Е.А. Дмитриева, Д.В. Шармин
Тюменский государственный университет, г. Тюмень
УДК 514.7

ВЫВОД ДЕРИВАЦИОННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В (n+2)-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. В статье получены деривационные формулы для случая двумерной поверхности в $(n+2)$-мерном евклидовом пространстве. Этот результат позволяет перейти к исследованию различных свойств двумерных поверхностей в E^{n+2}.

Ключевые слова: двумерная поверхность, коэффициенты кручения поверхности, квадратичные формы поверхности, деривационные формулы.

Основные определения. Рассмотрим двумерную поверхность F^2 класса C^3, заданную в $(n+2)$-мерном евклидовом пространстве вектор-функцией:

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2) \in C^3. \tag{1}$$

Пусть $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$ – единичные взаимно перпендикулярные, нормальные к двумерной поверхности векторные поля. Будем считать, что вектор-функции $\vec{m}_\alpha(u_1, u_2), \alpha = 1, \dots, n$ принадлежат классу регулярности C^2.

Поверхность F^2 имеет одну первую квадратичную форму и n вторых квадратичных форм [1]. Будем использовать следующие обозначения для коэффициентов первой и вторых квадратичных форм поверхности F^2:

1) $g_{ij} = \vec{r}_{u_i} \cdot \vec{r}_{u_j}$ – коэффициенты первой квадратичной формы;

2) $b_{ij,k} = \vec{r}_{u_i u_j} \cdot \vec{m}_k = -\vec{r}_{u_i} \cdot \vec{m}_{k u_j}$ – коэффициенты второй квадратичной формы, соответствующей вектору $\vec{m}_k$;

где $i = 1,2; j = 1,2; k = \overline{1,n}$.

Для поверхностей, коразмерность которых больше 1, можно ввести понятие коэффициентов кручения [3]. В частности, для нашего случая (коразмерность поверхности равна 2), можно дать следующее определение.

Определение 1. Коэффициенты $\alpha_{ij} = \vec{m}_{iu_1} \cdot \vec{m}_j$ и $\beta_{ij} = \vec{m}_{iu_2} \cdot \vec{m}_j$ $i, j = 1,2, \dots, n$ называются коэффициентами кручения поверхности (1) при заданном ортонормированном базисе нормального пространства.

Введем на поверхности (1) полугеодезическую систему координат. Тогда ее первая квадратичная форма будет иметь вид [2]:

$$ds^2 = du_1^2 + G(u_1, u_2) du_2^2 \tag{2}$$

Постановка задачи. Для поверхностей в E^{n+2} деривационные формулы выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}
\vec{r}_{u_1u_1} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_{u_2} + \lambda_1^1 \vec{m}_1 + \lambda_1^2 \vec{m}_2 + \dots + \lambda_1^n \vec{m}_n, \\
\vec{r}_{u_1u_2} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_{u_2} + \lambda_2^1 \vec{m}_1 + \lambda_2^2 \vec{m}_2 + \dots + \lambda_2^n \vec{m}_n, \\
\vec{r}_{u_2u_2} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_{u_2} + \lambda_3^1 \vec{m}_1 + \lambda_3^2 \vec{m}_2 + \dots + \lambda_3^n \vec{m}_n, \\
\vec{m}_{1u_1} = \alpha_1^{(1)} \vec{r}_{u_1} + \beta_1^{(1)} \vec{r}_{u_2} + \alpha_{11} \vec{m}_1 + \alpha_{12} \vec{m}_2 + \dots + \alpha_{1n} \vec{m}_n, \\
\vec{m}_{2u_1} = \alpha_2^{(1)} \vec{r}_{u_1} + \beta_2^{(1)} \vec{r}_{u_2} + \alpha_{21} \vec{m}_1 + \alpha_{22} \vec{m}_2 + \dots + \alpha_{2n} \vec{m}_n, \\
\dots \\
\vec{m}_{nu_1} = \alpha_n^{(1)} \vec{r}_{u_1} + \beta_n^{(1)} \vec{r}_{u_2} + \alpha_{n1} \vec{m}_1 + \alpha_{n2} \vec{m}_2 + \dots + \alpha_{nn} \vec{m}_n, \\
\vec{m}_{1u_2} = \alpha_1^{(2)} \vec{r}_{u_1} + \beta_1^{(2)} \vec{r}_{u_2} + \beta_{11} \vec{m}_1 + \beta_{12} \vec{m}_2 + \dots + \beta_{1n} \vec{m}_n, \\
\dots \\
\vec{m}_{nu_2} = \alpha_n^{(2)} \vec{r}_{u_1} + \beta_n^{(2)} \vec{r}_{u_2} + \beta_{n1} \vec{m}_1 + \beta_{n2} \vec{m}_2 + \dots + \beta_{nn} \vec{m}_n,
\end{gathered} \tag{3}$$

где $\vec{r}_{u_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}, i = 1,2$; $\vec{m}_{iu_j =} \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial u_j}, i = \overline{1, n}, j = 1,2$; $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$ – нормальные векторы двумерной поверхности (1).

Требуется получить все коэффициенты, стоящие перед векторами в правой части формул (3).

Решение задачи. Коэффициенты Кристоффеля Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2$ вычисляются через коэффициенты первой квадратичной формы по формулам [2]:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_{u_1} - 2FF_{u_1} + FE_{u_2}}{2(EG - F^2)}, \Gamma_{11}^2 = \frac{-E_{u_1}F + 2EF_{u_2} - EE_{u_2}}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_{u_2}G - G_{u_1}F}{2(EG - F^2)}, \Gamma_{12}^2 = \frac{G_{u_1}E - E_{u_2}F}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{-G_{u_1}G + 2GF_{u_2} - FG_{u_2}}{2(EG - F^2)}, \Gamma_{22}^{2} = \frac{EG_{u_2} - 2FF_{u_2} + FG_{u_1}}{2(EG - F^2)}.$$

Учитывая, что в нашем случае $E = 1, F = 0, G = G(u_1, u_2)$, получим:

$$\begin{gathered} \Gamma_{11}^{1} = 0, \Gamma_{11}^{2} = 0, \Gamma_{12}^{1} = 0, \\ \Gamma_{12}^{2} = \frac{G_{u_1}}{2G}, \Gamma_{22}^{1} = -\frac{G_{u_1}}{2}, \Gamma_{22}^{2} = \frac{G_{u_2}}{2G}. \end{gathered} \tag{4}$$

Чтобы получить выражения для $\lambda_i^j, i = 1,2,3, j = 1,2, \dots, n$, умножим скалярно первые 3 равенства системы (3) последовательно на нормальные вектора $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$. Умножая на вектор $\vec{m}_1$, получим:

$$\begin{gathered} \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_1 u_1} = \Gamma_{11}^{1} \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{11}^{2} \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_2} + \lambda_1^1 \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_1 + \lambda_1^2 \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 + \cdots \\ + \lambda_1^n \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_n, \\ \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_1 u_2} = \Gamma_{12}^{1} \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{12}^{2} \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_2} + \lambda_2^1 \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_1 + \lambda_2^2 \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 + \cdots \\ + \lambda_2^n \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_n, \\ \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_2 u_2} = \Gamma_{22}^{1} \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{22}^{2} \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_2} + \lambda_3^1 \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_1 + \lambda_3^2 \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 + \cdots \\ + \lambda_3^n \cdot \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_n, \end{gathered} \tag{5}$$

Так как векторы $\vec{r}_{u_1}$и $\vec{r}_{u_2}$ – касательные векторы поверхности (1), скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно 0, а вектор $\vec{m}_1$ – единичный, то

$$\begin{gathered} \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_1 = 1, \\ \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_j = 0, j = \overline{2, n}, \\ \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_1} = 0, \\ \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_2} = 0. \end{gathered}$$

В итоге (5) примет вид:

$$\begin{gathered} \lambda_1^1 = \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_1 u_1} = b_{11,1}, \\ \lambda_2^1 = \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_1 u_2} = b_{12,1}, \\ \lambda_3^1 = \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{u_2 u_2} = b_{22,1}, \end{gathered} \tag{6}$$

где $b_{11,1}, b_{12,1}, b_{22,1}$ – коэффициенты второй квадратичной формы, соответствующие нормальному вектору $\vec{m}_1$.

Аналогично получаем, что

$$\lambda_1^2 = b_{11,2}, \lambda_2^2 = b_{12,2}, \lambda_3^2 = b_{22,2}, \ldots, \lambda_1^n = b_{11,n}, \lambda_2^n = b_{12,n}, \lambda_3^n = b_{22,n}. \qquad (7)$$

Умножим теперь четвертое равенство системы (3) скалярно на $\vec{m}_1$. Получим $\alpha_{11} = \vec{m}_{1u_1} \cdot \vec{m}_1$. Действуя аналогично с последующими равенствами системы (3), можно установить, что

$$\alpha_{ij} = \vec{m}_{iu_1} \cdot \vec{m}_j,\ \beta_{ij} = \vec{m}_{iu_2} \cdot \vec{m}_j\ i, j = 1,2, \ldots, n. \qquad (8)$$

Таким образом, коэффициенты α_{ij} и β_{ij} в деривационных формулах (3), согласно определению 1, есть не что иное, как коэффициенты кручения поверхности (1).

Заметим, что матрицы коэффициентов кручения

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & 0 & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

кососимметричны.

Действительно, так как векторы $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots \vec{m}_n$ взаимно перпендикулярны, то $\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j = 0$. Поэтому

$\left(\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j\right)'_{u_1} = \vec{m}_{iu_1} \cdot \vec{m}_j + \vec{m}_i \cdot \vec{m}_{ju_1} = 0$, откуда

$\vec{m}_{iu_1} \cdot \vec{m}_j = -\vec{m}_{ju_1} \cdot \vec{m}_i$.

Значит, по определению коэффициентов кручения, $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}, i \neq j$.

Также показывается, что $\beta_{ij} = -\beta_{ji}, i \neq j$.

Диагональные элементы матриц равны нулю в силу свойства

$\vec{m}_{iu_1} \cdot \vec{m}_i = 0, \vec{m}_{iu_2} \cdot \vec{m}_i = 0$.

Найдем $\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}, i = 1,2, \ldots, n; j = 1,2$ для поверхности (1).

Чтобы получить значения $\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(1)}$, умножим скалярно на векторы $\vec{r}_{u_1}$ и $\vec{r}_{u_2}$ равенство:

$$\vec{m}_{1u_1} = \alpha_1^{(1)}\vec{r}_{u_1} + \beta_1^{(1)}\vec{r}_{u_2} + \alpha_{11}\vec{m}_1 + \alpha_{12}\vec{m}_2 + \cdots + \alpha_{1n}\vec{m}_n.$$

Имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \vec{r}_{u_1} \cdot \vec{m}_{1u_1} = \alpha_1^{(1)} \cdot (\vec{r}_{u_1})^2 + \beta_1^{(1)} \vec{r}_{u_2} \cdot \vec{r}_{u_1} \\ \vec{r}_{u_2} \cdot \vec{m}_{1u_1} = \alpha_1^{(1)} \vec{r}_{u_1} \cdot \vec{r}_{u_2} + \beta_1^{(1)} \cdot (\vec{r}_{u_2})^2 \end{cases} \tag{9}$$

Так как $E = (\vec{r}_{u_1})^2$, $F = \vec{r}_{u_2} \cdot \vec{r}_{u_1}$, $G = (\vec{r}_{u_2})^2$, а $b_{ij,k} = -\vec{r}_{u_i} \cdot \vec{m}_{ku_j}$, то (9) принимает вид:

$$\begin{cases} -b_{11,1} = \alpha_1^{(1)} E + \beta_1^{(1)} F \\ -b_{12,1} = \alpha_1^{(1)} F + \beta_1^{(1)} G \end{cases} \tag{10}$$

Решая эту систему, получим:

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{b_{12,1}F - b_{11,1}G}{EG - F^2};\ \beta_1^{(1)} = \frac{b_{11,1}F - b_{12,1}E}{EG - F^2}. \tag{11}$$

Аналогично

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{b_{12,k}F - b_{11,k}G}{EG - F^2};\ \beta_k^{(1)} = \frac{b_{11,k}F - b_{12,k}E}{EG - F^2}; \tag{12}$$

где $k = 2, \dots, n$.

Чтобы получить значения $\alpha_1^{(2)}, \beta_1^{(2)}$, умножим скалярно на векторы $\vec{r}_{u_1}$ и $\vec{r}_{u_2}$ равенство:

$$\vec{m}_{1u_2} = \alpha_1^{(2)} \vec{r}_{u_1} + \beta_1^{(2)} \vec{r}_{u_2} + \beta_{11} \vec{m}_1 + \beta_{12} \vec{m}_2 + \cdots + \beta_{1n} \vec{m}_n.$$

Имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \vec{r}_{u_1} \cdot \vec{m}_{1u_2} = \alpha_1^{(2)} \cdot (\vec{r}_{u_1})^2 + \beta_1^{(2)} \vec{r}_{u_2} \cdot \vec{r}_{u_1} \\ \vec{r}_{u_2} \cdot \vec{m}_{1u_2} = \alpha_1^{(2)} \vec{r}_{u_1} \cdot \vec{r}_{u_2} + \beta_1^{(2)} (\vec{r}_{u_2})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b_{12,1} = \alpha_1^{(2)} E + \beta_1^{(2)} F \\ -b_{22,1} = \alpha_1^{(2)} F + \beta_1^{(2)} G \end{cases} \tag{13}$$

Решая систему (13), получим

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{b_{22,1}F - b_{12,1}G}{EG - F^2};\ \beta_1^{(2)} = \frac{b_{12,1}F - b_{22,1}E}{EG - F^2}. \tag{14}$$

Аналогично

$$\alpha_k^{(2)} = \frac{b_{22,k}F - b_{12,k}G}{EG - F^2};\ \beta_k^{(2)} = \frac{b_{12,k}F - b_{22,k}E}{EG - F^2}; \tag{15}$$

где $k = 2, \dots, n$.

Подставляя выражения коэффициентов из формул (4), (6), (7), (11), (12), (14) и (15) в систему (3) и учитывая, что $E = 1, F = 0, G = G(u_1, u_2)$, получаем деривационные формулы для двумерной поверхности в $(n+2)$-мерном евклидовом пространстве:

$$\begin{gathered}
\vec{r}_{u_1u_1} = b_{11,1}\cdot\vec{m}_1 + b_{11,2}\cdot\vec{m}_2 + \cdots + b_{11,n}\cdot\vec{m}_n,\\
\vec{r}_{u_1u_2} = \frac{G_{u_1}}{2\cdot G}\cdot\vec{r}_{u_2} + b_{12,1}\cdot\vec{m}_1 + b_{12,2}\cdot\vec{m}_2 + \cdots + b_{12,n}\cdot\vec{m}_n,\\
\vec{r}_{u_2u_2} = -\frac{G_{u_1}}{2}\cdot\vec{r}_{u_1} + \frac{G_{u_2}}{2\cdot G}\cdot\vec{r}_{u_2} + b_{22,1}\cdot\vec{m}_1 + b_{22,2}\cdot\vec{m}_2 + \cdots + b_{22,n}\cdot\vec{m}_n,\\
\vec{m}_{1u_1} = -b_{11,1}\cdot\vec{r}_{u_1} - \tfrac{b_{12,1}}{G}\cdot\vec{r}_{u_2} + \alpha_{12}\vec{m}_2 + \cdots + \alpha_{1n}\vec{m}_n,\\
\vec{m}_{2u_1} = -b_{11,2}\cdot\vec{r}_{u_1} - \tfrac{b_{12,2}}{G}\cdot\vec{r}_{u_2} + \alpha_{21}\vec{m}_1 + \cdots + \alpha_{2n}\vec{m}_n,\\
\cdots\\
\vec{m}_{nu_1} = -b_{11,n}\cdot\vec{r}_{u_1} - \frac{b_{12,n}}{G}\cdot\vec{r}_{u_2} + \alpha_{n1}\vec{m}_1 + \alpha_{n2}\vec{m}_2 + \cdots + \alpha_{nn-1}\vec{m}_{n-1},\\
\vec{m}_{1u_2} = -b_{12,1}\cdot\vec{r}_{u_1} - \frac{b_{22,1}}{G}\cdot\vec{r}_{u_2} + \beta_{12}\vec{m}_2 + \cdots + \beta_{1n}\vec{m}_n,\\
\cdots\\
\vec{m}_{nu_2} = -b_{12,n}\cdot\vec{r}_{u_1} - \frac{b_{22,n}}{G}\cdot\vec{r}_{u_2} + \beta_{n1}\vec{m}_1 + \beta_{n2}\vec{m}_2 + \cdots + \beta_{nn-1}\vec{m}_{n-1}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Основной результат. Таким образом, получены деривационные формулы (16) для случая двумерной поверхности в E^{n+2}. Это результат позволяет перейти к дальнейшему исследованию свойств таких поверхностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакельман, И.Я. Введение в дифференциальную геометрию в «целом» / И.Я. Бакельман, А.Л. Вернер, Б.Е. Кантор. – М.: Изд-во «Наука», 1973. − 440 с.
2. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Изд-во «Наука», 1974. − 176 с.
3. Фирсов, А.И. Канонические нормали поверхностей большой коразмерности / А.И. Фирсов // Вестник МГУ. – 1976. – № 2. – С. 37-42.
4. Шармин, Д.В. Свойства нормального образа поверхности специального вида в E^4 / Д.В. Шармин, В.Г. Шармин // Вестник БГУ. Математика, информатика. – Улан-Удэ. – 2017. – Выпуск 1. – С. 3-9.