Г.М. Джайков
Нукусский филиал Ташкентского Университета Информационных Технологий

УДК 517.946

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Аннотация. Рассматривается задача интегральной геометрии в полосе на семействе отрезков прямых с заданной весовой функцией. Получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций и представлена оценки решения задачи в соболевских пространствах, откуда следует ее слабая некорректность. Для численного решения поставленных задач построены алгоритмы и точность формулы обращении проверяется с численному методами.

Ключевые слова: задачи интегральной геометрии, преобразование Фурье, формула обращения, устойчивость.

1. Введение

Задачами интегральной геометрии вольтерровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений Вольтерра в смысле определения, данного Лаврентьевым [1].

Вопросы единственности решения плоской задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением рассматривались в статье [2].

В работе изучаются задачи интегральной геометрии в полосе на семействе отрезков прямых со специальной весовой функцией. Получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций. Представлены оценки решения задачи в соболевских пространствах, откуда следует ее слабая некорректность.

Постановка задачи. Восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если известны интегралы от нее с заданной весовой функцией $g(x,\xi)$ на семействе кривых $\{\Gamma(x,y)\}$:

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} g(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi = f(x,y) \tag{1}$$

где $g(x,y,\xi,\eta)$ – заданная весовая функция, функция $f(x,y)$ считается известной в полосе L_H, $L_H = \{(x,y): x \in R^1, 0 \le y \le H\}$, $\Gamma(x,y)$ – семейство полуокружностей:

2. Основная часть

Пусть функция $f(x,y)$ известна всюду в полосе L_H, весовая функция $g(x,y,\xi,\eta)$ имеет вид $g(x,\xi) = e^{-(x-\xi)}$.

Запишем уравнение (1) для весовой функции $g_2(x,\xi)$ в виде:

$$\int\limits_0^y u(x-h,\eta)e^{-(y-\eta)}d\eta = f(x,y), \tag{2}$$

Применим к (2) преобразование Фурье по x:

$$\int\limits_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)e^{i\lambda(y-\eta)-(y-\eta)}d\eta = \hat{f}(\lambda,y). \tag{3}$$

Применим к уравнению (3) преобразование Лапласа по y:

$$\tilde{\hat{f}}(\lambda,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-py}\int\limits_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)e^{i\lambda(y-\eta)-(y-\eta)}d\eta dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1-i\lambda)\tau}d\tau \cdot \int\limits_0^{+\infty} \hat{u}(\lambda,\eta)e^{-p\eta}d\eta = I(\lambda,p)\cdot\tilde{\hat{u}}(\lambda,p)$$

где

$$I(\lambda,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1-i\lambda)\tau}d\tau = \frac{1}{p+1-i\lambda},\ \mathrm{Re}[p+1] > 0.$$

Таким образом,

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda,p) = (p+1-i\lambda)\tilde{\hat{f}}(\lambda,p). \tag{4}$$

Применим к (4) обратное преобразование Лапласа по p. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\hat{u}(\lambda, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + 1 - i\lambda\right)\hat{f}(\lambda, y),$$

Применим к этому уравнению преобразование Фурье по переменной λ:

$$u(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + f(x, y). \tag{5}$$

Исходя из формулы (5) имеет место следующая оценка

$$\left\| u(x, y) \right\|_{L_2} \le C \left\| f(x, y) \right\|_{W_2^{1,1}},$$

где C - некоторая константа.

Перейдем к описанию численного алгоритма рассматриваемой задачи. Поскольку уравнений (5) участвуют частные дифференцирования первого порядка то для приближенного значения можно использовать следующие разностные отношения:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \approx \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2h_x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \approx \frac{f_{ij+1} - f_{ij-1}}{2h_y}, \tag{6}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \approx \frac{f_{i+1j} - f_{ij}}{h_x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \approx \frac{f_{ij+1} - f_{ij}}{h_y},$$

Так как шаг задания сеточной функции постоянный $h = const$, то для вычисления производной внутри сетки выбираем формулы, имеющие второй порядок аппроксимации относительно шага h. Необходимо подчеркнуть, что формул (6) справедливы для случая равномерной сетки; применение их на произвольной неравномерной сетке для первой производной приводит к низкой точности $O(h)$, а для второй производной – к грубой ошибке.

Заменяя производные симметричными конечно-разностными отношениями будем иметь

$$u_{ij}^{\Pi} = \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2h_x} + \frac{f_{ij+1} - f_{ij-1}}{2h_y} + f_{ij}. \tag{7}$$

Погрешность определяется по формулам:

$$(\delta)_i = \sqrt{\frac{1}{nx-1}\sum_{j=1}^{ny-1}\left|u_{ij}^{T} - u_{ij}^{\Pi}\right|^2} \quad i=\overline{1,n_x-1}, \tag{8}$$

Пример. В частности, область D можем записать в следующим образом, если заданы крайние точки отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$:

$$D=\left\{-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ x_i=-1+ih_x,\ y_j=jh_j\right\}.$$

В качестве тестового примера для сравнения с результатами численного расчета используем следующую функцию

$$u(x,y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right), \tag{9}$$

Функция $f(x,y)$ получаем из формулы (2).

Подсчитаем искомые значения по формуле (7). Погрешности вычисления представим на рисунке 1. На основе полученных приближенных значений можно заключить, что в вычислениях ожидается два верных цифр после запятой при $h_x=h_y=0.1$, четыре нулей после запятой при $h_x=h_y=0.01$.

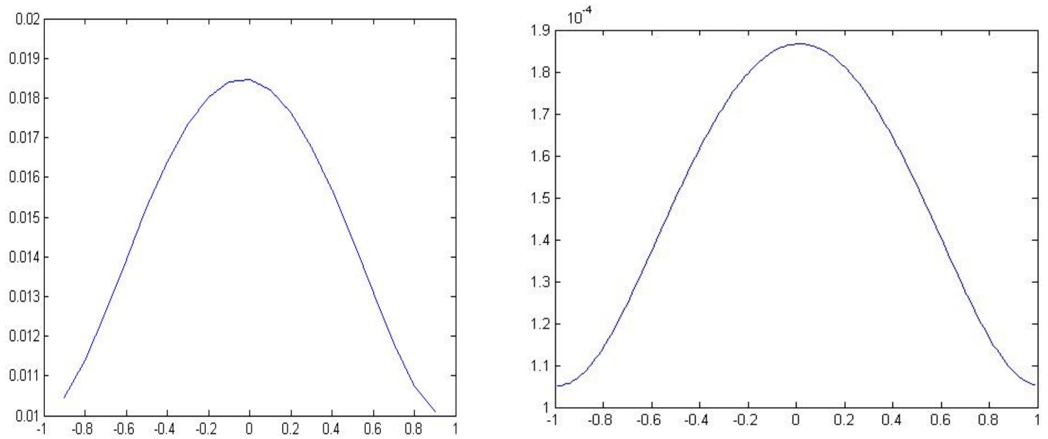

Рис.1. Изменение погрешности $(\delta)_i$ с шагами а) $h_x=h_y=0.1$, б) $h_x=h_y=0.01$

3. Заключение

В работе рассматривалась задача интегральной геометрии в полосе на семействе отрезков прямых с экспоненциальной весовой функцией. В работе получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций. Представлены оценки решения задачи в соболевских пространствах, откуда следует ее слабая некорректность.

Далее исследовались полученные теоретические результаты экспериментальными данными с использованием программ C++. Для решения поставленной задачи построен алгоритм. Приводятся графические результаты применения данных алгоритмов к решению поставленной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М. М. В кн.: Междунар. Мат. конгресс. Ницца, 1970. М.: Наука, 1972.

2. Лаврентьев М.М. Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением. // Сиб. Мат. Журн. – 1996. – Т.37. № 4. – С. 851-857.