

ВОЛЬТЕРРОВСКИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА СЕМЕЙСТВЕ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ

Аннотация. Изучается задача интегральной геометрии в полосе на семействе отрезков прямых с заданной весовой функцией. Получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций. Представлена оценки решения задачи в соболевских пространствах. Для численного решения поставленных задач построены алгоритмы.

Ключевые слова: задачи интегральной геометрии, преобразование Фурье, формула обращения, устойчивость.

1. Введение

В настоящей работе изучаются задача интегральной геометрии в полосе на семействе отрезков прямых с заданной весовой функцией. Во второй части работы получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций [1, 2]. Представлены оценки решения задачи в соболевских пространствах, откуда следует ее слабая некорректность.

В третьей части исследуются полученные теоретические результаты экспериментальными данными с использованием программ C++. Для решения поставленных задач построены алгоритмы. Приводятся численные и графические результаты применения данных алгоритмов к решению поставленной задачи.

Обозначим $\Omega = \{(x, y) : x \in R^1, 0 \leq y \leq H\}$. Для всех (x, y) , лежащих в полосе Ω . $\Gamma(x, y) = \{(\xi, \eta) : x - \xi = y - \eta, 0 \leq \eta \leq y \leq H\}$.

Постановка задачи. Найти функцию двух переменных $u(x, y)$ из уравнений (1), если известны интегралы от нее с заданной весовой функцией $g(x, \xi)$ на семействе кривых $\{\Gamma(x, y)\}$.

$$\int_{\Gamma(x,y)} g(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)ds = f(x,y), \quad (1)$$

2. Основная часть

Пусть $g(x,\xi) = x - \xi$.

Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\int_0^y u(x-h,\eta)(y-\eta)d\eta = f(x,y), \quad (2)$$

Применим к обеим частям уравнения (2) преобразование Фурье по переменной x :

$$\int_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)(y-\eta)e^{i\lambda(y-\eta)}d\eta = \hat{f}(\lambda,y). \quad (3)$$

Применим к последнему уравнению преобразование Лапласа по переменной y :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\lambda,p) &= \int_0^{+\infty} e^{-py} \int_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)(y-\eta)e^{i\lambda(y-\eta)}d\eta dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \tau \cdot e^{-(p-i\lambda)\tau} d\tau \cdot \int_0^{+\infty} \hat{u}(\lambda,\eta)e^{-p\eta}d\eta = I(\lambda,p) \cdot \tilde{u}(\lambda,p) \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{u}(\lambda,p)$ и $\tilde{f}(\lambda,p)$ преобразование Лапласа функции $\hat{u}(\lambda,y)$, $\hat{f}(\lambda,y)$ соответственно.

$$I(\lambda,p) = \int_0^{+\infty} \tau \cdot e^{-(p-i\lambda)\tau} d\tau = \frac{1}{(p-i\lambda)^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

$$\tilde{u}(\lambda,p) = (p-i\lambda)^2 \tilde{f}(\lambda,p).$$

или

$$\tilde{u}(\lambda,p) = (p^2 - 2pi\lambda - \lambda^2) \tilde{f}(\lambda,p). \quad (4)$$

Применив к (4) обратное преобразование Лапласа и Фурье по переменной p и λ , получим:

$$u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \quad (5)$$

Отсюда следует следующая оценка

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leq C \|f(x, y)\|_{W_2^{2,2}}$$

где C – некоторая константа.

Полученные теоретические результаты во второй части исследуем экспериментальными исследованиями с использованием программы C++.

Введем равномерную сетку в прямоугольной области $D = [a, b] \times [c, d]$. Отыскиваем приближенные решения задачи на этом прямоугольнике. Способ решения основан на применении метода конечно-разностных схем для численного дифференцирования в частных производных. Разобьем область D на n_x, n_y частей соответствующим осям x, y .

Схема алгоритма решения задачи такова:

Шаг 1. Разобьем отрезок $[a, b]$ на оси Ox и $[c, d]$ на оси Oy на n_x и n_y частей соответственно. $x_i = a + ih_x$, $y_j = b + jh_y$

Шаг 2. Приближения функций $u(x_i, y_j)$ будем обозначать u_{ij}^{Π} .

$$u_{ij}^{\Pi} = \frac{f_{ij+1} - 2f_{ij} + f_{ij-1}}{h_y^2} + \frac{f_{i+1j+1} - f_{i-1j+1}}{2h_x h_y} - \frac{f_{i+1j-1} - f_{i-1j-1}}{2h_x h_y} + \frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{h_x^2}$$

Шаг 3. Будем вычислять значение погрешности δ следующим образом:

Обозначим: i - номер строки, j - номер столбца.

$$(\delta)_i = \sqrt{\frac{1}{n_x - 1} \sum_{j=1}^{n_y - 1} |u_{ij}^T - u_{ij}^{\Pi}|^2} \quad i = \overline{1, n_x - 1}, \quad (6)$$

где u_{ij}^T – точное решение, u_{ij}^{Π} – приближенное решение.

Пример. В частности, область D можем записать в следующем образом, если заданы крайние точки отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$:

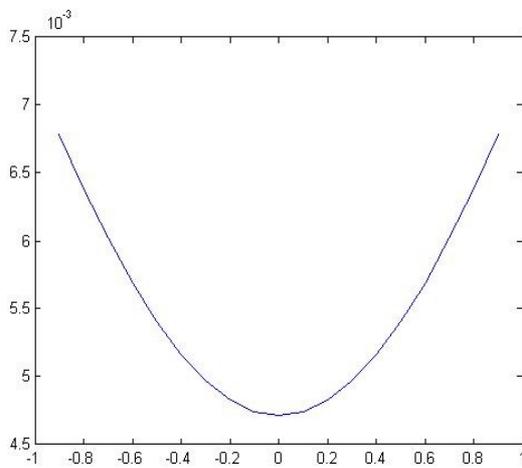
$$D = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, x_i = -1 + ih_x, y_j = jh_y\}.$$

В качестве тестового примера для сравнения с результатами численного расчета используем следующую функцию

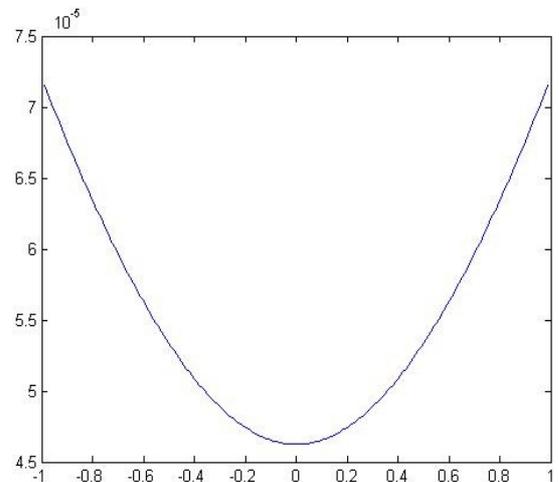
$$u(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 2y), \quad (7)$$

Функция $f(x, y)$ получаем из формулы (2). Массивы значений $f(x_i, y_j) = f_{ij}$ использовались определения приближенные значений функции u_{ij}^{Π} и сравнения с аналитическими значениями u_{ij}^T .

Чтобы проиллюстрировать достигаемую точность вычисления, покажем погрешности δ_i на рисунке 2 с шагами $h = 0.1$ и $h = 0.01$.



а)



б)

Рис. 1. Изменение погрешности $(\delta)_i$ с шагами а) $h_x = h_y = 0.1$, б)

$$h_x = h_y = 0.01$$

3. Заключение

В работе рассматривалась задача интегральной геометрии в полосе на семействе отрезков прямых с заданной весовой функцией. В работе получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций. Представлены оценки решения задачи в соболевских пространствах, откуда следует ее слабая некорректность.

Далее исследовались полученные теоретические результаты экспериментальными данными с использованием программ C++. Для решения

поставленной задачи построен алгоритм. Приводятся графические результаты применения данных алгоритмов к решению поставленной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бегматов А. Х. Линейная задача интегральной геометрии с гладкими весовыми функциями и возмущением / А. Х. Бегматов, Г. М. Джайков // Владикавказский математический журнал. - 2015. - Т. 17, вып. 3. - С. 14-22.

2. Begmatov A. H. Numerical recovery of function in a strip from given integral data on linear manifolds / A. H. Begmatov, G. M. Djaykov // 11 International forum on strategic technology (IFOST 2016) : proc., Novosibirsk, 1–3 June 2016. – Novosibirsk : NSTU, 2016. – Pt. 1. – P. 478–483.