняется неравенство

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \le C_1\|f(x,y)\|_{W_2^{3,3,3}}$$

где $\Delta_\xi = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}$, $C -$некоторая константа.

Доказательство. Уравнение (1) запишем в виде

$$\int_0^y (y-\eta)^{-1}\left(\int_{S(r)} u(\xi,\eta)ds\right)d\eta = f_1(x,y), \tag{2}$$

$S(r) -$сфера радиуса r . $ds = rd\omega$, $d\omega -$площадь поверхности единичной сферы ω, $f_1(x,y) = f(x,y)/\sqrt{2}$, $\xi_i = x_i + \alpha_i r$, $i = 1,2$, $(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_i -$единичный вектор.

Уравнение (2) в этих обозначениях имеет вид:

$$\int_0^y\left(\int_\omega u(x_1+\alpha_1 r, x_2+\alpha_2 r, \eta)d\omega\right)d\eta = f_1(x,y), \tag{3}$$

Применим к (3) преобразование Фурье по x:

$$\hat{f}_1(\lambda, y) = \int_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)\left[\int_\omega e^{ir\langle\lambda,\alpha\rangle} d\omega\right] d\eta, \tag{4}$$

Рассмотрим внутренний интеграл из (4)

$$I_0(r,\lambda) = \int_\omega e^{ir\langle\lambda,\alpha\rangle} d\omega$$

Пусть $\lambda = |\lambda| \cdot \beta$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ - единичный вектор. Вектор β можно без потери общности выбрать совпадающим по направлению с α_1.

$$I_0(r,\lambda) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \frac{e^{ir|\lambda|\alpha_1}}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} d\alpha_1, \tag{5}$$

Используя представление цилиндрических функций для (5) получим

$$I_0(r,\lambda) = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) J_0(|\lambda| r),$$

Таким образом интеграл (4) представим в виде

$$\hat{f}_1(\lambda, y) = 2\pi \int_0^y \hat{u}(\lambda,\eta) J_0(|\lambda| r) d\eta$$

Применяем к обеим частям преобразование Лапласа по y

$$\tilde{\hat{f}}_1(\lambda, y) = 2\pi I_1(\lambda, p) \tilde{\hat{u}}(\lambda, p), \tag{6}$$

где

$$I_1(\lambda, p) = \int_0^\infty e^{-pr} J_0(r|\lambda|) dr = \frac{1}{\sqrt{p^2 + |\lambda|^2}}$$

Тогда уравнение (6) имеет вид

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) = \frac{1}{2\pi}\left(p^2 + |\lambda|^2\right) \cdot \frac{\tilde{\hat{f}}_1(\lambda, p)}{\sqrt{p^2 + |\lambda|^2}} \tag{7}$$

Применим обратное преобразование Лапласа по p

$$\hat{u}(\lambda, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^y \left(\frac{d^2}{d\eta^2} + |\lambda|^2\right) \hat{f}_1(\lambda,\eta) J_0(|\lambda|(y-\eta)) d\eta, \tag{8}$$

Известно, что

$$J_0\left(|\lambda|(y-\eta)\right) = |\lambda|^{-\frac{1}{2}}(y-\eta)^{-\frac{1}{2}}\varphi_1\left(|\lambda|(y-\eta)\right)$$

где $\varphi_1(\cdot)$ – ограниченная функция, $\varphi_1(0) \neq 0$.

Уравнение (8) запишем в следующем виде

$$\hat{u}(\lambda, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^y \left(\frac{\partial}{\partial\eta^2} + |\lambda|^2\right)\cdot\left(E + |\lambda|^2\right)\hat{f}_1(\lambda,\eta)\frac{J_0\left(|\lambda|(y-\eta)\right)}{1+|\lambda|^2}d\eta, \qquad (9)$$

Применим к (9) обратное преобразование Фурье по λ.

$$u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^y\int_{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial y^2} - \Delta_\xi\right)\cdot\left(E - \Delta_\xi\right)f(\xi,\eta)\varphi_2\left((x-\xi)(y-\eta)\right)d\xi d\eta, \qquad (10)$$

где $\Delta_\xi = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}$.

Из (10) и условия $\sup pu \subset \Omega$ вытекает, что для нахождения функции $u(x,y)$ значения правой части уравнения (1), т.е. функции $f(x,y)$ вне слоя Ω не используются.

Из (7) имеем

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{p^2 + |\lambda|^2}\cdot\tilde{\hat{f}}(\lambda, p)$$

Из последнего равенства получаем

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\left(1 + p + |\lambda|\right)\tilde{\hat{f}}(\lambda, p)$$

Таким образом, верна оценка

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left|\tilde{\hat{u}}(\lambda, p)\right|^2 dpd\lambda \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left|\left(1 + p + |\lambda|\right)\tilde{\hat{f}}(\lambda, p)\right|^2 dpd\lambda$$

Используя свойства дифференцирования преобразований Лапласа и Фурье, неравенств треугольника для норм и условия наложенные на функцию u, получим оценку

$$\left\|u(x,y)\right\|_{L_2} \leq C_1\left\|f(x,y)\right\|_{W_2^{3,3,3}}$$

3. Заключение

Изучаются задачи интегральной геометрии если известны интегралы от нее по семейству конических поверхностей в R^3. Получено аналитическое представление решения поставленной задачи. Представлена оценки решения задачи в соболевских пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Успенский С. В. О восстановлении функции, заданной интегралами по одному семейству конических поверхностей // Сиб. мат. журн. – 1977. – Т. 18, № 3. – С. 675-684.

2. Бухгейм А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983, – 208 с.

3. Бегматов Акр. Х. Задача интегральной геометрии для семейства конусов в *n*-мерном пространстве. *Сиб. Мат. Жур.* – 1996. – Т. 37, № 3. – С. 500-505.