

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра математического моделирования

ДОПУЩЕНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой

д.ф.м.н., доцент

 Татосов А.В.

21 июня 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Качественное исследование модели «производители-продукт»

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил (а) работу
Студент (ка) 2 курса
очной формы обучения

(Подпись)



Богданов
Игорь
Викторович

Руководитель работы
(ст. преподаватель
кафедры математического
моделирования)

(Подпись)



Казанцева
Татьяна
Евгеньевна

Рецензент
(профессор кафедры
математического анализа
и теории функции)

(Подпись)



Латфуллин
Тагир
Гумерович

Тюмень 2016

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Основная теория динамических систем.....	4
1.1. Динамические системы.....	4
1.2. Геометрическая интерпретация динамических систем	4
1.3. Классификация фазовых траекторий.....	5
1.4. Линеаризованная система.....	7
1.5. Устойчивость положения равновесия.....	7
1.6. Исследование двумерных систем	8
1.7. Бифуркации положений равновесия.....	12
1.7.1. Кривая равновесия.....	12
1.7.2. Центральное многообразие.....	13
1.8. Критические состояния равновесия.....	14
1.8.1. Первый критический случай.....	15
1.8.2. Второй критический случай	18
1.9. Бифуркация Андронова–Хопфа.....	21
Глава 2. Исследование динамических систем	25
2.1. Постановка задачи	25
2.2. Система «Производители – Продукт»	25
2.2.1. Описание системы	25
2.2.2. Качественное исследование.....	26
2.2.3. Фазовые портреты	28
2.2.4. Интерпретация полученных результатов.....	29
2.3. Система «Производители – Продукт – Управленцы»	31
2.3.1. Описание системы	31
2.3.2. Качественное исследование.....	31
2.3.3. Фазовые портреты	33
2.3.4. Интерпретация полученных результатов.....	36
Заключение.....	39
Список литературы.....	40
Приложение.....	43

Введение

Математическое моделирование является одним из способов обработки информации для решения инженерно – технических и экономических задач. Развитие информации и компьютерной техники позволяет широко применять методы математического моделирования благодаря возможности для реализации сложнейших алгоритмов обработки результатов исследований.

По мере развития науки большинство областей используют системы дифференциальных уравнений для математического описания явлений. Однако цель определения состояния системы предполагает решение соответствующих систем дифференциальных уравнений, но такая цель достижима для очень малого количества систем. Кроме того, нахождение решения не является главной целью в нелинейной динамике систем, которая более заинтересована в «качественных» свойствах системы. Поэтому можно получить информацию о характере и свойствах системы не решая ее, а из самих уравнений, что и предполагается «качественным» исследованием.

В связи с широким использованием математических моделей в планировании, разработке, прогнозировании поведения реальных систем, качественное исследование является актуальным в настоящее время.

Целью данной работы является проведение качественного исследования динамических систем.

К задачам относится:

- Изучить принципы исследования динамических систем
- Произвести аналитические расчеты для систем, используя методы качественной теории
- Построить качественно различные фазовые портреты исследуемых положений равновесия
- Интерпретировать полученные данные с точки зрения физического смысла системы

Глава 1. Основная теория динамических систем.

Исследование любого динамического процесса обычно начинается с построения математической модели, соответствующей данному процессу. Благодаря модели и исходным значениям можно проследить за изменением состояния при течении времени.

1.1. Динамические системы

Динамической системой называют систему автономных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(x), \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $X(x) = (X_1, \dots, X_n)$. $X_1, \dots, X_n - C^r$ - гладкие ($r \geq 1$) функции, в некоторой области $D \subseteq R^n$. В теории динамических систем t рассматривают как время, которое может быть непрерывное $t \in R^1$, или дискретное $t \in Z$, D - как фазовое пространство, совпадающее с евклидовым пространством R^n ограниченное или неограниченное. И закон эволюции, то есть отображение любой заданной точки фазового пространства D и любого значения t на однозначное состояние $\varphi(t, x) \in D$.

Для закона эволюции справедливы:

1. $\varphi(0, x) = x$.
2. $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$.
3. $\varphi(t, x)$ непрерывно по (x, t) .

1.2. Геометрическая интерпретация динамических систем

Существуют две интерпретации решения системы. Первая относится к фазовому пространству D и вторая к расширенному фазовому пространству $D \times R^1$. Для первой интерпретации любое решение, удовлетворяющее начальному условию, можно рассматривать как уравнение кривой в фазовом пространстве D при изменении t . Такие кривые называются фазовыми траекториями. В силу единственности решения теоремы Коши, существует

единственная траектория, проходящая через каждую точку фазового пространства.

Для второй интерпретации решение системы (1.1) рассматривается как кривая в расширенном фазовом пространстве. Такую кривую называют интегральной. Между интегральными кривыми и фазовыми траекториями существует прямая взаимосвязь. Фазовая траектория есть проекция вдоль оси t соответствующей интегральной кривой на фазовое пространство D , как показано на рис 1.

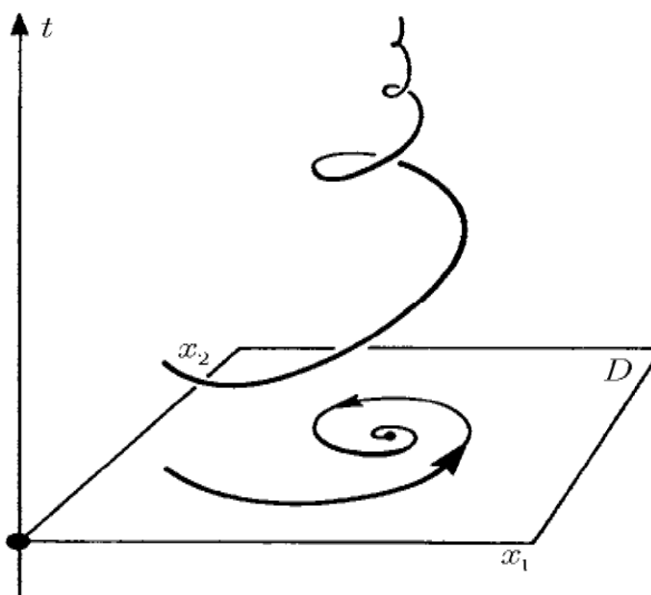


Рисунок 1.

1.3. Классификация фазовых траекторий

Траектория $x(t)$ системы (1.1), называется положением равновесия, если она не зависит от времени, то есть $x(t) \equiv x_0 = const$. Координаты положения равновесия можно найти из системы:

$$X(x_0) = 0. \quad (1.2)$$

Если матрица Якоби $\partial X/\partial x$ невырождена в точке x_0 , то положение равновесия является изолированным. Таким образом, в ограниченной подобласти фазового пространства R^n система (1.1) имеет конечное число положений равновесия.

Траекторию L , соответствующую периодическому решению динамической системы называют периодической.

Любая траектория, которая не является ни положением равновесия, ни периодической траекторией есть незамкнутая траектория. Незамкнутые траектории не имеют точек самопересечения. Заметим, что любая точка незамкнутой траектории делит ее на положительную и отрицательную полутраектории.

Используя общую классификацию, можно перечислить все типы положительных полутраекторий на плоскости для двумерных систем:

1. Положения равновесия;
2. Периодические траектории;
3. Полутраектории, стремящиеся к положению равновесия;
4. Полутраектории, стремящиеся к периодической траектории;
5. Полутраектории, стремящиеся к предельному множеству типа циклы.

Циклы, образованные положениями равновесия и траекториями, стремящимися к этим положениям равновесия при $t \rightarrow \pm\infty$.

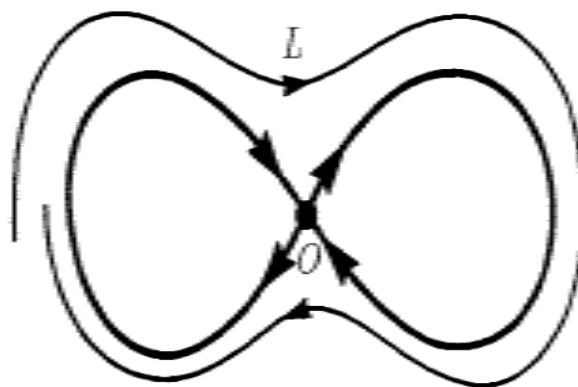


Рисунок 2.

Необходимо отметить, что любые два решения, отличие которых заключается лишь в выборе начального момента времени t_0 , соответствует одной и той же траектории. Что справедливо и наоборот, два различных решения для одной и той же траектории, являются одинаковыми с точностью до сдвига по времени $t \rightarrow t + C$.

Для любых траекторий, отличных от положения равновесия, можно задать направление движения, совпадающее с направлением возрастания t . Направление определяется с помощью касательного вектора.

1.4. Линеаризованная система

При исследовании многомерных систем число положений равновесия может быть весьма большим. Поэтому изучение таких систем вблизи положения равновесия можно производить, используя стандартный метод линеаризации.

Для исследования системы (1.2) пусть точка $O(x = x_0)$ – положение равновесия. После подстановки $x = x_0 + y$ начало координат смещается в точку O . В новых переменных систему можно представить:

$$\dot{y} = X(x_0 + y), \quad (1.3)$$

раскладывая в ряд Тейлора вблизи точки $x = x_0$:

$$\dot{y} = X(x_0) + \frac{\partial X(x_0)}{\partial x} y + o(y). \quad (1.4)$$

Так как $X(x_0) = 0$, то система (4) принимает вид:

$$\dot{y} = Ay + g(y), \quad (1.5)$$

где

$$A = \frac{\partial X(x_0)}{\partial x}$$

A есть $n \times n$ -матрица с постоянными коэффициентами, $g(y)$ удовлетворяет условию:

$$g(0) = \frac{\partial g(0)}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

Поведение траекторий системы (1.5) в малой окрестности начала координат зависит от линеаризованной системы $\dot{y} = Ay$.

1.5. Устойчивость положения равновесия

Как известно, устойчивость положения равновесия определяется собственными значениями $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ матрицы Якоби A , которые являются корнями характеристического уравнения

$$\det|A - \lambda I| = 0 \quad (1.7)$$

где I – единичная матрица.

Положение равновесия устойчиво, если все действительные части характеристических показателей $(Re\lambda_1, \dots, Re\lambda_n) < 0$.

Если действительная часть хотя бы одного собственного числа положительна, то соответствующее положение равновесия является неустойчивым.

1.6. Исследование двумерных систем

Рассмотрим поведение двумерной системы. При $n = 2$ общий вид системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}\quad (1.8)$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

и соответственно корни выражаются как:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22})}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

В зависимости от характеристических показателей $\lambda_{1,2}$ можно выделить следующие типы положения равновесия:

1. λ_1 и λ_2 – действительные, отрицательные и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Такое положение равновесия называется устойчивый узел. Поскольку $\lambda_{1,2}$ отрицательны все траектории притягиваются к положению равновесия при $t \rightarrow \infty$.

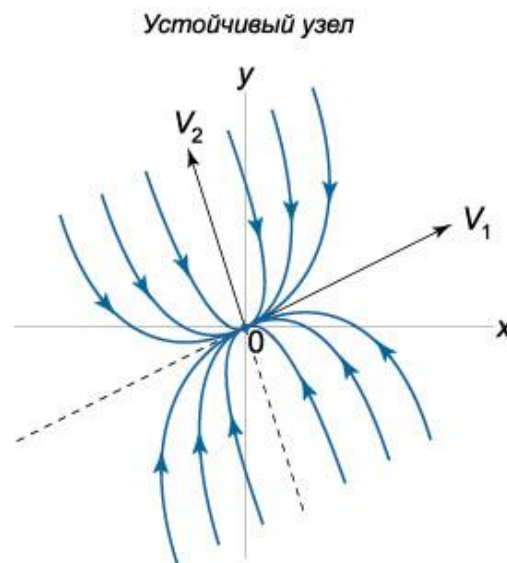


Рисунок 3.

2. λ_1 и λ_2 – действительные, положительные и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Такое положение равновесия называется неустойчивый узел.

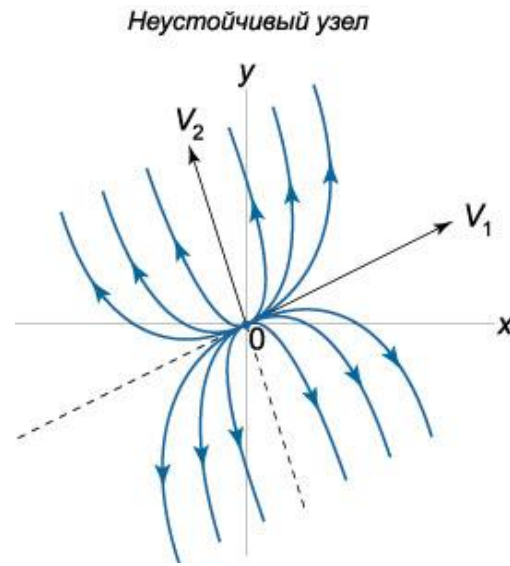


Рисунок 4.

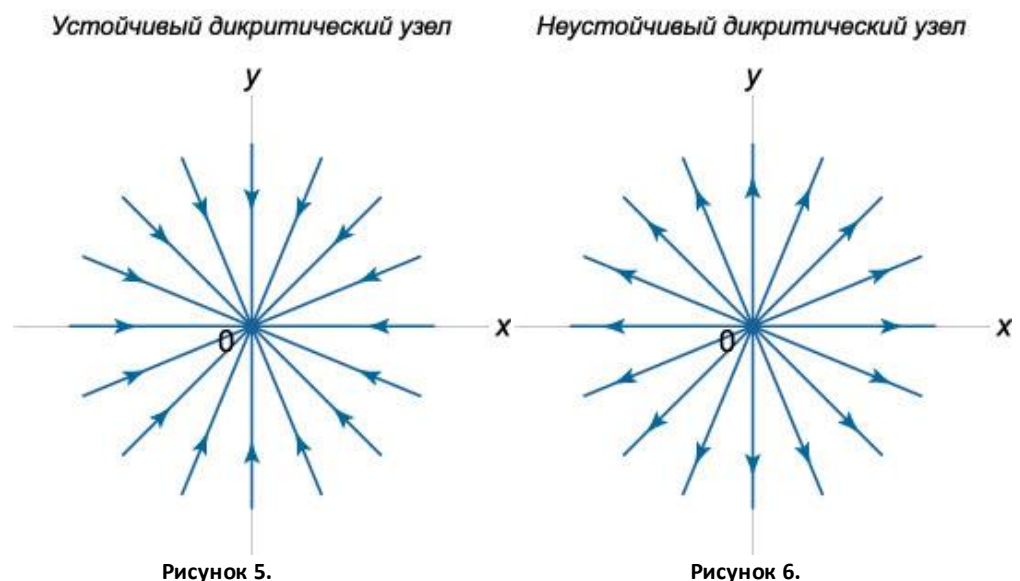
3. В случае, когда характеристическое уравнение имеет один корень кратности 2. Т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. При этом система имеет базис из двух собственных векторов. Такая ситуация реализуется в системах вида:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x; \quad \frac{dy}{dt} = \lambda y.$$

Направление фазовых траекторий зависит от знака λ .

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ – устойчивый дикритический узел.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ – неустойчивый дикритический узел.



4. В случае одинаковых характеристических корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Но система имеет лишь один собственный вектор. Положение равновесия такого типа называется вырожденный узел.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ – устойчивый вырожденный узел.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ – неустойчивый вырожденный узел.

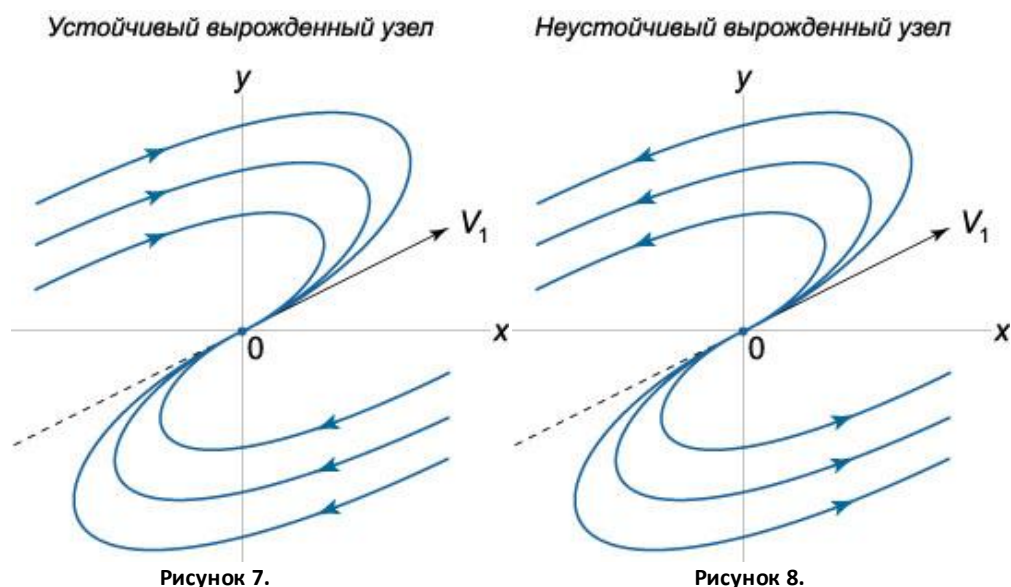


Рисунок 7.

Рисунок 8.

5. λ_1 и λ_2 – пара комплексно-сопряженных корней: $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, где $a \neq 0$. В данном случае положение равновесия называется фокусом. Любая траектория данного вида положения равновесия имеет вид спирали.

При $a < 0$ – устойчивый фокус.

При $a > 0$ – неустойчивый фокус.

Направление закручивания спиралей можно определить по коэффициенту a_{21} .

Положительный коэффициент a_{21} соответствует закручиванию против часовой стрелки, а отрицательный коэффициент a_{21} – закручиванию по часовой стрелке.

Таким образом, существуют 4 различных вида фокусов.

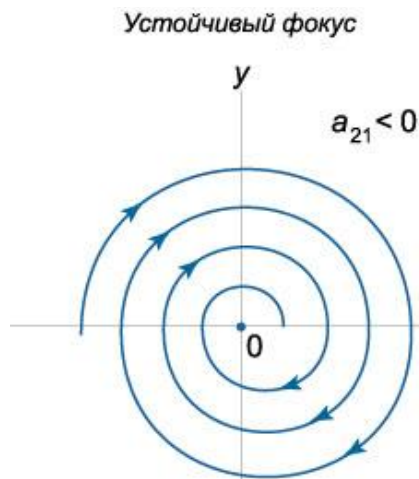


Рисунок 9.

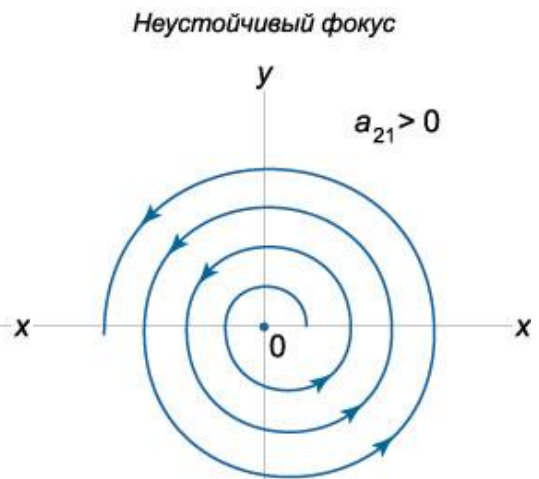


Рисунок 10.

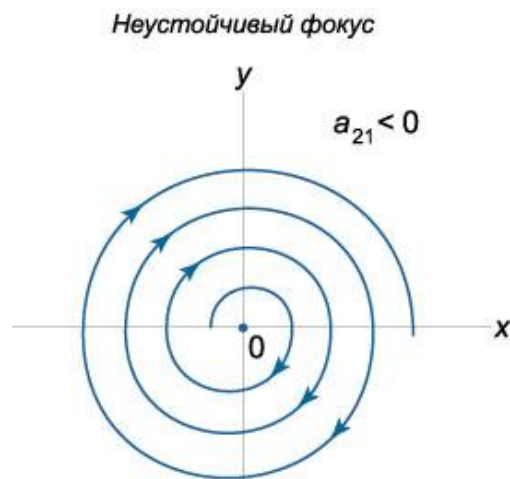


Рисунок 11.

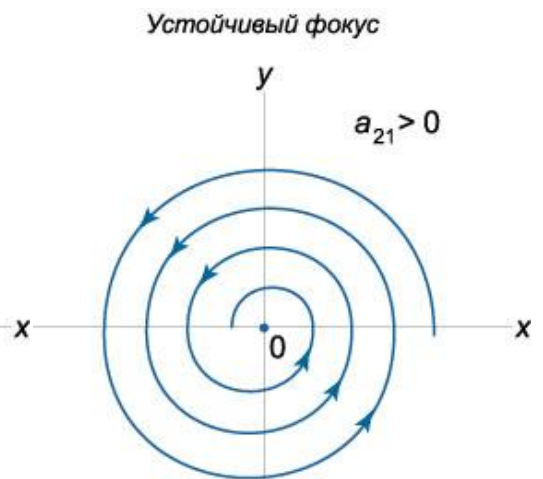


Рисунок 12.

- б. λ_1 и λ_2 являются действительными числами, но имеют противоположный знак $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Такая точка равновесия называется седлом. Фазовое пространство вблизи положения равновесия показано на рисунке 13. Существует четыре особые траектории, так называемые сепаратрисы: две устойчивые и две неустойчивые. Сепаратрисы являются асимптотами для остальных траекторий. Пара устойчивых сепаратрис и седло образуют устойчивое инвариантное подпространство, а пара неустойчивых сепаратрис и точка седлового типа образуют неустойчивое инвариантное подпространство.

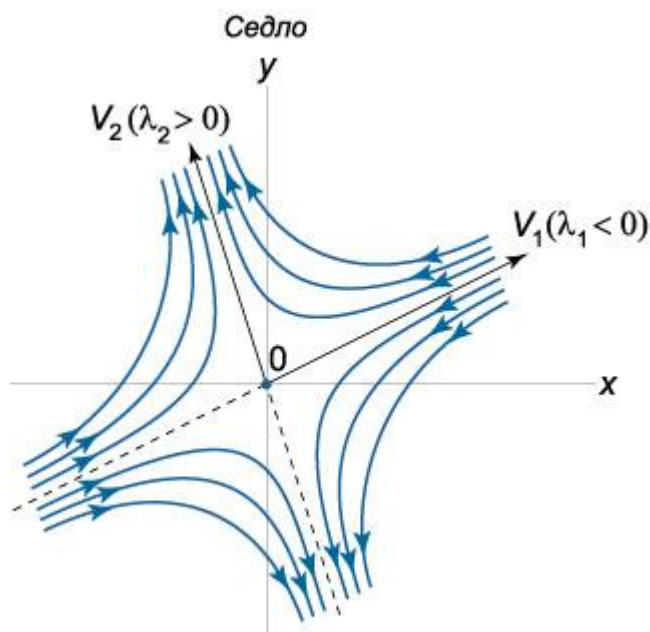


Рисунок 13.

1.7. Бифуркации положений равновесия

1.7.1. Кривая равновесия

Реальные динамические системы зависят от большого количества параметров различного рода. При изменении параметра может меняться как количество положений равновесия, так и устойчивость этих положений. Некоторые внешние параметры можно рассматривать как медленно меняющиеся во времени функции. Как правило, такие параметры не меняют качественно состояние системы, а лишь смещают положения равновесия без влияния на устойчивость.

Однако существуют и значения параметров, в окрестности которых динамика системы неодинакова. Такие значения называют бифуркационными.

Для отображения возможных бифуркаций используются кривые равновесий.

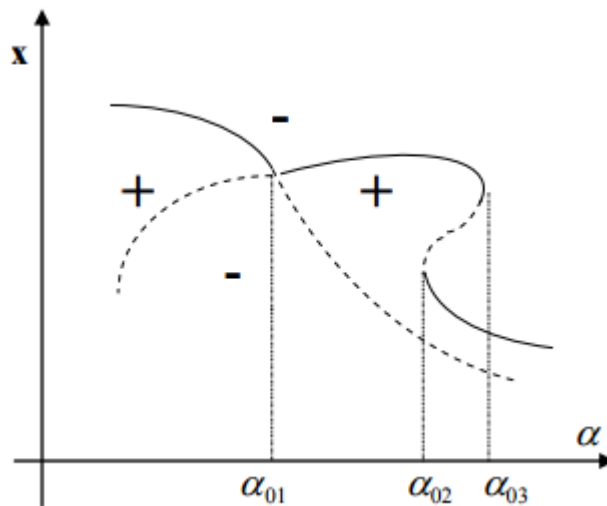


Рисунок 14.

На рисунке 14 представлена кривая равновесия для некоторой системы с одной переменной состояния и некоторым параметром α . Ветви положений равновесия разбивают график на несколько областей, в которых функции системы сохраняют знак. Используя данный график можно описать некоторые простейшие виды бифуркаций.

В точке α_{01} мы имеем бифуркацию типа «смена устойчивости» при $\alpha < \alpha_{01}$, точки на одной ветви устойчивы, а на другой – неустойчивы, при $\alpha > \alpha_{01}$ характер меняется на противоположный. В точках α_{02} и α_{03} происходит бифуркация типа «складка» или «седло-узел». При $\alpha > \alpha_{02}$ в окрестности имеется два положения равновесия: устойчивое и неустойчивое. Для значений $\alpha < \alpha_{02}$ вблизи на кривой нет точек. Что верно и для точки α_{03} .

1.7.2. Центральное многообразие

Для изучения бифуркаций в малой окрестности U положения равновесия стандартным инструментом является теорема о центральном многообразии. В ней говорится что, существует окрестность положения равновесия, которая при всех достаточно малых значениях параметра μ содержит инвариантное центральное многообразие W^c , которое задается уравнением:

$$y = \psi(x, \mu) \quad (1.9)$$

Все траектории, не выходящие за пределы окрестности U во все моменты времени, принадлежат центральному многообразию.

Размерность центрального многообразия для положений равновесия равна числу показателей с нулевой действительной частью, следовательно, задачу об исследовании бифуркаций положения равновесия можно свести к задаче о соответствующей подсистеме на центральном многообразии, тем самым существенно уменьшая размерность задачи.

Рассмотрим динамические системы вида:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + f(x, y, \mu) \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y, \mu) \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $x \in R^m$, $y \in R^{n-m}$, $\text{spectr}A = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$, $\text{Re } \lambda_j < 0$ ($j = m + 1, \dots, n$), $\text{spectr}B = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\text{Re } \lambda_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$), $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ – семейство параметров, f и g – C^r -гладкие функции, которые вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

Существование центрального многообразия позволяет свести решение задач такого типа к исследованию m -мерной системы:

$$\dot{x} = Bx + g(x, \psi(x, \mu), \mu)$$

Инвариантность многообразия $y = \psi(x, \mu)$ означает что:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = (Bx + g(x, \psi(x), \mu)) = A\psi(x, \mu) + f(x, \psi(x), \mu)$$

Путем разложения функций, входящих в уравнение, в формальный ряд по степеням x из данного уравнения можно последовательно найти все коэффициенты ряда Тейлора функции ψ . Таким образом, можно вычислить разложение в ряд Тейлора правой части приведенной системы.

1.8. Критические состояния равновесия

Наиболее распространенными в исследовании положений равновесия являются два случая, в которых характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

1. Имеет один нулевой корень на мнимой оси
2. Имеет два комплексно-сопряженных корня на мнимой оси

Основными средствами для изучения критических случаев является приведение к центральному многообразию и ляпуновские величины, которые позволяют определить устойчивость критического положения равновесия.

Систему дифференциальных уравнений вблизи критического состояния равновесия можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Ay + f(x, y) \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y)\end{aligned}\quad (1.11)$$

где $x \in R^m$, $y \in R^{n-m}$, $\text{spectr}A = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$, $\text{Re } \lambda_j < 0$ ($j = m + 1, \dots, n$), $\text{spectr}B = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\text{Re } \lambda_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$). f и g — C^r -гладкие функции, которые вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

1.8.1. Первый критический случай

Пусть есть только один характеристический показатель на мнимой оси, т.е. когда $m = 1$ и $\lambda_1 = 0$ в (1.11), используя теорему о редукции, система в стандартном виде задается как:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (A + F(x, y))y \\ \dot{x} &= g(x)\end{aligned}\quad (1.12)$$

где x — скаляр, и функция $g(x)$ обращается в нуль в начале координат вместе с первой производной. В данном случае центральное многообразие W^C одномерно и задается уравнением $y = 0$. Система (1.12) на W^C имеет вид:

$$\dot{x} = g(x)\quad (1.13)$$

Так как $g(0) = \dot{g}(0) = 0$, то $g(x) = l_2 x^2 + l_3 x^3 + \dots$ где коэффициенты l_2, \dots, l_k разложения функции $g(x)$ в ряд Тейлора называются ляпуновскими величинами.

Если номер первой ненулевой ляпуновской величины принять за k , тогда уравнение (1.13) можно записать в виде:

$$\dot{x} = l_k x^k (1 + o(1))\quad (1.14)$$

Для динамики системы возможны 3 случая в зависимости от первой ненулевой ляпуновской величины:

1. Если первая отличная от нуля ляпуновская величина имеет четный порядковый номер, такое состояние равновесия называется «седло-узел». Если $l_2 \neq 0$, то его называют простым «седло-узлом». Вид «седло-узла» представлен на рисунке 15.

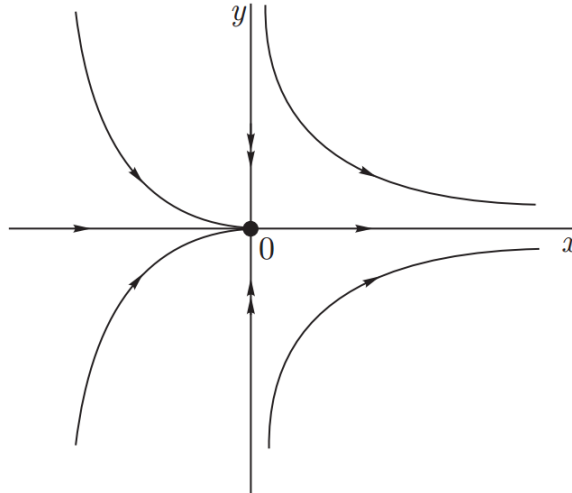


Рисунок 15.

Для многомерного случая возможны 2 случая: если наименьшее собственное значение λ_{m+1} матрицы A вещественно, то точка O является устойчивым узлом (рисунок 16.) в противном случае, если λ_{m+1} — комплексное число, то точка O — устойчивый фокус (рисунок 17.)

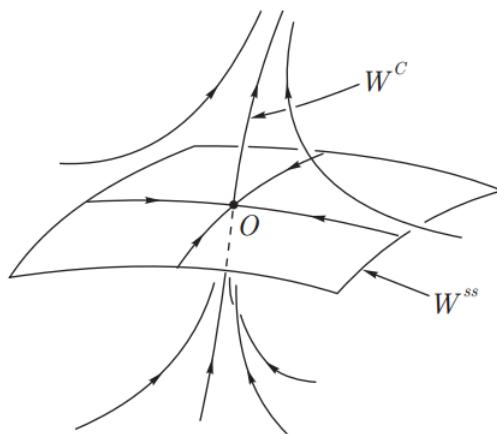


Рисунок 16.

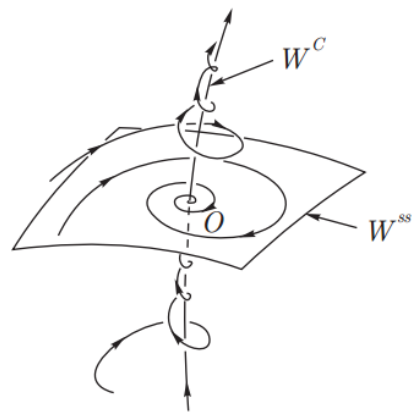


Рисунок 17.

2. Если первая отличная от нуля ляпуновская величина отрицательна и имеет нечетный порядковый номер, т. е. $l_{2p+1} < 0$, то состояние равновесия устойчиво. Все траектории стремятся к O при $t \rightarrow +\infty$.

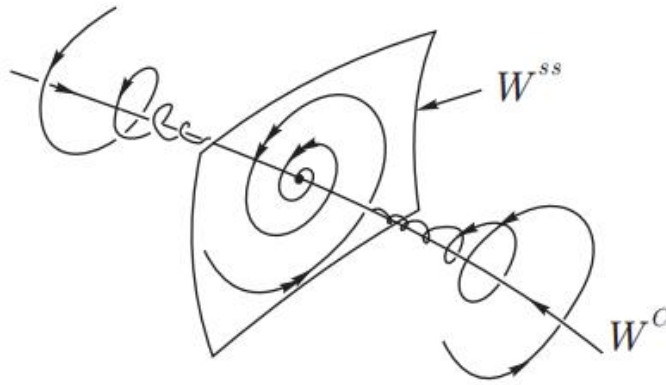


Рисунок 18.

3. Если у первой отличной от нуля ляпуновской величины порядковый номер нечетный и она положительна, т. е. $l_{2p+1} > 0$, то состояние равновесия O имеет топологический тип седла $(n - 1, 1)$. При этом неустойчивое многообразие совпадает с центральным многообразием W^c , как проиллюстрировано на рисунке 19.

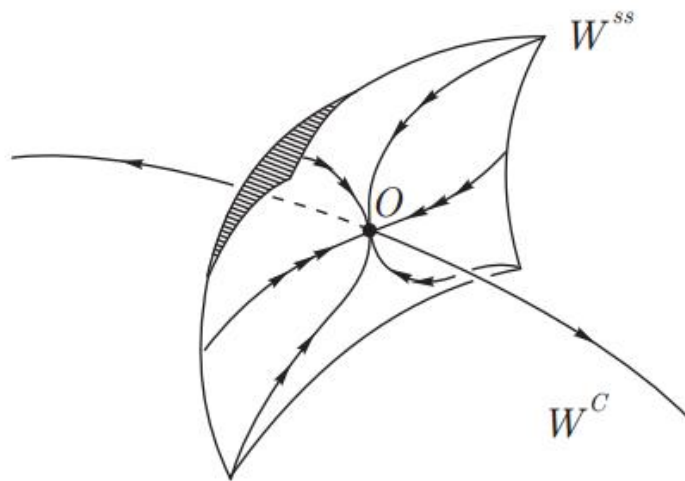


Рисунок 19.

Если все ляпуновские величины обращаются в нуль, то $g(x, \phi(x)) \equiv 0$. Отсюда, поскольку $y = \phi(x)$ является решением системы $Ay + f(x, y) = 0$, то кривая $y = \phi(x)$ заполнена положениями равновесия. Таким образом, она является инвариантным многообразием. Таким образом, система имеет аналитическое центральное многообразие $W^c: y = \phi(x)$, которое состоит из состояний равновесия, как проиллюстрировано на рисунке 20. Если

собственное значение λ_2 отрицательно, то положение равновесия устойчиво, и не устойчиво в противном случае.

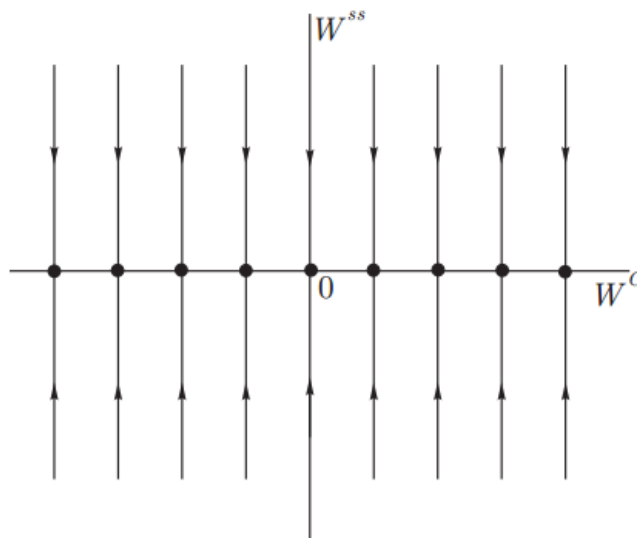


Рисунок 20.

Состояние равновесия, фазовый портрет которого не определяется через коэффициенты ряда Тейлора называется полностью вырожденным или бесконечно вырожденным в случае C^∞ -гладких систем.

1.8.2. Второй критический случай

Состояние равновесия в начале координат имеет два чисто мнимых характеристических показателя $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. В данном случае приведение к центральному многообразию W^C , имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega x_2 + g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + g_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для второго критического случая была получена нормальная форма в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= L_1 r^3 + L_Q r^{2Q+1} + o(r^{2Q+1}) \\ \dot{\theta} &= \omega + \Omega_1 r^2 + \dots + \Omega_Q r^{2Q} + o(r^{2Q}) \end{aligned}$$

Коэффициенты L_Q называются ляпуновскими величинами.

Пусть $L_1 = \dots = L_{k-1} = 0, L_k \neq 0$. В этом случае нормальная форма имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= L_k r^{2k+1} (1 + \phi(r, \theta)), \\ \dot{\theta} &= \omega (1 + \psi(r, \theta)), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где ϕ и ψ стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$.

Если $L_k < 0$, то траектории стремятся к точке O по спирали при $t \rightarrow +\infty$, как показано на рисунке 21. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым сложным или слабым фокусом.

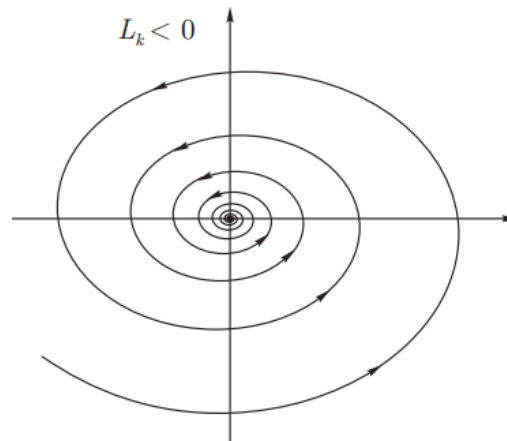


Рисунок 21.

Если $L_k > 0$, то траектории, начинающиеся вблизи положения равновесия, по спирали удаляются от него, по мере увеличения времени. Для двумерной системы точка O называется неустойчивым сложным или слабым фокусом.

Для многомерной системы, если первая ненулевая ляпуновская величина отрицательна, то траектории ведут себя аналогично траекториям вблизи грубого устойчивого фокуса, как показано на рисунке 22.

Если первая ненулевая ляпуновская величина положительна и если все некритические характеристические показатели $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$, лежат слева от мнимой оси на комплексной плоскости, тогда состояние равновесия является сложным «седло-фокусом», как показано на рисунке 23.

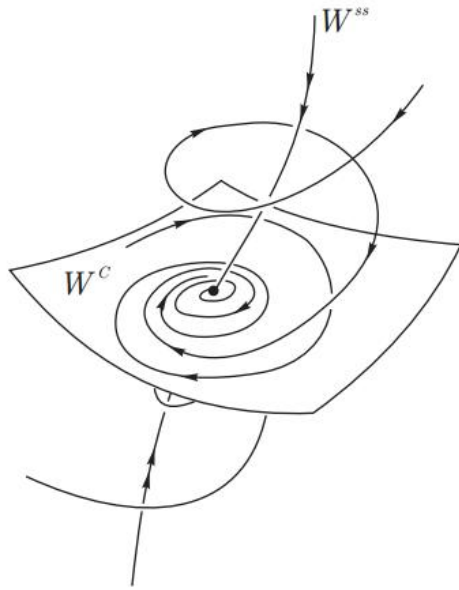


Рисунок 22.

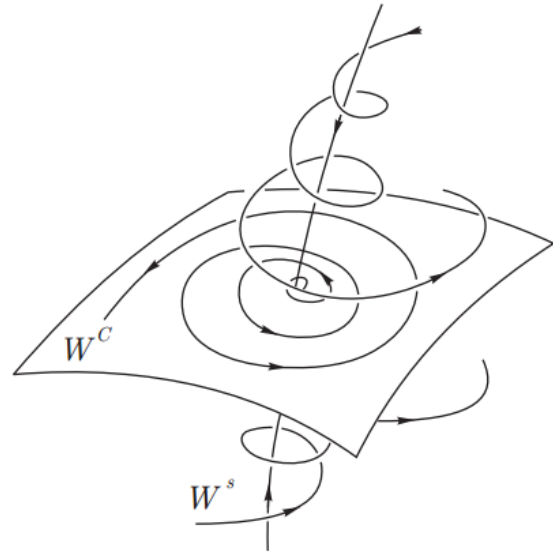


Рисунок 23.

Если все ляпуновские величины равны нулю, то соответствующая аналитическая система имеет аналитическое инвариантное (центральное) многообразие, которое заполнено замкнутыми траекториями, окружающими начало координат, как показано на рисунке 24.

Состояние равновесия, все траектории в окрестности которого замкнуты, называется центром. Центр является устойчивым по Ляпунову, но не асимптотически устойчивым.

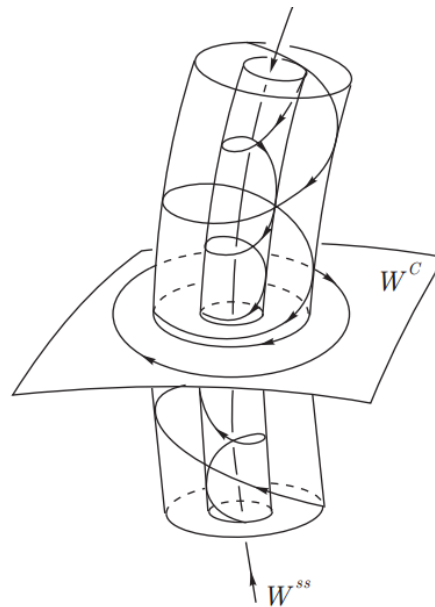


Рисунок 24.

1.9. Бифуркация Андронова-Хопфа

Данный вид бифуркации происходит при пересечении границы устойчивости критического положения равновесия второго типа. Пара комплексно-сопряженных характеристических показателей состояния равновесия переходит через мнимую ось. При этом потеря устойчивости связана с появлением или, наоборот, исчезновением периодической орбиты. Эта бифуркация представляет простейший механизм перехода от стационарного режима к колебаниям. По этой причине она играет особую роль в теории бифуркаций.

Рассмотрим семейство систем дифференциальных уравнений, C^r -гладких по переменным $x \in R^2, y \in R^m$ и параметрам $\varepsilon \in R^p (p \geq 1)$. Пусть при $\varepsilon = 0$ система имеет состояние равновесия O с двумя мнимыми характеристическими показателями, а остальные лежат слева от мнимой оси. Состояние равновесия не имеет нулевых характеристических чисел, поэтому оно сохраняется в малой окрестности $\varepsilon = 0$.

На центральном многообразии $y = 0$ это семейство в полярных координатах принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R(\mu + L_1 R^2) + \Phi_1(R, \phi, \mu) \\ \dot{\phi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu) R^2 + \Phi_2(R, \phi, \mu) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Где $\Phi_1 = o(R^3), \Phi_2 = o(R^2)$.

Если первая ляпуновская величина $L_1 < 0$ меньше нуля, то для малых $\mu \leq 0$ состояние равновесия O устойчиво и все траектории в некоторой окрестности U начала координат стремятся к O . Когда $\mu > 0$, состояние равновесия становится неустойчивым и возникает устойчивая периодическая орбита. Рисунок 25.

Если первая ляпуновская величина $L_1 > 0$, то для малых $\mu \geq 0$ состояние равновесия O неустойчиво и все остальные траектории покидают малую окрестность U начала координат. Когда $\mu < 0$, состояние равновесия становится устойчивым. Его область притяжения ограничена неустойчивой периодической орбитой. Рисунок 26.

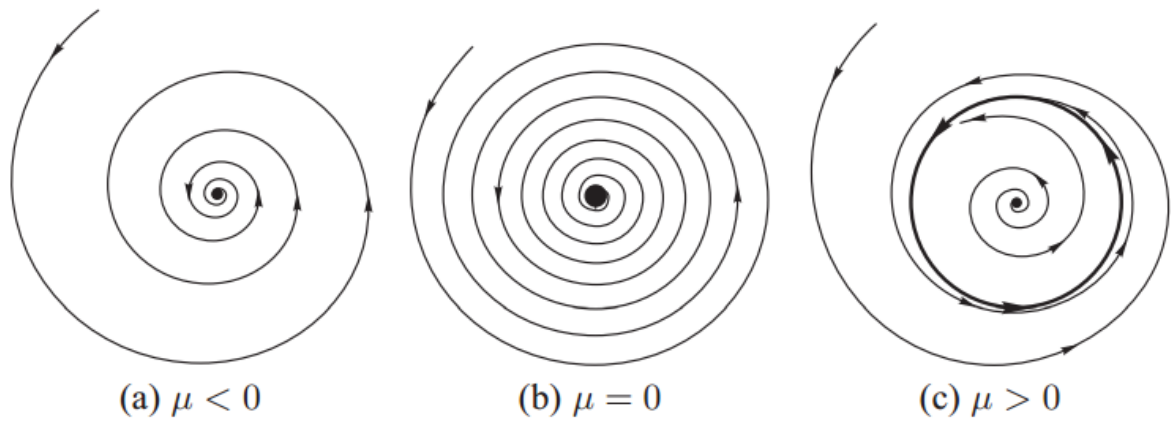


Рисунок 25.

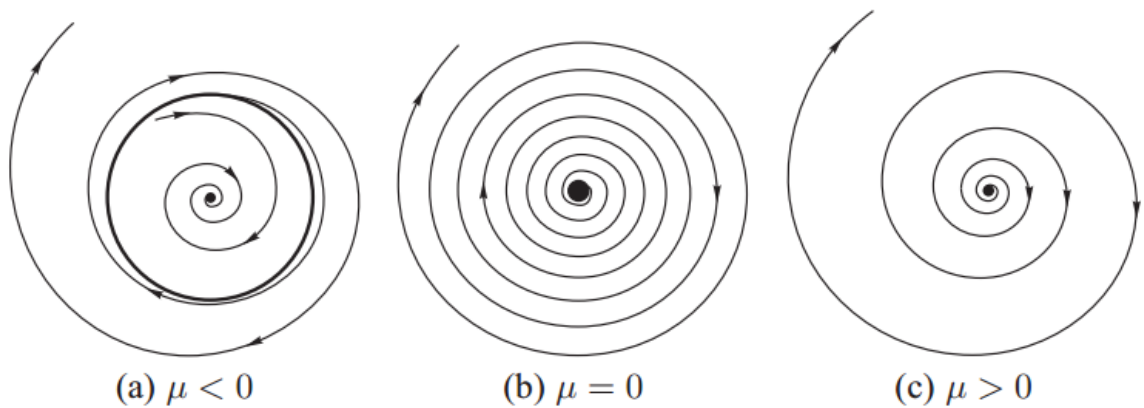


Рисунок 26.

Исследуя бифуркацию Андронова-Хопфа в многомерном случае:

Если $L_1 < 0$ (рисунок 27), то при $\mu \leq 0$ состояние равновесия O устойчиво (при $\mu < 0$ – грубый фокус, а при $\mu = 0$ – слабый фокус) и оно притягивает все траектории из малой окрестности начала координат. Когда $\mu > 0$, точка O становится «седло-фокусом» с двумерным неустойчивым многообразием и m -мерным устойчивым многообразием. Данная бифуркация называется надкритической бифуркацией Андронова-Хопфа.

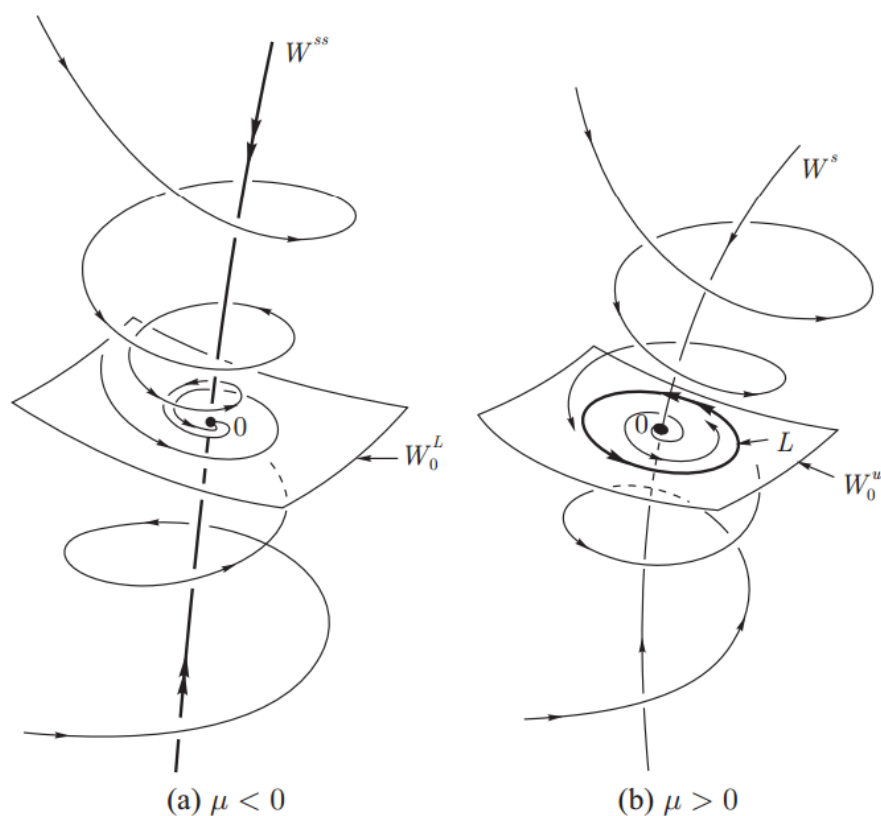


Рисунок 27.

Фазовые портреты при $L_1 > 0$ изображены на рисунке 28. При этом, когда $\mu < 0$, существует устойчивое состояние равновесия O (фокус) и седловая периодическая орбита, m -мерное устойчивое многообразие которой является границей области притяжения точки O . Когда μ возрастает, цикл приближается к O и «влипает» в него при $\mu = 0$. Состояние равновесия O становится «седло-фокусом», когда μ переходит через нуль. Такая бифуркация называется субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа.

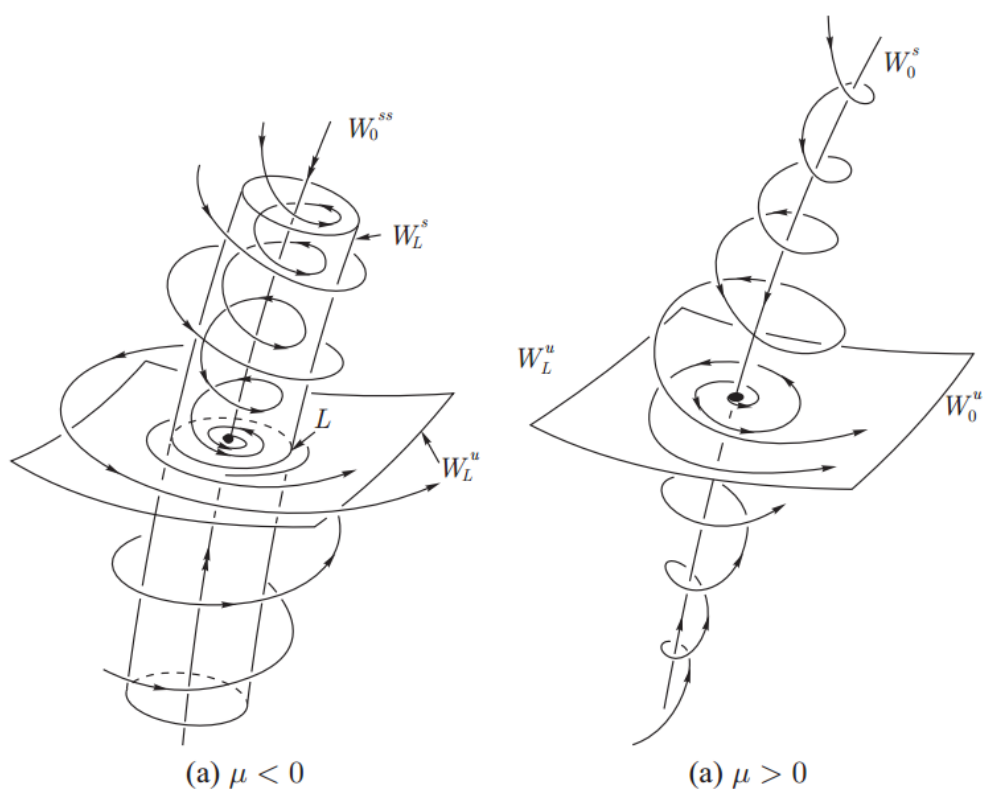


Рисунок 28.

Глава 2. Исследование динамических систем

2.1. Постановка задачи

Для исследования были выбраны следующие динамические системы:

1. Система «Производители – Продукт».
2. Система «Производители – Продукт – Управленцы».

Необходимо провести качественное исследование обеих систем, изобразить все качественно различные фазовые портреты и интерпретировать полученные результаты.

Для построения фазовых портретов используется программная среда Maple.

2.2. Система «Производители – Продукт»

2.2.1. Описание системы

Система «Производители – Продукт» (ПП) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - bx + cy)x \\ \dot{y} &= \begin{cases} F = d \frac{x}{1 + ey} - fx & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y = 0 \text{ и } F \leq 0 \text{ или } y = 0 \text{ и } F > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где x – это численность производителей, y – количество используемого продукта, который есть в наличии. Под продуктом понимаем всё то, что нужно для жизни человека, что он потребляет и чем пользуется, a, b, c, d, e, f – постоянные положительные параметры. Система представлена в безразмерном виде.

В данной системе:

a – естественная скорость появления новых производителей в системе.

b – естественная конкуренция между производителями.

c – скорость появления новых производителей в зависимости от количества продукта в системе.

d – технологическая эффективность производства.

e – влияние избытка продукта на скорость производства.

f – потери продукта из-за потребления его производителями.

Для большей реалистичности следует рассматривать данные параметры как функции от времени t . Однако этот случай сильно усложняет исследование.

Для физического смысла не рассматриваем отрицательные значения количества продукта и производителей.

2.2.2. Качественное исследование.

Для нахождения положений равновесия необходимо решить систему:

$$\begin{cases} (a - bx + cy)x = 0 \\ d \frac{x}{1 + ey} - fx = 0 \end{cases}$$

В рассматриваемой системе присутствуют следующие положения равновесия:

1. $(0, y)$;
2. $\left(\frac{aef + cd - cf}{bef}, \frac{d - f}{ef}\right)$;

Построим матрицу Якоби A :

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial x} \\ \frac{\partial X_1}{\partial y} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2bx + cy & cx \\ \frac{d}{1 + ey} - f & -\frac{edx}{(1 + ey)^2} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим прямую, состоящую из положений равновесия 1.

$$A(0, y) = \begin{pmatrix} a + cy & 0 \\ \frac{d}{1 + ey} - f & 0 \end{pmatrix}$$

Данная матрица является вырожденной. Выражая собственные значения из условия (1.2):

$$\lambda_1 = a + cy, \quad \lambda_2 = 0$$

Из собственных значений видно, что данное состояние равновесия соответствует первому критическому случаю, следовательно, необходимо произвести дополнительные исследования данного положения равновесия.

Центральное многообразие одномерно и соответствует $x = 0$, т.е. совпадает с осью OY . Все ляпуновские величины обращаются в 0, поскольку $x = 0$ является решением системы, то ось OY заполнена положениями равновесия, что можно наблюдать на рисунках 30, 31.

Устойчивость данного положения равновесия зависит от знака λ_1 . Тогда при $a + cy < 0$ – устойчивое положение, а при $a + cy > 0$ – неустойчивое.

Рассмотрим положение равновесия 2.

$$A \left(\frac{aef + cd - cf}{bef}, \frac{d - f}{ef} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{aef + cd - cf}{bef} & \frac{caef + c^2d - c^2f}{bef} \\ 0 & -\frac{aef + cd - cf}{bd} \end{pmatrix}$$

Выражая собственные значения из условия (7) получаем:

$$\lambda_1 = -\frac{aef + cd - cf}{bef}, \quad \lambda_2 = -\frac{aef + cd - cf}{bd}$$

Для данных собственных значений следует, что положение равновесия $\left(\frac{aef + cd - cf}{bef}, \frac{d - f}{ef} \right)$ является узлом. Из условия положительности параметров системы (2.1) следует, что устойчивость данного положения зависит от знака выражения $aef + cd - cf$. При $aef + cd - cf > 0$ – устойчивый узел (рисунок 29), при $aef + cd - cf < 0$ - неустойчивый узел (рисунок 31).

2.2.3. Фазовые портреты

В результате исследования были получены следующие фазовые портреты для некоторых значений параметров:

$$aef + cd - cf > 0$$

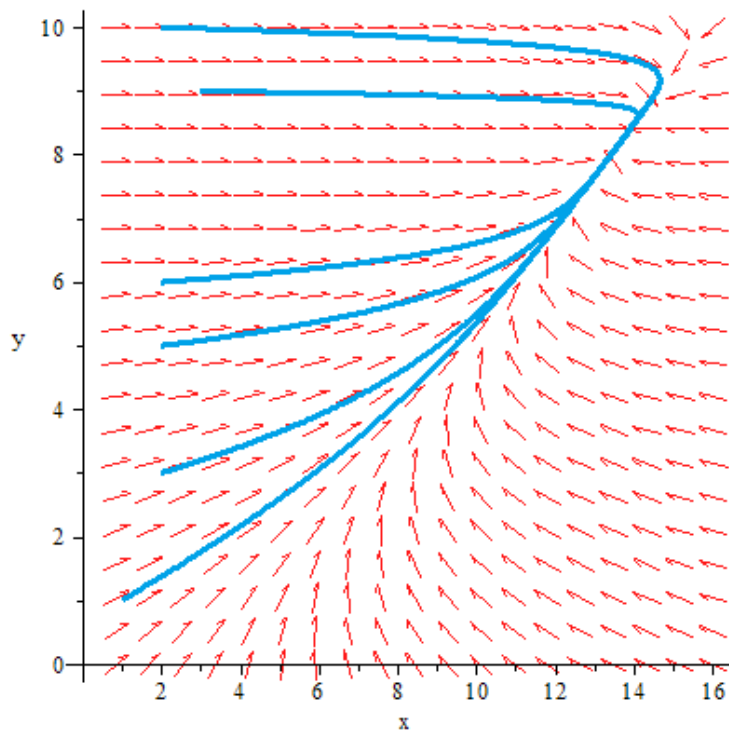


Рисунок 29.

$$aef + cd - cf = 0$$

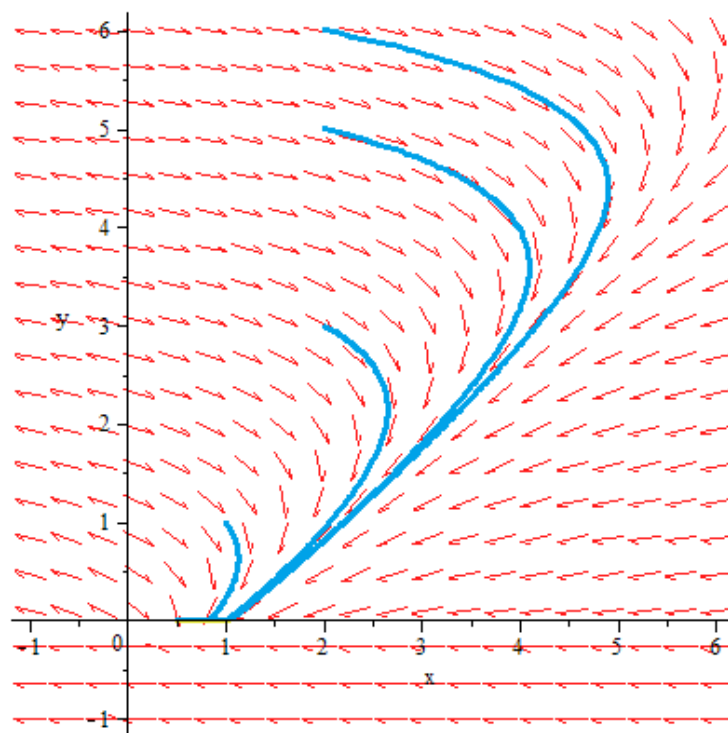


Рисунок 30.

$$aef + cd - cf < 0$$

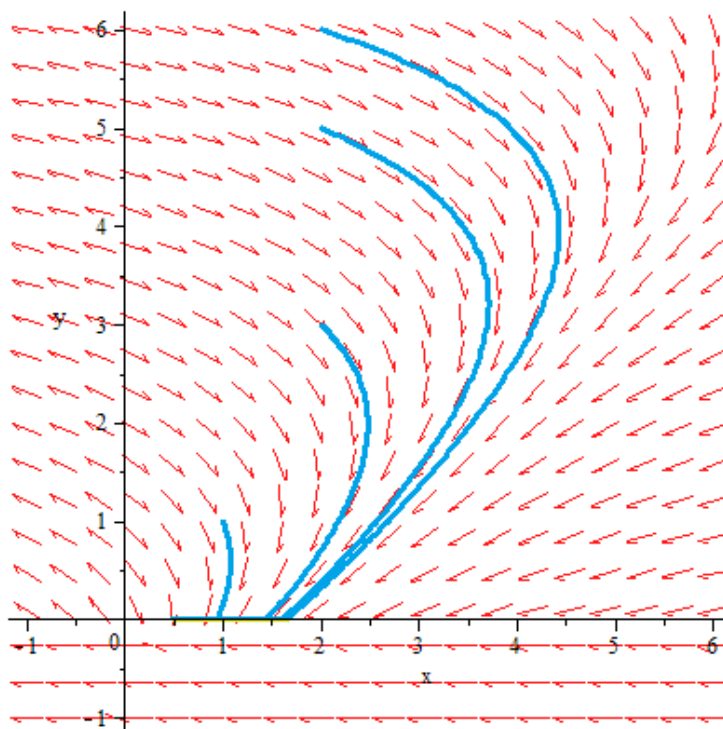


Рисунок 31.

2.2.4. Интерпретация полученных результатов

Учитывая физический смысл модели, более реалистичный случай при $aef + cd - cf > 0$, который изображен на рисунке 29. Можно рассмотреть 4 основных случая:

1. Малое количество начального продукта y , малая численность производителей x ;
2. Малое количество начального продукта y , большое количество производителей x ;
3. Большие запасы продукта y и малая численность производителей x ;
4. Большие запасы продукта y и большая численность производителей x .

Случай 1. Имеет место рост количества продукта, за счет чего увеличивается и численность производителей.

Случай 2. В данном случае если производителей слишком много, за счет внутривидовой конкуренции их количество будет планомерно снижаться.

Можно найти «оптимальное» количество производителей, при котором численность не будет снижаться, но количество продукта будет очень быстро возрастать.

Случай 3. Данный случай не предполагает увеличение количества продукта, из-за уменьшения эффективности производства от большого запаса продукта. Число производителей растет самым быстрым темпом в данном случае.

Случай 4. Количество продукта сразу же начинает уменьшаться. Численность производителей некоторый малый промежуток времени растет и, достигнув некоторого значения, начинает быстро уменьшаться вместе с запасами продукта.

Во всех рассмотренных случаях динамика является ограниченной некоторым соотношением между количеством продукта и численностью производителей.

В данной модели существует «особое» стабильное соотношение производителей и продукта, при котором не происходит изменений.

На рисунках 30 и 31 можно наблюдать, как изменится фазовый портрет при условии $aef + cd - cf \leq 0$. Данное условие показывает, что при недостаточном приросте производителей и слабой технологической оснащенности, запас продуктов постепенно уменьшается, пока не станет равен 0.

2.3. Система «Производители – Продукт – Управленцы»

2.3.1. Описание системы

Система «Производители – Продукт – Управленцы» (ППУ) является усложненной версией системы «ПП» с добавлением нового участника – управляющих производством. Система «ППУ» имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - bx + cy - lz)x \\ \dot{y} &= \begin{cases} F = d \frac{x}{1 + ey} \frac{1 + \varepsilon_1 z}{1 + \varepsilon_2 z} - fx - kz \text{ при } y > 0 \\ 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } F \leq 0 \text{ или } y = 0 \text{ и } F > 0 \end{cases} \\ \dot{z} &= (-g - hz + my)z \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь x – это численность производителей, y – количество используемого продукта, который есть в наличии, z – численность управленцев. Под продуктом понимаем всё то, что нужно для жизни человека, что он потребляет и чем пользуется. $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – постоянные положительные параметры.

В дополнение к уже известным параметрам системы ПП в данной системе:

g – естественная скорость появления новых управленцев.

h – конкуренция между управленцами.

k – потери продукта из-за потребления его управленцами.

l – «регулировка» управленцами количества производителей.

m – скорость появления новых управленцев в зависимости от количества продукта в системе.

ε_1 и ε_2 – влияние управленцев на количество продукта.

2.3.2. Качественное исследование

Для нахождения положений равновесия необходимо решить систему:

$$\begin{cases} (a - bx + cy - lz)x = 0 \\ d \frac{x}{1 + ey} \frac{1 + \varepsilon_1 z}{1 + \varepsilon_2 z} - fx - kz = 0 \\ (-g - hz + my)z = 0 \end{cases}$$

В рассматриваемой системе присутствуют следующие положения равновесия:

1. $(0, y, 0)$;
2. $\left(\frac{aef+cd-cf}{bef}, \frac{d-f}{ef}, 0\right)$;
3. $\left(\frac{ah+cyh+lg-lmy}{bh}, \dots, \frac{my-g}{h}\right)$.¹

Некоторые точки равновесия не рассматривались из-за того, что они не несут физического смысла для данной модели.

Матрица Якоби выглядит следующим образом:

$$A(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_3}{\partial x} \\ \frac{\partial X_1}{\partial y} & \frac{\partial X_2}{\partial y} & \frac{\partial X_3}{\partial y} \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} & \frac{\partial X_2}{\partial z} & \frac{\partial X_3}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a - 2bx + cy - lz & cx & -lx \\ \frac{d(1 + \varepsilon_1 z)}{(1 + \varepsilon_2 z)(1 + ey)} - f & -\frac{edx(1 + \varepsilon_1 z)}{(1 + \varepsilon_2 z)(1 + ey)^2} & \frac{dx(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_2 z)(1 + ey)^2} - k \\ 0 & mz & -g - 2hz + my \end{pmatrix}$$

Рассмотрим прямую, состоящую из положений равновесия 1.

$$A(0, y, 0) = \begin{pmatrix} a + cy & 0 & 0 \\ \frac{d}{(1 + ey)} - f & 0 & -k \\ 0 & 0 & -g + my \end{pmatrix}$$

Данная матрица является вырожденной. Собственные значения из условия (1.2):

$$\lambda_1 = a + cy, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -g + my$$

Также, как и для модели ПП данное положение равновесие представляет критический случай №1. В данном случае центральное многообразие

¹ Положения равновесия 3 представлены таким образом, потому что для данной системы они имеют очень сложный вид для координаты y . Что также вызвало проблемы для аналитического исследования данных точек. Поэтому для них будут представлены несколько различных фазовых портретов.

одномерно и представляет ось OY , т.е. $(x = z = 0)$. Все ляпуновские величины равны нулю, следовательно, вся прямая $(0, y, 0)$ состоит из неподвижных точек.

Положение равновесия устойчиво, если выполняется условие $y < -\frac{a}{c}$. И неустойчиво при условии $y > -\frac{a}{c}$. В рассматриваемой системе устойчивое положение недостижимо, следовательно, неустойчиво при всех значениях y .

Рассмотрим положение равновесия 2.

$$A\left(\frac{aef+cd-cf}{bef}, \frac{d-f}{ef}, 0\right) = \begin{pmatrix} a - 2\frac{aef+cd-cf}{bef} + c\frac{d-f}{ef} & \frac{caef+c^2d-c^2f}{bef} & -\frac{l(aef+cd-cf)}{bef} \\ 0 & -\frac{d(aef+cd-cf)}{bf\left(1+\frac{d-f}{f}\right)^2} & \frac{d(aef+cd-cf)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{bef\left(1+\frac{d-f}{f}\right)^2} - k \\ 0 & 0 & -g + \frac{m(d-f)}{ef} \end{pmatrix}$$

Собственные значения для данного положения равновесия:

$$\lambda_1 = -\frac{aef+cd-cf}{ef}, \lambda_2 = -\frac{f(aef+cd-cf)}{bd}, \lambda_3 = -\frac{gef+md-mf}{ef}$$

Для данных собственных значений следует, что положение равновесия 2 является узлом. Из условия положительности параметров системы (2.2) следует, что узел (рисунок 31.) устойчив если выполняется:

$$\begin{cases} aef+cd-cf > 0 \\ gef+md-mf > 0 \end{cases}$$

Если $aef+cd-cf = 0$, то данное положение равновесия перестает существовать и переходит в прямую $(0, y, 0)$. При $aef+cd-cf < 0$ координата x данного положения равновесия меньше нуля, следовательно, такой случай в системе (2.2) не рассматривается.

2.3.3. Фазовые портреты

В результате были получены фазовые портреты:

$$\begin{cases} aef + cd - cf > 0 \\ gef + md - mf > 0 \end{cases}$$

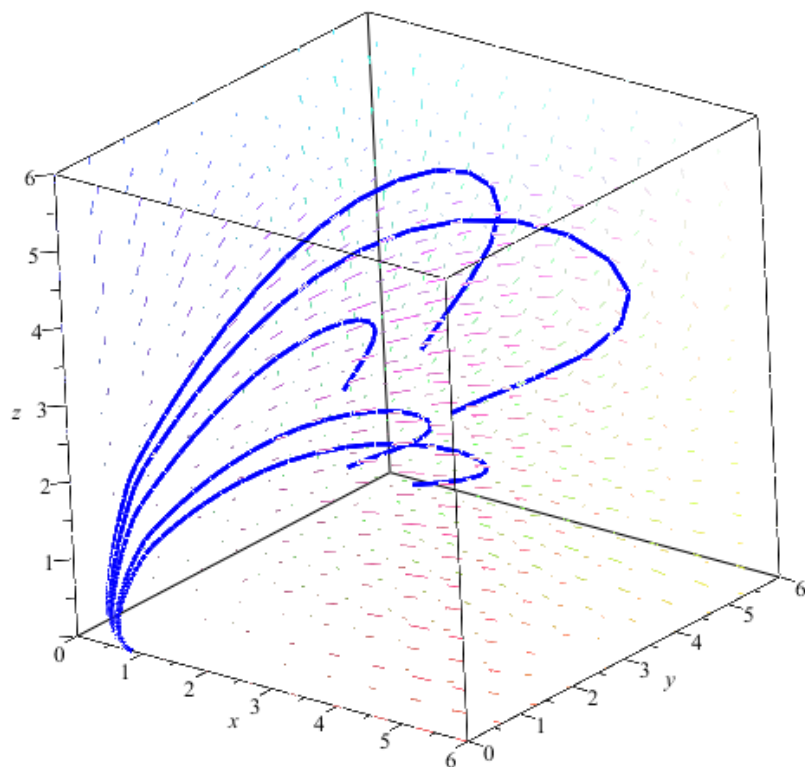


Рисунок 32.

$$aef + cd - cf = 0$$

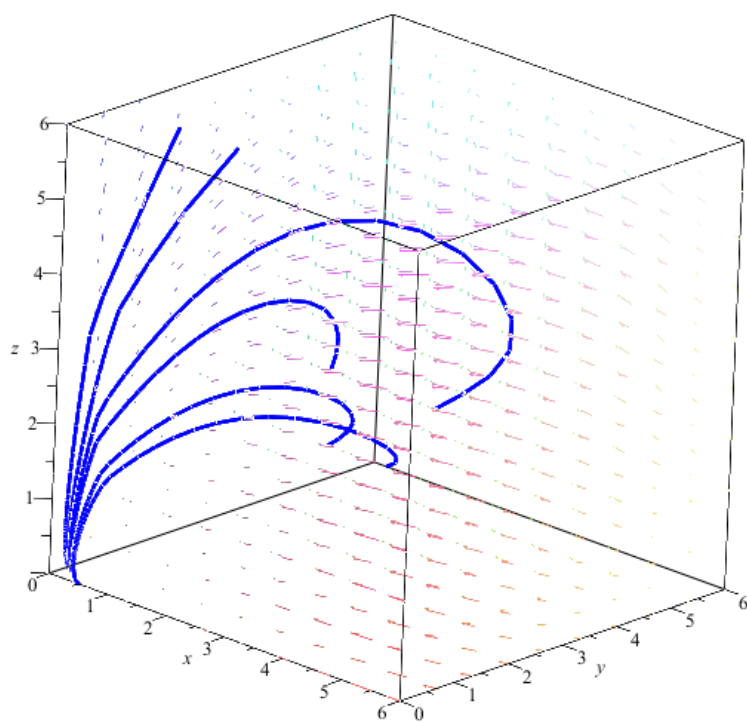


Рисунок 33.

Для положений равновесия 3 получены следующие фазовые портреты:

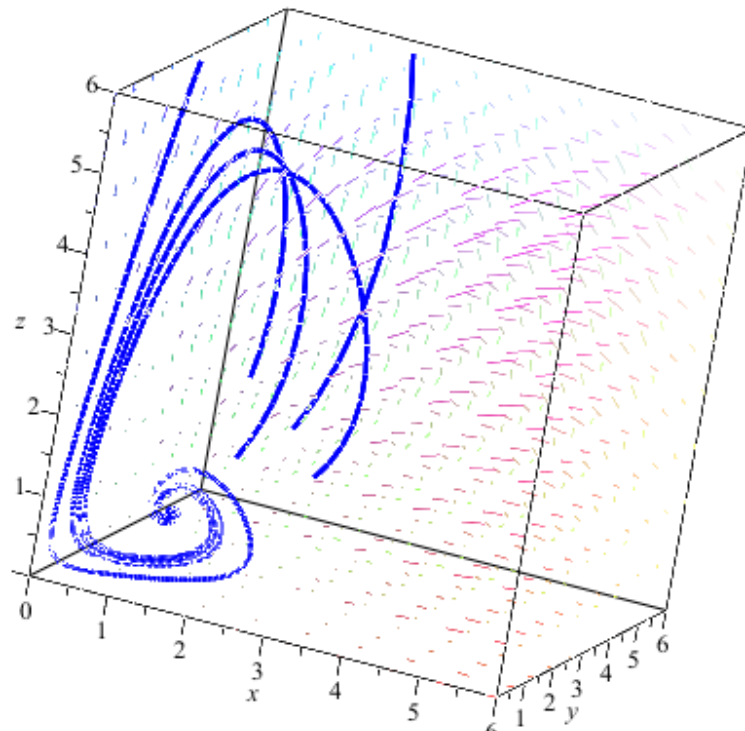


Рисунок 34.

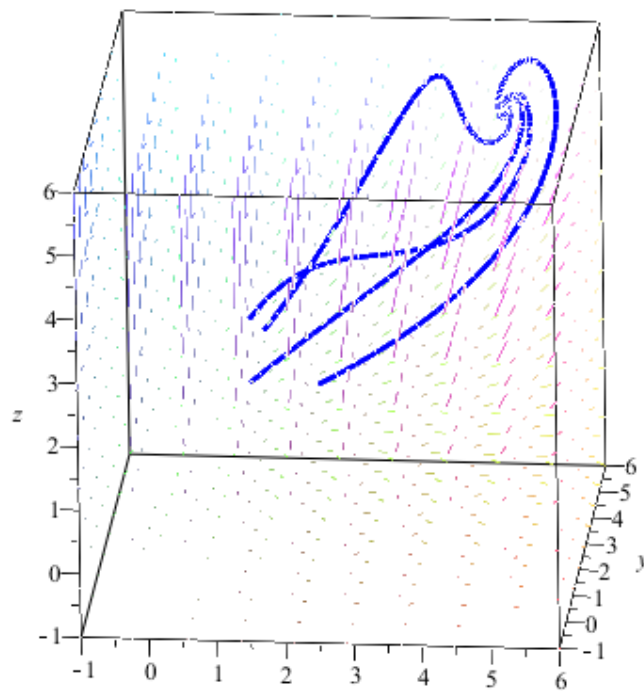


Рисунок 35.

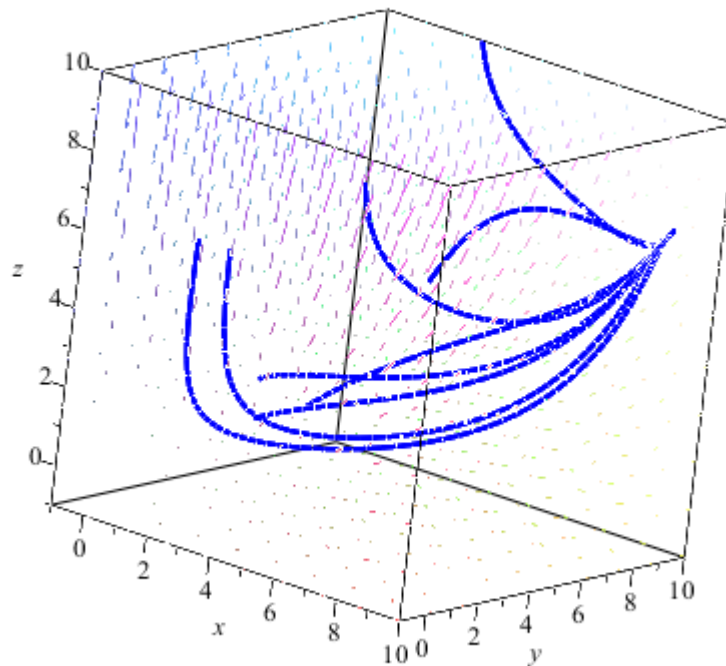


Рисунок 36.

2.3.4. Интерпретация полученных результатов

На рисунках 32, 33 изображен фазовый портрет для случая низкого прироста и слабой продуктивности производителей. Количество продукта постепенно уменьшается.

На рисунке 34 изображена подобная динамика, но в данном случае после падения количества продукта и численности производителей и управленцев, через несколько циклов попеременного роста с падением, заканчивает свое изменение в некотором равновесном состоянии, в котором, численность участников системы больше нуля.

Среди представленных фазовых портретов самая реалистичная картина представлена на рисунках 35 и 36.

Можно разделить все возможные сочетания начальных значений на несколько случаев:

1. Малое количество продукта, малое количество производителей и малое количество управленцев. В данном случае идет планомерный рост численности всех участников модели до некоторого соотношения. Основной вид динамики.

2. Малое количество продукта, большое количество производителей, малое количество управленцев. Если производителей слишком много, то идет резкое падение численности производителей до некоторого значения, при котором межвидовая конкуренция не слишком сильно оказывает влияние. В данном случае можно найти «оптимальное» значение между производителями и управленцами, которое будет давать быстрый рост производства.
3. Малое количество продукта, большое количество производителей, большое количество управленцев. Не стабильное состояние, при котором идет резкое падение количества управленцев, и незначительное снижение численности производителей.
4. Малое количество продукта, малое количество производителей, большое количество управленцев. Как и в случае 3 происходит резкое падение количества управленцев, в течение которого происходит уменьшение запаса продукта. Данный случай приводит к случаю 1 через какой-то промежуток времени.
5. Большое количество продукта, малое количество производителей, малое количество управленцев. За счет совместной работы производителей и управленцев происходит незначительный рост, влияние большого запаса снижает производительность.
6. Большое количество продукта, большое количество производителей, малое количество управленцев. Происходит резкое увеличение количества управленцев, за счет отсутствия данного участника. Происходит незначительный рост в численности производителей и в запасе продукта.
7. Большое количество продукта, малое количество производителей, большое количество производителей. В данном случае можно выделить 3 подэтапа:
 - Снижение количества управленцев с уменьшением запасов продукта, незначительный рост числа производителей.

- Численность управленцев практически не изменяется, медленный рост запасов продукта, быстрый рост числа производителей
- Равномерный рост количества всех участников модели, подобно случаю 1. До некоторого соотношения.

Заключение

Математические модели являются незаменимым средством в исследовании различных явлений в природе. Построив адекватную модель по полученным эмпирическим данным, а затем, исследовав ее, можно классифицировать различные состояния и прогнозировать поведение изучаемой системы. Что свидетельствует о большой значимости подобных исследований.

Во время создания данной работы были исследованы несколько моделей нелинейной динамики и представлены результаты этого исследования, что может представлять большой потенциал в различных сферах научной и прикладной деятельности. Были построены фазовые портреты, которые наглядно показывают возможные состояния модели. Для модели «Производители – Продукт – Управленцы» не все особенности динамики удалось пронаблюдать, так как возникли сложности в аналитическом исследовании для некоторых положений равновесия, из-за их сложного вида в зависимости от параметров, были приведены фазовые портреты различных состояний.

Стоит отметить, что исследуемые модели, имея большое количество параметров, охватывают очень много возможных отношений внутри системы, но даже они несут абстрактное представление о том, что может происходить в реальной ситуации. Поэтому улучшение уже существующих моделей (за счет представления параметров в виде функций) и их исследование является перспективами для дальнейшей работы.

Список литературы

1. В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников. Теория бифуркаций. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 1986г., том 5, 218с.
2. В. И. Арнольд. Теория катастроф, 3-е изд., перераб. и доп. – М.: «Наука», 1990г. – 128 с.
3. В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений – М.:«Наука», 1978г. – 304с.
4. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И, Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка – М.: «Наука» , 1966г., 568с.
5. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Методы качественной теории в нелинейной динамике – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003г. – 428 с.
6. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009г. – 548 с.
7. Д. Р. Меркин. Введение в теорию устойчивости движения, 3-е изд., перераб. и доп. – М.: «Наука», 1987г. – 304 с.
8. Н. Н. Баутин, Е.А. Леонтович. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, 2-е изд., - М.:«Наука», 1976г. – 496с.
9. Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. Математические модели биологических продукционных процессов – М.: Изд-во МГУ, 1993г. – 302с.
10. А. А. Гимельфарб, Л. Р. Гинзбург, Р. А. Полуэктов, Ю. А. Пых, В.А. Ратнер. Динамическая теория биологических популяций, под редакцией Р. А. Полуэктова – М.: «Наука», 1974г. – 456с.

11. А. В. Дорошин. Математическое моделирование в нелинейной динамике: учеб. пособие, – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008г. – 100 с.
12. Ж. Йосс, Д. Джозеф. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций – М.: Мир, 1983г. – 304с.
13. В. Н. Говорухин. Численный анализ динамических систем: учеб. пособие – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2009г. – 80с.
14. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. – Казань: Казанский университет, 2013г. – 298 с.
15. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей, — Москва-Ижевск: ИКИ, 2002г. – 560с.
16. Н. Н. Баутин. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости – М.: «Наука», 1984г. – 176с.
17. Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н.Чоу. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Перевод с английского под редакцией Ю.С. Ильяшенко – М.:МЦНМО, 2005г. – 416с.
18. Г. А. Леонов, Н. В. Кузнецов, Е. В. Кудряшова, Прямой метод вычисления ляпуновских величин двумерных динамических систем, Тр. ИММ УрО РАН, 2010, том 16, номер 1,с. 119–126.
19. Серебрякова Н.Н. О поведении динамической системы с одной степенью свободы вблизи тех точек границы области устойчивости, где безопасная граница переходит в опасную // Известия АН СССР. ОТН Механика и машиностроение, 2, 1959г., с. 178-182.
20. Леонов Г.А. Необходимые и достаточные условия ограниченности решений двумерных квадратичных систем в положительно инвариантной полуплоскости // Доклады академии наук, сер. Математика, 2010г., том 430, № 2, с. 157-159.

21. Асланов В. С. Нелинейная динамика: Электронное учебное пособие/ Асланов В. С., Ледков А. С. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2010г. – 92с.
22. В.Н. Разжевайкин. Модели динамики популяций. – М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2006г. – 88с.
23. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985г. – 254с.
24. Г. Ю. Ризниченко. Популяционная динамика. <http://www.library.biophys.msu.ru/mathmod/pd.html>.
25. А. П. Иванов. Элементы качественной теории динамических систем. https://mipt.ru/education/chair/theoretical_mechanics/upload/fb5/dynsist.pdf.
26. А. В. Коротаев, А. С. Малков, Д. А. Халтурина. Компактная математическая макро модель технико-экономического и демографического развития Мир – Системы. (1 – 1973 гг.). <http://www.popmodel.narod.ru/korotayev/article.pdf>.
27. С. Ю. Малков. История и синергетика: математическое моделирование социальной самоорганизации. <http://aik-sng.ru/text/krug/2005/41-73.pdf>.
28. В. А. Аль-Рефаи, И. В. Науменко. Модель конкуренции в системах типа «Производитель – Перекупщик». <http://cyberleninka.ru/article/n/model-konkurentsii-v-sistemah-tipa-proizvoditel-perekupschik>.
29. В. А. Аль-Рефаи, И. В. Науменко. Разработка математической модели конкурентных процессов. <http://cyberleninka.ru/article/n/razrabotka-matematicheskoy-modeli-konkurentnyh-protsessov>.

Приложение

Построение фазового портрета для модели «Производители – Продукт».

sys – система (2.1);

d1,d2 – уравнения системы (2.1);

restart:

with(DEtools):

a:=1.1;b:=0.2;c:=0.2;d:=1.2;e:=0.1;f:=0.6;

d1:=diff(x(t),t)=a*x(t)-b*(x(t)^2)+c*x(t)*y(t);

pweq:=piecewise(y(t)>0,d*(x(t)/(1+e*y(t)))-f*x(t),y(t)<=0,0);

d2:=diff(y(t),t)=pweq;

sys:=d1,d2;

phaseportrait([sys], [x(t), y(t)], t = 0 .. 100, [[x(0) = 1, y(0) = 1],[x(0) = 2, y(0) = 3],[x(0) = 2, y(0) = 5],[x(0) = 2, y(0) = 6],[x(0) = 2, y(0) = 12]], stepsize = 0.1e-1,x=0..x1,y=0..x1);

Построение фазового портрета для модели «Производители – Продукт – Управленцы».

sys – система (2.2);

d1,d2,d3 – уравнения системы (2.2);

IC – начальные условия;

RHS – правые части уравнений системы (2.2);

restart:

with(DEtools):

with(plots):

a:=.5;b:=0.6;c:=1;d:=.6;e:=.8;f:=.6;g:=.4;h:=.3;k:=.5;l:=.4;m:=.7;n:=.3;e1:=.5;
e2:=.6;

d1:=diff(x(t),t)=a*x(t)-b*(x(t)^2)+c*x(t)*y(t)-l*x(t)*z(t);

```

pweq:=piecewise(y(t)>0,d*(x(t)/(1+e*y(t)))*((1+e1*z(t))/(1+e2*z(t)))-f*x(t)-
k*z(t),y(t)<=0,0);
d2:=diff(y(t),t)=pweq;
d3:=diff(z(t),t)=-g*z(t)-h*(z(t)^2)+m*y(t)*z(t);
sys:=d1,d2,d3;
IC:=[[x(0) = 1, y(0) = 4, z(0)=1],[x(0) = 1, y(0) = 6, z(0)=1],[x(0) = 1, y(0) =
4, z(0)=2],[x(0) = 2, y(0) = 4, z(0)=1]];
RHS := eval(map(rhs,[sys]), [x(t) = x, y(t) = y, z(t) = z]);
p1:=fieldplot3d(RHS,x=0..6,y=0..6,z=0..6, grid=[10,10,10],axes=boxed):
p2:=DEplot3d([sys],[x(t), y(t),z(t)], t = 0 .. 100, IC, stepsize = .1,
linecolor=blue):
display(p1,p2, view = [0..6,0..6,0..6]);

```