

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК  
Кафедра математического моделирования

ДОПУЩЕНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК  
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ  
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой

 д.ф.-м.н., доцент  
Татосов А.В.

21 июня 2016 г.

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА  
И РАЗВИТИЯ АРКТИЧЕСКОГО РЕГИОНА (НА ПРИМЕРЕ ЯНАО)

*01.04.01 Математика*

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил работу  
Студент 2 курса  
очной формы обучения



Крыжановский  
Олег  
Андреевич

Руководитель работы  
к.с.-х.н.,  
доцент



Салова  
Елена  
Владимировна

Рецензент  
к.ф.-м.н.,  
доцент кафедры ММИГиСУЭ  
ФГБОУ ВО ТюмГУ



Бардасов  
Сергей  
Александрович

Тюмень 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И РАЗВИТИЯ .....	7
1.1 Эволюция взглядов на понятия «экономический рост» и «экономическое развитие» .....	7
1.2 Природные ресурсы в модели экономического роста Р. Солоу....	12
1.3 Экономико-математическое моделирование экономического роста страны и региона .....	24
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ПРИ СИМУЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ.....	30
2.1 Модели авторегрессии временных рядов .....	30
2.2 Подходы к симулированию динамики экономики, описываемой системой уравнений.....	35
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И РАЗВИТИЯ АРКТИЧЕСКОГО РЕГИОНА (НА ПРИМЕРЕ ЯНАО) НА 2015-2019 ГГ.....	40
3.1. Построение системы уравнений авторегрессии для факторов экономического роста и развития.....	40
3.2. Построение функции Кобба-Дугласа для ЯНАО .....	54
3.3. Построение модели Солоу для ЯНАО .....	60
3.4. Динамическая стохастическая модель общего равновесия региона с учетом расходов консолидированного бюджета субъекта Федерации .....	67
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	89
СПИСОК ИСТОЧНИКОВ .....	92

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** В условиях роста социально-экономической напряженности, сокращения доходов всех уровней бюджета РФ, необходимости индексации социальных выплат социально незащищенным категориям граждан на первый план выходит задача ускорения экономического роста и развития именно тех регионов, производственные мощности которых являются основными источниками пополнения доходной части федерального бюджета. В РФ одним из таких наиболее важных регионов является ЯНАО, так как на территории данного региона добывается 85% природного газа, являющего одним из основных компонентов в структуре экспорта РФ.

Экономическая составляющая устойчивого развития базируется на концепции оптимального использования ограниченных ресурсов [66]. Достижению поставленной задачи может способствовать выявление ключевых факторов экономического роста с использованием корреляционно-регрессионного анализа. На данном этапе развития теории экономического роста основными факторами, влияющими на объём произведенного валового регионального продукта, считают затраты на капитал, труд и информацию.

**Цели и задачи исследования.** Целью магистерской диссертации является дать оценку динамики экономического роста и развития региона (на примере ЯНАО).

Для достижения цели в работе были поставлены следующие задачи:

- систематизировать этапы развития теории экономического роста;
- выявить роль и значение ключевых факторов экономического роста и развития в региональной экономике;
- определить авторегрессионные зависимости ключевых факторов экономического роста и развития в региональной экономике;

— модифицировать базовую модель оценки динамики экономического роста и развития для региона (на примере ЯНАО).

**Объектом исследования** работы выступают экономический рост и развитие в регионе.

**Предмет исследования** – оценка динамики и моделирование экономического роста и развития в регионе.

**Методологическая, теоретическая и информационная база исследования.** Исследование влияния ключевых факторов на темпы экономического роста осуществлялось на основе построения теоретических моделей в работах Д. Асемоглу, Ф. Агийона, Р. Барро, Р. Харрода, Ф. Кидланда и Э. Прескотта, П. Ромера и других авторов.

Среди большого числа эмпирических исследований по этой теме необходимо отметить работы Г.Мэнкью, Д.Ромера и Д.Вэйла, Р.Барро, Ф.Агийона, М. Абрамовица, П. Самуэльсона. Авторами российских работ, посвященных изучению факторов экономического роста и развития и их воздействия на экономическую динамику, являются Д. Антипов, А. Моисеев, Д. Некипелов, Р. Нижегородцев, Н. Петухов, В. Полтерович.

При написании работы в методологическом плане применялась следующая совокупность методов: анализ научной литературы по теме диссертационной работы, изучение и обработка данных, сравнение, методы теории вероятностей и математической статистики, численные методы.

**Научная новизна диссертационного исследования** заключается в следующем:

1. Модифицирована базовая динамическая стохастическая модель общего равновесия для региона РФ (на примере ЯНАО), позволяющая найти отклонения от тренда некоторых макроэкономических факторов (занятость, заработная плата, потребление домохозяйств, процентная ставка, инфляция) в зависимости от макроэкономических шоков: изменения скорости уровня

инфляции, изменения совокупной факторной производительности, изменения межвременных предпочтений потребителей, изменения расходов консолидированного бюджета субъекта Федерации.

2. Создан комплекс исполняемых файлов ППП MatLab и Dynare, реализующий некоторые положения, описываемые в диссертационном исследовании.

**Теоретическая значимость работы** состоит в выявлении особенностей планирования и прогнозирования экономического роста и развития.

**Практическая значимость работы** состоит в оценке влияния макроэкономических шоков на некоторые макроэкономические факторы (занятость, заработная плата, потребление домохозяйств, процентная ставка, инфляция) региона РФ (на примере ЯНАО).

**Структура работы** обусловлена предметом, целью и задачами исследования. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка источников. Работа изложена на 100 страницах, содержит 24 таблицы, 13 рисунков. Список использованных источников содержит 100 наименований.

Введение раскрывает актуальность, определяет степень научной разработки темы, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования, раскрывает теоретическую и практическую значимость работы.

В первой главе «Теоретические основы анализа экономического роста и развития» нами была рассмотрена эволюция взглядов на понятия «экономический рост» и «экономическое развитие», изучены природные ресурсы в модели экономического роста Р. Солоу, а также проанализированы основы экономико-математического моделирования экономического роста на примере страны и региона.

Во второй главе «Моделирование временных рядов и применение численных методов при симулировании экономической динамики»

представлены методы построения моделей авторегрессии временных рядов, а также симулирования динамики экономики, описываемой системой уравнений.

В третьей главе «Моделирование экономического роста и развития арктического региона (на примере ЯНАО) на 2015-2019 гг.» построены авторегрессии некоторых факторов экономического роста и развития (имеющих авторегрессионный характер), построена функция Кобба-Дугласа и модель Солоу для ЯНАО, модифицирована базовая динамическая стохастическая модель общего равновесия для региона (на примере ЯНАО) с учетом расходов консолидированного бюджета субъекта Федерации.

В заключении обобщены результаты диссертационного исследования, сформулированы основные выводы.

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И РАЗВИТИЯ

## 1.1 Эволюция взглядов на понятия «экономический рост» и «экономическое развитие»

В обыденном сознании рядового индивида категория «экономический рост» чаще всего не отличается от категории «экономическое развитие». Однако, по общепринятым экономическим взглядам эти понятия необходимо четко различать, поскольку на современном этапе изучения данной проблематики экономический рост является только одним из множества компонентов экономического развития. Помимо непосредственно экономического роста к факторам экономического развития сейчас принято относить институциональные изменения, связанные с уровнем демократизации общества, повышение среднедушевых доходов, продолжительности жизни населения, уровня образования и прочие.

Общепринятым, практически каноническим, определением является следующее: «экономический рост - долгосрочная тенденция увеличения реального объема выпуска (ВВП) в экономике» [76]. Экономический рост также не следует путать со стадией экономического цикла «подъем», так как волатильность экономики относительно уровня тренда не свидетельствует о наличии, либо отсутствии экономического роста, проявляющегося в качестве долгосрочной тенденции.

Экономический рост может достигаться путем эксплуатации населения, нахождения месторождений полезных ископаемых, изменения мировых транспортных потоков и прочих причин, не имеющих прямого отношения к сознательно проводимой государством экономической политике. Однако, темп прироста валового внутреннего продукта до сих пор выступает

наиважнейшим критерием результативности проводимых государством фискальной, промышленной, денежно-кредитной и прочих политик, так как данный показатель является достаточно простым для расчета и позволяет сравнивать динамику экономического роста разных стран.

Проблема некоторой неадекватности основного показателя, характеризующего экономического рост, известна уже давно. Можно отметить замечание А. Сена [49, с. 23-24], в котором он замечает, что уровень социального благополучия в бедных странах может быть выше, чем в богатых странах (по уровню среднедушевого ВВП) за счет более равномерного перераспределения дохода, в частности, путем использования систем социального и пенсионного страхования.

Первым ученым, начавшим изучать проблематику теории экономического роста, принято считать А. Смита. В своём труде «Исследование о природе и причинах богатства народов», он связывал его рост с улучшением отдачи от используемых факторов производства (земли, труда и капитала) [50]. При этом труд зависел от скорости роста численности населения страны, а также имеющихся у населения располагаемых доходов. Капитал, с другой стороны, – от объёмов сбережений капиталистов и их желания продолжать и развивать своё дело. Оба рассматриваемых фактора признавались А. Смитом эндогенными для экономики страны.

Рост отдачи от фактора производства «земля» увязывался им с географическими открытиями, а также возможностями повышения плодородия почвы. Если использовать современные подходы к классификации, то можно сказать, что А. Смит рассматривал экстенсивный тип экономического роста.

Впервые агрегировал между собой различные взгляды и теории по проблеме использования факторов производства Ж.Б. Сэй. Его принято считать основоположником трехфакторной теории производства. Основной



заслугой Ж.Б. Сэя является то, что он первым принял факт равнозначимости всех трех факторов между собой.

Именно равноправие изучаемых факторов послужило поводом для критики Ж.Б. Сэя, наиболее последовательной и полной из которых является, несомненно, критика со стороны К. Маркса. Однако, именно подход Ж.Б. Сэя привел к повсеместному применению численных методов для выбора оптимального набора трех основных факторов для получения максимально возможного выпуска. Ж.Б. Сэй пока еще не рассматривал проблему ограниченности ресурсов, но сама задача об оптимальном выборе впервые формулируется именно им.

Впервые проблему убывающей отдачи факторов производства, в первую очередь фактора «земля» затронул Т. Мальтус. Изучив динамику численности населения, он заметил, что она растет по экспоненте, а плодородие почвы остается практически неизменным. Только открытие и использование новых земель позволяло отсрочить неминуемый голод. Исчезновение «белых пятен» на карте мира привело к увеличению интенсивности войн за рынки ресурсов. Идеи Т. Мальтуса получили подтверждение касаясь не только фактора «земля», однако, ускорение научно-технического прогресса за последние 150 лет позволило значительно увеличить отдачу всех факторов производства и, частично, решить проблему их ограниченности.

Коренной перелом в классической политической экономии совершил К. Маркс. Он впервые обосновал экономическую причину возникновения безработицы. Он увидел, что в производстве происходит активное вытеснение фактора «труд» фактором «капитал», повсеместное применение машин приводит к обнищанию рабочего класса. К. Маркс сделал из этого неоднозначный вывод, что в будущем это приведет к разрушению капиталистического способа производства. Однако, с чем согласны

большинство современных ученых, он выделил ключевую роль научно-технического прогресса в развитии межклассовых отношений.

Дж. С. Милль окончательно оформил классическую теорию, долговременного развития экономики. Основой его концепции стал процесс непрерывного накопления капитала, ведущий к непрерывному увеличению спроса на труд. Этот процесс не может продолжаться до бесконечности вследствие убывающей отдачи от масштаба, приводящей к росту издержек на рабочую силу, что приводит к снижению нормы прибыли.

Й.А. Шумпетер является автором ныне очень популярного термина «инновации». В русле концепции Й.А. Шумпетера основным инициатором прогресса является предприниматель, который, максимизируя целевую функцию получения монопольной прибыли, приводит к общему развитию. Это происходит вследствие появления новых видов сырья, материалов, продукции, выхода фирм на новые рынки, либо создания таких рынков, разработки технологий, обеспечивающих больший выпуск продукции на единицу затрат и т.д. Й.А. Шумпетер выделял ключевую роль кредита как источника капитала для экономического развития.

Дж. М. Кейнсом был предложен принципиально другой подход к проблеме экономического роста и развития. Он впервые начал рассматривать этот процесс с точки зрения совокупного спроса всех макроэкономических агентов, а не с точки зрения совокупного предложения. Валовый выпуск макроэкономических систем распадается на две компоненты – совокупное потребление и совокупное сбережение. Для долгосрочной динамики важной является зависимость, согласно которой при росте дохода потребителя растет предельная склонность к сбережениям, а предельная склонность к потреблению соответственно сокращается [28, гл. 8].

Кейнсом было введено понятие мультипликатора, который представляет собой соотношение между приростом совокупного дохода и инвестиционным

спросом, вызвавшим этот прирост. Кейнсианская теория роста в дальнейшем была переосмыслена и продолжена представителями кейнсианской школы, а затем некейнсианцами и посткейнсианцами. Среди последователей этих направлений следует назвать Р. Харрода, Е. Домара, Дж. Робинсон, Н. Калдора, Л. Пазинетти, Дж. Мида.

Обобщая рассмотренные теории, следует выделить такие ключевые факторы экономического роста как:

- А) земля (природные ресурсы);
- Б) капитал;
- В) труд;
- Г) научно-технический прогресс (знания, информация);
- Д) предпринимательские способности.

«Научно-технический прогресс может, по нашему мнению, выступать как самодостаточный показатель, так и способствовать увеличению производительности других факторов за счёт увеличения плодородия почв, совершенствования технологий производства, повышения квалификации персонала и т.д.

Количественными показателями экономического роста стран выступают в основном абсолютные и относительные значения ВВП (иногда ВНП), среднегодового располагаемого дохода на душу населения. Иногда для характеристики уровня развития также используют показатели национального дохода, национального богатства; показатели платёжного баланса (соотношения требований и обязательств); величину золотовалютных резервов» [63-64].

Теоретическому осмыслению тенденций и факторов роста экономики современной России посвящены труды академика Л.И. Абалкина. Он обращал внимание на проблему существенного снижения темпов роста инвестиций в основной капитал и на резкое несоответствие пороговому значению расходов

на гражданскую науку. В работах российских учёных также отмечается, что низкая заработная плата является главным тормозом научно-технического прогресса [82], [83].

Необходимость развития промышленности как локомотива технического развития обосновывается А.А. Акаевым. В то же время С.Ю. Глазьев придерживается мнения, что быстрый подъем до уровня развитых стран возможен за счет опережающего развития ключевых производств и факторов нового технологического уклада. Для того, «...чтобы «удержаться на гребне» новой волны экономического роста, инвестиции в развитие производств нового технологического уклада должны увеличиваться ежегодно не менее чем в 1.5 раза, доля расходов на НИОКР в ВВП – достигнуть 4%» [83].

## 1.2 Природные ресурсы в модели экономического роста Р. Солоу

Будем считать, что фиксированное количество земли  $T$  доступно для экономики производства каждого периода, и что продукция производится в соответствии с:

$$Y = BK^{\alpha}T^{\beta}L^{1-\alpha-\beta} \quad (1)$$

Мы предполагаем, что  $B$  находится между нулем и единицей, а также что,  $\alpha + \beta < 1$ .

Индексы для экзогенных технологий меняются, мы предполагаем, что технологический индекс умножается для всей производственной функции. Производственная функция обладает постоянной отдачей от масштаба в  $K$ ,  $T$ ,  $L$  и вместе они отражают стандартный аргумент копирования. Один из способов удвоить выпуск заключается в копировании (экстенсивный путь

развития), а именно: построить новый завод идентичный предыдущему, поместить его на новый участок той же площади, и нанять ровно столько же рабочих.

Как и в стандартной модели Солоу, данная экономика демонстрирует экзогенный технологический прогресс и экзогенный роста населения, и капитал накапливается в стандартном виде:

$$\frac{\dot{B}}{B} = g_B \quad (2)$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \quad (3)$$

$$\dot{K} = sY - dK \quad (4)$$

где  $s$  - постоянная величина инвестиций;

$d$  - постоянная норма амортизации [42].

Мы начнем с анализа траектории сбалансированного роста этой модели. В частности, мы стремимся ответить на вопрос, что такое темп роста выработки на одного работника в экономике сбалансированного роста?

Из-за наличия земли, оказывается немного трудно анализировать модель с точки зрения технологии и соотношение капитала с технологией. Вместо этого, мы будем анализировать модель в различных вариациях.

В траектории сбалансированного роста легко увидеть, что капиталоемкость  $K/Y$  будет постоянной. Поэтому мы будем управлять производственной функцией в уравнении (1). Чтобы получить капиталоемкость в правой части уравнения, мы разделим обе части уравнения (1) на  $Y^\alpha$ , чтобы получить:

$$Y^{1-\alpha} = B \left(\frac{K}{Y}\right)^\alpha T^\beta L^{1-\alpha-\beta} \quad (5)$$

Теперь возведем обе части уравнения в степень  $1/(1-\alpha)$ :

$$Y = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} T^{\frac{\beta}{1-\alpha}} L^{1-\frac{\beta}{1-\alpha}} \quad (6)$$

Количество земли в экономике,  $T$ , постоянно, и капиталоемкость тоже. Таким образом, можно взять логарифмы и производные уравнения из уравнения (6), чтобы показать, что темпы роста общего объема роста, по траектории сбалансированного роста  $g_y$ , выражаются через:

$$g_Y = g + (1 - \bar{\beta})n, \quad (7)$$

где мы даем обозначения  $g \equiv g\beta/(1 - \alpha)$  и  $B \equiv B/(1 - \alpha)$ . Тогда темп роста выработки на одного работника:

$$g_y = g - \bar{\beta}n \quad (8)$$

Это выражение вызывает ряд замечаний. Во-первых, обратите внимание, полезно проверить, что если  $\beta = 0$ , то земля не играет никакой роли в модели и  $g_y = g$ , как и в базовой модели Солоу с техническим прогрессом. Во-вторых, долгосрочные темпы роста экономики земли зависят не только от скорости технологических изменений. Важность Земли в производстве,  $\beta$ , и темпы роста численности населения в настоящее время играют значительную роль. В самом деле, интерпретация этого выражения говорит о классической модели гонки между техническим прогрессом и убывающей доходностью земли в виде фиксированного фактора.

Рассмотрим сначала случай, в котором нет технического прогресса,  $g=0$ , этот случай является одним из способов представления варианта мальтузианского аргумента. При наличии фиксированного предложения земли, производственная функция демонстрирует убывающую отдачу капитала и труда.

Давление на фиксированные ресурсы заставляет предельный продукт труда падать, и даже накопление капитала не может полностью компенсировать этот эффект. При  $g=0$ , траектории сбалансированного роста имеют отрицательный рост на душу населения одного работника в размере пропорционально скорости роста населения. Уровень доходов на душу населения в такой экономике снижается до нуля.

Технологический прогресс имеет потенциал, чтобы компенсировать это воздействие. При уменьшении уровня технологий,  $B$ , может сделать труд, землю и капитал все более продуктивными. Если эти увеличения достаточно велики, то они могут компенсировать давление на фиксированные ресурсы и привести к устойчивому росту доходов на душу населения.

В-третьих, чем более важна земля в производстве (то есть, чем выше  $\beta$ ), тем ниже темп долгосрочного роста. Учитывая предыдущий пункт, можно сказать: чем важнее земля, тем резче будет убывать отдача капитала и рабочей силы в экономике.

Наконец, эта модель дает представление о последствиях роста населения. В основе модели эндогенного роста темп роста технологического прогресса положительно зависит от темпов роста населения: т.е., чем больше людей, тем больше будет идей. Но при наличии фиксированных ресурсов, таких как земля, мы видим негативные последствия роста численности населения, ведь в качестве фиксированного ресурса земля должна быть разделена между большей группой людей. Эти две силы представляют собой

гонку между техническим прогрессом и убыванием плодородия, связанные с фиксированными ресурсами.

Земля может быть использована каждый период без вероятности истощения. В противоположность этому, многие природные ресурсы находятся в конечной поставке и истощении, когда они используются в производстве. Такие невозобновляемые ресурсы включают в себя нефть, природный газ, уголь, медь, железная руда и золото. Вполне возможно, что мировая экономика, в конечном счете, может исчерпать эти ресурсы.

Чтобы включить невозобновляемые ресурсы в нашу модель роста, предположим, что производство определяется

$$Y = BK^{\alpha}E^{\gamma}L^{1-\alpha-\gamma} \quad (9)$$

где  $E$  представляет собой энергию, вложенную в производство. Предположим, что  $\gamma$  находится между нулем и единицей, а  $\alpha + \gamma < 1$ . Таким образом, эта производственная функция обладает постоянной отдачей от масштаба капитала, энергии и труда, вместе взятых. Для упрощения, мы опускаем землю в этой модели, по крайней мере, на этот раз.

Пусть  $R_0$  обозначает начальные запасы невозобновляемых энергетических ресурсов. Когда экономика использует сумму  $E$  энергии в производстве, запас ресурсов будет исчерпан. Таким образом, ресурсы подчиняется дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению накопления капитала, только он рассеивается, а не накапливается:

$$\dot{R} = -E \quad (10)$$

Что определяет  $E$ , количество энергии, используемой в производстве каждого периода? В более сложной модели, фирмы будут потреблять энергию,



не понизятся цены на энергоносители, и другие фирмы начнут поставлять энергию по рыночным ценам. Предположительно, цена будет корректироваться с учетом дефицита ресурсов, и это взаимодействие будет определять со временем значение  $E$ . Это интересная общая проблема равновесия, но это выходит за рамки нашего исследования, чтобы проанализировать эту модель здесь. Результатом такой модели является то, что в долгосрочной перспективе, постоянная доля оставшегося запаса энергии используется в производстве каждого периода. Это похоже на хорошее начало, тем более что прослеживается параллельная постоянная предположения по модели Солоу.

Пусть  $S_E = E / R$  - постоянная доля оставшихся запасов энергии, которая используется в производстве каждого периода, очевидно,  $S_E$  - некоторое число между нулем и единицей. Разделив обе части уравнения (10) на  $R$ , получаем результат, что общий запас энергии, остающейся в экономике снижается с течением времени на  $S_E$ :

$$\frac{\dot{R}}{R} = -S_E \quad (11)$$

Решением этого дифференциального уравнения является уравнение, описывающее поведение рынка с течением времени:

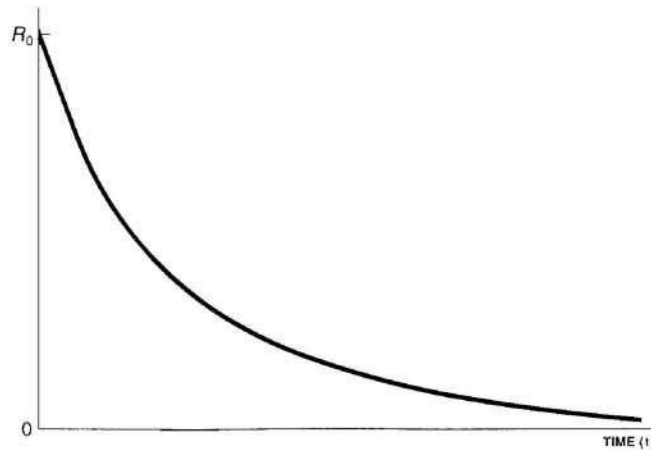
$$R(t) = R_0 e^{-S_E t} \quad (12)$$

Такое поведение демонстрирует отрицательную экспоненциальный роста по курсу  $S_E$ , как показано на рисунке 1.

Так как  $E = S_E R$  - количество энергии, используемое в производстве каждого периода, то получается:

$$E = S_E R_0 e^{-S_E t} \quad (13)$$

Так же, как общий запас энергии снижается со временем, количество энергии, используемой в производстве, также снижается с течением времени в этой модели.



**Рис. 1. Изменение сбережения энергии (R) с течением времени.**

Действуя, как мы это делали в модели с землей, удобно переписать производственную функцию с точки зрения капиталоемкости. Сначала мы разделим обе части уравнения на  $Y^\alpha$ , а затем решим  $Y$ , чтобы получить

$$Y = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} E^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} L^{1-\frac{\gamma}{1-\alpha}} \quad (14)$$

Из этого можно получить:

$$Y = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (S_E R_0 e^{-S_E t})^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} L^{1-\frac{\gamma}{1-\alpha}} \quad (15)$$

Полезно сравнить это уравнение с аналогичным в модели с землей. Во-первых,  $R_0$  играет ту же роль что и  $T$ , и ожидается, что убывание плодородия, связанное с этим фиксированным фактором будет играть такую же роль. Во-вторых, отрицательный экспоненциальный показатель измеряет истощение ресурсов. Обратите внимание, что это выглядит как "негативный технический прогресс" в уравнении. Наконец, использование интенсивности  $S_E$ , сначала, умножается, а затем и темпы истощения. С одной стороны, более интенсивное использование энергии повышает выходной ток за счет повышения  $E$  напрямую. С другой стороны, ресурс будет исчерпан быстрее остальных, которые будут использоваться меньше, в любой момент времени.

Пока балансируется рост, капиталоемкость постоянна. Поэтому, темп роста общего объема продукции роста будет:

$$g_y = g - \bar{\gamma}(S_E + n) \quad (16)$$

Как и в модели земли, у нас сокращенная запись, определяя  $g = g^{\beta/(1-\alpha)}$  и  $\bar{\gamma} = \gamma/(1-\alpha)$ . Наконец, темп роста выработки на одного работника по траектории сбалансированного роста:

$$g_Y = g - \bar{\gamma}S_E + (1 - \bar{\gamma})n \quad (17)$$

Этот результат очень похож на долгосрочные темпы роста в модели земли. Быстрый рост численности населения ведет к повышению давления на конечный запас ресурсов, снижение роста потребления на душу населения. В энергетической модели новое является то, что при увеличении скорости истощения  $S_E$  снижает долгосрочные темпы роста экономики. Ресурсы используются быстрее, оставляя меньший запас ресурсов и, следовательно, меньшей выпуск с каждым днем.

Можно предположить, что оптимальная политика является установка  $S_E$  равной нулю для сохранения темпов роста на самом высоком уровне. Однако, этот подход неверен: установка  $S_E$  на нулевом уровне будет означать, что экономика не использует энергию в производстве и, следовательно, будет производить нулевой выпуск. Существует фундаментальный компромисс между использованием энергии сегодня и в будущем.

Наличие  $S_E$  в уравнении, описывающее долгосрочный темп роста выпуска на одного работника должно быть неожиданностью. Он аналогичен уровню инвестиций (или, точнее, ставке капиталовложений), и изменение уровня инвестиций обычно влияет на уровень доходов сбалансированного роста, чем на темпы самого роста. Здесь, постоянное увеличение скорости истощения снижает долгосрочные темпы роста экономики. В самом деле, можно поднять долгосрочный рост экономики за счет снижения скорости истощения и принять более низкий уровень дохода сегодня.

Почему это так? Изменения инвестиционных ставок влияют на долгосрочные темпы роста экономики и являются ключом в линейных дифференциальных уравнениях модели. Здесь мы имеем именно такие уравнения. Скорость, которая снижает потребление энергии, равна скорости истощения,  $S_E$ .

Воздействие на природные ресурсы в производстве снижает долгосрочные темпы экономического роста. Вместо постоянной отдачи от капитала и труда, производственная функция демонстрирует убывающую отдачу капитала и рабочей силы, в то время как земля и энергия являются частными выпусками. Накопление капитала и рабочей силы, следовательно, работает на убывающую доходность. Быстрый рост численности населения оказывает давление на конечные ресурсы и влияет на технический прогресс.

Насколько сильна эта "помеха для роста"? Чтобы ответить на этот вопрос, нам нужна модель, которая включает в себя как землю, так и энергию,

то есть модель, которая сочетает в себе обе модели. Темп роста выпуска на одного работника по траектории сбалансированного роста в такой модели имеет вид:

$$g_y = g - (\bar{\beta} - \bar{\gamma})n - \bar{\gamma}S_E \quad (18)$$

Несколько условий, почему  $g$  в этом уравнении можно было бы назвать "помеха для роста" в результате наличия природных ресурсов. Это сумма, на которую рост снижается из-за, во-первых, демографического давления на конечные запасы ресурсов, и, во-вторых, истощение запасов невозобновляемых ресурсов.

Для количественной оценки размера "помехи для роста", мы должны знать значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ , и  $\gamma$ , и скорость истощения. Предположением, поддерживаемом в предыдущем анализе является то, что производственная функция принимает форму функции Кобба-Дугласа [14]. Одно из следствий этого предположения является то, что доли факторов дохода равны экспонентам факторов производственной функции. Например, предположим, что производственная функция равна

$$Y = F [K, T, E, L] = K^{\alpha} T^{\beta} E^{\gamma} L^{1-\alpha-\beta-\gamma}. \quad (19)$$

Также, предположим, что факторы, оплачиваются их предельными продуктами, как было бы в случае совершенно конкурентной экономике, и пусть эти цены равны  $r$ ,  $P_T$ ,  $P_E$ , и  $w$ . Наконец, позволим  $V_K$  обозначать долю от общего объема выпуска, оплачиваемого за капитал, так что:

$$V_K = rK / Y = F_K K / Y. \quad (20)$$

Определим  $V_T$ ,  $V_E$ , и  $V_L$  аналогичным образом как доли фактора на землю, другие ресурсы и рабочую силу.

Если производственная функция - это функция Кобба-Дугласа, тогда просто показать, что доля фактора дохода равна экспоненте факторов в производственной функции, то есть,  $V_K = \alpha$ ,  $V_T = \beta$ ,  $V_E = \gamma$  и  $V_L = 1 - \alpha - \beta - \gamma$ . Заметим, что из этого следует, что доля факторного дохода должна быть постоянной все время (константой).

Как эмпирический вопрос, доля доходов, выплачиваемых за труд действительно кажется постоянной. Однако данные свидетельствуют о том, что доля доходов, выплаченных за землю и невозобновляемые ресурсы, на самом деле все время снижаются. В той степени, что это правда, расчет помехи для роста, может быть неточными. Мы сначала исследуем доказательства предположений, о том, что доля доходов от ресурсов снижается, а затем мы исследуем возможное объяснение этих событий.

Одним из основных принципов экономики является то, что цены измеряют экономический дефицит: фактор, который имеет место в недостаточных материальных поставках, но при большом спросе будет иметь высокую цену. Используя определения о доли факторов изложенного выше, мы можем исследовать цену на ресурсы по отношению к цене труда, чтобы разобраться в экономическом дефиците ресурсов. Разделив долю фактора, оплачиваемого за ресурсы на долю фактора, оплачиваемого за труд мы имеем:

$$\frac{V_E}{V_L} = \frac{P_E E}{wL} \quad (21)$$

Перегруппировав немного, мы получаем выражение для цены на ресурсы по отношению к цене на труд:

$$\frac{P_E}{w} = \frac{V_E}{V_L} \cdot \frac{E}{L} \quad (22)$$

Так как природные ресурсы обедняются с течением времени и, население растет, можно ожидать снижение  $E/L$ . Это демографическое давление на природные ресурсы имеет тенденцию повышать относительную цену на ресурсы. Если доля фактора является постоянной, то мы должны ожидать найти рост относительных цен на ресурсы в исходных данных. Заметим, что это должно быть верно и для земли, а также: хотя  $T$  не снижается, рост населения все еще вызывает снижение  $T/L$ , что должно повышать относительную цену земли.

Учет природных ресурсов в модели Солоу приводит к ряду важных пониманий. Во-первых, существует фундаментальная гонка между технологическим прогрессом, с одной стороны, и препятствием для роста, связанной с фиксированностью и невозобновляемостью ресурсов, с другой. Это препятствие состоит из двух компонент: (1) демографическое давление на конечный спрос на эти ресурсы с снижающимся ростом в пропорции с темпами роста населения, и (2) темп истощения невозобновляемых ресурсов замедляет рост пропорционально доле этих ресурсов в производстве.

Доля дохода фактора природных ресурсов в целом сократилась на протяжении XX века, основное исключение из этого тренда было в течение 1970-х годов. Аналогичным образом, цены на большинство природных ресурсов по отношению к средней почасовой заработной плате сократилась на протяжении большей части двадцатого века.

Вместе эти тенденции предполагают, что в экономическом смысле ресурсы не становятся более дефицитными по отношению к труду, а, скорее, все более и более избыточными. Один из способов понять эти результаты – с помощью производственной функции CES, в которой эластичность замещения составляет меньше единицы [76]. Если ресурсы являются

необходимым вкладом в производство, но есть технологическое изменение как ресурсное увеличение при достаточно быстрой темпе, то доля ресурсов может снизиться с течением времени, возможно, до нуля. Именно в этом смысле парадокс ресурсов может быть разрешен: ресурсы могут становиться менее дефицитными, даже если они находятся в снижении физической поставки.

А что насчет будущего? С одной стороны, невозможно знать, будет ли технологический прогресс продолжаться, чтобы компенсировать конечный спрос на землю и невозобновляемые ресурсы. Однако участники рынка торгуют на миллиарды долларов стоимостью этих ресурсов каждый день в спотовых и фьючерсных рынках по всему миру. Цены, по которым эти ресурсы торгуются, отражают лучшее предположение экспертов энергетического рынка, как для текущего, так и будущего экономического дефицита природных ресурсов. Как общие тенденции в этих ценах (по отношению к заработной плате), так и доля стоимости этих ресурсов в производстве показывают, что, хотя мир, конечно, был бы лучше, если природные ресурсы были бы доступны в неограниченном пользовании, конечные физические поставки этих ресурсов не являются большим препятствием для экономического роста.

### 1.3 Экономико-математическое моделирование экономического роста страны и региона

Предпосылки модели динамического стохастического общего равновесия заключаются в следующем: домашние хозяйства решают следующую задачу:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, L_t) \quad (23)$$



$$s. t. K_{t+1} = (1 + R_{t+1})K_t - C_t + W_t L_t \quad (24)$$

где  $C$  - потребление,  $L$  - труд,  $K$  - богатство домашнего хозяйства, равное запасу капитала в экономике,  $R$  - ставка процента,  $W$  - заработная плата [39].

Запишем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \beta^t U(C_t, L_t) - \Gamma_t (K_{t+1} - (1 + R_{t+1})K_t + C_t - W_t L_t) \quad (25)$$

Условия первого порядка для задачи домашнего хозяйства имеют вид:

$$U'_C(C_t, L_t) = \Gamma_t \quad (26)$$

$$U'_L(C_t, L_t) = -\Gamma_t W_t \quad (27)$$

$$\Gamma_t = \beta(1 + R_{t+1})\Gamma_{t+1} \quad (28)$$

где  $\Gamma$  - множитель Лагранжа - является оптимальной оценкой распределения времени и дохода домашнего хозяйства.

Производственный сектор характеризуется совершенной конкуренцией и постоянной отдачей от масштаба, следовательно, экономическая прибыль равна нулю. Производственная функция имеет вид:

$$Y_t = A_t \cdot F(K_t, X_t \cdot L_t) \quad (29)$$

где  $A_t$  - стохастический параметр производительности, а  $X_t$  задает тренд производительности. Условия первого порядка:

$$A_t F'_K(K_t, L_t) = R_t + \delta \quad (30)$$

$$A_t F'_L(K_t, L_t) = W_t, \quad (31)$$

где  $\delta$  - норма амортизации. Уравнения (30-31) представляют собой условия

равновесия производителя в условиях совершенной конкуренции, когда производитель достигает максимально возможного объема производства при имеющихся ограниченных ресурсах, а их владельцы получают максимально возможный доход, равный продукту их ресурса.

Стохастическая составляющая производительности  $A_t$  следует следующему процессу:

$$\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + e_t, \quad (32)$$

а трендовая составляющая растет с постоянным темпом  $\mu$ :

$$X_t = (1 + \mu) X_{t-1} \quad (33)$$

где  $\rho$  - параметр модели,  $0 < \rho < 1$ , а  $e_t$  - случайная нормально распределенная величина.

Условия равновесия рынков имеют вид:

$$Y_t + (1 - \delta) K_t = C_t + K_{t+1} \quad (34)$$

Предполагается, что в анализируемой модели закрытая экономика, т.е. без внешней торговли, также в ней нет государства и фирм. Весь доход распределяется между совершенно конкурентными домохозяйствами, которые делят его либо на потребление, либо на увеличение запаса капитала.

Равновесие в экономике определяется уравнениями (23-34). По закону Вальраса исключаем из рассмотрения уравнение (23).

«Состояние равновесия, по Вальрасу, предполагает наличие трех условий:

- 1) спрос и предложение факторов производства равны, на них

устанавливается постоянная и устойчивая цена;

2) спрос и предложение товаров и услуг также равны и реализуются на основе постоянных, устойчивых цен;

3) цены товаров соответствуют издержкам производства» [88].

Проведем спецификацию модели. Предположим, что функция полезности является логарифмической

$$U(C, L) = \ln C + \theta \ln(1 - L), \quad (35)$$

где  $\theta$  - параметр модели, откуда  $U'_C = 1/C$ , а  $U'_L = -\theta/(1-L)$ .

Производственная функция имеет форму Кобба-Дугласа:

$$Y_t = AK_t^\alpha (X_t L_t)^{1-\alpha} \quad (36)$$

Для исключения инфляционной составляющей перепишем все уравнения системы через переменные, нормированные на тренд  $c = C/X$ ,  $k = K/X$ ,  $y = Y/X$ ,  $w = W/X$  и т. д. Единственное исключение из этого правила,  $\gamma = \Gamma X$ . В итоге получаем следующую систему уравнений:

$$1/c_t = \gamma_t \quad (37)$$

$$\theta c_t / (1 - L_t) = w_t \quad (38)$$

$$y_t = A_t k_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (39)$$

$$R_t + \delta = \alpha A_t k_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \quad (40)$$

$$w_t = (1 - \alpha) A_t k_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (41)$$

$$(1 + \mu) k_{t+1} = y_t + (1 - \delta) k_t - c_t \quad (42)$$

$$\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t \quad (43)$$

$$\gamma_t = (\beta / (1 + \mu)) (1 + R_{t+1}) \gamma_{t+1} \quad (44)$$

Уравнение (38) было получено делением (27) на (28).

Стационарная точка находится решением системы (36-43) при ограничении  $k_{t+1} = k_t$ ,  $A_{t+1} = A_t$ ,  $e_t = 0$ ,  $Y_{t+1} = Y_t$ . Стационарная точка обозначается звездочками, например,  $c^*$ . Для нахождения стационарной точки, во-первых, из уравнения (44) выразим ставку процента:

$$R^* = ((1+\mu)/\beta) - 1 \quad (45)$$

Зная ставку процента, из уравнения (39) найдем отношение капитала к труду (принимая в расчет, что  $A^* = 1$ ):

$$\frac{k^*}{L^*} = \left( \frac{R^* + \delta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (46)$$

Зная  $\frac{k^*}{L^*}$  из уравнений (39), (41) и (42) находим:

$$\frac{y^*}{L^*} = \left( \frac{k^*}{L^*} \right)^\alpha \quad (47)$$

$$w^* = (1 - \alpha) \left( \frac{k^*}{L^*} \right)^\alpha \quad (48)$$

$$\frac{c^*}{L^*} = \frac{y^*}{L^*} - \frac{(\delta + \mu)k^*}{L^*} \quad (49)$$

Зная заработную плату, из (38) получаем:

$$\frac{\theta c^*}{1-L^*} = w^* \quad (50)$$

После чего, поделив (49) на (50), находим соотношение  $\frac{L^*}{1-L^*}$ , откуда несложно выразить  $L^*$ . После этого нахождение остальных переменных в стационарном состоянии не составит труда.

Система уравнений (37-44) лог-линеаризуется в окрестности стационарного состояния с помощью разложения в ряд Тейлора первого порядка. Так как разложение в ряд Тейлора напрямую выглядит достаточно громоздко, воспользуемся вместо него следующими двумя правилами:

1. Разложение, выраженное в процентах: если  $z = x^\alpha y^\beta$ , то  $\hat{z} = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y}$ .

2. Разложение, выраженное в абсолютном выражении: если  $z = ax + by$ , то  $z^* \hat{z} = ax^* \hat{x} + by^* \hat{y}$ . [69]

Пользуясь этими правилами, систему (36-43) можем представить в виде:

$$-\hat{c}_t = \hat{y}_t \quad (51)$$

$$\frac{L^*}{1-L^*} \hat{L} = \hat{y}_t + \hat{w}_t \quad (52)$$

$$\hat{y}_t = \hat{A}_t + \alpha \hat{k}_t + (1 - \alpha) \hat{L}_t \quad (53)$$

$$\frac{R^*}{R^* + \delta} \hat{R}_t = \hat{y}_t - \hat{k}_t \quad (54)$$

$$\hat{w}_t = \hat{y}_t - \hat{L}_t \quad (55)$$

$$(1 + \mu)k^* \hat{k}_{t+1} = y^* \hat{y}_t + (1 - \delta)k^* \hat{k}_t - c^* \hat{c}_t \quad (56)$$

$$\hat{A}_t = \rho \hat{A}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (57)$$

$$\hat{y}_t = \frac{R^*}{1+R^*} \hat{R}_{t+1} + \hat{y}_{t+1} \quad (58)$$

Производственная функция (39) была подставлена в уравнения (40) и (41).

Сгруппируем переменные в два вектора:

$$V_t = \begin{pmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{L}_t \\ \hat{w}_t \\ \hat{y}_t \\ r_t \end{pmatrix}, S_t = \begin{pmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{a}_t \\ \hat{y}_t \end{pmatrix} \quad (59)$$

Система может быть записана в матричной форме в следующем виде:

$$M_1 S_t + M_2 V_t = 0 \quad (60)$$

$$M_3 S_{t+1} = M_4 S_t + M_5 V_t + M_6 V_{t+1} + M_7 \varepsilon_t, \quad (61)$$

где  $M_t$  - матрицы соответствующей размерности.

Например, уравнение (51) записано в первых строках матриц  $M_1$  и  $M_2$ .

Поэтому первые строки этих матриц выглядят следующим образом:

$$M_1[:, 1] = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (62)$$

$$M_2[:, 1] = [0 \ 0 \ 1]. \quad (63)$$

## ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ПРИ СИМУЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

### 2.1 Модели авторегрессии временных рядов

Ряд наблюдений  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_i)$  анализируемой случайной величины  $z(t)$ , произведенных в последовательные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_i$ , называется временным рядом.

В чем же состоят принципиальные отличия временного ряда от последовательности наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_i$ , образующих случайную выборку? Этих отличий два. Во-первых, в отличие от элементов случайной выборки члены временного ряда не являются статистически независимыми. Во-вторых, члены временного ряда не являются одинаково распределенными, то есть  $P\{x(t_1) < x\} \neq P\{x(t_2) < x\}$  при  $t_1 \neq t_2$ .

Это значит, что мы не можем распространять свойства и правила статистического анализа случайной выборки на временные ряды. С другой стороны, взаимозависимость членов временного ряда создает свою специфическую базу для построения прогнозных значений анализируемого показателя (то есть для построения оценок  $\hat{x}(i+k)$  для неизвестных значений  $x(i+k)$ ) по проведенным наблюдениям  $x(1), x(2), \dots, x(i)$ .

Целесообразно выделить следующие 4 типа основных факторов, под воздействием которых формируются значения элементов временного ряда.

1) Долговременные, формирующие общую (в длительной перспективе) тенденцию в изменении анализируемого признака  $x(t)$ . Обычно эта тенденция описывается с помощью той или иной неслучайной функции как правило, монотонной. Эту функцию называют функцией тренда или просто — трендом.

2) Сезонные, формирующие периодически повторяющиеся в определенное время года колебания анализируемого признака. Результат действия сезонных факторов обозначаем с помощью неслучайной функции. Поскольку эта функция должна быть периодической (с периодами, кратными «сезонам»), в ее аналитическом выражении участвуют гармоники (тригонометрические функции), периодичность которых, как правило, обусловлена содержательной сущностью задачи.

3) Циклические (конъюнктурные), формирующие изменения анализируемого признака, обусловленные действием долговременных циклов экономической, демографической или астрофизической природы (волны Кондратьева, демографические «ямы», циклы солнечной активности и т. п.).

4) Случайные (нерегулярные), не поддающиеся учету и регистрации. Их воздействие на формирование значений временного ряда как раз и обуславливает стохастическую природу элементов  $x(t)$ , а, следовательно, и необходимость интерпретации  $x(1), x(2), \dots, x(i)$  как наблюдений, произведенных над случайными величинами, соответственно,  $z(1), z(2), \dots, z(i)$ . Результат воздействия случайных факторов обозначается с помощью случайных величин («остатков», «ошибок»)  $e(t)$ . [67]

Конечно, вовсе не обязательно, чтобы в процессе формирования значений всякого временного ряда участвовали одновременно факторы всех четырех типов.

Однако во всех случаях предполагается неременное участие случайных (эволюционных) факторов (4). Кроме того, в дальнейшем везде (если специально не оговорено противное) мы будем следовать аддитивной структурной схеме влияния факторов (1), (2), (3) и (4) на формирование значений  $x(t)$ .

Выводы о том, участвуют или нет факторы данного типа в формировании значений  $x(t)$ , могут базироваться как на анализе

содержательной сущности задачи (то есть быть априорно-экспертными по своей природе), так и на специальном статистическом анализе исследуемого временного ряда.

По имеющейся траектории анализируемого временного ряда  $x(t)$  требуется:

- 1) определить значения индикаторов  $x(C)$  ( $C = 1,2,3$ );
- 2) построить «хорошие» оценки для неслучайных функций;
- 3) подобрать модель, адекватно описывающую поведение «случайных остатков»  $e(t)$ , и статистически оценить параметры этой модели.

Успешное решение поставленных задач является основой для решения задачи кратко- и среднесрочного прогноза значений временного ряда.

Коэффициент  $r(\tau)$ , измеряющий корреляцию, существующую между членами одного и того же временного ряда, принято называть коэффициентом автокорреляции. При анализе изменения величины  $r(\tau)$  в зависимости от значения  $\tau$  принято говорить об автокорреляционной функции  $r(\tau)$ . График автокорреляционной функции также называют коррелограммой. Заметим, что автокорреляционная функция (в отличие от автоковариационной) безразмерна, то есть не зависит от масштаба измерения анализируемого временного ряда. Ее значения, по определению, могут колебаться от -1 до +1. Кроме того, из стационарности следует, что  $r(\tau) = r(-\tau)$ , так что при анализе поведения автокорреляционных функций ограничиваются рассмотрением только положительных значений  $\tau$ .

С помощью частной автокорреляционной функции  $r_{\text{част}}(\tau)$  реализуется идея измерения автокорреляции, существующей между разделенными  $\tau$  тактами времени членами временного ряда  $x(t)$  и  $x(t+r)$ , при устраненном опосредованном влиянии на эту взаимозависимость всех промежуточных (то есть расположенных между  $x(t)$  и  $x(t+\tau)$ ) членов этого временного ряда.



Знание автокорреляционных функций  $r(\tau)$  и  $r_{\text{част}}(\tau)$  оказывает существенную помощь в решении задачи подбора и идентификации модели анализируемого временного ряда.

В общем смысле под идентификацией модели понимается и определение ее структурных параметров  $p$  и  $q$ , и статистическая оценка (при заданных целочисленных значениях  $p$  и  $q$ ) ее неструктурных параметров  $\pi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ).

В контексте же рассмотрения каждой конкретной модели (АР(1), АР(2), СС(1), СС(2) и АРСС(1;1)), как это следует из теории статистического оценивания, мы будем использовать методы полного и условного максимального правдоподобия. Их численная реализация из-за сложности «спрятана» в соответствующих модулях эконометрического программного обеспечения пакетов E-views, STATA, SPSS, GRETL и др.

Модель авторегрессии 1-го порядка — АР(1) (марковский процесс) представляет собой простейший вариант линейного авторегрессионного процесса, когда все коэффициенты  $\pi_j$  кроме первого равны нулю. Соответственно, она может быть определена выражением

$$\varepsilon(t) = \alpha\varepsilon(t - 1) + \delta(t), \quad (64)$$

где  $\alpha$  — некоторый числовой коэффициент, не превосходящий по абсолютной величине единицу ( $|\alpha| < 1$ ), а  $\delta(t)$  — последовательность случайных величин, образующая белый шум.

Условие стационарности ряда определяется требованием к коэффициенту  $\alpha$ :

$$|\alpha| < 1, \quad (65)$$

Автокорреляционная функция марковского процесса определяется соотношением:

$$r(\varepsilon(t), \varepsilon(t \pm k)) = \alpha^k, \quad (66)$$

Отсюда, в частности, следует простая вероятностная интерпретация параметра  $\alpha$ :

$$\alpha = r(1) = r(\varepsilon(t), \varepsilon(t \pm 1)) \quad (67)$$

то есть значение  $\alpha$  определяет величину коэффициента парной корреляции между двумя соседними членами ряда  $\varepsilon(t)$ .

Идентификация модели, то есть статистическое оценивание ее параметров  $\alpha$  и  $\sigma_0^2$  по имеющейся реализации исходного анализируемого временного ряда  $x(t)$  (а не его остатков, которые являются ненаблюдаемыми), может быть осуществлена, например, с помощью метода моментов. Для этого следует предварительно решить задачу выделения неслучайной составляющей  $\hat{f}(t)$ , что позволит оперировать в дальнейшем остатками:

$$\hat{\varepsilon}(t) = x(t) - \hat{f}(t). \quad (68)$$

Затем подсчитывается выборочная дисперсия  $\hat{\gamma}(0)$  остатков по формуле

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\hat{\varepsilon}(t) - \bar{\varepsilon})^2, \quad (69)$$

где  $\bar{\varepsilon} = (\sum_{t=1}^N \hat{\varepsilon}(t))/N$ .

Оценку  $\hat{\alpha}$  параметра  $\alpha$  получаем с помощью формулы (68), подставляя в нее вместо коэффициента корреляции  $r(\varepsilon(t), \varepsilon(t \pm 1))$  его выборочное значение  $\hat{r}(\varepsilon(t), \varepsilon(t \pm 1))$ , то есть

$$\hat{\alpha} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N-1} (\hat{\varepsilon}(t) - \bar{\varepsilon})(\hat{\varepsilon}(t+1) - \bar{\varepsilon})}{\hat{\gamma}(0)} \quad (70)$$

Наконец, оценка  $\hat{\sigma}_0^2$  параметра  $\sigma_0^2$  основана на соотношении:

$$D\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0^2}{1-\alpha^2} \quad (71)$$

В котором величины  $D\varepsilon(t)$  и  $\alpha$  заменяются их оценками.

Прямая оценка значений автокорреляционной функции при реалистичных соотношениях  $N$  и  $\tau$  дает, как правило, неудовлетворительный результат (хотя и является состоятельной). В частности, в то время, как теоретическая коррелограмма анализируемого ряда затухает, построенная выборочная коррелограмма может сохранять колебательный (незатухающий) эффект. Поэтому, в частности, при анализе марковского процесса элементы его автокорреляционной функции  $r(\tau)$  лучше оценивать по формуле  $\hat{r}(\tau) = \hat{\alpha}^\tau$ .

Модели  $AR(2)$ ,  $CC(1)$ ,  $CC(2)$  и  $ARCC(1;1)$  выводятся по схожему алгоритму, приводить который мы здесь не будем.

## 2.2 Подходы к симулированию динамики экономики, описываемой системой уравнений

В данной работе нам придется столкнуться с задачей численного решения дифференциального уравнения первого порядка, известной также как задача численного интегрирования.

Предположим, требуется решить уравнение, заданное в следующем виде:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, t) \quad (72)$$

$x_0$  - дано.

Одним из способов решения данного уравнения является разбиение времени на достаточно маленькие отрезки  $dt \ll 1$ , после чего итеративно найти динамику  $x$ , используя разложение Тейлора:

$$x(t + dt) \approx x(t) + f(x(t), t) \cdot dt \quad (73)$$

Несложно проверить, что такая формула для вычислений имеет точность  $O(dt^2)$ . Однако существуют и более точные способы расчетов, и наиболее известный из используемых методов - метод Рунге-Кутты (Runge-Kutta).

Этот метод позволяет проводить расчеты с точностью  $O(dt^5)$ . Динамика  $x$  находится итеративно, используя следующие уравнения [98], [99]:

$$x(t + dt) \approx x(t) + \frac{dt}{6} (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4), \quad (74)$$

где:

$$f_1 = f(t, x(t)) \quad (75)$$

$$f_2 = f\left(t + \frac{dt}{2}, x(t) + \frac{dt}{2} f_1\right) \quad (76)$$

$$f_3 = f\left(t + \frac{dt}{2}, x(t) + \frac{dt}{2} f_2\right) \quad (77)$$

$$f_4 = f\left(t + dt, x(t) + dt \cdot f_3\right) \quad (78)$$

Предположим, мы хотим симулировать динамику экономики, которая описывается следующей системой уравнений:

$$E Y_{t+1} = A Y_t \quad (79)$$

где  $E$  - оператор рациональных ожиданий,

$Y$  - вектор эндогенных переменных размерности  $n \times 1$ ,

$A$  - матрица параметров  $n \times n$ .

Заметим, что наличие оператора рациональных ожиданий уже включает в себя возможность шоков, поэтому их не требуется включать дополнительно в правую часть уравнения (78).

Предположим, что переменные  $1...m$  вектора  $Y$  являются predetermined, а оставшиеся переменные  $m+1...n$  являются впередсмотрящими. Таким образом, значения переменных  $y_1(t), \dots, y_m(t)$  в периоде  $t=0$  нам заданы, а значения оставшихся переменных в  $t=0$  требуется найти из условия Сарджента-Уоллеса [39]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |p(t)| < \infty \quad (80)$$

Если бы мы знали значения всех переменных в момент времени 0, а не только predetermined, мы могли бы решить задачу итеративно: зная  $Y(0)$ , мы могли бы найти  $Y(1)$  по формуле  $Y(1) = AY(0) + \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_1$  - вектор ошибок ожиданий, затем из  $Y(1)$  мы нашли бы  $Y(2)$  и т. д. Однако мы знаем значения только predetermined переменных в векторе  $Y(0)$ , что мешает воспользоваться приведенной схемой. Поэтому мы предлагаем другой способ численного решения системы (79), основанный на теореме Бланшара-Кана [9].

Во-первых, покажем, как можно найти значения всех впередсмотрящих переменных через значения predetermined переменных.

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  - собственные числа и собственные вектора матрицы  $A$ . Здесь и далее мы полагаем, что матрица  $A$  имеет  $n$  различных собственных векторов, таким образом, матрица собственных векторов  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  является невырожденной.

Предположим на время, что мы знаем значения всех переменных в векторе  $Y(0)$ . В этом случае, значение  $Y(0)$  мы могли бы представить как линейную комбинацию собственных векторов:

$$Y(0) = \Gamma C, \quad (81)$$

откуда можем найти вектор коэффициентов  $C = \Gamma^{-1}Y(0)$ .

Распишем  $Y(0) = \Gamma C$  в экстенсивной форме:

$$Y(0) = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_n\gamma_n \quad (82)$$

Из уравнения (78) мы можем найти ожидаемое значение вектора эндогенных переменных в периоде 1:

$$EY(1) = AY(0) = c_1A\gamma_1 + c_2A\gamma_2 + \dots + c_nA\gamma_n \quad (83)$$

По определению собственных чисел и собственных векторов,  $A\gamma_n = \lambda_n\gamma_n$ , следовательно, мы можем записать:

$$EY(1) = c_1\lambda_1\gamma_1 + c_2\lambda_2\gamma_2 + \dots + c_n\lambda_n\gamma_n \quad (84)$$

По аналогии мы можем выразить  $EY(2)$  через  $EY(1)$ ,  $EY(3)$  через  $EY(2)$ , и так далее. Для произвольного момента  $t$  мы можем записать:

$$EY(t) = c_1\lambda_1^t\gamma_1 + c_2\lambda_2^t\gamma_2 + \dots + c_n\lambda_n^t\gamma_n \quad (85)$$

По теореме Бланшара-Кана [9], чтобы рассматриваемая система имела единственное решение, число устойчивых корней (т.е. количество собственных чисел, находящихся внутри единичного круга), должно быть равно числу предопределенных переменных. Предположим, что это условие выполнено, таким образом, у нас ровно  $m$  устойчивых корней. Для определенности также предположим, что собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  лежат внутри единичного круга, а собственные числа  $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$  - за его пределами.

Заметим, что для любого собственного числа, лежащего за пределами единичного круга, то есть для  $i > m$ , выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\lambda_i^t| = \infty. \quad (86)$$

В соответствии с условием Сарджента-Уоллеса, мы ищем нерасходящееся решение, которое мы можем получить, только обнулив все коэффициенты перед собственными числами, находящимися за пределами единичного круга. Таким образом, для любого  $i > m + 1$ :  $c_i = 0$ , откуда:

$$EY(t) = c_1 \lambda_1^t \gamma_1 + \dots + c_m \lambda_m^t \gamma_m + c_{m+1} \lambda_{m+1}^t \gamma_{m+1} + \dots + c_n \lambda_n^t \gamma_n = c_1 \lambda_1^t \gamma_1 + \dots + c_m \lambda_m^t \gamma_m \quad (87)$$

Следовательно, у нас остается только  $m$  первых слагаемых в уравнении (87).

Теперь примем в расчет, что в векторе  $Y$  первые  $m$  переменных являются predetermined, а оставшиеся впередсмотрящими, и запишем (87) для  $t=0$ :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \\ y_{m+1} \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ \dots \\ y_{1,m} \\ y_{1,m+1} \\ \dots \\ y_{1,n} \end{pmatrix} + \dots + c_m \begin{pmatrix} y_{m,1} \\ \dots \\ y_{m,m} \\ y_{m,m+1} \\ \dots \\ y_{m,n} \end{pmatrix} \quad (88)$$

Так как первые  $m$  уравнений являются predetermined, их значения в  $t = 0$  нам известны. Таким образом, первые  $m$  уравнений в системе (88) представляют из себя  $m$  уравнений с  $m$  неизвестными, из которых мы можем выразить значения коэффициентов  $c_1, \dots, c_m$ . Зная эти коэффициенты, из оставшихся уравнений в системе (88) мы можем найти начальные значения всех predetermined переменных  $y_{m+1}, \dots, y_n$ .

Предложенная процедура позволяет нам выразить значения впередсмотрящих переменных через predetermined. Мы показали, как это может быть сделано для  $t = 0$ , но, очевидно, что данный метод применим для любого  $t$ .

### ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И РАЗВИТИЯ АРКТИЧЕСКОГО РЕГИОНА (НА ПРИМЕРЕ ЯНАО) НА 2015-2019 ГГ.

#### 3.1. Построение системы уравнений авторегрессии для факторов экономического роста и развития

По данным сайта gks.ru [91], [92], [93] нами была сформирована таблица, в котором содержатся показатель износа основных фондов (в %), объём инвестиций в основные фонды, а также запас капитала (последние два показателя приведены к ценам 2000 года).

Таблица 1

Макроэкономические показатели запаса и потока основных фондов  
ЯНАО  
за 2000-2014 гг. в ценах 2000 года, млрд. руб.

Год	Стоимость основных фондов	Объём инвестиций в основные фонды	Степень износа основных фондов (в %)
2000	298,875	82,458	38
2001	727,848	85,616	35,8
2002	948,157	96,888	49,8
2003	921,442	107,951	50,4
2004	847,036	85,117	51
2005	949,701	64,226	53
2006	983,908	67,416	54,3
2007	970,571	99,907	54,5
2008	1100,847	117,538	55
2009	1154,127	99,300	56,4
2010	1186,989	97,913	57
2011	1239,110	103,959	56,9
2012	1366,296	114,597	55,2
2013	1292,882	97,420	57,4
2014	1410,288	124,114	58,5



Для прогнозирования значений запаса капитала нам необходимо выявить зависимость между представленными данными. Запас капитала следующего периода можно представить следующим образом:

$$K_{t+1} = (1 - (\mu_t - \mu_{t-1}))K_t + I_t, \quad (89)$$

где  $K_{t+1}$  - запас капитала будущего периода,

$K_t$  - запас капитала текущего периода,

$I_t$  – объём инвестиций в основной капитал, осуществленный в текущем периоде,

$\mu_t$ -степень износа основного капитала в текущем периоде,

$\mu_{t-1}$ -степень износа основного капитала в предыдущем периоде.

Моделируем функцию запаса основных фондов по имеющимся значениям.

Таблица 2

Расчетные и фактические показатели стоимости основных фондов  
ЯНАО

за 2000-2014 гг. в ценах 2000 года, млрд. руб.

Год	Стоимость основных фондов (фактическое значение)	Стоимость основных фондов (расчетное значение)
2000	298,875	-
2001	727,8475	387,9083
2002	948,1571	711,5651
2003	921,4423	1039,356
2004	847,0357	1023,864
2005	949,7012	915,2116
2006	983,9078	1001,581
2007	970,5707	1049,356
2008	1100,847	1065,625

Продолжение таблицы 2

2009	1154,127	1202,973
2010	1186,989	1246,502
2011	1239,11	1286,089
2012	1366,296	1364,134
2013	1292,882	1450,834
2014	1410,288	1376,079

Стандартная ошибка предсказанных значений составляет 99,64.

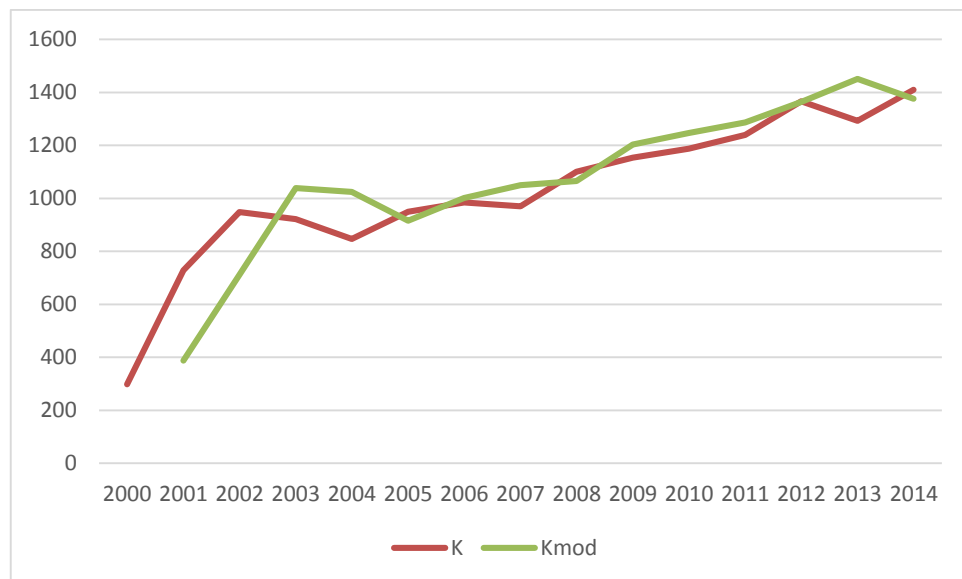


Рисунок 1. Расчетные (K\_mod) и фактические (K) показатели стоимости основных фондов ЯНАО за 2000-2014 гг. в ценах 2000 года, млрд. руб.

Предполагаем, что процесс износа основных фондов представляет собой авторегрессионный процесс. Для проверки гипотезы стоим коррелограмму.

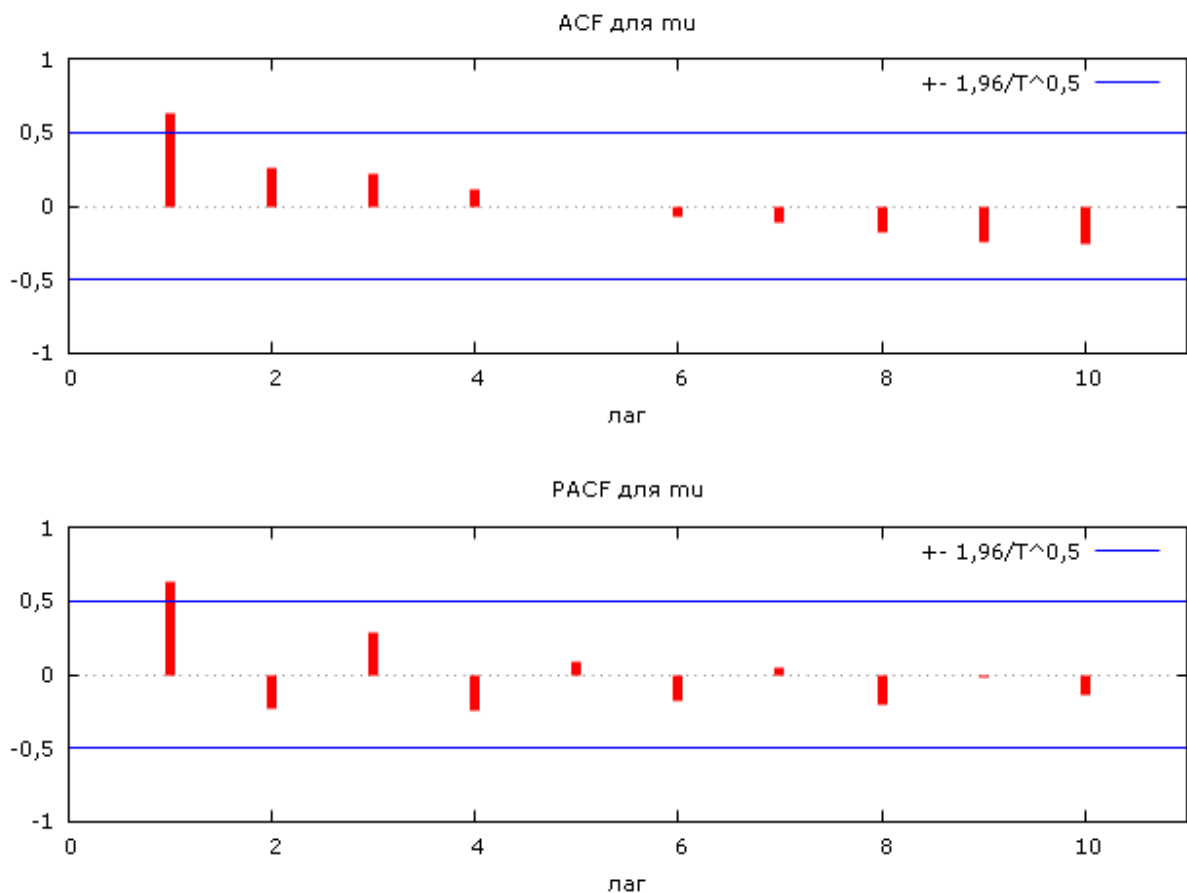


Рисунок 2. ACF и PACF для износа основных фондов

Наличие выбросов подтверждает нашу гипотезу о наличии авторегрессионного процесса. Построим авторегрессию, используя эконометрический пакет GRETЛ.

Таблица 3

Характеристики и основные критерии качества эконометрической модели авторегрессионной зависимости износа основных фондов в ЯНАО за период 2000-2014 гг.

Модель 1: ARMA, использованы наблюдения 2000-2014 (T = 15)  
Зависимая переменная: tu

	<i>Коэффициент</i>	<i>Ст. ошибка</i>	<i>z</i>	<i>P-значение</i>	
	<i>m</i>				
const	0,502707	0,0587279	8,5599	<0,0001	***
phi_1	0,878196	0,1104	7,9547	<0,0001	***

Продолжение таблицы 3

Среднее зав. перемен	0,522133	Ст. откл. зав. перемен	0,067492
Среднее инноваций	0,011452	Ст. откл. инноваций	0,038799
Лог. правдоподобие	26,71865	Крит. Акаике	-47,43730
Крит. Шварца	-45,31315	Крит. Хеннана-Куинна	-47,45993

AR	Действительная часть	Мнимая часть	Модуль	Частота
Корень 1	1,1387	0,0000	1,1387	0,0000

P-значения для всех полученных коэффициентов статистически значимы.

Построим прогнозные значения для износа основных фондов до 2019 года.

Таблица 4

Прогнозные значения для износа основных фондов до 2019 года

Для 95% доверительных интервалов,  $z(0,025) = 1,96$

Набл.	$\mu_i$	Предсказание	Ст. ошибка	95% доверительный интервал
2015	не определено	0,574976	0,0387994	(0,498931, 0,651022)
2016	не определено	0,566174	0,0516372	(0,464967, 0,667381)
2017	не определено	0,558443	0,0596808	(0,441471, 0,675416)
2018	не определено	0,551655	0,0652101	(0,423845, 0,679464)
2019	не определено	0,545693	0,0691732	(0,410116, 0,681270)

Дополним в пакете GRETЛ столбец «Степень износа основных фондов» ( $\mu_i$ ) прогнозными наблюдениями. Рассчитаем прогнозные значения запаса основных средств по формуле (88). Для этого нам необходимо предположить авторегрессию у показателя инвестиции в основные фонды.

Коррелограмма для инвестиций не показала наличия авторегрессии. Сторим коррелограмму для первого приращения инвестиций.

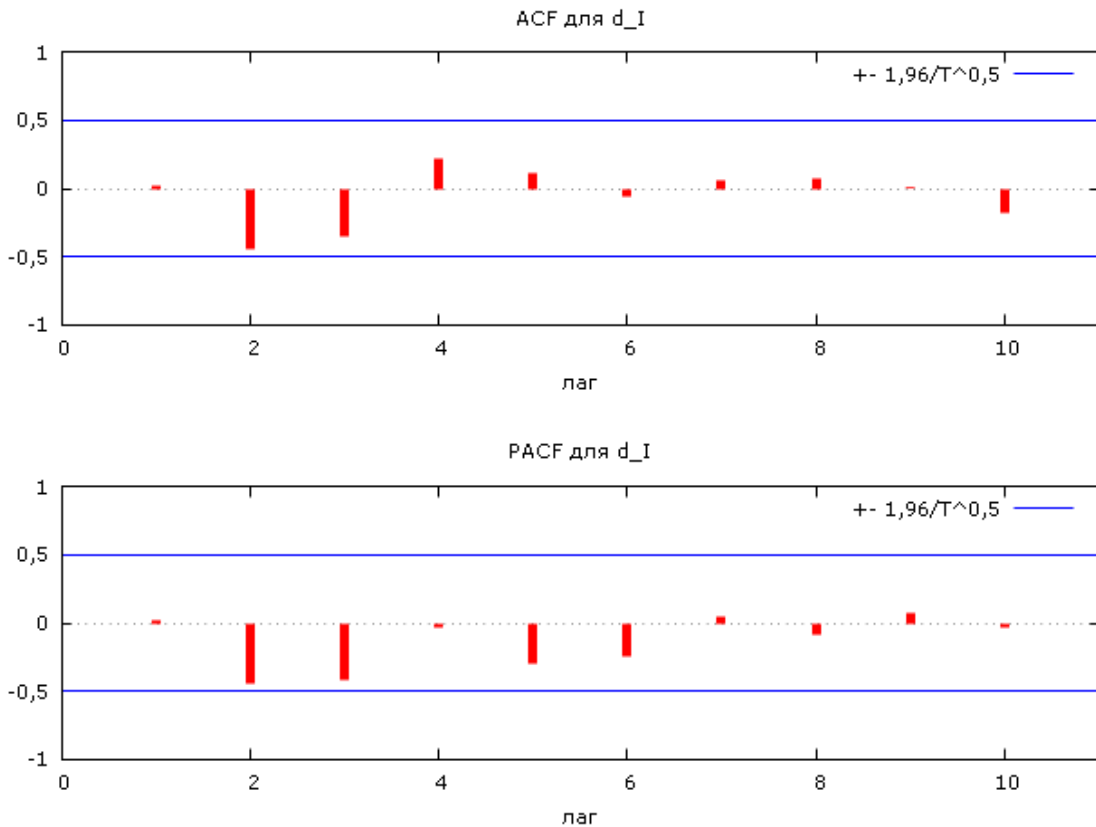


Рисунок 3. ACF и PACF для первого приращения инвестиций в основные фонды

Значения из таблицы 5 показывают нам наличие автокорреляционной функции на 10% уровне значимости, используя стандартную ошибку  $1/T^{0,5}$ .

Таблица 5

Автокорреляционная функция для  $d_I$

Лаг ACF PACF Q-стат. [p-значение]

1	0,0174	0,0174	0,0052	[0,942]
2	-0,4496 *	-0,4500 *	3,7783	[0,151]
3	-0,3540	-0,4200	6,3307	[0,097]
4	0,2247	-0,0359	7,4615	[0,113]
5	0,1119	-0,3049	7,7732	[0,169]
6	-0,0633	-0,2452	7,8854	[0,247]
7	0,0568	0,0527	7,9887	[0,334]
8	0,0689	-0,0906	8,1660	[0,417]
9	0,0103	0,0732	8,1708	[0,517]
10	-0,1795	-0,0388	9,9744	[0,443]

Построим авторегрессию процесса первого приращения инвестиций в основные фонды, используя эконометрический пакет GRETЛ.

Таблица 6

Характеристики и основные критерии качества эконометрической модели авторегрессионной зависимости первого приращения инвестиций в основные фонды в ЯНАО за период 2000-2014 гг.

Модель 2: ARMA, использованы наблюдения 2001-2014 (T = 14)  
Зависимая переменная: d\_I

	<i>Коэффициент</i>	<i>Ст. ошибка</i>	<i>z</i>	<i>P-значение</i>	
	<i>m</i>				
const	2,39989	0,401583	5,9761	<0,0001	***
phi_1	0,947627	0,181661	5,2165	<0,0001	***
phi_2	-0,597258	0,157668	-3,7881	0,0002	***
theta_1	-1,97737	0,271258	-7,2896	<0,0001	***
theta_2	0,99822	0,288471	3,4604	0,0005	***
Среднее зав. перемен	2,975438	Ст. откл. зав. перемен	17,45735		
Среднее инноваций	0,412977	Ст. откл. инноваций	9,833798		
Лог. правдоподобие	-55,50783	Крит. Акаике	123,0157		
Крит. Шварца	126,8500	Крит. Хеннана-Куинна	122,6607		
	<i>Действительная часть</i>	<i>Мнимая часть</i>	<i>Модуль</i>	<i>Частота</i>	
AR					
Корень 1	0,7933	1,0222	1,2940	0,1450	
Корень 2	0,7933	-1,0222	1,2940	-0,1450	
MA					
Корень 1	0,9904	0,1442	1,0009	0,0230	
Корень 2	0,9904	-0,1442	1,0009	-0,0230	

Построим прогнозные значения для первых приращений инвестиций в основные фонды до 2019 года.

Таблица 7

Прогнозные значения для первых приращений инвестиций в основные фонды до 2019 года

Для 95% доверительных интервалов,  $z(0,025) = 1,96$

Набл.	d_I	Предсказание	Ст. ошибка	95% доверительный интервал
-------	-----	--------------	------------	----------------------------

2015	не определено	-7,70634	9,83380	(-26,9802, 11,5676)
2016	не определено	-5,35215	14,1154	(-33,0179, 22,3136)
2017	не определено	1,08987	15,2053	(-28,7120, 30,8918)
2018	не определено	5,78845	15,2210	(-24,0442, 35,6211)
2019	не определено	6,39340	15,7458	(-24,4678, 37,2546)

Проведенное моделирование позволит нам спрогнозировать макроэкономические показатели запаса и потока основных фондов ЯНАО за 2015-2019 гг. в ценах 2000 года.

Таблица 8

Прогноз макроэкономических показателей запаса и потока основных фондов ЯНАО за 2015-2019 гг. в ценах 2000 года, млрд. руб.

Год	Стоимость основных фондов	Объём инвестиций в основные фонды	Степень износа основных фондов (в %)
2015	1548,539	116,408	57,4976
2016	1678,577	111,056	56,6174
2017	1802,610	112,146	55,8443
2018	1926,991	117,934	55,1655
2019	2056,414	124,327	54,5693

Для достижения поставленной цели нашей работы, а именно, оценки динамики экономического роста и развития арктического региона, нам необходимо построить производственную функцию Кобба-Дугласа. Для этого нам также понадобятся авторегрессии показателей заработная плата лиц, работающих по найму (фактор труд) и затраты на НИОКР и инновации.

По данным сайта gks.ru [91], [92], [93] нами была сформирована таблица, в котором содержатся показатели заработной платы лиц, работающих по найму и затрат на НИОКР и инновации (показатели приведены к ценам 2000 года).

Таблица 9

Макроэкономические показатели заработной платы лиц,  
 работающих по найму и затрат на НИОКР и инновации  
 за 2000-2014 гг. в ценах 2000 года, млрд. руб.

Год	Заработная плата лиц, работающих по найму	Затраты на НИОКР и инновации
N	$L_n$	$I_n$
2000	2,803	0,019
2001	3,444	0,006
2002	3,901	0,015
2003	4,614	0,014
2004	4,631	0,005
2005	4,504	0,012
2006	4,544	0,036
2007	4,631	0,066
2008	4,772	0,025
2009	4,939	0,000
2010	4,888	0,002
2011	4,770	0,009
2012	4,838	0,015
2013	5,049	0,015
2014	5,062	0,018

Предполагаем, что процесс динамики заработной платы лиц, работающих по найму собой авторегрессионный процесс. Для проверки гипотезы стоим коррелограмму.



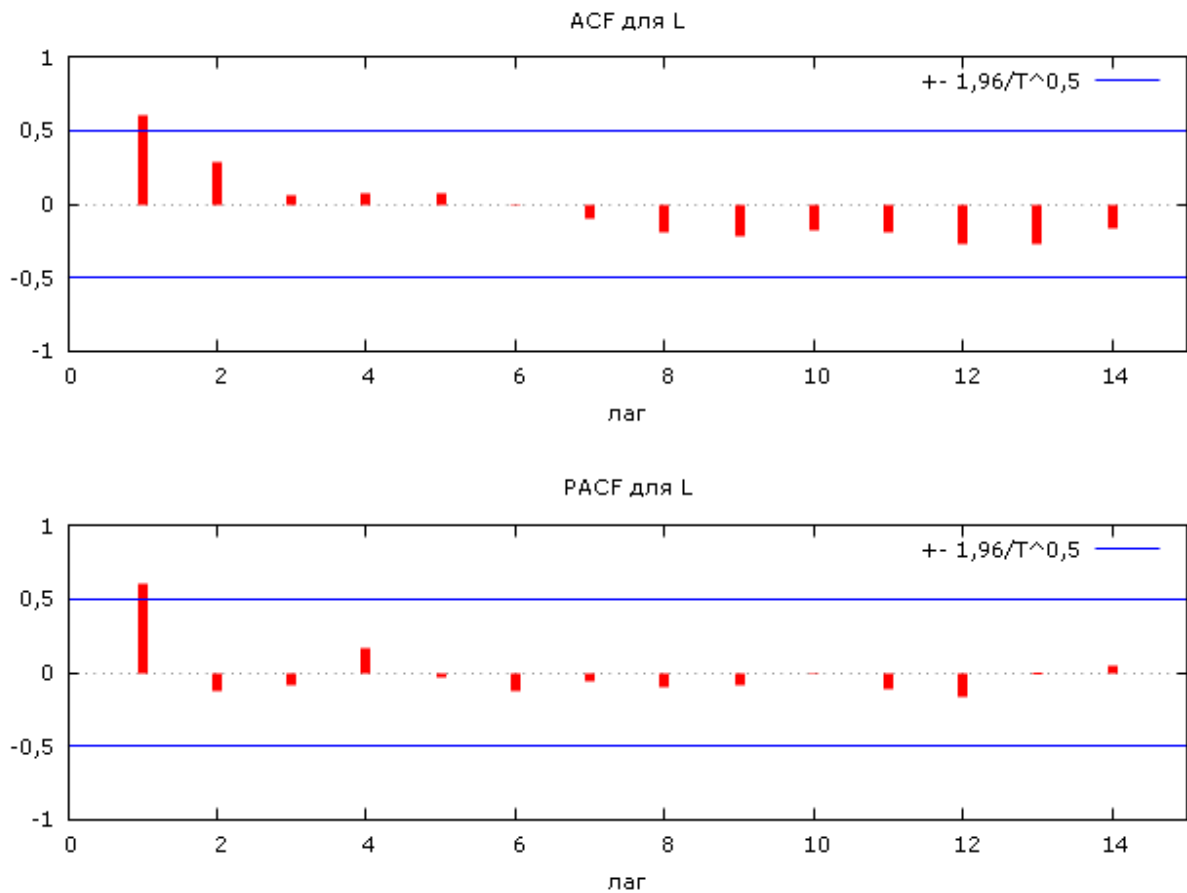


Рисунок 4. ACF и PACF для процесса динамики заработной платы лиц, работающих по найму

Наличие выбросов подтверждает нашу гипотезу о наличии авторегрессионного процесса. Значения из таблицы 10 показывают нам наличие автокорреляционной функции на 1% уровне значимости, используя стандартную ошибку  $1/T^{0,5}$ .

Таблица 10

Автокорреляционная функция для L

Лаг	ACF	PACF	Q-стат.	[p-значение]
1	0,6047 ***	0,6047 ***	6,6597	[0,010]
2	0,2842	-0,1283	8,2442	[0,016]
3	0,0638	-0,0842	8,3307	[0,040]
4	0,0734	0,1641	8,4557	[0,076]

5	0,0741	-0,0272	8,5958	[0,126]
6	-0,0056	-0,1244	8,5967	[0,198]
7	-0,1055	-0,0589	8,9513	[0,256]
8	-0,1879	-0,0963	10,2379	[0,249]
9	-0,2147	-0,0819	12,1969	[0,202]
10	-0,1808	-0,0050	13,8640	[0,179]
11	-0,1939	-0,1180	16,2619	[0,132]
12	-0,2674	-0,1722	22,3395	[0,034]
13	-0,2733	-0,0114	31,8656	[0,003]
14	-0,1711	0,0489	39,3325	[0,000]

Построим авторегрессию процесса динамики заработной платы лиц, работающих по найму, используя эконометрический пакет GRETЛ.

Таблица 11

Характеристики и основные критерии качества эконометрической модели авторегрессионной зависимости заработной платы лиц, работающих по найму в ЯНАО за период 2000-2014 гг.

Модель 3: ARMA, использованы наблюдения 2000-2014 (T = 15)  
Зависимая переменная: L

	<i>Коэффициент</i>	<i>Ст. ошибка</i>	<i>z</i>	<i>P-значение</i>	
	<i>m</i>				
const	4,01404	0,862278	4,6552	<0,0001	***
phi_1	0,930838	0,0713622	13,0439	<0,0001	***
theta_1	0,540746	0,178381	3,0314	0,0024	***
Среднее зав. перемен	4,492684	Ст. откл. зав. перемен	0,633817		
Среднее инноваций	0,127761	Ст. откл. инноваций	0,252690		
Лог. правдоподобие	-2,237493	Крит. Акаике	12,47499		
Крит. Шварца	15,30719	Крит. Хеннана-Куинна	12,44482		
	<i>Действительная часть</i>	<i>Мнимая часть</i>	<i>Модуль</i>	<i>Частота</i>	
AR					
Корень 1	1,0743	0,0000	1,0743	0,0000	
МА					
Корень 1	-1,8493	0,0000	1,8493	0,5000	

Построим прогнозные значения динамики заработной платы лиц, работающих по найму до 2019 года.

Прогнозные значения динамики заработной платы лиц, работающих по найму в ЯНАО до 2019 года, млрд. руб.

Для 95% доверительных интервалов,  $z(0,025) = 1,96$

Набл.	L	Предсказание	Ст. ошибка	95% доверительный интервал
2015	не определено	4,97807	0,252690	(4,48281, 5,47334)
2016	не определено	4,91140	0,449586	(4,03023, 5,79257)
2017	не определено	4,84934	0,567395	(3,73726, 5,96141)
2018	не определено	4,79157	0,652494	(3,51270, 6,07043)
2019	не определено	4,73779	0,718120	(3,33030, 6,14528)

Предполагаем, что процесс динамики затрат на НИОКР и инновации представляет собой авторегрессионный процесс. Для проверки гипотезы стоим коррелограмму.

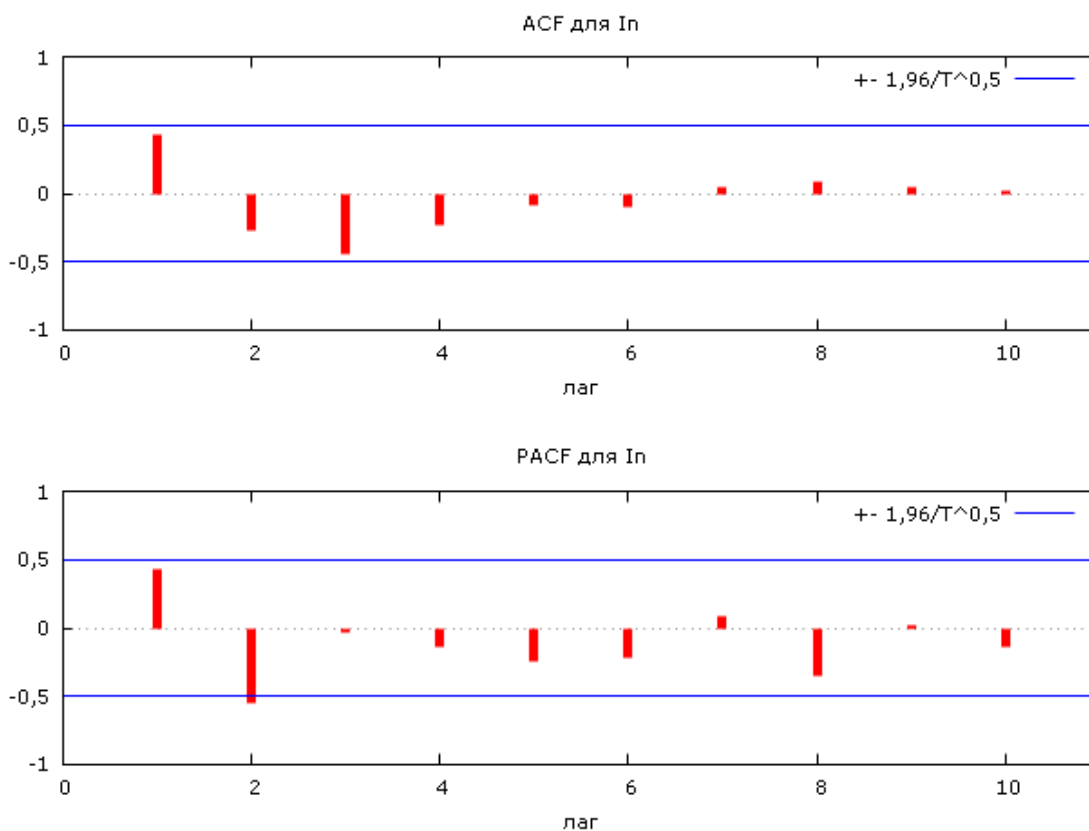


Рисунок 5. ACF и PACF для процесса динамики затрат на НИОКР и инновации

Наличие выбросов подтверждает нашу гипотезу о наличии авторегрессионного процесса. Значения из таблицы 13 показывают нам наличие автокорреляционной функции на 1% уровне значимости, используя стандартную ошибку  $1/T^{0,5}$ .

Таблица 13

Автокорреляционная функция для In

Лаг	ACF	PACF	Q-стат. [p-значение]
1	0,4298 *	0,4298 *	3,3652 [0,067]
2	-0,2704	-0,5583 ***	4,7990 [0,091]
3	-0,4409 *	-0,0353	8,9292 [0,030]
4	-0,2327	-0,1347	10,1847 [0,037]
5	-0,0922	-0,2497	10,4014 [0,065]
6	-0,1017	-0,2185	10,6947 [0,098]
7	0,0516	0,0875	10,7796 [0,149]
8	0,0840	-0,3583	11,0367 [0,200]
9	0,0513	0,0229	11,1487 [0,266]
10	0,0166	-0,1344	11,1628 [0,345]

Построим авторегрессию процесса динамики затрат на НИОКР и инновации, используя эконометрический пакет GRETЛ.

Таблица 14

Характеристики и основные критерии качества эконометрической модели зависимости затрат на НИОКР и инновации в ЯНАО за период 2000-2014 гг.

Модель 4: ARMA, использованы наблюдения 2000-2014 (T = 15)  
Зависимая переменная: In

	Коэффициент	Ст. ошибка	z	P-значение	
	<i>m</i>				
const	0,0179594	0,00210931	8,5144	<0,0001	***
phi_1	0,476574	0,224216	2,1255	0,0335	**
theta_2	-0,761484	0,204559	-3,7226	0,0002	***
Среднее зав. перемен	0,017207	Ст. откл. зав. перемен		0,016331	
Среднее инноваций	8,40e-06	Ст. откл. инноваций		0,011500	
Лог. правдоподобие	44,90029	Крит. Акаике		-81,80058	
Крит. Шварца	-78,96838	Крит. Хеннана-Куинна		-81,83075	

Продолжение таблицы 14

		<i>Действительная часть</i>	<i>Мнимая часть</i>	<i>Модуль</i>	<i>Частота</i>
AR	Корень 1	2,0983	0,0000	2,0983	0,0000
MA	Корень 1	1,1460	0,0000	1,1460	0,0000
	Корень 2	-1,1460	0,0000	1,1460	0,5000

Построим прогнозные значения затрат на НИОКР и инновации до 2019 года.

Таблица 15

Прогнозные значения динамики затрат на НИОКР и инновации в ЯНАО до 2019 года, млрд. руб.

Для 95% доверительных интервалов,  $z(0,025) = 1,96$

Набл.	In	Предсказание	Ст. ошибка	95% доверительный интервал
2015	не определено	0,0177647	0,0114998	(-0,00477451, 0,0403040)
2016	не определено	0,0208151	0,0127390	(-0,00415289, 0,0457831)
2017	не определено	0,0193204	0,0141437	(-0,00840075, 0,0470415)
2018	не определено	0,0186080	0,0144437	(-0,00970111, 0,0469172)
2019	не определено	0,0182685	0,0145110	(-0,0101725, 0,0467095)

Проведенное моделирование позволит нам спрогнозировать макроэкономические показатели заработной платы лиц, работающих по найму и затрат на НИОКР и инновации ЯНАО за 2015-2019 гг. в ценах 2000 года.

Таблица 16

Прогноз макроэкономических показателей запаса и потока основных фондов ЯНАО за 2015-2019 гг. в ценах 2000 года, млрд. руб.

Год	Заработная плата лиц, работающих по найму	Затраты на НИОКР и инновации
2015	4,97807	0,0177647
2016	4,91140	0,0208151
2017	4,84934	0,0193204
2018	4,79157	0,0186080
2019	4,73779	0,0182685

### 3.2. Построение функции Кобба-Дугласа для ЯНАО

По данным сайта gks.ru [91], [92], [93] и моделирования, проведенного в предыдущем пункте нашей работы, нами была сформирована таблица, в котором содержатся показатели валового регионального продукта региона (ВРП), запас капитала, заработная плата лиц, работающих по найму, затраты на НИОКР и инновации (все показатели приведены к ценам 2000 года), производительность труда и площадь земли.

Таблица 17

Макроэкономические показатели ЯНАО за 2000-2014 гг.  
в ценах 2000 года (фактические), млрд. руб.

Год	ВРП	Стоимость основных фондов	Заработная плата лиц, работающих по найму	Затраты на НИОКР и инновации	Производительность труда (нарастающим итогом)	Площадь земли, тыс. га
n	$Y_n$	$K_n$	$L_n$	$I_n$	$A_n$	$Z_n$
2000	117,101	298,875	2,803	0,019	1	76897,68
2001	158,225	727,848	3,444	0,006	1	76897,68
2002	194,870	948,157	3,901	0,015	1	76897,68
2003	184,800	921,442	4,614	0,014	1,092	76897,68
2004	192,993	847,036	4,631	0,005	1,171716	76897,68
2005	200,873	949,701	4,504	0,012	1,245534	76897,68
2006	215,733	983,908	4,544	0,036	1,286637	76897,68
2007	206,327	970,571	4,631	0,066	1,326522	76897,68
2008	211,597	1100,847	4,772	0,025	1,338461	76897,68
2009	187,344	1154,127	4,939	0,000	1,45223	76897,68
2010	197,550	1186,989	4,888	0,002	1,514676	76897,68
2011	210,494	1239,110	4,770	0,009	1,555573	76897,68
2012	241,588	1366,296	4,838	0,015	1,564906	76897,68
2013	265,279	1292,882	5,049	0,015	1,599334	76897,68
2014	290,352	1410,288	5,062	0,018	1,669705	76897,68

Таблица 18

Макроэкономические показатели ЯНАО за 2015-2019 гг.  
в ценах 2000 года (расчетные), млрд. руб.

Год	Стоимость основных фондов	Заработная плата лиц, работающих по найму	Затраты на НИОКР и инновации
n	$K_n$	$L_n$	$In_n$
2015	1548,539	4,97807	0,0177647
2016	1678,577	4,91140	0,0208151
2017	1802,610	4,84934	0,0193204
2018	1926,991	4,79157	0,0186080
2019	2056,414	4,73779	0,0182685

Прологарифмируем данные таблицы 17 и рассчитаем характеристики и основные критерии качества эконометрической модели, которая после обратного логарифмирования будет представлена в виде:

$$Y = K^{0,37} \times (AL)^{0,21} \times In^{0,048} \times Z^{0,23} \quad (90)$$

Коэффициент детерминации для данной модели составляет 0,92, расчетное значение критерия Фишера равно 89371,34 при  $F_{кр}=3,587$ , т.е. модель адекватна и адекватно описывает исходные данные. Все коэффициенты при переменных значимы.

Таблица 19

Характеристики и основные критерии качества эконометрической модели (89) зависимости ВРП ЯНАО от факторов за период 2000-2014 гг.

Модель 5: МНК, использованы наблюдения 2000-2014 (T = 15)

Зависимая переменная:  $\ln Y$

Стандартные ошибки НАС, ширина окна 1 (Ядро Бартлетта (Bartlett))

	Коэффициент	Ст. ошибка	z	P-значение	
	<i>m</i>				
$\ln AL$	0,207914	0,0869131	2,3922	0,0167	**
$\ln K$	0,369013	0,0466126	7,9166	<0,0001	***
$\ln In$	0,0479145	0,00993035	4,8251	<0,0001	***
$\ln Z$	0,23275	0,0195566	11,9013	<0,0001	***

Среднее зав. перемен	5,303428	Ст. откл. зав. перемен	0,210711
Сумма кв. остатков	0,050807	Ст. ошибка модели	0,067962
R-квадрат	0,918262	Испр. R-квадрат	0,895969
F(3, 11)	89371,34	P-значение (F)	2,10e-24
Лог. правдоподобие	21,37413	Крит. Акаике	-34,74827
Крит. Шварца	-31,91607	Крит. Хеннана-Куинна	-34,77844
Параметр rho	0,429652	Стат. Дарбина-Вотсона	1,092211

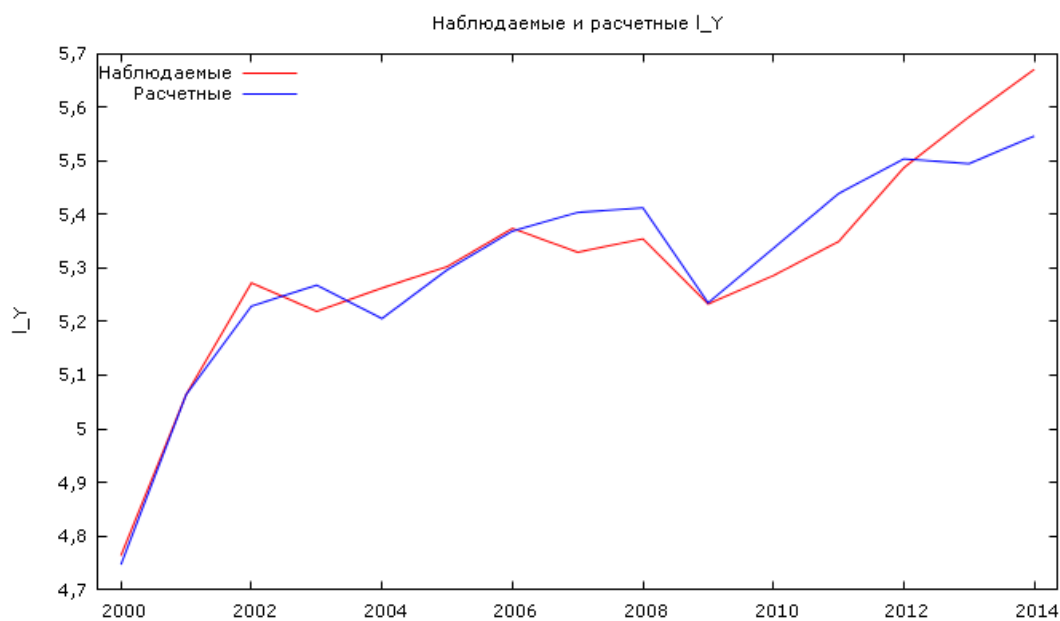


Рисунок 6. Наблюдаемые и расчетные значения  $I_Y$

Предполагаем, что процесс динамики производительности труда представляет собой авторегрессионный процесс. Для проверки гипотезы строим коррелограмму.

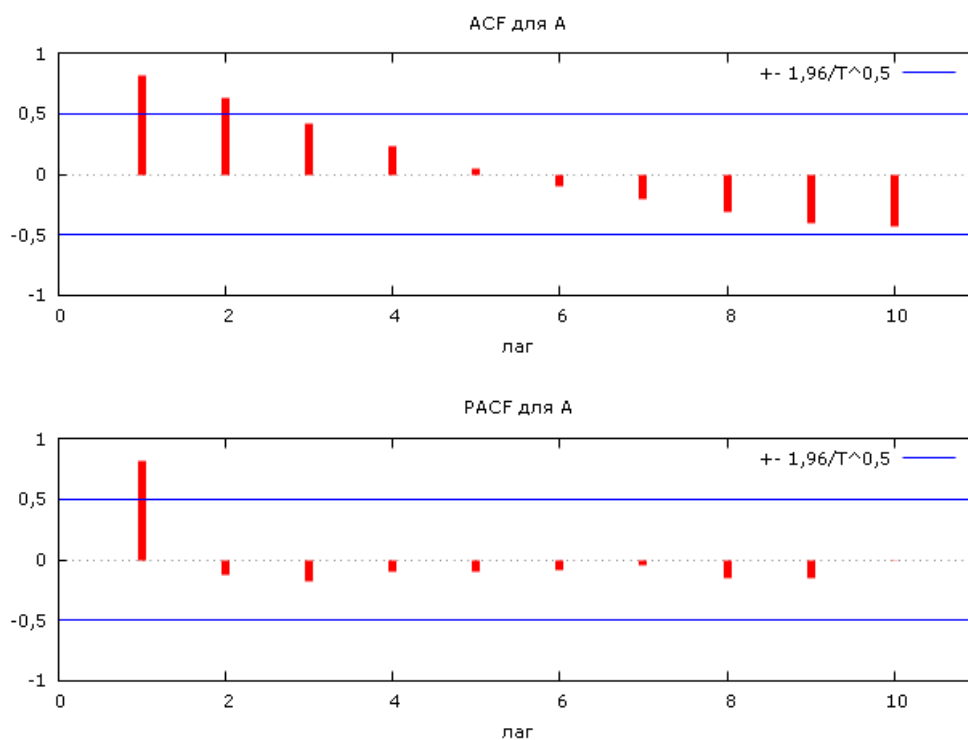


Рисунок 7. ACF и PACF для процесса динамики производительности труда



Наличие выбросов подтверждает нашу гипотезу о наличии авторегрессионного процесса. Значения из таблицы 20 показывают нам наличие автокорреляционной функции на 1% уровне значимости, используя стандартную ошибку  $1/\sqrt{T}$ .

Таблица 20

Автокорреляционная функция для А

Лаг	ACF	PACF	Q-стат.	[p-значение]
1	0,8202 ***	0,8202 ***	12,2535	[0,000]
2	0,6299 ***	-0,1309	20,0365	[0,000]
3	0,4210	-0,1737	23,8037	[0,000]
4	0,2270	-0,0981	24,9979	[0,000]
5	0,0516	-0,0969	25,0657	[0,000]
6	-0,0971	-0,0871	25,3331	[0,000]
7	-0,2040	-0,0400	26,6597	[0,000]
8	-0,3069	-0,1526	30,0898	[0,000]
9	-0,3994	-0,1533	36,8704	[0,000]
10	-0,4366 *	-0,0021	46,5925	[0,000]

Построим авторегрессию процесса динамики производительности труда, используя эконометрический пакет GRETЛ.

Таблица 21

Характеристики и основные критерии качества эконометрической модели авторегрессионной зависимости производительности труда в ЯНАО за период 2000-2014 гг.

Модель 6: ARIMA, использованы наблюдения 2001-2014 (T = 14)  
Зависимая переменная: (1-L) А

	Коэффициент	Ст. ошибка	z	P-значение	
	<i>m</i>				
const	0,0523401	0,00139166	37,6100	<0,0001	***
phi_1	0,561837	0,193379	2,9054	0,0037	***
phi_2	-0,644821	0,180813	-3,5662	0,0004	***
theta_1	-0,999977	0,266687	-3,7496	0,0002	***

Продолжение таблицы 21

Среднее зав. перемен	0,047836	Ст. откл. зав. перемен	0,035512
Среднее инноваций	-0,001113	Ст. откл. инноваций	0,021916
Лог. правдоподобие	31,63633	Крит. Акаике	-53,27266
Крит. Шварца	-50,07738	Крит. Хеннана-Куинна	-53,56845

	Действительная часть	Мнимая часть	Модуль	Частота
AR				
Корень 1	0,4357	1,1666	1,2453	0,1931
Корень 2	0,4357	-1,1666	1,2453	-0,1931
MA				
Корень 1	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000

Построим прогнозные значения производительности труда до 2019 года.

Таблица 22

Прогнозные значения динамики  
производительности труда в ЯНАО до 2019 года, млрд. руб.

Для 95% доверительных интервалов,  $z(0,025) = 1,96$

Набл.	А	Предсказание	Ст. ошибка	95% доверительный интервал
2015	не определено	1,75390	0,0219158	(1,71094, 1,79685)
2016	не определено	1,81250	0,0251382	(1,76323, 1,86177)
2017	не определено	1,84783	0,0261526	(1,79657, 1,89909)
2018	не определено	1,88657	0,0287709	(1,83018, 1,94296)
2019	не определено	1,94224	0,0288465	(1,88570, 1,99877)

Наконец, имея все необходимые прогнозные значения, мы сможем спрогнозировать ВРП ЯНАО до 2019 года, используя эконометрическую модель (2).

Таблица 23

Прогнозные значения динамики  
логлинеаризированного валового регионального продукта ЯНАО  
до 2019 года, млрд. руб.

Для 95% доверительных интервалов,  $t(11, 0,025) = 2,201$

Набл.	l_Y	Предсказание	Ст. ошибка	95% доверительный интервал
2015	не определено	5,58631	0,0792865	(5,41180, 5,76082)
2016	не определено	5,62769	0,0798468	(5,45195, 5,80343)
2017	не определено	5,65179	0,0793146	(5,47722, 5,82636)
2018	не определено	5,67644	0,0791074	(5,50232, 5,85055)
2019	не определено	5,70324	0,0793170	(5,52867, 5,87782)

После обратного логарифмирования мы получим прогнозные значения валового регионального продукта ЯНАО до 2019 года.

Таблица 24

Макроэкономические показатели ЯНАО за 2015-2019 гг.  
в ценах 2000 года (расчетные), млрд. руб.

Год	Валовый региональный продукт	Производительность труда (нарастающим итогом к 2000 году)
n	$Y_n$	$A_n$
2015	266,7495	1,75390
2016	278,0192	1,81250
2017	284,8008	1,84783
2018	291,9084	1,88657
2019	299,8373	1,94224

#### Выводы

В результате проведенного анализа макроэкономических показателей ЯНАО нами построены адекватные и значимые модели экономического роста и развития ЯНАО за 2000-2014 гг. С использованием полученных моделей спрогнозированы значения макроэкономических показателей (валовый региональный продукт, производительность труда, заработная плата лиц, работающих по найму, затраты на НИОКР и инновации, степень износа основных фондов, объем инвестиций в основные фонды) на период 2015-2019 гг и проведена оценка качества прогноза.

### 3.3. Построение модели Солоу для ЯНАО

Проверим, для начала, находится ли экономика ЯНАО на траектории сбалансированного роста. Для этого используем функцию Кобба-Дугласа, полученную нами в предыдущем пункте.

Выразим  $y=Y/AL$  как выпуск на единицу эффективного труда,  $k=K/AL$  как капиталовооруженность единицы эффективного труда. Построим по имеющимся данным эконометрическую модель:

$$y = k^{0,692} \quad (91)$$

Коэффициент детерминации для данной модели составляет 0,9975, расчетное значение критерия Фишера равно 4386,506 при  $F_{кр} = 4,6$ , т.е. модель адекватна и адекватно описывает исходные данные. Все коэффициенты при переменных значимы.

Таблица 23

Характеристики и основные критерии качества эконометрической модели зависимости выпуска на единицу эффективного труда от капиталовооруженности эффективного труда в ЯНАО за период 2000-2014 гг.

Модель 7: МНК, использованы наблюдения 2000-2014 (T = 15)

Зависимая переменная:  $l_y$

Стандартные ошибки НАС, ширина окна 1 (Ядро Бартлетта (Bartlett))

	<i>Коэффициент</i>	<i>Ст. ошибка</i>	<i>z</i>	<i>P-значение</i>	
	<i>m</i>				
$l_k$	0,691734	0,0104443	66,2307	<0,0001	***
Среднее зав. перемен	3,548702	Ст. откл. зав. перемен		0,180835	
Сумма кв. остатков	0,465917	Ст. ошибка модели		0,182427	
R-квадрат	0,997539	Испр. R-квадрат		0,997539	
F(1, 14)	4386,506	P-значение (F)		6,92e-19	
Лог. правдоподобие	4,754409	Крит. Акаике		-7,508818	
Крит. Шварца	-6,800768	Крит. Хеннана-Куинна		-7,516361	

Параметр rho                      0,483767      Стат. Дарбина-Вотсона      0,490712

Для нахождения устойчивого состояния будем использовать численные методы, для чего напишем программный код в среде MatLab R2014a. Ниже представлены листинги функций с комментариями.

Функция `define_parameters.m` содержит ранее определенные нами параметры.

```
define_parameters.m
-----
function params = define_parameters();

% Производственная функция Кобба-Дугласа

params.alpha = 0.692;% Доля фактора капитал в ВРП
params.delta = 0.06; % норма износа
params.g = 0.00573; % скорость роста технологического прогресса

% Население и норма сбережения
params.s = 0.38; % норма сбережения
params.n = 0.014; % скорость роста фактора труд

% Параметры симуляции
params.dt = 0.1;
-----
```

Норма сбережения определена как отношение инвестиций 2014 года к ВРП 2014 года.

Функция `dot_k.m` рассчитывает ежегодное изменение капиталовооруженности единицы эффективного труда. Решение модели Солоу было рассмотрено нами в 1 главе нашей работы.

```
Dot_k.m
-----
function dk = dot_k(k, params)

s = params.s;
n = params.n;
g = params.g;
delta = params.delta;
alpha = params.alpha;

dk = s * (k.^ alpha) - (n + g + delta) * k;
```

---

Функция `find_steady_state.m` находит равновесные значения капиталовооруженности единицы эффективного труда, валового регионального продукта и потребления.

`find_steady_state.m`:

---

```
function steady_state = find_steady_state(params)
```

```
params = define_parameters();
```

```
s = params.s;
```

```
n = params.n;
```

```
g = params.g;
```

```
delta = params.delta;
```

```
alpha = params.alpha;
```

```
k_ss = (s / (n + g + delta)) ^ (1 / (1 - alpha));
```

```
y_ss = k_ss ^ alpha;
```

```
c_ss = (1 - s) * y_ss;
```

```
steady_state.k = k_ss;
```

```
steady_state.y = y_ss;
```

```
steady_state.c = c_ss;
```

---

Функция `solow_dynamics.m` находит все значения переменных при переходе от одного равновесного состояния к другому. Численное моделирование производится методом Рунге-Кутты.

`solow_dynamics.m`

---

```
function ret = solow_dynamics(k0, simulation_length, params, initial_steady_state);
```

```
dt = params.dt;
```

```
m = ceil(simulation_length / dt); % Количество наблюдений
```

```
k = zeros(m, 1);
```

```
dk = zeros(m, 1);
```

```
y = zeros(m, 1);
```

```
c = zeros(m, 1);
```

```
t = zeros(m, 1);
```

```
% Используется формула Рунге-Кутты для приближенных вычислений
```

```

k(1) = k0;
t(1) = 0;
dk(1) = params.s * (k0 .^ params.alpha) - (params.n + params.g + params.delta) * k0;

for i = 2:m
    f1 = dot_k(k(i - 1), params);
    f2 = dot_k(k(i - 1) + (dt/2)*f1, params);
    f3 = dot_k(k(i - 1) + (dt/2)*f2, params);
    f4 = dot_k(k(i - 1) + dt*f3, params);

    k(i) = k(i - 1) + (dt/6)*(f1 + 2*f2 + 2*f3 + f4);
    t(i) = t(i - 1) + dt;
    dk(i) = dot_k(k(i), params);
end

y = k .^ params.alpha;
c = (1 - params.s) .* y;

```

---

Функции `plot_intensive_variables.m` и `plot_lny` дают графическое отображение перехода из начального состояния (показатели 2014 года) к состоянию 2019 года.

`plot_intensive_variables.m`

---

```

function dummy = plot_intensive_variables(dynamics, new_steady_state, params);

figure('name', 'Динамика переменных на единицу эффективного труда');
titles = {'Капиталовооруженность единицы эффективного труда', 'dk / dt', ...
    'Выпуск на единицу эффективного труда', 'Потребление на единицу эффективного труда'};

for i = 1:4
    subplot(2, 2, i);
    switch i
    case 1
        x = dynamics.k;
        x_ss = new_steady_state.k * ones(size(dynamics.k));
    case 2
        x = dynamics.dk;
        x_ss = zeros(size(dynamics.k));
    case 3
        x = dynamics.y;
        x_ss = new_steady_state.y * ones(size(dynamics.k));
    case 4
        x = dynamics.c;
        x_ss = new_steady_state.c * ones(size(dynamics.k));
    end
end

```

```

plot(dynamics.t, x, dynamics.t, x_ss)
title(titles{i});
xlabel = 'время';
grid on;
end

```

---

plot\_lny.m

---

```

function plot_lny(dynamics,params)

t = [0:(length(dynamics.k)-1)]*params.dt;
%lnY = params.alpha.*log(dynamics.k) +( params.g+params.n).*t
lny = params.alpha.*log(dynamics.k)
y=exp(lny)
AL=[7.4;7.42;7.57;8.07;8.45;8.73;8.9;8.96;9.04;9.2]
Y=y.*AL
figure('name', 'Динамика lny и Валового регионального продукта')
plot(dynamics.t,[y,Y],'LineWidth',2)

xlabel('время')
legend('y','Y','Location','NorthWest')
grid on
end

```

---

Файл main.m позволит нам симулировать модель Солоу при изменении каких-либо параметров модели, например, изменения нормы сбережений в 2014 году по сравнению с 2013 годом.

main.m

---

```

% Симулятор модели Солоу

params = define_parameters();
initial_steady_state = find_steady_state(params);

k0 = initial_steady_state.k;

% savings rate shock
params.s = 0.427;
new_steady_state = find_steady_state(params)

dynamics = solow_dynamics(k0, 5, params, initial_steady_state)

plot_intensive_variables(dynamics, new_steady_state, params);

```



plot\_lnY(dynamics, params);

---

Запустив файл main.m, мы можем просимулировать по рассчитанным нами параметрам модель экономического роста ЯНАО.

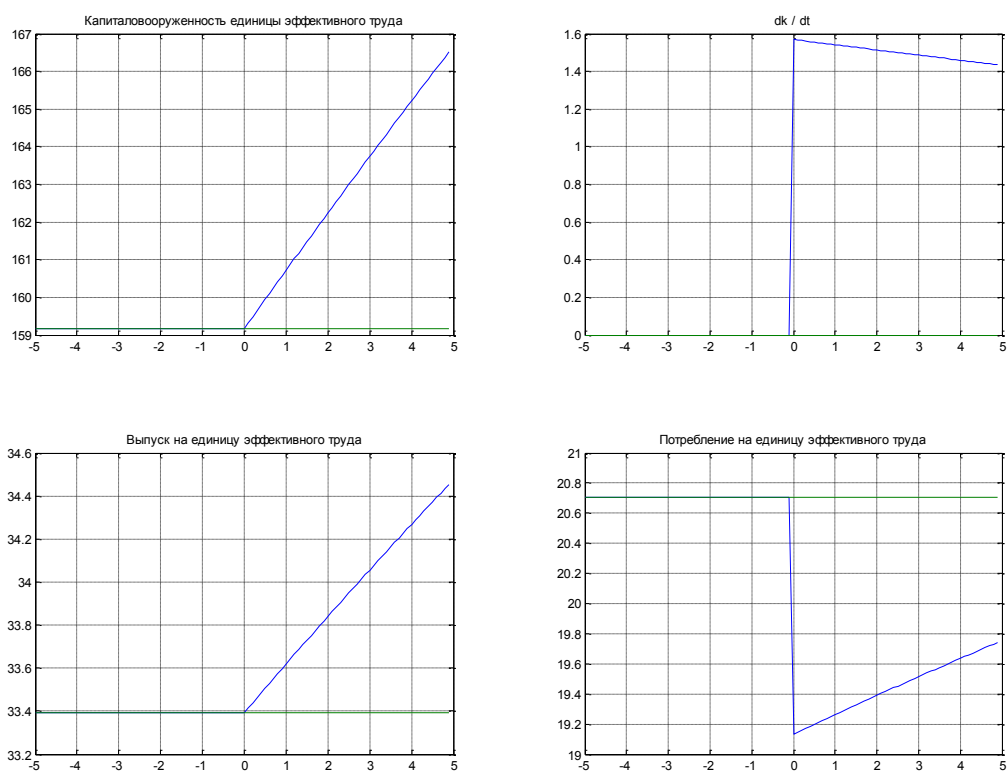


Рисунок 8. Симуляция модели Солоу для ЯНАО на 2015-2019 гг.

Следующий график дает нам отображение динамики ВРП ЯНАО на 2015-2019 гг. За 0 на графике принят 2014 год, с которого начинается изменение динамики в результате роста нормы сбережения.

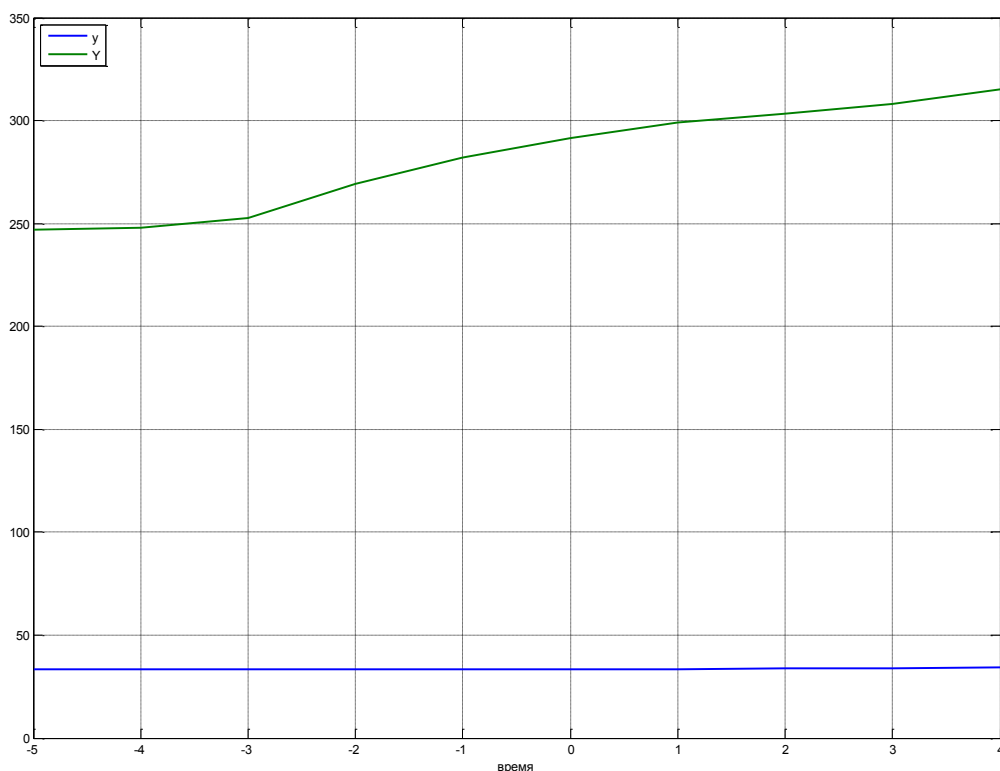


Рисунок 9. Симуляция изменения ВРП ЯНАО по модели Солоу на 2015-2019 гг.

Рассчитанные значения вынесем в отдельную таблицу.

Таблица 24

Макроэкономические показатели ЯНАО за 2015-2019 гг.  
в ценах 2000 года (расчетные), млрд. руб.

Год	Валовый региональный продукт
N	$Y_n$
2015	291,559
2016	299,210
2017	303,206
2018	307,868
2019	315,266

### 3.4. Динамическая стохастическая модель общего равновесия региона с учетом расходов консолидированного бюджета субъекта Федерации

Модель, представленная в данном пункте, получена из модели, рассмотренной нами в пункте 1.3 путем добавления государственного сектора на региональном уровне (в данных статистики этому соответствуют расходы консолидированного бюджета).

Введем в функцию полезности, рассмотренную в пункте 1.3, мотив спроса на деньги. Функция полезности задается в следующем виде:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U (C_t, L_t, M_t), \quad (92)$$

где  $\beta$  – коэффициент дисконтирования потребления будущего периода по сравнению с потреблением текущего периода,  $C$  - потребление,  $L$  - труд, а  $M$  - реальная денежная масса.

По сравнению с базовой моделью, нами предлагается внесение трёх изменений в бюджетное ограничение домашнего хозяйства. Во-первых, в базовой модели использованы общепринятые в макроэкономике предположения, в соответствии с которыми капитал в периоде  $t$  определяется решениями, сделанными в периоде  $t$ . Однако в пакете Dynare, который мы будем использовать для анализа шоков производительности, сбережений и т.п. используется другая система обозначений: значения всех предопределенных переменных периода  $t$  определяются решениями периода  $t-1$ . С помощью этого метода Dynare отличает предопределенные переменные от впередсмотрящих. Поэтому переменной  $K_t$  в базовой модели соответствует переменная  $K_{t-1}$  в нашей модифицированной модели [65].

Во-вторых, нами будут введены в анализ деньги и государственный долг. Поэтому богатство домашнего хозяйства  $O_t$  теперь будет включать

в себя не только физический капитал  $K_t$ , но также деньги  $M_t$  и реальные долговые обязательства правительства  $B_t$ . Для упрощения модели мы предполагаем, что по долговым обязательствам выплачивается не номинальный, а реальный процент (другими словами, инвесторы получают компенсацию за фактическую инфляцию). Ввиду того, что в данной модели выполняется эквивалентность Барро-Рикардо [6], данная предпосылка не повлияет на результат, но упростит вычисления. В частности, из этой предпосылки следует, что ставка процента по долговым обязательствам равна доходности физического капитала (в противном случае оказывается нарушенным условие отсутствия арбитража).

В-третьих, нами будет учтено, что процент не начисляется на денежную массу, что в каждом периоде денежная масса обесценивается в результате инфляции, а также приняты в расчет аккордные налоги. В результате бюджетное ограничение домашнего хозяйства примет следующий вид:

$$O_t = (1 + R_t)(O_{t-1} - M_{t-1}) - C_t + W_t L_t - \frac{M_{t-1}}{1 + \Pi_t} - T_t, \quad (93)$$

где  $R$  - ставка процента,  $W$  - заработная плата,  $\Pi$  - инфляция,  $T$  — аккордные налоги. При этом богатство домашнего хозяйства включает в себя физический капитал, деньги и государственный долг:

$$O_t = K_t + M_t + B_t, \quad (94)$$

Условия первого порядка для задачи домашнего хозяйства имеют вид:

$$U'_C = \Gamma_t \quad (95)$$

$$U'_L = -\Gamma_t W_t \quad (96)$$

$$U'_M = \Gamma_{t+1} \beta \left( 1 + R_{t+1} + \frac{1}{1 + \Pi_{t+1}} \right) \quad (97)$$

$$\Gamma_t = \beta(1 + R_{t+1})\Gamma_{t+1} \quad (98)$$

где  $\Gamma$  - множитель Лагранжа, полученный при решении задачи максимизации полезности домашнего хозяйства [45].

В сравнении с базовой моделью, у нас появилось условие первого порядка для денег (97). Производственный сектор характеризуется совершенной конкуренцией и постоянной отдачей от масштаба, следовательно, экономическая прибыль равна нулю. Производственная функция имеет вид:

$$Y_t = Z_t \times F(K_{t-1}, A_t L_t) \quad (99)$$

где  $Z_t$  - стохастический параметр производительности, а  $A_t$  задает тренд производительности. Условия первого порядка:

$$F'_K(K_{t-1}, L_t) = R_t + \delta \quad (100)$$

$$F'_L(K_{t-1}, L_t) = W_t, \quad (101)$$

где  $\delta$  - норма амортизации.

В соответствии с правилом обозначений, который мы обсуждали выше, вместо  $K_t$  в предыдущем задании, мы везде поставили  $K_{t-1}$ .

Трендовая составляющая растет с постоянным темпом  $\mu$ :

$$A_t = (1 + \mu)A_{t-1} \quad (102)$$

Условия равновесия рынков имеют вид:

$$Y_t + (1 - \delta)K_{t-1} = C_t + K_t + G_t, \quad (103)$$

где  $G_t$  - государственные закупки товаров и услуг (на уровне субъекта Федерации).

Стохастическая составляющая совокупной факторной производительности (не путать с производительностью труда!) и госзакупки следуют следующим процессам:

$$\ln Z_t = \rho^Z \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t^Z \quad (104)$$

$$\ln G_t = \rho^G \ln G_{t-1} + (1 - \rho^G) \ln \xi^G + \varepsilon_t^G \quad (105)$$

Центральный банк проводит монетарную политику, придерживаясь правила Тейлора, в соответствии с которым номинальная ставка процента реагирует на отклонения выпуска и инфляции:

$$R_t + \Pi_t = R^* + \tau_\pi \Pi_t + \tau_Y (y_t - y^*) + \varepsilon_t^R \quad (106)$$

где  $y = Y/A$ , а  $R^*$ ,  $y^*$  - значение реальной ставки процента и выпуска в стационарной точке,  $R^* = \frac{1+\mu}{\beta} - 1$ , а  $y^*$  может быть найден из численных экспериментов.

Для региона данный фактор является экзогенным и будет внесен в Dlnare в соответствующей строке.

Равновесие в экономике определяется уравнениями (94-106) и бюджетным ограничением правительства. По закону Вальраса исключаем из рассмотрения уравнение (94). Так как после этого государственный долг встречается только в бюджетном ограничении правительства, мы можем исключить из анализа эту переменную и это уравнение.

Предположим, что функция полезности является логарифмической

$$U(C, L, M) = \ln C + \theta \ln(1 - L) + \phi \ln M, \quad (107)$$

где  $\theta, \phi$  - параметры модели, откуда

$$U'_C = \frac{1}{C} \quad (108)$$

$$U'_L = -\frac{\theta}{1-L} \quad (109)$$

$$U'_M = \frac{\phi}{M} \quad (110)$$

Производственная функция имеет форму Кобба-Дугласа:

$$Y = ZK^\alpha(AL)^{1-\alpha} \quad (111)$$

Перепишем все уравнения системы через переменные, нормированные на тренд:  $c = C/A, k=K/A$  и т. д. Единственное исключение из этого правила,  $\gamma = \Gamma A$ . В итоге получаем следующую систему уравнений:

$$1/c_t = \gamma_t \quad (112)$$

$$\theta c_t / (1-L_t) = w_t \quad (113)$$

$$\frac{\phi}{m_t} = \gamma_{t+1} \beta \left( 1 + R_{t+1} + \frac{1}{1+\Pi_{t+1}} \right) \quad (114)$$

$$y_t = Z_t k_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (115)$$

$$R_t + \delta = \alpha A_t k_{t-1}^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \quad (116)$$

$$w_t = (1 - \alpha) Z_t k_{t-1}^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (117)$$

$$R_t = R^* + (\tau_\pi - 1) \Pi_t + \tau_Y (y_t - y^*) + \varepsilon_t^R \quad (118)$$

$$(1 + \mu) k_t = y_t + (1 - \delta) k_{t-1} - c_t - g_t \quad (119)$$

$$\ln Z_t = \rho^Z \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t^Z \quad (120)$$

$$\ln g_t = \rho^G \ln g_{t-1} + (1 - \rho^G) \ln \xi_t^G + \varepsilon_t^G \quad (121)$$

$$\gamma_t = (\beta / (1 + \mu)) (1 + R_{t+1}) \gamma_{t+1} \quad (122)$$

Модель рассматривается со следующими значениями параметров:

$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\rho$	$\rho^Z$	$\rho^G$	$\theta$	$\tau_\pi$	$\tau_y$	$\xi^G$	$\varphi$
1/3	0.95	0.02	0.015	0.9	0.9	2	1.5	0.5	0.1	1

Стандартные отклонения всех шоков приняты равными 0,05.

Dynare представляет собой набор функций MATLAB [65]. Пакет считывает уравнения модели DSGE, решает или оценивает модель с заданным набором параметров методом Бланшара-Кана, описанным нами в пункте 2.2 и выдаёт результаты.

Dynare читает текстовые файлы формата .mod и преобразует их в файлы MATLAB, которые затем вызывают функции Dynare для анализа модели. Мы продемонстрируем это на примере линеаризованной системы уравнений модели и покажем, как записать построенную нами модель в .mod-файл, читаемый Dynare.

Запишем теперь нашу модель в форме, которую Dynare сможет интерпретировать. В первой части кода Dynare нужно указать эндогенные переменные модели. Всего имеем одиннадцать уравнений, в которых содержится восемь переменных. Синтаксис Dynare: **var [variable1, variable2, ... ]**; строка должна оканчиваться точкой с запятой. В нашем случае модели необходимо написать:

```
var k W Y C L R pi G Theta Z Phi m gamma;
```

Далее определим экзогенные переменные модели. В нашей модели три шока. Синтаксис Dynare: **varexo [variable1, variable2, ... ]**; строка должна оканчиваться точкой с запятой. В случае нашей модели необходимо написать:

```
varexo eG eR eZ ePhi;
```

Теперь зададим параметры модели. В нашей модели восемь



структурных параметров и четыре стандартных отклонения шоков, т.е. всего двенадцать параметров. Синтаксис Dynare: **parameters** [**parameter1**, **parameter2**, ... ]; строка должна оканчиваться точкой с запятой. Наконец, зададим значения параметров. Синтаксис задания параметров [**parameter**] = [**value**] ; совпадает с синтаксисом MATLAB.

Запишем теперь линеаризованные уравнения модели. Раздел задания уравнений начинается с **model (linear)**; и заканчивается с **end** ;. Некоторые особенности синтаксиса:

1. Переменные, которые умножаются (делятся) на параметр, отделяются от него с помощью символа \* (/).
2. Переменные текущего момента времени не имеют нижнего временного индекса в коде Dynare. Лаги переменных  $x_{t-1}$  записываются как  $x(-i)$ , а условные математические ожидания записываются как  $x(+i)$ .
3. Уравнения заканчиваются точкой с запятой ;.

После спецификации уравнений необходимо сообщить Dynare, откуда начинать симуляции и считать функции импульсного отклика, т.е. начальные значения переменных. Аналогично заданию стартовых значений параметров, начнём секцию со строки **initval** ; и закончим её строкой **end** ;, задав значения переменных. Обычно начальные значения соответствуют состоянию равновесия линеаризованной модели. В нашей модели все переменные заданы в Dynare в отклонениях от своих равновесных значений, и поэтому равновесию модели соответствуют нулевые начальные значения. В данном случае, вместо указания начального значения для каждой переменной отдельно, можно написать **steady** ;, после чего Dynare начнёт симуляцию из состояния равновесия.

Далее мы должны определить шоки и задать их дисперсии либо произвольным образом, либо соответствующей оценкой. Начинаем секцию кода со строки **shocks** ; и заканчиваем её строкой **end** ;. Синтаксис для задания

шока:  $\text{var} [\text{shock}] = [\text{shock variance}]$ . Наконец, мы решаем уравнения и получаем результаты Dynare с настройками по умолчанию. Используем команду `stoch_simul` без дополнительных опций, справку по которым можно получить в справочнике Dynare<sup>1</sup>. Таким образом, заключительная строка `.mod`-файла имеет вид

```
stoch_simul ;
```

Этого достаточно для запуска Dynare, решения модели и получения результатов.

Разработанная система уравнений не имеет численного решения. Итеративным методом было выяснено, что при устранении из системы уравнений, ответственных за производство, у системы появляются решения.

Модифицируем разработанную модель:

$$w_t = \theta c_t / (1 - L_t) \quad (123)$$

$$c_t = Z_t L_t - g_t \quad (124)$$

$$\ln g_t = \rho^G \ln g_{t-1} + (1 - \rho^G) \ln \xi_t^G + \varepsilon_t^G \quad (125)$$

$$R_t = R^* + (\tau_\pi - 1) \Pi_t + \tau_Y (c_t - c^*) + \theta_t \quad (126)$$

$$1 = \beta \times \frac{\varphi_{t+1}}{\varphi_t} \times \frac{c_t}{c_{t+1}} \times R_{t+1} \quad (127)$$

$$\pi_t = \beta \times \pi_{t+1} + \gamma \times \ln \left( \frac{W_t}{Z_t} + \mu \right) \quad (128)$$

$$\ln \varphi_t = \rho^\varphi \ln \varphi_{t-1} + \varepsilon_t^\varphi \quad (129)$$

$$\ln Z_t = \rho^Z \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t^Z \quad (130)$$

$$\theta_t = \rho^\theta \theta_{t-1} + \varepsilon_t^\theta \quad (131)$$

Содержимое файла `yanao.mod`:

---

```
var W C L Z R pi Theta Phi G;
```

<sup>1</sup>[www.dynare.org/documentation-and-support/manual/manual.pdf](http://www.dynare.org/documentation-and-support/manual/manual.pdf)

```

varexo ePhi eZ eTheta eG;

parameters theta tau_pi tau_y beta gamma mu rho_Phi rho_Z xi_G
rho_G rho_Theta;
theta = 2;
tau_pi = 1.5;
tau_y = 0.5;
beta = 0.95;
gamma = 0.1;
mu = 0.1;
rho_Phi = 0.9;
rho_Z = 0.9;
rho_Theta = 0.9;
xi_G = 0.1;
rho_G = 0.9;

model;
W = theta * C / (1 - L);
C = (Z*L)-G;
ln(G) = rho_G * ln(G(-1)) + (1-rho_G)*ln(xi_G) + eG;
R = STEADY_STATE(R) + (tau_pi - 1) * pi + tau_y * (C -
STEADY_STATE(C)) + Theta;
1 = beta * Phi(+1)/Phi * C/C(+1) * R(+1);
pi = beta * pi(+1) + gamma * ln(W/Z + mu);
ln(Phi) = rho_Phi * ln(Phi(-1)) + ePhi;
ln(Z) = rho_Z * ln(Z(-1)) + eZ;
Theta = rho_Theta(-1) * Theta(-1) + eTheta;

end;

initval;
W = 0.55;
C = 0.4;
Z = 1;
R = 0.11;
pi = 0.16;
Theta = 0.01;
Phi = 0.1;
G = 0.1;
end;

shocks;
var ePhi; stderr 0.05;
var eZ; stderr 0.05;
var eTheta; stderr 0.05;
var eG; stderr 0.05;
end;

check;
steady;

```

```
stoch_simul(order = 1);
```

---

Чтобы запустить Dynare, в командной строке MATLAB набираем `dynare yanao.mod`

Пакет читает содержимое `.mod`-файла с описанием модели и решает линейную модель рациональных ожиданий. Dynare выводит массу аналитической информации в командное окно MATLAB, сохраняя большую часть в рабочее пространство, и генерирует графики функций импульсных откликов на шоки к каждой переменной. Пакет также сохраняет весь сгенерированный контент в рабочую папку.

Первое, что печатает Dynare, — это информация обработки. Строки `[mex]` означают, что Dynare нашёл `.mex`-файлы — исполняемые файлы MATLAB, которые производят некоторые вычисления вне оболочки MATLAB. Следует проверить, чтобы количество уравнений, которые Dynare находит в `.mod`-файле, совпадало с количеством эндогенных переменных модели. В нашей модели таких переменных тринадцать.

Далее, Dynare генерирует ковариационную матрицу шоков. Следующая секция выдачи Dynare содержит моменты модели, вычисленные с использованием решения модели и специфицированных стандартных ошибок экзогенных шоков.

Далее Dynare выдаёт разложение дисперсии эндогенных переменных, т.е. долю дисперсии эндогенных переменных, которая может быть приписана экзогенным шокам. Таким образом, для каждой переменной сумма долей по всем четырём шокам равна 100%.

Затем Dynare выдаёт матрицу теоретических корреляций между эндогенными переменными. Эти значения вычисляются на основе

ковариационной матрицы эндогенных переменных, которую Dynare не возвращает в командное окно.

Далее Dynare показывает автокорреляции до пятого порядка, т.е. корреляции эндогенных переменных с собственными лагами  $p$ -го порядка, где  $p = \{1, \dots, 5\}$ .

Наконец, Dynare генерирует графики функций импульсного отклика эндогенных переменных на экзогенные шоки. Dynare отфильтровывает функции отклика, незначимо отличающиеся от нуля на области вычисления. В каждом окне рисунка MATLAB будет нарисовано не более 9 графиков импульсных функций; если в модели более 9 эндогенных переменных, Dynare нарисует импульсные отклики сверх 10-го в последующих окнах рисунка MATLAB.

Dynare сохраняет в рабочее пространство все значения параметров и импульсные отклики всех эндогенных переменных на шоки.

Содержимое файла `yanao.log`:

---

```
Configuring Dynare ...
[mex] Generalized QZ.
[mex] Sylvester equation solution.
[mex] Kronecker products.
[mex] Sparse kronecker products.
[mex] Local state space iteration (second order).
[mex] Bytecode evaluation.
[mex] k-order perturbation solver.
[mex] k-order solution simulation.
[mex] Quasi Monte-Carlo sequence (Sobol).
[mex] Markov Switching SBVAR.

Starting Dynare (version 4.4.3).
Starting preprocessing of the model file ...
Found 9 equation(s).
Evaluating expressions...done
Computing static model derivatives:
- order 1
Computing dynamic model derivatives:
- order 1
Processing outputs ...done
Preprocessing completed.
```

Starting MATLAB/Octave computing.

EIGENVALUES:

Modulus	Real	Imaginary
0.9	0.9	0
0.9	0.9	0
0.9	0.9	0
0.9	0.9	0
1.102	1.065	0.2811
1.102	1.065	-0.2811
Inf	Inf	0
Inf	Inf	0

There are 4 eigenvalue(s) larger than 1 in modulus for 4 forward-looking variable(s)

The rank condition is verified.

STEADY-STATE RESULTS:

W	0.899997
C	0.27931
L	0.37931
Z	1
R	1.05263
pi	0
Theta	6.93889e-18
Phi	0.999999
G	0.1

MODEL SUMMARY

Number of variables:	9
Number of stochastic shocks:	4
Number of state variables:	4
Number of jumpers:	4
Number of static variables:	2

MATRIX OF COVARIANCE OF EXOGENOUS SHOCKS

Variables	ePhi	eZ	eTheta	eG
ePhi	0.002500	0.000000	0.000000	0.000000
eZ	0.000000	0.002500	0.000000	0.000000
eTheta	0.000000	0.000000	0.002500	0.000000
eG	0.000000	0.000000	0.000000	0.002500

THEORETICAL MOMENTS

VARIABLE	MEAN	STD. DEV.	VARIANCE
W	0.9000	0.2176	0.0474
C	0.2793	0.0510	0.0026
L	0.3793	0.0510	0.0026
Z	1.0000	0.1147	0.0132
R	1.0526	0.0240	0.0006
pi	0.0000	0.1529	0.0234
Theta	0.0000	0.1147	0.0132
Phi	1.0000	0.1147	0.0132
G	0.1000	0.0115	0.0001

VARIANCE DECOMPOSITION (in percent)

	ePhi	eZ	eTheta	eG
W	1.30	3.87	94.75	0.08
C	1.08	19.74	78.98	0.20
L	1.08	16.68	78.98	3.25
Z	0.00	100.00	0.00	0.00
R	21.73	15.62	62.49	0.16
pi	1.25	7.42	91.26	0.07
Theta	0.00	0.00	100.00	0.00
Phi	100.00	0.00	0.00	0.00
G	0.00	0.00	0.00	100.00

COEFFICIENTS OF AUTOCORRELATION

Order	1	2	3	4	5
W	0.9000	0.8100	0.7290	0.6561	0.5905
C	0.9000	0.8100	0.7290	0.6561	0.5905
L	0.9000	0.8100	0.7290	0.6561	0.5905
Z	0.9000	0.8100	0.7290	0.6561	0.5905
R	0.9000	0.8100	0.7290	0.6561	0.5905
pi	0.9000	0.8100	0.7290	0.6561	0.5905
Theta	0.9000	0.8100	0.7290	0.6561	0.5905
Phi	0.9000	0.8100	0.7290	0.6561	0.5905
G	0.9000	0.8100	0.7290	0.6561	0.5905

Total computing time : 0h00m17s

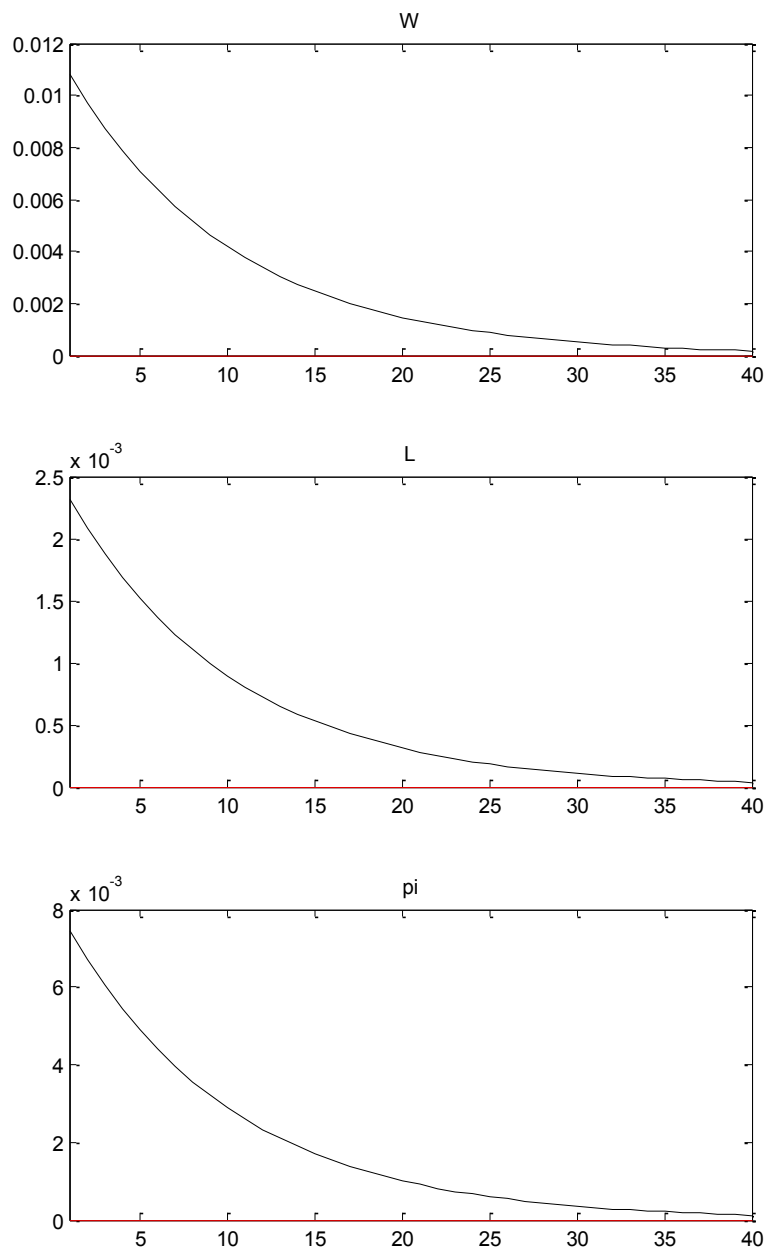


Рисунок 10а. Эффекты шока скорости уровня инфляции



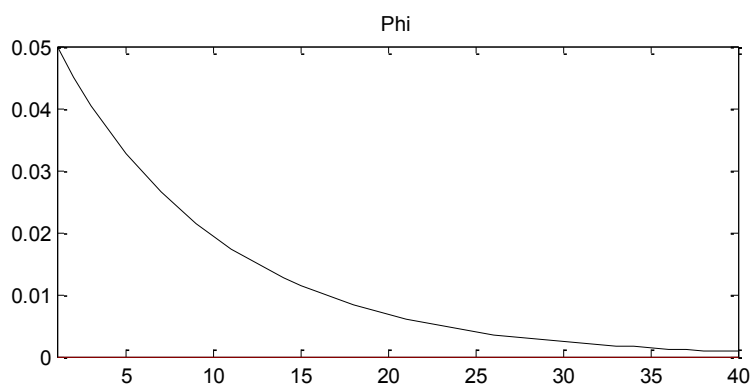
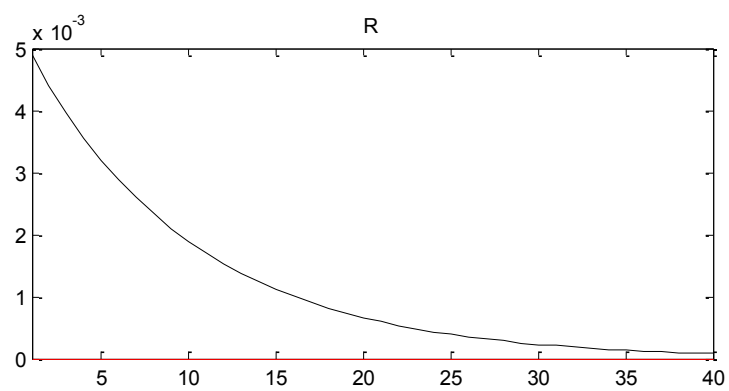
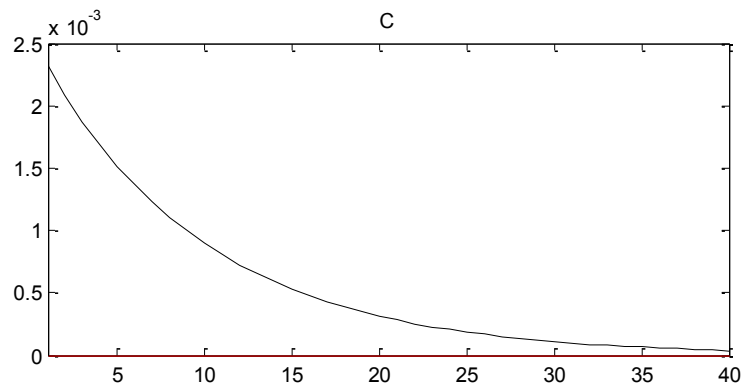


Рисунок 10б. Эффекты шока скорости уровня инфляции

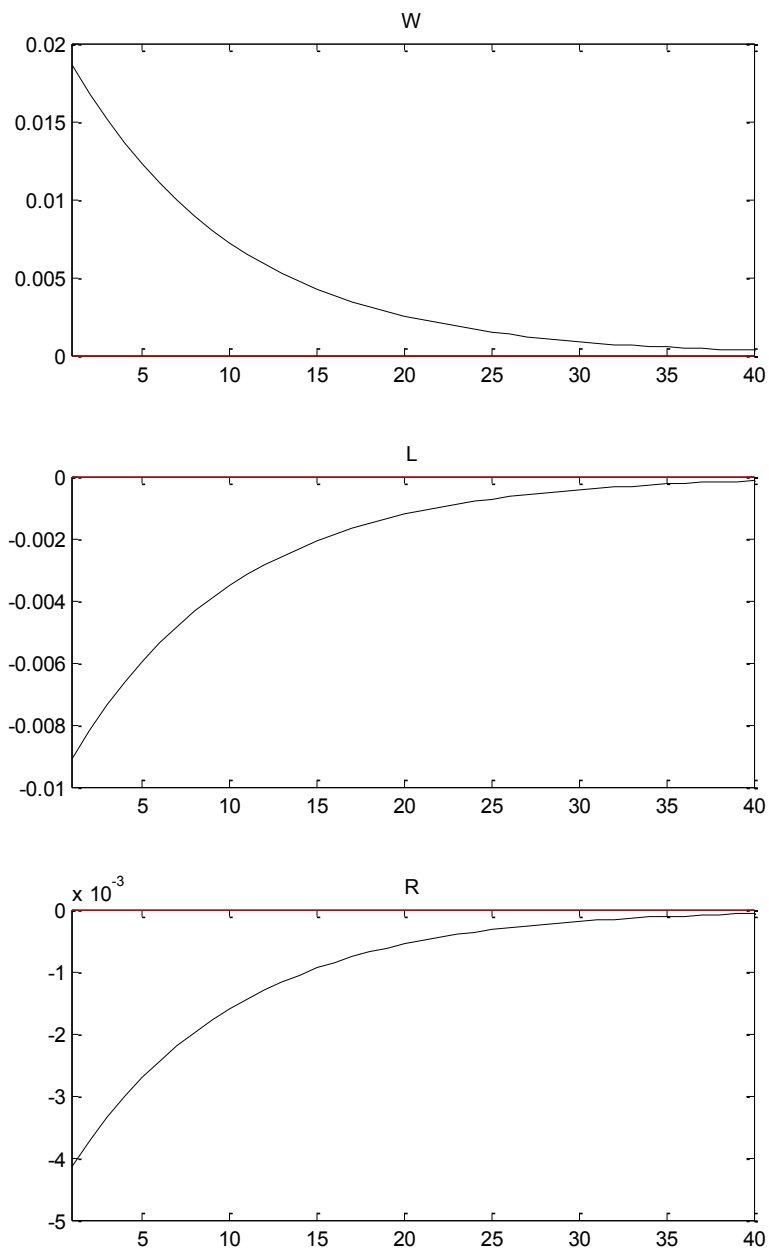


Рисунок 11а. Эффекты шока совокупной факторной производительности

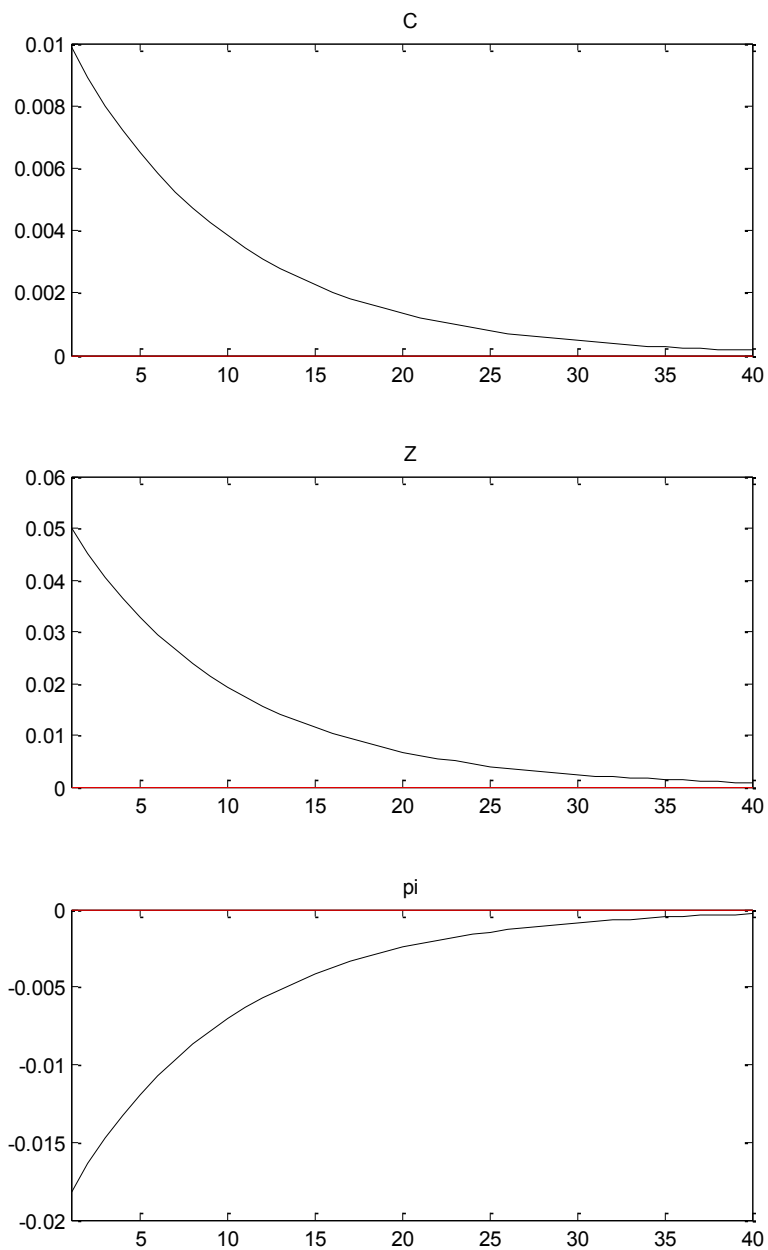


Рисунок 116. Эффекты шока совокупной факторной производительности

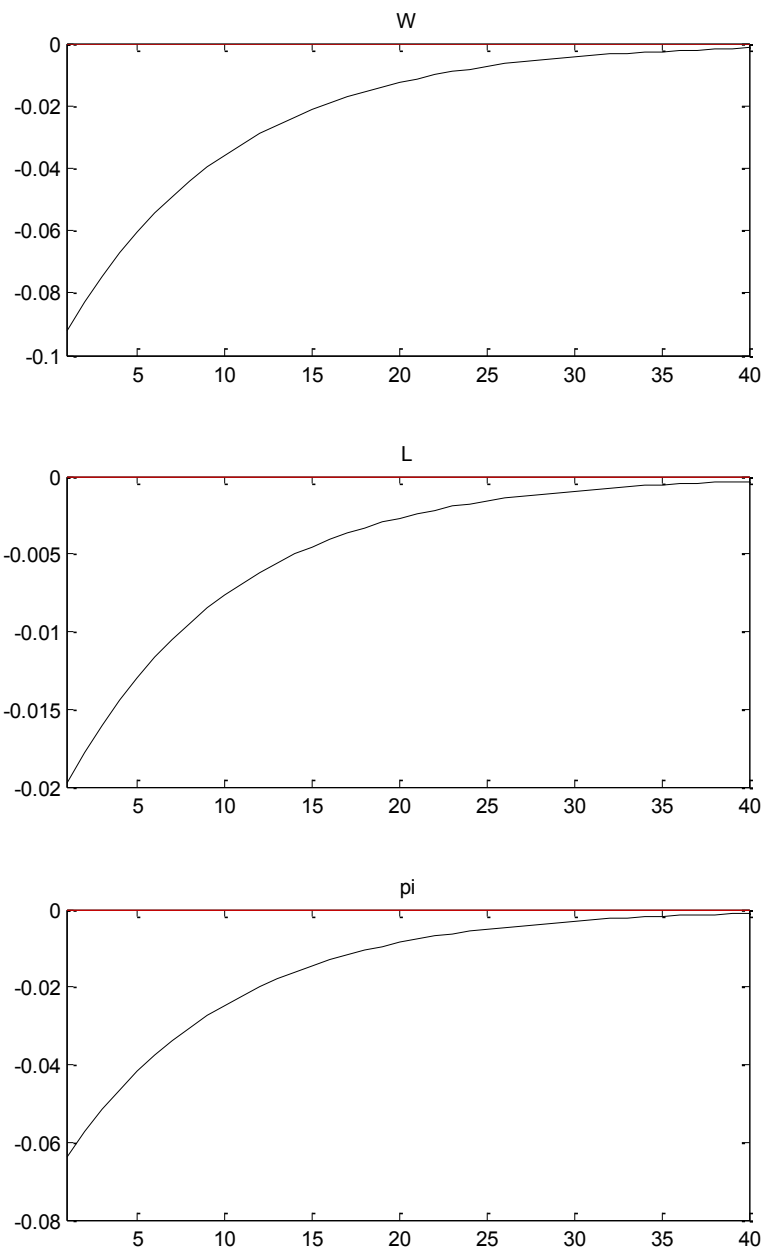


Рисунок 12а. Эффекты шока предпочтений потребителей

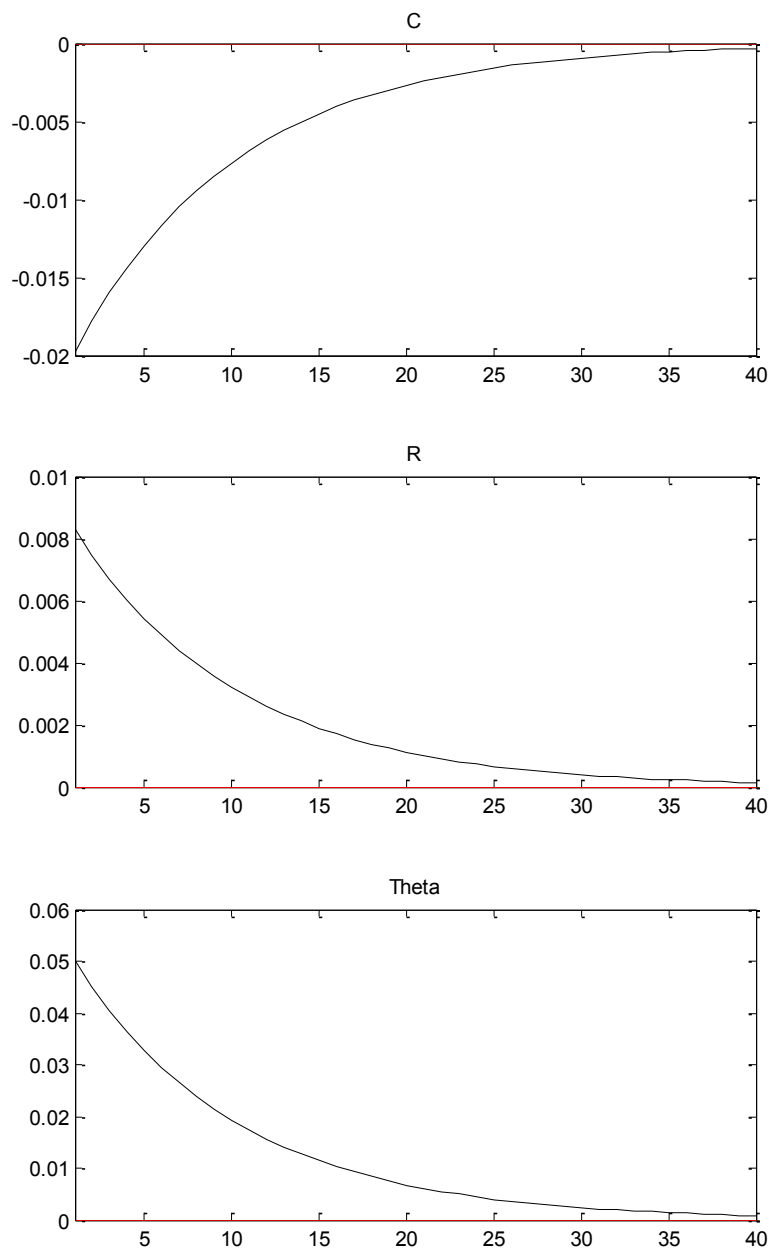


Рисунок 126. Эффекты шока предпочтений потребителей

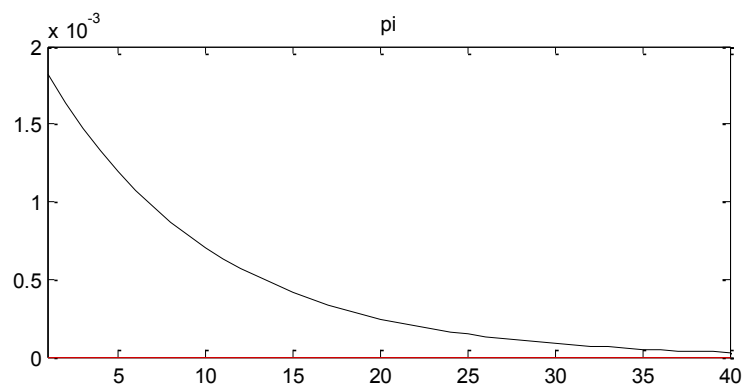
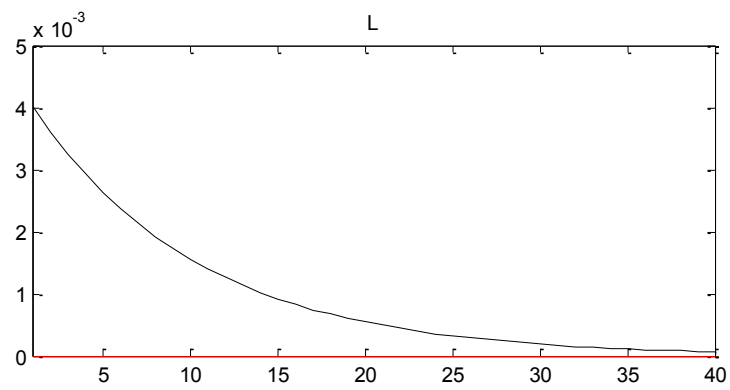
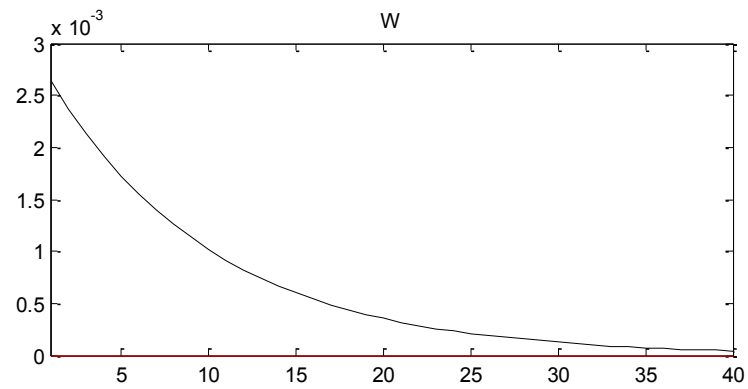


Рисунок 13а. Эффекты шока расходов консолидированного бюджета субъекта Федерации

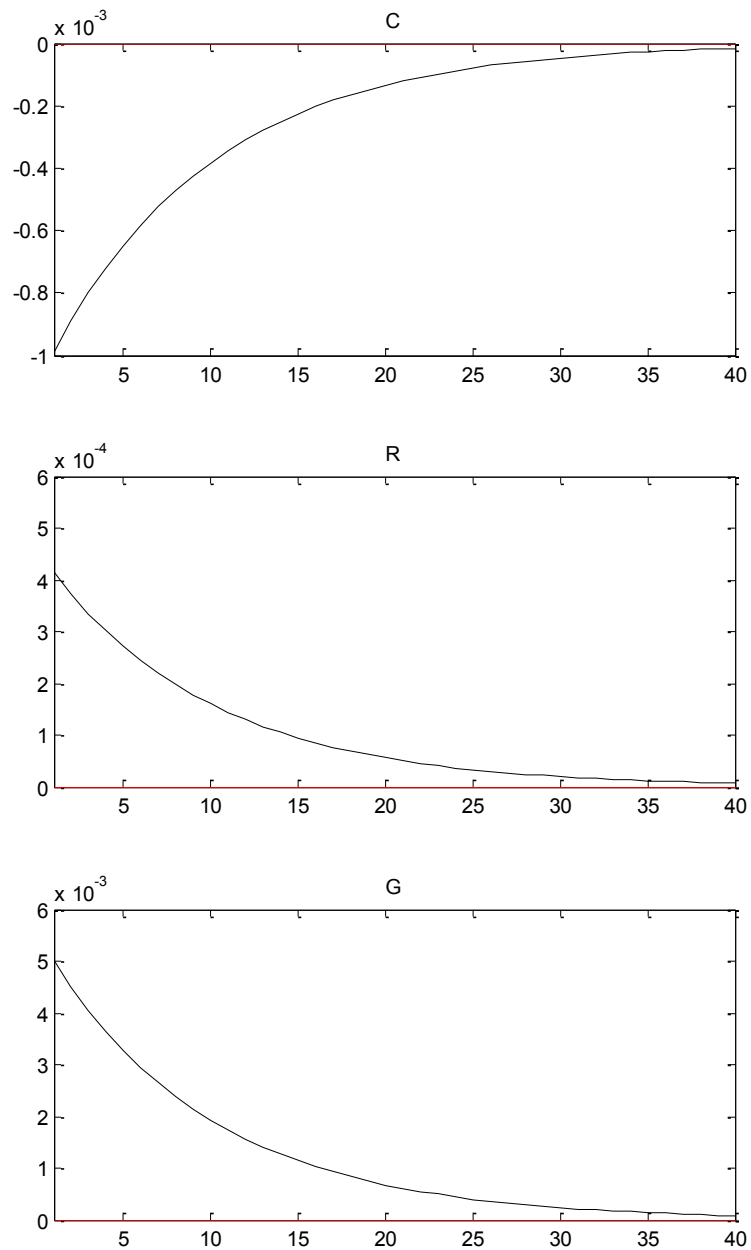


Рисунок 13б. Эффекты шока расходов консолидированного бюджета субъекта Федерации

Таким образом, в результате использования модели региона определено влияние экзогенных шоков на макроэкономические показатели:

- 1) Шоковое изменение скорости уровня инфляции на 5% приведет к одномоментному росту:

- а. заработной платы на 11%;
  - б. потребления домохозяйств на 0,225%;
  - в. уровня занятости на 0,225%;
  - г. процентной ставки на 0,475%;
  - д. инфляции на 0,75%.
- 2) Шоковое изменение совокупной факторной производительности на 5% приведет к одномоментному росту (+) или падению (-):
- а. заработной платы на 1,75%;
  - б. потребления домохозяйств на 1%;
  - в. уровня занятости на -0,9%;
  - г. процентной ставки на -0,4%;
  - д. инфляции на -0,0175%.
- 3) Шоковое изменение предпочтений потребителей между потреблением в текущем периоде и потреблением в будущих периодах на 5% приведет к одномоментному росту (+) или падению (-):
- а. заработной платы на -9%;
  - б. потребления домохозяйств на -1,9%;
  - в. уровня занятости на -1,9%;
  - г. процентной ставки на 0,8%;
  - д. инфляции на -6%.
- 4) Шоковое изменение расходов консолидированного бюджета субъекта Федерации на 5% приведет к одномоментному росту (+) или падению (-):
- а. заработной платы на 2,75%;
  - б. потребления домохозяйств на -0,1%;
  - в. уровня занятости на 0,4%;
  - г. процентной ставки на 0,4%;
  - д. инфляции на 0,175%.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современная экономическая наука предполагает широкое применение математических методов как на этапе формализации теоретических положений, так и в ходе проведения практических экономических исследований. Для решения задач, возникающих в процессе реализации экономической политики, необходимы достаточно сложные модели. Примером таких моделей являются динамические стохастические модели общего равновесия (DSGE).

DSGE-модели, с одной стороны, являются формализацией теоретических положений, а, с другой стороны, могут использоваться для количественного анализа и прогнозирования. Более того, DSGE-модели могут применяться для анализа различных вариантов экономической политики. Это является следствием того, что в DSGE-моделях на микроуровне рассматриваются предпочтения экономических агентов и ограничения, в рамках которых они осуществляют свою деятельность (в отличие от традиционных макроэконометрических моделей, в которых изначально анализируются агрегированные показатели). Параметры, характеризующие предпочтения и ограничения, считаются структурными, не подверженными изменению при изменении правил экономической политики. Параметры DSGE-моделей могут определяться с помощью методов математической статистики и др.

Нахождение авторегрессионных зависимостей основных макроэкономических показателей ЯНАО позволило нам спрогнозировать их значения на временной горизонт 2015-2019 гг.:

1) Сокращение заработной платы лиц, работающих по найму с 4,98 млрд. руб. в 2015 году до 4,74 млрд. руб. в 2019 году;

2) Достижение локального максимума затрат на НИОКР и инновации в 2016 году в размере 0,021 млрд. руб. и затем постепенное снижение затрат до 0,018 млрд. руб.;

3) Увеличение стоимости основных фондов с 1548,539 млрд. руб. в 2015 году до 2056,414 млрд. руб. в 2019 году;

4) Увеличение объёма инвестиций в основные фонды с 116,4 млрд. руб. в 2015 году до 124,3 млрд. руб. в 2019 году;

5) Снижение степени износа основных фондов с 57,5% в 2015 году до 54,6% в 2019 году.

Построение функции Кобба-Дугласа для ЯНАО позволило нам спрогнозировать показатели валового регионального продукта и производительности труда на период 2015-2019 гг.

По построенному прогнозу валовый региональный продукт ЯНАО вырастет с 266,75 млрд. руб. в 2015 году до 299,84 млрд. руб. в 2019 году (в ценах 2000 года), а производительность труда (нарастающим итогом к 2000 году) возрастет с 1,75 в 2015 году до 1,94 в 2019 году.

Построение функции Солоу для ЯНАО позволило нам спрогнозировать показатели валового регионального продукта на период 2015-2019 гг.

По построенному прогнозу валовый региональный продукт ЯНАО вырастет с 291,56 млрд. руб. в 2015 году до 315,27 млрд. руб. в 2019 году (в ценах 2000 года).

Модифицирована базовая динамическая стохастическая модель общего равновесия для региона РФ (на примере ЯНАО), позволяющая найти отклонения от тренда некоторых макроэкономических факторов (занятость, заработная плата, потребление домохозяйств, процентная ставка, инфляция) в зависимости от макроэкономических шоков: изменения скорости уровня инфляции, изменения совокупной факторной производительности, изменения

межвременных предпочтений потребителей, изменения расходов консолидированного бюджета субъекта Федерации.

В результате использования модели региона определено влияние экзогенных шоков на макроэкономические показатели.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Abramovitz M. The Search for Sources of Growth: Areas of Ignorance, Old and New // *The Journal of Economic History*. V. 53. No. 2 (Jun. 1993). P. 217-243.
2. Andersson A.E., Mantsinen J. Mobility of Resources, accessibility of Knowledge, and Economic Growth // *Behavioral Science*. 1981. 25:5.
3. Baily M.N. Productivity Growth and Materials Use in U.S. Manufacturing, *Quart J. Econ.*, V.101. No. 1, 1986. P. 185-95.
4. Barro R Notes on Growth Accounting. Cambridge: NBER, 1998.
5. Barro R., Sala-i-Martin X. Economic growth and convergence across the United States. NBER Working paper. 1990. 3419.
6. Barro R., Sala-i-Martin X. *Economic Growth*. 2nd ed. The MIT Press, 2004.
7. Bernard A.B., Durlauf S.N. Interpreting tests of the convergence hypothesis // *Journal of Econometrics*. 71. 1998. P.161-173.
8. Bernard A.B. Empirical implications of the convergence hypothesis. CEPR Working paper. 1991. 23.
9. Blanchard, O.J., Kahn, C.M. (1980). The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations, *Econometrica*, 48, 5, 1305-1311.
10. Brubaker E.R. Embodied Technology, the Asymptotic Behavior of Capital's Age, and Soviet Growth // *The Review of Economics and Statistics*. V. 50. No. 3, 1968. P. 304-311.
11. Bruno M. World Shocks, Macroeconomic Response and the Productivity Puzzle // *Slower Growth in the Western World*. R.C.O. Methews, ed. London: Heinemann, 1982.
12. Buslik A. A Bayesian approach to model uncertainty. - 1994.
13. Castro J. Indicators of real economic convergence. A primer. UNU-CRIS Working papers. W-2004/2.

14. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production // American Economic Review. V. 18. No. 1. 1928. P. 139-165.
15. Costello D.M. A Cross-Country, Cross-Industry Comparison of Productivity Growth // The Journal of Political Economy. V. 101. No. 2, 1993. P. 207-222.
16. Cox N. D. Comparison of two uncertainty analysis methods. - 1977.
17. Davis D.R., Weinstein D.E. Bones, Bombs and Break Points: The Geography of Economic Activity // American Economic Review. 92, 2002. P. 1269-1289.
18. Denison E.F. Accounting for United States Economic Growth 1929-1969. Washington: Brookings Institution, 1974.
19. Denison E.F. Capital Formation and the Recent Productivity Slowdown: Discussion // The Journal of Finance. V. 33. No. 3; Papers and Proceedings of the Thirty-Sixth Annual Meeting American Finance Association. New York City December 28-30. 1977. (Jun., 1978). P. 1006-1010.
20. Denison E.F. The Contribution of Capital to Economic Growth // The American Economic Review. V. 70. No. 2; Papers and Proceedings of the Ninety-Second Annual Meeting of the American Economic Association. 1980. P. 220-224.
21. Denison E.F. The Sources of Economic Growth in the United States and the Alternatives Before Us, Committee for Economic Development. New York, 1962.
22. Denison E.F. Why Growth Rates Differ: Post-War Experience in Nine Western Countries, Brookings Institution. Washington, 1967.
23. Ellison G., Glaser E. Geographic Concentration in U.S. Manufacturing Firms: a Dartboard Approach // Journal of Political Economy. 105. 1997. P. 889-927.
24. Esteban J.M., Ray D. On the measurement of polarization // Econometrica. 4. 1994. P. 819-851.
25. Evans P. Using cross-country variances to evaluate growth theories // Journal of Economics Dynamics and Control. 1996. P. 1027-1049.

26. Fiani R. Increasing Returns, Non-Traded Inputs and Regional Development // Economic Journal. 1984. P. 308-323.
27. Garnaut R., Ross A. C. Uncertainty, risk aversion and the taxing of natural resource projects // The Economic Journal. - 1975. - C. 272-287.
28. Griliches Z. Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth // Bell Journal of Economics. V. 10. No. 1. 1979. P. 92-116.
29. Griliches Z., Jorgenson D.W. The Explanation of Productivity Change // The Review of Economic Studies. V. 34. No. 3. (Jul., 1967). P. 249-283.
30. Griliches Z., Mairesse J. Comparing Productivity Growth // European Economic Review. XXI (March/April 1983). P. 89-119.
31. Hall R.E. Technical Change and Capital from the Point of View of Dual // The Review of Economic Studies. V. 35. 1968. P. 34-46.
32. Harberger A.C. A Vision of the Growth Process // The American Economic Review. V. 88. No. 1 (Mar., 1998). P. 1-32.
33. Harberger A.C. Reflections on Economic Growth in Asia and the Pacific // Asian Economic Studies. V. 8. 1998. P. 13-41.
34. Harrod R. Toward a Dynamic Economics. London, 1948.
35. Helton J. C. Uncertainty and sensitivity analysis in the presence of stochastic and subjective uncertainty // Journal of Statistical Computation and Simulation. - 1997. - T. 57. - №. 1-4. - C. 3-76.
36. Hirschman A. The Strategy of Economic Development, Yale University Press. New Haven, 1958.
37. Holmes T. Localization of Industry // Review of Economics and Statistics. 81. 1991. P. 314-333.
38. Iman R. L., Helton J. C. Comparison of uncertainty and sensitivity analysis techniques for computer models. - Sandia National Labs., Albuquerque, NM (USA), 1985.

39. Juselius, K., Franchi, M. (2007). Taking a DSGE Model to the Data Meaningfully, *Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal*, 1, 4, 1-38.
40. Kydland, F.E., Prescott, E.C. (1982). Time to Build and Aggregate Fluctuations, *Econometrica*, 50, 6, 1345-1370.
41. Knight, Frank H. Risk, Uncertainty, and Profit. Boston, MA: Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Co. 1921. Library of Economics and Liberty [Online] available from <http://www.econlib.org/library/Knight/knRUP.html>; accessed 16 May 2016; Internet.
42. Samuelson, Paul A, 1975, "Optimum Social Security in a Life-Cycle Growth Model," *International Economic Review*, vol. 16(3), pages 539-44, October.
43. Suresh P. V., Babar A. K., Raj V. V. Uncertainty in fault tree analysis: a fuzzy approach // *Fuzzy Sets and Systems*. - 1996. - Т. 83. - №. - С. 135-141.
44. Winkler R. L. Model uncertainty: probabilities for models? - 1994.
45. Абчук В. А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. — СПб.: Союз, 1999.
46. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
47. Аллен Р. Дж. Математическая экономия. — М., 1963.
48. Антанавичюс К. А. Многоуровневое стохастическое моделирование отраслевых плановых решений. - Мокслас, 1977.
49. Аркин В. И., Евстигнеев И. В. Вероятностные модели управления и экономической динамики. - Наука, 1979.
50. Багиров И. Г. Статистическое моделирование управляемых экономических процессов с помощью стохастических уравнений диффузионного типа // *Экономико-статистические модели в*

- прогнозировании и планировании промышленного производства. Новосибирск: Наука. - 1978.
51. Балдин К. В. Математические методы в экономике. Теория, примеры, варианты контрольных работ: Учеб. пособие/ К. В. Балдин, О. Ф. Быстров — М.
52. Баумоль У. Экономическая теория и исследование операций. — М., 1965.
53. Башарин Г. П. Начала финансовой математики. М. ИНФРА-М. 1997.
54. Белых А. А. История советских экономико-математических исследований: 1917 — нач. 60-х г. — Л.: ЛГУ, 1990.
55. Бессонов В. А. О точности сводных показателей экономической динамики в российской переходной экономике. В сб. статей: «Количественные методы в теории переходной экономики» // Экономика и математические методы. 2002. С. 113-127.
56. Бессонов В. А. Трансформационный спад и структурные изменения в российском промышленном производстве. М: ИЭПП, 2001.
57. Бутс Б., Дробышевский С., Кочеткова О., Мальгинов Г., Петров В., Федоров Г., Хехт А., Шеховцов А., Юдин А. (2002) Типология регионов РФ. М.: СЕПРА, 2002.
58. Ващенко Т. В. Математика финансового менеджмента. М. Прогресс. 1996.
59. Введение в экономико-математические модели налогообложения: Учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по эконом. спец. «Налоги и налогооблож.», «Математич. методы в экономике»/ Под ред. Черника Д. Г. — М.: Финансы и статистика, 2000.
60. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М. 1985.
61. Геронимус Б. Л., Царфин Л. В. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте. — М.: Транспорт, 1990.



- 62.Голенко Д. И., Семен Е. Л., Кеслер С. Ш. Статистическое моделирование в технико-экономических системах: управление разработками. - Изд-во Ленинградского университета, 1977.
- 63.Горидько Н.П. Моделирование и прогнозирование объёма ВРП с помощью функции типа Кобба-Дугласа на примере Волгоградской области РФ // Научный обозреватель –Уфа: ООО «Инфинити». – 2013. – № 4. – С. 29-34.
- 64.Горидько Н.П., Нижегородцев Р.М., Олисаева Л.Г. Регрессионный анализ факторов экономического роста региона как инструмент выявления ключевых направлений государственного регулирования // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2011. Т. 12. № 14 (87). С. 164-177.
- 65.Джонс, Коллум & Мариано Кулиш (2014). «DSGE-моделирование в пакете Dynare: практическое введение», Квантиль, №12, стр. 23–44. Citation: Jones, Callum & Mariano Kulish (2014). “A practical introduction to DSGE modeling with Dynare,” Quantile, No.12, pp. 23–44.
- 66.Диденко Н.И. Анализ устойчивого развития регионов арктической зоны России: ADL-модель // Экономика и социум: современные модели развития. 2015. № 9. С. 101-114.
- 67.Доугерти К. Введение в эконометрику. — М.: ИНФРА-М, 1999.
- 68.Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник. — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, Издательство «ДИС», 1997.
- 69.Зарецкий А. Методология построения, разрешения и оценки параметров DSGE моделей // Рабочий материал Исследовательского центра ИПМ, 2012. — 26 с.
- 70.Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975.

- 71.Ицкович И. А. Анализ линейных экономико-математических моделей. Новосибирск: Наука, 1976.
- 72.Кардаш В.А. Об одном подходе к постановкам стохастических задач оптимизации производства // Экономика и математические методы.1977.-Т.13,Выш.6.-С. 312-316.
- 73.Ковалева В. В. Введение в финансовый менеджмент. М: Финансы и статистика 1994.
- 74.Количественные методы финансового анализа / Под ред. С. Дж. Брауна и М. П. Крицмена: Пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 1996.
- 75.Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. — СПб.: Питер, 2000.
- 76.Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. — М.: ЮНИТИ, 1998.
- 77.Лисин В.С. Макроэкономическая теория и политика экономического роста: Монография – учеб. пособие. – М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2004. – 320 с.
- 78.Максимов Ю.И. Стохастическое моделирование в планировании. Новосибирск, Наука, 1981. - 285 с.
- 79.Максимов Ю.И. Учет качественных факторов и неопределенности при планировании развития нефтегазовых комплексов. - ИЭиОПП СО АН СССР, 1982.
- 80.Математические методы анализа экономики. / Под. ред. А. Я. Боярского. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
- 81.Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. — М.: Мир, 1985.
- 82.Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.

83. Нижегородцев Р.М., Горидько Н.П. Принцип Хаавельмо: рост государственных расходов как инструмент стимулирования экономического подъема / Политэкономия: социальные приоритеты: Материалы первого политэкономического конгресса. Т. 2: Национальные экономики в глобальном мире: политическая экономия и экономическая политика. – М.: ЛЕНАНД, 2013. – С. 109-126.
84. Петухов Н.А. Факторы экономического роста регионов: регрессионно-кластерный анализ: монография / Н. А. Петухов, М. Ю. Архипова, Р. М. Нижегородцев. – Х.: ИД «ИНЖЕК», 2009. – 416 с.
85. Половко А.М. Основы теории надёжности. М.: Наука, 1964 - 446 с.
86. Сен А. Развитие как свобода. – М.: Новое издательство, 2004. – 432 с.
87. Смит А. Исследование о природе и причинах богатства народов. – М.: Эксмо, 2007. – 960 с. – (Серия: Антология экономической мысли)
88. Столерю Л. Равновесие и экономический рост: принципы макроэкономического анализа. — М., 1974.
89. Тарасевич В. М. Экономико-математические методы и модели в ценообразовании: Учеб. — Л.: ЛФЭИ. Ч.1.,2 — 1991.
90. Трояновский В. М. Элементы математического моделирования в макроэкономике. — М.: Издательство РДЛ, 2001.
91. Федеральная служба государственной статистики. Регионы России. Социально-экономические показатели - 2005 г. [Электронный ресурс] – Режим доступа: [http://www.gks.ru/bgd/regl/b05\\_14p/Main.htm](http://www.gks.ru/bgd/regl/b05_14p/Main.htm)
92. Федеральная служба государственной статистики. Регионы России. Социально-экономические показатели - 2010 г. [Электронный ресурс] – Режим доступа: [http://www.gks.ru/bgd/regl/b10\\_14p/Main.htm](http://www.gks.ru/bgd/regl/b10_14p/Main.htm)
93. Федеральная служба государственной статистики. Регионы России. Социально-экономические показатели - 2014 г. [Электронный ресурс] – Режим доступа: [http://www.gks.ru/bgd/regl/b14\\_14p/Main.htm](http://www.gks.ru/bgd/regl/b14_14p/Main.htm)

94. Федосеев В. В. Экономико-математические модели и методы в маркетинге. — М., «Фитнстатпром», 1996.
95. Черемных Ю.Н. Математические модели развития народного хозяйства. — М., 1986.
96. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учеб. — М.: Дело, 2001.
97. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по эконом. спец. — М.: ЮНИТИ, 2000.
98. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для студ. Вузов, обуч. по эконом. спец./ Под ред. В. В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999.
99. Экономико-математические модели в управлении производством. — Новосибирск: Наука, 1983.
100. Энтов Р., Луговой О., Астафьева Е., Бессонов В., Воскобойников И., Турунцева М., Некипелов Д. (2003) Факторы экономического роста российской экономики. М.: ИЭПП, 2003.