

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра математического моделирования

ДОПУЩЕНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
Татосов А.В.
21 июня 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА СЛОЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил работу
Студент 2 курса
очной формы обучения



Петров
Евгений
Владимирович

Руководитель работы
к.ф.-м.н.,
доцент



Бутакова
Нина
Николаевна

Рецензент
к.ф.-м.н., доцент
кафедры математики и информатики ТюмГУ



Салтанова
Татьяна
Викторовна

Тюмень 2016

Оглавление	
ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ДВУХФАЗНЫЕ СРЕДЫ.....	5
1.1. Двухфазные системы.....	5
1.2. Методы описания двухфазных систем.....	6
1.3. Модели многофазных систем.....	8
1.4. Размеры и распределение частиц по размерам.....	10
2. ВОЛНЫ НА ВОДЕ.....	14
2.1. Уравнения Эйлера и уравнение неразрывности для идеальной несжимаемой жидкости.....	14
2.2. Начальные и граничные условия.....	17
3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ.....	19
3.1. Численное моделирования движения несжимаемого континуума.....	19
3.2. Описание модели численного моделирования.....	21
3.3. Метод возмущений.....	24
4. ЗАДАЧА О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ НА СЛОЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ.....	26
4.1. Уравнения неразрывности и движения.....	26
4.2. Граничные условия.....	31
4.3. Задача об оседании частиц.....	31
4.4. Постановка краевой задачи о волновом движении смеси.....	33
5. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ НА СЛОЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ.....	38
5.1. Решение линейной задачи.....	38
5.2. Уравнение свободной поверхности. Дисперсионные соотношения.....	42
5.3. Форма свободной поверхности. Декремент затухания и фазовая скорость.....	43
Заключение.....	46
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	47

ВВЕДЕНИЕ

В природе не существует абсолютно чистых веществ. Даже те вещества, которые мы считаем чистыми, всегда содержат хотя бы небольшое количество примесей и являются многофазными. В связи с чем возникает необходимость изучения различных явлений и взаимодействий многофазных жидкостей. Знание закономерностей волновых процессов возникающих на поверхностях этих сред поможет решить широкий спектр задач используемых в нефтехимических производствах, тепловой энергетики и для защиты окружающей среды.

В настоящее время с развитием современной вычислительной техники широко используются, вибрационные, волновые и фильтрационные процессы в различных гетерогенных смесях. Таким образом, весьма актуально и целесообразно изучить как можно шире такие системы, в том числе волны на их поверхности. Неоднофазные эффекты значительно затрудняют исследование и особенно сильно проявляются при распространении волн, появляющихся во время ударных и вибрационных нагрузок.

Цель работы состоит в построении математической модели распространения волн по свободной поверхности двухфазной смеси, решении задачи о распространении волн по свободной поверхности смеси с однородным распределением частиц в покоящемся слое и исследовании влияния примесей на параметры волны и форму свободной поверхности

В первой главе представлено описание двухфазных сред, приведены примеры двухфазных систем, представлены методы описания и модели двухфазных систем, распределение частиц по размерам по размерам.

Вторая глава посвящена уравнениям, описывающим волны на поверхности однофазной жидкости.

В третьей главе рассмотрены методы решения задач гидродинамики, с помощью численных и асимптотических методов.

В четвертой главе строится математическая модель распространения поверхностных волн по слою гетерогенной смеси бесконечной глубины, рассматривается постановка краевой задачи о волновом движении смеси.

В пятой главе решается линейная задача о поверхностных волнах на слое гетерогенной смеси бесконечной глубины. Получено уравнение свободной поверхности, дисперсионные соотношения для определения декремента затухания и фазовой скорости волны.

1. ДВУХФАЗНЫЕ СРЕДЫ.

1.1. Двухфазные системы.

Движение многофазной смеси описывается методами механики сплошной среды, поэтому в точке с заданными координатами x, y, z необходимо допустить нахождение нескольких сред в один и тот же момент времени. Таким образом, в каждой точке пространства находится несколько сред со своей приведенной плотностью ρ_i (масса i -ой составляющей в единице объема среды), скоростью v_i ($i=1,2 \dots N$), и другими параметрами, относящимися к своей составляющей смеси. [1]

Принимаются следующие предположения во время анализа гетерофазных систем.

1. Каждая фаза есть сплошная среда. Она занимает макроскопические объемы пространства.

2. Границы между фазами воспринимаются как геометрические поверхности. Если перейти через границу из одной фазы в другую, то свойства изменяются скачком (внутренняя энергия, плотность, энтальпия и т.д.).

В системе возможен обмен массой, импульсом и энергией внутри каждой из фаз, и между отдельными фазами. Под механикой гетерофазных систем будем понимать не только движение и динамическое взаимодействие фаз, но и процессы массо и энергообмена. Следует отметить, что эти явления взаимосвязаны.

На рис. 1.1 показаны: движение пузырьков в потоке жидкости и расслоенный газожидкостный поток, как пример двухфазных систем.



Рис 1.1.Примеры двухфазных система а) движение пузырьков в потоке жидкости, б) расслоенный газожидкостный поток.

В пределах каждой отдельной фазы справедливы обычные дифференциальные уравнения сплошной среды, отражающие фундаментальные законы сохранения массы, импульса и энергии (уравнения сохранения). На межфазных поверхностях должны выполняться определенные граничные условия, отражающие условия совместности. Вместе системы уравнений сохранения для каждой фазы и условия совместности составляют математическое описание механики многофазных систем. Для простых систем уравнения могут быть проинтегрированы.

1.2. Методы описания двухфазных систем.

Зафиксируем некоторую декартову систему отсчета $\{x_k\}, k = 1,2,3$.

Один из имеющихся методов описания и анализа состоит в том, что в пространстве $\{x_k\}$ фиксируется произвольный контрольный объем V с поверхностью F . Объем V неподвижен (в системе отсчета $\{x_k\}$) и является только условным контрольным элементом пространства. Среда свободно проходит сквозь его границы (рис. 1.2). Этот метод называется описанием «с точки зрения Эйлера».

Другой подход принадлежит Лагранжу. В такой же системе отсчета $\{x_k\}$ выделяется в качестве объекта наблюдения определенная индивидуальная порция вещества. Эта контрольная масса материи движется относительно системы $\{x_k\}$. В общем случае, в различные моменты времени его объём может различаться, а граница деформируется во времени и перемещается в пространстве. Граница этого индивидуального объёма вещества макроскопически непроницаема. Условное графическое изображение такого подхода, показано на (рис. 1.3), где для двух моментов времени показаны форма и пространственное расположение

индивидуального объема вещества рассматриваемого в качестве объекта анализа. Этот метод называется описанием «с точки зрения Лагранжа».

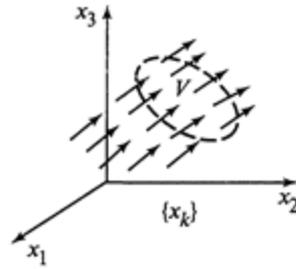


Рис 1.2. Эйлера контрольный объем в системе координат $\{x_k\}$.

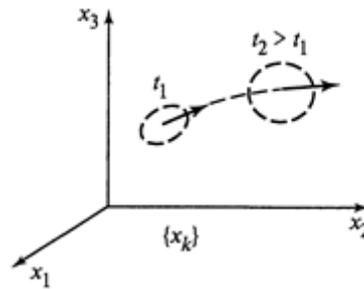


Рис 1.3. Лагранжева контрольная масса в системе координат $\{x_k\}$.

Различие подходов заключается в следующем:

1. Контрольный объем с точки зрения Эйлера пронизаем для вещества и неподвижен в $\{x_k\}$;
2. С точки зрения Лагранжа, контрольная масса вещества постоянна, и ее поверхность макроскопически непроницаема, и перемещается в пространстве $\{x_k\}$; [1]

В общем случае форма и положение границ фаз в гетерогенных системах, не могут определяться заранее. В этом гетерогенные и гомогенные системы принципиально различны, для гомогенных систем границы области протекания процесса, зачастую, известны, например твердые ограничивающие поверхности, и на них задаются граничные условия. В многофазных системах изменение границы между фазами может быть

определено только в процессе решения задачи. Это значит, что в исходной математической постановке условия совместности можно было бы записать для границ раздела неизвестной формы.

1.3. Модели многофазных систем.

При решении прикладных задач механики многофазных систем рассматривают разные упрощающие модели. Самая простая упрощающая модель - гомогенная, идея которой заключается в замене реальной многофазной среды, на некоторую гипотетическую среду с эффективными свойствами: плотностью, скоростью и вязкостью смеси. К такой среде применяются стандартные уравнения сохранения как в случае однофазной жидкости. Гомогенная модель обычно используется в одномерном приближении, когда по сечению канала усредняются параметры двухфазного потока.

Нечастым случаем является раздельное течение, при котором настоящая картина газожидкостного течения получается в модели достаточно точно. Случай парового потока со стекающей пленкой жидкости, где основная часть жидкости течет тонкой пленкой по стенке, а в центре потока движется пар, расслоённые течения в горизонтальных каналах - именно те задачи, где модель раздельного течения достаточно уместна. Для этой модели уравнения сохранения записывают раздельно для газовой и жидкой фаз, при всём этом форма межфазной границы предполагается известной (плоской или цилиндрической). Настоящая картина этих течений, обычно, как правило сложнее той, что принимают в модели, где обычно не учитываются наличие жидких капель в потоке пара, волны на межфазной поверхности, однако эта модель раздельного течения достаточно ближе к реальности, чем гомогенная.[1]

Из-за серьёзного развития вычислительной техники в проектных расчетах, стала весьма популярна модель многоскоростного континуума. В

данной модели каждая фаза заполняет собой одно и то же пространство объёма V , занятое многофазной смесью. Для каждой фазы нужно определить плотность, отнесенную к полному объему смеси, скорость и другие параметры. Получается что в каждой точке пространства, которую занимает смесь объёма V , состоящая из N фаз, определяется с помощью N плотностей, N скоростей и т.д. [2]. Здесь главные сложности расчета переходят на моделирование межфазного обмена массой, импульсом и энергией. При таком моделировании требуется вводить предположения о форме и площади поверхности межфазных границ и закономерностях переноса через эти границы. Более естественным здесь будет воспользоваться методом контрольной ячейки, то есть проанализировать такую структуру рассматриваемой многофазной системы, которая моделирует существенные характеристики этой системы. Форма контрольной ячейки в пределах межфазной поверхности обычно идеализируется, что позволяет получать более точные решения.

Гетерофазная система состоит из непрерывной среды и дискретной фазы, состоящей из нескольких химических компонентов. Если сплошная среда – газ, то дискретная фаза может состоять из твердых частиц или капель жидкости или из того и другого. Если непрерывная среда – жидкость, то дискретная фаза может быть твердыми частицами, пузырьками газа или каплями жидкости, не смешивающимися с жидкой фазой.

В динамику многофазных систем входит рассмотрение процессов обмена между фаз, энергией, количеством движения, массой и зарядом вне зависимости от того, оказывает ли влияние на данный процесс наличие потенциального поля или нет.

В промышленном оборудовании и технических процессах используется много видов многофазных систем.

1. Газ-твёрдые частицы: пневмотранспортеры, пылеуловители, гетерогенные реакторы, псевдооживленные слои,

металлизированные ракетные топлива; аэродинамическая абляция, ксерография, космическая пыль, выпадение радиоактивных осадков.

2. Газ-капли жидкости: распылители, скрубберы, сушилки, абсорбационные аппараты, камеры сгорания; агломерация, загрязнение воздуха, газовое охлаждение, испарение, перекачка криогенных жидкостей.
3. Жидкость-пузырьки газа: абсорбционные аппараты, испарители, скрубберы, воздушный подъёмный насос (эрлифт); кавитация, флотация, аэрация.
4. Жидкость-капли жидкости: экстракция, комогенизация, имульсирование.
5. Жидкость-твёрдые частицы: псевдооживленные слои, флотация, осаждение.

При изучении динамики многофазных систем обычно используют два метода:

1. Исследование динамических характеристик одиночных частиц с последующей попыткой обобщить их на случай системы, состоящей из множества частиц, как это делается в молекулярно-кинетической теории.
2. Видоизменение соотношений механики однофазной сплошной среды с учётом частиц.

1.4. Размеры и распределение частиц по размерам.

Форма частиц, входящих в состав двухфазных систем, в общем случае несферическая. Сферическая форма является особым случаем или идеализацией неправильной формы.

Самые маленькие размеры среди твердых сферических частиц имеют шарики для шарикоподшипников диаметром 0,794 мм, причем точность их

размера и сферичность, составляющие доли 0,0025 мм, обеспечиваются шлифованием.

В общем случае при размерах до 1 мм только частицы из стекла получаемые методом распыления, являются сферическими (стекло можно рассматривать как жидкость с очень медленным временем релаксации). Сферические частицы катализаторов размерами примерно 1 мм обычно формируются из тонкой пыли. Распылённые твёрдые вещества, как правило, сохраняют начальную форму своих кристаллов.

Мелкие капли жидкости обычно принимают сферическую форму под действием поверхностного натяжения. Если значительно влияние гравитационного или какого-либо другого поля, то они приобретают форму минимального сопротивления (падающие дождевые капли) или минимального потенциала (заряженные капли).

Пузырьки газа обычно сохраняют сферическую форму под действием поверхностного натяжения до воздействия гравитационного или других полей. Исключение составляют пены или большие пузыри. [3]

Механика суспензий является частью общей физико-химической отрасли знания о дисперсиях.

Дисперсия представляет собой смесь двух фаз, одна из которых образует сплошную (непрерывную) среду, а вторая раздроблена и распределена в первой в виде отдельных элементов объёма, её мы будем называть дисперсной.

Сплошная фаза может быть жидкостью или газом, дисперсная – жидкостью, твёрдым телом или газом.

Таким образом, возможны шесть комбинаций, в действительности существует пять, поскольку два газа образует одну фазу. Эти пять комбинаций получили название в зависимости от природы обеих фаз.

Если сплошная фаза представляет собой жидкость, она может содержать:

1. Взвешенные твёрдые частицы – такая дисперсия называется суспензией;
2. Капли другой жидкости, не смешивающейся с первой, такая дисперсия называется эмульсией;
3. Газовые пузыри или полости – такая дисперсия называется кипящей жидкостью или пеной.

Если сплошная фаза – газ, то она может содержать:

4. Твёрдые диспергированные частицы – такая дисперсия называется дымом или пылью;
5. Жидкие диспергированные частицы – такая дисперсия называется туманом или облаком.

Одна и та же комбинация фаз может иметь два названия, которые характеризуют либо размеры частиц дисперсной фазы, либо отношение объёма дисперсной фазы к полному объёму дисперсии. Так в случае 3 кипящая жидкость представляет дисперсию, образованную пузырьками газа в жидкости, а пеной называется дисперсия, в которой объём газа велик по сравнению с объёмом жидкости. В пене элементы объёма газа отделены друг от друга тонкой непрерывной плёнкой жидкости.

В случае 4 дисперсия называется дымом, когда твёрдые частицы имеют размер менее 0,1 мк, а если размеры превышают 0,1 мк, дисперсия называется пылью. В случае 5 дисперсия называется туманом, если дисперсная фаза имеет вид очень мелких капелек размером менее 0,1 мк, и облаком, если размеры капелек превышают 0,1 мк.

Если сплошная фаза – газ, то взвесь в ней очень мелких частиц, или капелек жидкости часто называют аэрозолем.

Дисперсию называют дисперсоидом, в случае жидкой непрерывной фазы, если размеры частицы больше 0,1 мк, и коллоидом, если их размеры менее 0,1 мк.

Если в жидкости содержатся взвешенные твёрдые частицы, образуя суспензию, и для предельного случая, в котором отношение объёма твёрдого вещества к полному объёму дисперсии, является близким к 1, то такая дисперсия называется шламом.

Если в дисперсии, которая образованна твёрдыми частицами в газе, отношение объёма твёрдого вещества к полному объёму дисперсии, близко к 1, то такую дисперсию называют порошком.

Данная классификация опирается на два внешних параметра.

- 1) Отношение объёма дисперсной фазы к общему объёму дисперсии;
- 2) Размер частиц дисперсной фазы;

Обычно частицы дисперсной фазы имеют неодинаковые размеры, поэтому вводят средний размер и закон распределения размеров относительно среднего значения. [4]

2. ВОЛНЫ НА ВОДЕ.

2.1. Уравнения Эйлера и уравнение неразрывности для идеальной несжимаемой жидкости.

Под идеальной жидкостью, как правило, понимают такую жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения или вязкости (или, вернее, они оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с другими действующими силами). Как известно, важнейшей физической характеристикой данного сорта жидкости является плотность. Жидкость называется несжимаемой, если $\frac{d}{dt}\rho \equiv 0$. Данное условие заведомо выполнено, если плотность является постоянной. Выделим в жидкости некоторый объем τ , ограниченный, замкнутой поверхностью S . Силы, приложенные к выделенному объему жидкости, можно разбить на два класса. К первому классу отнесем силы, действующие на каждый элемент объема $d\tau$ независимо от того, существуют или нет рядом с объемом $d\tau$ другие части жидкости. Эти силы называются массовыми. Наиболее типичными и часто встречающимися в практике массовыми силами являются силы тяжести. Ко второму классу сил, которые действуют на рассматриваемый объем τ , относят силы взаимодействия между разными частицами жидкости. В силу третьего закона Ньютона, равенства сил действия и противодействия, должны уравновеситься силы взаимодействия между всеми внутренними частицами объема τ , которые лежат внутри поверхности S , таким образом, остаются неуравновешенными только силы взаимодействия, которые исходят от частиц, лежащих вне поверхности S , и приложенные к поверхностным частицам объема τ ; такие силы называют поверхностными. В случае идеальной жидкости, т. е. в отсутствие сил трения, поверхностные силы направлены по нормали внутрь объема жидкости τ и носят название сил нормального давления. Величина этих сил, действующих на элемент

площади dS , будет равной $f_p = -pndS$ где p - величина давления, а \mathbf{n} - внешняя нормаль.

Запишем выражение второго закона Ньютона для объема жидкости τ :

$$\int_{\tau} \rho a d\tau = - \int_S \rho n dS + \int_{\tau} \rho f d\tau. \quad (1)$$

Здесь a - ускорение элемента жидкости $d\tau$, а \mathbf{f} - вектор плотности массовых сил. Первый интеграл в правой части выражения (1) дает величину сил нормального давления, действующих на объем, и может быть преобразован с помощью известной формулы Остроградского—Гаусса:

$$\int_S \rho n dS = \int_{\tau} \nabla p d\tau. \quad (2)$$

Используя (2), выражению (1) можно придать следующую форму:

$$\int_{\tau} [\rho a + \nabla p - \rho \mathbf{f}] d\tau = 0.$$

В силу произвольности рассматриваемого объема τ подынтегральное выражение в последнем интеграле должно быть равно нулю в каждой точке жидкости в любой момент времени. Таким образом, мы приходим к основному векторному уравнению движения идеальной жидкости:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}. \quad (3)$$

Выражая ускорение \mathbf{a} в переменных Эйлера, запишем уравнение (3) в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}. \quad (4)$$

Уравнение Эйлера (4) является векторным уравнением и, будучи записано покомпонентно, представляет собой систему трех скалярных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x} v_1 + v_2 \frac{\partial}{\partial y} v_1 + v_3 \frac{\partial}{\partial z} v_1 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p + f_1, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x} v_2 + v_2 \frac{\partial}{\partial y} v_2 + v_3 \frac{\partial}{\partial z} v_2 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p + f_2, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x} v_3 + v_2 \frac{\partial}{\partial y} v_3 + v_3 \frac{\partial}{\partial z} v_3 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p + f_3\end{aligned}$$

для четырех неизвестных функций v_k , $k = 1, 2, 3$, и p , описывающих движение жидкости и подлежащих определению. Тем самым уравнения Эйлера не являются замкнутой системой уравнений и должны быть дополнены еще одним уравнением - уравнением неразрывности.

Для вывода уравнения неразрывности рассмотрим произвольный объем жидкости τ и запишем выражение для потока жидкости, втекающего и вытекающего из объема τ через поверхность S , его ограничивающую. Поток жидкости через поверхность S равен

$$\Phi = \int_S \mathbf{v} * \mathbf{n} dS.$$

В силу предположения о постоянстве плотности жидкости ρ общее количество жидкости в рассматриваемом объеме должно оставаться неизменным для любого момента времени, и, следовательно, полный поток жидкости через поверхность S должен быть равен нулю в каждый момент времени, т. е. $\Phi = 0$. На основании формулы Остроградского—Гаусса условие равенства нулю полного потока может быть переписано в следующем виде:

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = 0. \quad (5).$$

Из последнего соотношения в силу произвольности объема τ получим уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Оно является искомым уравнением неразрывности для случая несжимаемой жидкости. Присоединив это уравнение к уравнению Эйлера, мы приходим к

замкнутой системе уравнений движения для идеальной несжимаемой жидкости.

2.2. Начальные и граничные условия.

Общие решения дифференциальных уравнений гидродинамики (4), (5) будут содержать произвольные функции и постоянные, которые нужно подчинить ряду дополнительных условий для получения единственных решений конкретных задач о движении жидкости. Эти условия могут быть двоякого рода. Одни из них должны быть удовлетворены в начальный момент времени $t = 0$ и носят название начальных условий; другие, так называемые граничные условия, должны выполняться на границах жидкости в любой момент ее движения.

Начальные условия для идеальной несжимаемой жидкости в переменных Эйлера состоят в том, что задается начальное состояние движения, т. е. поле скоростей в начальный момент:

$$v(r, t)|_{t=0} = v_0(r),$$

где $v_0(r)$ - заданное векторное поле. Граничные условия могут быть нескольких видов. Пусть жидкость ограничена стенкой S , вообще говоря, подвижной, сквозь которую она не проникает и к которой прилегает без пустот. Если $\zeta(r, t) = 0$ представляет собой уравнение поверхности стенки S , то, вычисляя полную производную по времени, получим

$$\frac{d}{dt}\zeta = \frac{\partial}{\partial t}\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (6)$$

Из условия непрерывного прилегания к стенке S следует, что

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_S = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\} \Big|_S = v|_S$$

и тем самым из (6) следует, что граничное условие, которое должно выполняться на стенке S , имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\zeta + v \cdot \nabla\zeta|_S = 0. \quad (7)$$

Это условие по своему характеру является кинематическим условием. В случае, когда стенка S неподвижна, т. е. $\frac{\partial}{\partial t}\zeta = 0$, условие (7) можно записать в виде требования обращения в нуль на S нормальной составляющей вектора скорости, т. е.

$$nv|_S = v_n|_S = 0.$$

Это следует из того, что вектор $\nabla\zeta$ в каждой точке поверхности S коллинеарен вектору нормали.

Наиболее интересными с точки зрения теории нелинейных волн представляются граничные условия на свободной поверхности жидкости, отделяющей ее от находящейся над ней атмосферы и движущейся в процессе распространения волн. Кинематического условия (7) оказывается здесь недостаточно, и оно дополняется динамическим условием:

$$p|_{S+} = p|_{S-}, \quad (8)$$

означающим непрерывность давления при переходе через свободную поверхность S . При этом функция $p|_{S+} = p(r, t)|_S$ считается заданной и равной, как правило, атмосферному давлению.[5]

С физической точки зрения динамическое условие (8) может трактоваться как условие, имеющее термодинамическое происхождение, поскольку оно является необходимым условием устойчивости и неразрушимости свободной поверхности как границы раздела двух сред — жидкости и атмосферы [6].

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ

3.1. Численное моделирования движения несжимаемого континуума.

Численные методы гидродинамики для задач со свободными границами (границами раздела) можно условно разделить на несколько классов. Это, во-первых, классические лагранжевы методы, в которых используется лагранжева сетка с неизменной топологией. Такие методы строятся как на основе конечно-разностных, так и конечно-элементных аппроксимаций. Для этих методов характерна достаточно высокая точность, аккуратное явное вычисление положения границ раздела и довольно простые для программной реализации алгоритмы. Основным недостатком является принципиальная невозможность расчета течений с большими деформации, так как возникающие в этом случае сильные искажения ячеек сетки и перехлест узлов ведут к потере точности и аварийному завершению расчета.

Следующий класс методов использует нелагранжево преобразование расчетной области в область простой формы с фиксированной границей.

Такое преобразование строится численно на каждом шаге, а уравнения движения аппроксимируются в новых переменных. Этот подход более универсален, чем лагранжев, однако возникают определенные сложности с построением консервативных схем, так как в уравнения движения входят коэффициенты преобразования. Дополнительные проблемы возникают также для течений со сложной формой свободных и жестких границ.

Близким к предыдущему является класс эйлерово-лагранжевых методов, в которых узлы на границах раздела движутся лагранжево, а движением остальных управляют таким образом, чтобы расчетная сетка оставалась пригодной. В отличие от предыдущего случая в этих методах уравнения движения аппроксимируют в исходной системе координат с учетом потоков массы, импульса и энергии между ячейками, которые

возникают из-за нелагранжевого движения сетки. Главная проблема в этом случае — построить хорошие аппроксимации для обменных членов, а также устойчивые и в то же время мало затратные способы управления сеткой в случае сложных течений.

Распространение получили методы граничных интегральных уравнений (граничных элементов). С помощью них получены, например расчеты обрушающихся волн.

Следующий замечательный класс методов берет начало от метода частиц в ячейках, а для несжимаемой жидкости—метода маркеров и ячеек (метод MAC). Позже появились модификации этих методов: метод крупных частиц, методы SMAC: и SUMMAC:, модификация граничных условий, а также примыкающий к этому семейству метод VOF. Методы MAC и SMAC позволяют моделировать сквозным счетом широкий класс задач, включая задачи соударения, выход волн на берег и т.д., однако обработка условий на свободной границе в этих "универсальных" версиях метода достаточно грубая и, поэтому, они вносят большую погрешность на гладких решениях типа бегущих волн.

Большинство перечисленных численных методов основываются на непосредственной аппроксимации уравнений гидродинамики, то есть приближенного решения многомерных уравнений в частных производных. В общем, независимо от используемых вариационных принципов и их конкретных аппроксимаций, дискретный подход, имеет ряд преимуществ. Например, исходная вариационная задача для механики является более общей и естественной, а значит, включает в себя широкий класс возможных решений, для которых требования регулярности могут быть значительно более слабыми, чем при классическом выводе дифференциальных уравнений гидродинамики. Также, получаемые таким образом дискретные модели имеют основные механические законы сохранения для любого числа степеней свободы, а значит. [7].

3.2. Описание модели численного моделирования.

Рассмотрим слой несжимаемой жидкости конечной глубины со свободной границей. Разобьем область Ω , занятую жидкостью, на четырехугольники.

Будем считать, что в узлах полученной сетки содержатся материальные частицы с массой, равной сумме четвертых частей масс, прилежащих к данному узлу четырехугольников. Например, для внутренних узлов

$$m_{ij} = \left(\frac{\rho}{4}\right) (V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i-1,j-1} + V_{i,j-1})$$

(ρ — плотность жидкости). Для узлов, лежащих на дне и свободной границе, в этой сумме будет только два слагаемых, соответственно масса этих частиц будет меньше. Таким образом, исходную непрерывную среду аппроксимировали конечной системой материальных частиц, суммарная масса которых равна массе жидкости.

Теперь необходимо ввести дискретное условие несжимаемости, обеспечивающее постоянство объема жидкости. Потребуем, чтобы в процессе движения среды площади всех ячеек сетки оставались постоянными

$$V_{i,j} = const$$

Площадь каждого четырехугольника — функция координат его вершин

$$V_{i,j} = V(r_{i,j} + r_{i,j+1} + r_{i+1,j+1} + r_{i+1,j}),$$

поэтому соотношения $V_{i,j} = const$ представляют собой голономные связи, наложенные на возможные движения частиц. На частицы, лежащие на твердых границах, накладываются дополнительные ограничения возможности движения только вдоль границ (т.е. условие не протекания). Эти ограничения также, очевидно, — голономные связи. Например, для частиц, лежащих на правой стенке, эта связь имеет вид

$$y_{i,j} - y^0 - (x_{i,j} - x^0) \tan \alpha = 0.$$

Для описания волновых движений необходимо ввести силу тяжести. Наиболее простой способ — считать, что на каждую частицу действует сила тяжести

$$F_{ij} = m_{ij}g.$$

Однако в этом случае легко показать на примере, что при разбиении области Ω с помощью неортогональной сетки возможны варианты, когда покоящийся слой "жидкости" с ровной невозмущенной свободной границей не обладает минимальной потенциальной энергией и, значит, не является устойчивым положением равновесия. В расчетах это приводит к нефизическому движению частиц. Все это происходит оттого, что дискретное условие несжимаемости неспособно скомпенсировать одновременно все силы. Поэтому сила тяжести здесь вводится иначе.

Потенциальная энергия рассматриваемого слоя жидкости равна $\rho g \int_{\Omega} y dx dy$. Дискретная среда занимает область Ω' со свободной границей — ломаной, образованной поверхностными частицами. Положим потенциальную энергию дискретной системы равной

$$\Pi = \rho g \int_{\Omega'} y dx dy.$$

Легко показать, что в этом случае Π минимальна, когда свободная граница горизонтальна (при условии постоянства площади Ω'). Также, что Π зависит от координат только поверхностных частиц. С учетом всего выше сказанного лагранжиан дискретной системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} u_{ij}^2 - \Pi + \sum_{s,l} \lambda_{sl} (V_{sl} - V_{sl}^0).$$

Для учета граничных условий на жесткой поверхности к лагранжиану надо добавить еще граничные связи

$$\gamma(t, r_{ij}) = 0.$$

где t входит явно в случае, если какая-либо из твердых границ движется по заданному закону. Например, полагая в $y_{i,j} - y^0 - (x_{i,j} - x^0) \tan \alpha = 0$,

$\alpha = \alpha(t)$, можно получить качающуюся правую стенку — вариант волнопродуктора.

Граничные условия на твердых поверхностях, сформулированные в виде голономных связей $\gamma(t, r_{ij}) = 0$, естественным образом включаются в общую схему. Соответствующие этим связям множители Лагранжа представляют собой силу реакции стенок на граничные частицы и могут быть затем использованы для вычисления действующих на стенки сил. В некоторых случаях, с целью уменьшения размерности системы, удобнее часть граничных связей разрешать явно. Так, в приведенных ниже расчетах, для частиц на ровном дне только их x координаты включались в число обобщенных координат всей системы. Если связи $V_{i,j} = const$, $\gamma(t, r_{ij}) = 0$ записать в общем виде

$$f_s(t, q) = 0,$$

где q – вектор обобщённых координат всех частиц, то уравнения движения такой дискретной системы приобретут вид

$$m_k \dot{v}_k = \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$$

$$\dot{q}_k = v_k$$

$$f_s(t, q) = 0$$

и могут быть затем численно проинтегрированы с помощью полностью консервативной схемы.

Даже учитывая формально первый порядок аппроксимации, данная модель показывает хорошее качество расчетов, проявляющееся например, в том, что возможно получать решения с весьма хорошей точностью на достаточно грубых сетках. Судя по всему, это объясняется наличием основных законов сохранения, а также хорошими дисперсионными свойствами описанной модели [7].

3.3. Метод возмущений.

По существу, к методу возмущений относится любой метод приближенного решения задач, в которых так или иначе содержатся величины, малые по сравнению с некоторыми исходными, и использование этой малости лежит в основе метода. Величиной возмущения может быть один из безразмерных параметров (числа Маха или Рейнольдса набегающего потока, относительная толщина профиля, удлинение крыла конечного размаха и т. д.), одна или несколько координат пространства — времени; возмущению могут подвергаться как краевые условия, так и сами дифференциальные уравнения, описывающие процесс.

Наиболее полезные аппроксимации имеют место, когда один или несколько из параметров или переменных задачи малы (или велики). Этой величиной возмущения часто является один из безразмерных параметров.

В этих случаях говорится о возмущении параметров. Величиной возмущения может также быть одна из независимых переменных (в безразмерной форме). В таких случаях говорят о возмущении координат. Приближения такого типа становятся все более точными по мере стремления величины возмущения к нулю (или бесконечности). Они являются таким образом асимптотическими решениями. В принципе можно улучшить результат, рассматривая его как первый шаг в схеме последовательных приближений. Получающиеся ряды, хотя и необязательно сходящиеся, по построению представляют собой асимптотические разложения. Практически обычно вычисляется только первое приближение, иногда — второе. Основным смыслом второго приближения часто состоит в том, что оно помогает понять первое. Лишь в редких случаях вычисления проводятся до пятого или шестого приближений. Но возможность бесконечного продолжения этого процесса имеет фундаментальное значение. Приближение такого типа называется рациональным. С другой стороны, некоторые очень полезные приближения не становятся точными ни при каком известном предельном

переходе. Такое приближение называется иррациональным приближением. Если дальнейшее исследование не выявит асимптотического характера приближения, то иррациональное приближение представляет собой тупик. Приходится принимать любую ошибку, которую оно вносит, и нет возможности увеличить точность последовательными приближениями [8].

4. ЗАДАЧА О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ НА СЛОЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

4.1. Уравнения неразрывности и движения

Рассматривается слой двухфазной смеси бесконечной глубины, движение жидкости будем считать плоскопараллельным. Первая фаза – это идеальная несжимаемая жидкость, вторая фаза – недеформируемые частицы одного размера, плотность которых больше плотности несущей среды. Теплообмен и массообмен между фазами отсутствуют. Смесь считаем монодисперсной, то есть вторая (или дисперсная) фаза в каждом элементарном макрообъёме δV присутствует в виде сферических включений одинакового радиуса a причём объёмная концентрация дисперсной фазы α не очень велика $\alpha_2^2 \ll 1$.

Приведенные плотности фаз ρ_i , характеризующие массы фаз в единице объёма смеси, равны

$$\rho_1 = \alpha_1 \rho_1^0, \quad \rho_2 = \alpha_2 \rho_2^0,$$

где ρ_i^0 – истинные плотности i -й фазы, α_i – объёмная концентрация ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$).

Для вывода уравнений неразрывности (сохранения массы) записывают балансовые соотношения масс для каждой составляющей в некотором фиксированном пространстве – объёме смеси V , ограниченном поверхностью S , учитывая при этом обмен не только с внешней средой, но и соответствующий обмен массой между составляющими внутри объёма V . Закон сохранения массы для многофазной смеси имеет вид [9]

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \int_S \rho_i v_i^n dS + \int_V \sum_{j=1, j \neq i}^m J_{ji} dV, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

где J_{ji} – характеризуют интенсивность перехода массы из j -ой в i -ую составляющую (или наоборот) в единице объёма смеси и в единицу времени. Из закона сохранения массы при различных физико-химических

превращениях следует, что $J_{ji} = -J_{ij}$. Применяя к этому уравнению формулу Гаусса – Остроградского в виде

$$\int_S \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla^k \rho_i v_i dV,$$

получаем

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla^k \rho_i v_i \right) dV = \int_V \sum_{j=1, j \neq i}^m J_{ji} dV, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Следовательно, уравнение неразрывности для каждой фазы можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla^k \rho_i v_i = \sum_{j=1}^m J_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

В связи с отсутствием фазовых переходов массы интенсивность фазовых переходов $J_{ji} = 0$. Тогда уравнение неразрывности (9) примет вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla^k \rho_i v_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Уравнения движения (сохранения импульсов) для каждой составляющей имеют вид [9]

$$\int_V \frac{\partial \rho_i \mathbf{v}_i}{\partial t} dV = - \int_S \rho_i \mathbf{v}_i v_i^k dS + \int_S \sigma_i^k dS + \int_V \rho_i \mathbf{g}_i dV + \int_V \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{P}_{ji} dV,$$

$i = 1, 2, \dots, N$, σ_i^k – тензор напряжений, \mathbf{g}_i – ускорение массовых сил, \mathbf{P}_{ji} – интенсивность обмена импульсом между i -ой и j -ой фазой, причём в соответствии с законом сохранения импульса $\mathbf{P}_{ji} = -\mathbf{P}_{ij}$, $\mathbf{P}_{ii} = 0$.

В данных уравнениях $\int_V \frac{\partial \rho_i \mathbf{v}_i}{\partial t} dV$ – изменение количества движения, $\int_S \rho_i \mathbf{v}_i v_i^k dS$ – приток импульса i -ой составляющей через поверхность S , $\int_S \sigma_i^k dS$ – воздействие внешних поверхностных сил, $\int_V \rho_i \mathbf{g}_i dV$ – воздействие

массовых сил, приходящихся на i -ую составляющую, $\int \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{P}_{ji} dV$ – приток импульса за счёт межфазного обмена.

Интегральным уравнениям импульсов после применения формулы Гаусса-Остроградского, и учёта уравнений неразрывности, соответствуют дифференциальные уравнения импульсов

$$\rho_i \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} = \nabla^k \sigma_i^k + \rho_i \mathbf{g}_i + \sum_{j=1}^N (\mathbf{P}_{ji} - J_{ji} \mathbf{v}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

В правой части уравнений используются субстанциональные производные $\frac{d_i}{dt}$, связанные с движением i -ой составляющей:

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \nabla^k = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Величина \mathbf{P}_{ji} определяет интенсивность межфазного обмена импульсом за счёт межфазной силы \mathbf{R}_{ji} и фазовых переходов $J_{ji} \mathbf{v}_{ji}$ (\mathbf{v}_{ji} – скорость массы, претерпевающей фазовый переход) [9]:

$$\mathbf{P}_{ji} = \mathbf{R}_{ji} + J_{ji} \mathbf{v}_{ji}.$$

Так как в соответствии с законом сохранения импульса $\mathbf{P}_{ji} = -\mathbf{P}_{ij}$, то

$$-\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ji} = \mathbf{R}_{ji} + J_{ji} \mathbf{v}_{ji}$$

Межфазная сила \mathbf{R}_{ji} (отнесённая к единице объёма) возникает из-за сил трения, давления, сцепления между фазами. Эффекты сжимаемости несущей жидкости, больших градиентов макроскопических параметров, вращения частиц, нестационарности установления профиля скоростей около частиц, деформации дисперсных частиц и другие могут приводить к появлению дополнительных составляющих в \mathbf{R}_{ji} .

С учётом выше изложенного уравнения сохранения импульсов записываются в виде [1]

$$\rho_i \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} = \nabla^k \sigma_i^k + \rho_i \mathbf{g}_i + \sum_{j=1}^m (\mathbf{R}_{ij} + J_{ji} (\mathbf{v}_{ji} - \mathbf{v}_i)), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В данной задаче используется схема с общим давлением фаз [10], так как несовпадение давлений может иметь место из-за капиллярных эффектов, прочности и инерции фаз, которые в рассматриваемой модели отсутствуют. В этом случае градиент тензора напряжений представим в виде

$$\nabla^k \sigma_i^k = -\nabla \alpha_i p + \tau^{kl}.$$

Так как среда невязкая, то компонента $\tau^{kl} = 0$ (тензор вязких напряжений). Следовательно,

$$\nabla^k \sigma_i^k = -\nabla \alpha_i p.$$

Силу межфазного взаимодействия можно представить в виде [9]

$$\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_{ji}^{(p)} + \mathbf{R}_{ji}^{(\tau)},$$

где сила $\mathbf{R}_{ji}^{(p)}$ связана с действием сил давления, а $\mathbf{R}_{ji}^{(\tau)}$ – действие девиатора тензора напряжений на межфазной поверхности. На силу $\mathbf{R}_{ji}^{(p)}$ из-за расширения трубки тока впервые обратил внимание Х. А. Рахматулин [10]. В общем случае из-за мелкомасштабных пульсаций давления сила $\mathbf{R}_{ji}^{(p)}$ записывается в виде

$$\mathbf{R}_{ji}^{(p)} = p \nabla \alpha_i + \Delta \mathbf{R}_{ji}^{(p)},$$

где $\Delta \mathbf{R}_{ji}^{(p)}$ – сумма силы присоединённых масс при ускоренном движении первой фазы относительно второй, силы Магнуса при вращении частиц в жидкости и др.; $\rho_i \nabla \alpha_i$ – межфазная сила за счёт давления при отсутствии пульсаций. В рассматриваемом случае пульсации отсутствуют и значит

$$\mathbf{R}_{ji}^{(p)} = p \nabla \alpha_i$$

Тогда сила \mathbf{R}_{ji} определяется выражением [9]

$$\mathbf{R}_{ji} = p \nabla \alpha_i + \mathbf{R}_{ji}^{(\tau)}$$

Считаем, что на межфазной границе присутствует сила вязкого трения в виде

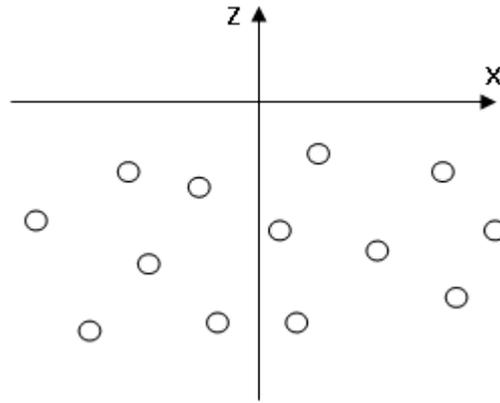
$$\mathbf{R}_{ji}^{(\tau)} = \mathbf{F}_{ji} = \alpha_1 \alpha_2 R(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),$$

где $R = K_\mu \mu_1 a^{-2}$; K_μ – коэффициент вязкого взаимодействия, μ_1 – коэффициент динамической вязкости, a – радиус частицы. В результате уравнения движения примут вид

$$\rho_i \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} = -\alpha_i \nabla \mathbf{p} + \rho_i \mathbf{g}_i + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 R (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Таким образом, движение двухфазной среды описывается уравнениями сохранения массы (9) и импульса (10).

Введём систему координат таким образом, чтобы ось Ox была направлена вдоль поверхности покоящейся среды в направлении движения, а ось Oz – вертикально вверх.



Тогда уравнения неразрывности (9) и движения (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (1 - \alpha) \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - v_{1z} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + (1 - \alpha) \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - v_{1x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} + v_{2z} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + v_{2x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= 0, \\ \rho_1^0 \left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial t} + v_{1x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - R\alpha(v_{1x} - v_{2x}), \\ \rho_1^0 \left(\frac{\partial v_{1z}}{\partial t} + v_{1x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_1^0 g - R\alpha(v_{1z} - v_{2z}), \\ \rho_2^0 \left(\frac{\partial v_{2x}}{\partial t} + v_{2x} \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + R(1 - \alpha)(v_{1x} - v_{2x}), \\ \rho_2^0 \left(\frac{\partial v_{2z}}{\partial t} + v_{2x} \frac{\partial v_{2z}}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_2^0 g + R(1 - \alpha)(v_{1z} - v_{2z}), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{v}_i = \{v_{iz}, v_{ix}\}$ – скорости фаз, p – давление, g – ускорение силы тяжести, α – объемная концентрация дисперсной фазы, $(1 - \alpha)$ – объемная концентрация несущей фазы.

4.2. Граничные условия

На свободной поверхности среды в теории поверхностных волн ставятся кинематическое и динамическое граничные условия. Они следуют из условий отсутствия потока массы через поверхность и непрерывности потока импульса соответственно. Для рассматриваемой двухфазной смеси кинематическое и динамическое условия записываются в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \alpha)v_{1z} - \alpha v_{2z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} ((1 - \alpha)v_{1x} + \alpha v_{2x}) = 0, \quad z = \xi, \quad (12)$$

$$p = P_a, \quad z = \xi, \quad (13)$$

где $z = \xi(t, x)$ – уравнение свободной поверхности, P_a – атмосферное давление.

Так как рассматривается бесконечно глубокий слой смеси, то на глубине должно выполняться условие затухания движения.

4.3. Задача об оседании частиц

Рассмотрим уравнения (11) и граничные условия (12), (13) в предположении, что волновое движение отсутствует. В этом случае рассматривается задача об оседании частиц под воздействием массовых сил. Для нахождения параметров смеси (скорости оседания, давления, концентрации) преобразуем систему (11).

Допускаем, что движение осуществляется только вдоль оси Oz (оседание частиц). Тогда

$$v_{ix} = 0, \quad v_{iz} = v_{iz}(z), \quad p = p(z), \quad \alpha = \alpha(z)$$

и исходная система принимает вид:

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha) \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - v_{1z} \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= 0, \\
\alpha \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} + v_{2z} \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= 0, \\
\rho_1^0 v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \alpha R(v_{1z} - v_{2z}) - \rho_1^0 g = 0, \\
\rho_2^0 v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + (1 - \alpha)R(v_{1z} - v_{2z}) - \rho_2^0 g = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

В случае отсутствия волны уравнение свободной поверхности кинематическое (13) и динамическое (14) граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha)v_{1z} + \alpha v_{2z} &= 0, \quad z = 0, \\
p &= P_a, \quad z = 0.
\end{aligned}$$

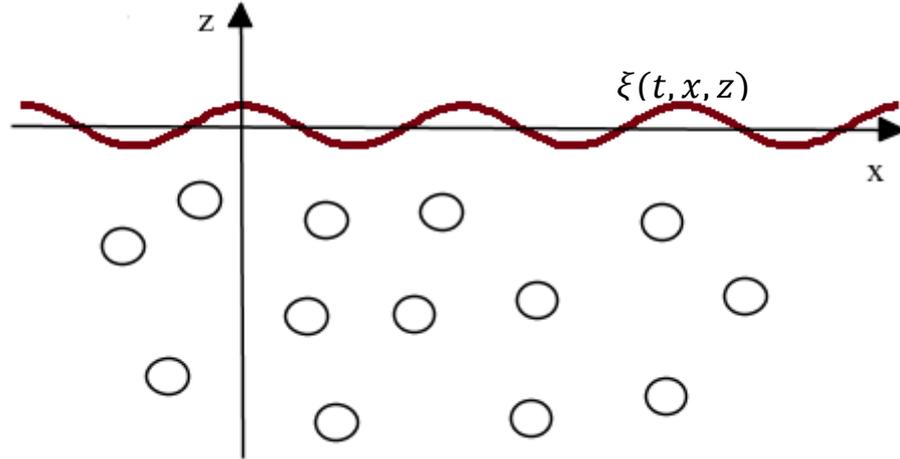
Система (14) допускает решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_0 = \text{const}, \\
v_{1z} &= \frac{\alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R}, \\
v_{2z} &= -\frac{(1 - \alpha_0)(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R}, \\
p &= P_a - \rho^0 g z,
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\rho^0 = (1 - \alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0\rho_2^0$.

4.4. Постановка краевой задачи о волновом движении смеси.

Рассмотрим слой двухфазной жидкости бесконечной глубины ограниченный сверху свободной поверхностью $z = \xi(t, x)$.



Движение жидкости будем считать плоскопараллельным в плоскости Oxz . Под плоскопараллельным понимаем движение жидкости, при котором все ее частицы перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Предполагаем, что по свободной поверхности двухфазной смеси в положительном направлении оси Ox распространяется волна длиной λ . Длина волны много больше ее высоты ($\lambda \gg \xi_{\max}$), и много больше характерного размера частиц ($\lambda \gg a$). Неизвестные функции представим в виде суммы решения задачи об оседании частиц (7) и волновых возмущений:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \alpha_0 + \gamma(t, x, z), \\
 v_{1z} &= \frac{\alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{1z}(t, x, z), \\
 v_{2z} &= -\frac{(1 - \alpha_0)(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{2z}(t, x, z), \\
 v_{1x} &= V_{1x}(t, x, z), \\
 v_{2x} &= V_{2x}(t, x, z), \\
 p &= P_a - \rho^0 g z + P(t, x, z).
 \end{aligned} \tag{16}$$

После подстановки (16) в (11) получаем систему, описывающую волновое движение двухфазной смеси в случае распространения по свободной поверхности волны

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0 - \gamma) \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} - \left(\frac{\alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{1z} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \\
& \quad + (1 - \alpha_0 - \gamma) \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} - V_{1x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\alpha_0 + \gamma) \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} + \left(-\frac{(1 - \alpha_0)(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{2z} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \\
& \quad + (\alpha_0 + \gamma) \frac{\partial V_{2x}}{\partial x} + V_{2x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0, \\
& \rho_1^0 \left(\frac{\partial V_{1x}}{\partial t} + V_{1x} \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} + \left(\frac{\alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{1z} \right) \frac{\partial V_{1x}}{\partial z} \right) = \\
& \quad = -\frac{\partial P}{\partial x} - R(\alpha_0 + \gamma)(V_{1x} - V_{2x}), \tag{17} \\
& \rho_1^0 \left(\frac{\partial V_{1z}}{\partial t} + V_{1x} \frac{\partial V_{1z}}{\partial x} + \left(\frac{\alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{1z} \right) \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} \right) = \\
& \quad = -\frac{\partial P}{\partial z} - R(\alpha_0 + \gamma)(V_{1z} - V_{2z}) - \gamma(\rho_2^0 - \rho_1^0)g, \\
& \rho_2^0 \left(\frac{\partial V_{2x}}{\partial t} + V_{2x} \frac{\partial V_{2x}}{\partial x} + \left(-\frac{(1 - \alpha_0)(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{2z} \right) \frac{\partial V_{2x}}{\partial z} \right) = \\
& \quad = -\frac{\partial P}{\partial x} + R(1 - \alpha_0 - \gamma)(V_{1x} - V_{2x}), \\
& \rho_2^0 \left(\frac{\partial V_{2z}}{\partial t} + V_{2x} \frac{\partial V_{2z}}{\partial x} + \left(-\frac{(1 - \alpha_0)(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{2z} \right) \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} \right) = \\
& \quad = -\frac{\partial P}{\partial z} + R(1 - \alpha_0 - \gamma)(V_{1z} - V_{2z}) - \gamma(\rho_2^0 - \rho_1^0)g.
\end{aligned}$$

Подставляя (16) в (13) и (14), получим граничные условия на свободной поверхности:

кинематическое

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \alpha_0 - \gamma)V_{1z} - (\alpha_0 + \gamma)V_{2z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \left((1 - \alpha_0 - \gamma)V_{1x} + (\alpha_0 + \gamma)V_{2x} \right) + \gamma \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} = 0, \quad z = \xi \quad (18)$$

и динамическое

$$P = \rho^0 g \xi, \quad z = \xi \quad (19)$$

В полученных уравнениях (17) и граничных условиях (19), (18) перейдём к безразмерным переменным

$$x = \frac{x^*}{k}, z = \frac{z^*}{k}, t = \frac{t^*}{kc},$$

$$V_{ix} = \varepsilon c V_{ix}^*, V_{iz} = \varepsilon c V_{iz}^*, P = \varepsilon \rho^0 c^2 P^*,$$

$$\xi = \frac{\varepsilon \xi^*}{k}, \gamma = \varepsilon \alpha_0 \gamma^*$$

где звездочкой (*) обозначены безразмерные переменные, c – фазовая скорость волны, ε – малый волновой параметр.

В качестве малого параметра возьмем

$$\varepsilon = k \xi_{max},$$

где $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, ξ_{max} – максимальное значение высоты свободной поверхности. Параметр ε мал в силу сделанного предположения о длине волны ($\lambda \gg \xi_{max}$)

Подставив безразмерные переменные в систему (17) и граничные условия (10), получим следующую нелинейную краевую задачу. В области, занятой смесью, должны выполняться уравнения сохранения массы и импульса

$$\left(-\alpha_0 kc \frac{\partial \gamma}{\partial t} + kc(1 - \alpha_0) \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} - \alpha_0^2 \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} k \frac{\partial \gamma}{\partial z} + kc(1 - \alpha_0) \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} \right) +$$

$$+ \varepsilon \left(-\alpha_0 ck \gamma \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} - \alpha_0 ck V_{1z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \alpha_0 ck \gamma \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} - kc \alpha_0 V_{1x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \left(\alpha_0 kc \frac{\partial \gamma}{\partial t} + kc \alpha_0 \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} - \alpha_0 (1 - \alpha_0) \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0) g}{R} k \frac{\partial \gamma}{\partial z} + kc \alpha_0 \frac{\partial V_{2x}}{\partial x} \right) + \\
& + \varepsilon \left(\alpha_0 ck \gamma \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} + \alpha_0 ck V_{2z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \alpha_0 ck \gamma \frac{\partial V_{2x}}{\partial x} + kc \alpha_0 V_{2x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = 0, \\
& \left(\rho_1^0 kc^2 \frac{\partial V_{1x}}{\partial t} + \alpha_0 \rho_1^0 \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0) g}{R} kc \frac{\partial V_{1x}}{\partial z} + \rho^0 kc^2 \frac{\partial P}{\partial x} + R \alpha_0 c (V_{1x} - V_{2x}) \right) + \\
& + \varepsilon \left(\rho_1^0 kc^2 V_{1x} \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} + \rho_1^0 kc^2 V_{1z} \frac{\partial V_{1x}}{\partial z} + \alpha_0 c R \gamma (V_{1x} - V_{2x}) \right) = 0, \\
& \left(\rho_1^0 kc^2 \frac{\partial V_{1z}}{\partial t} + \alpha_0 \rho_1^0 \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0) g}{R} kc \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} + \rho^0 kc^2 \frac{\partial P}{\partial z} + R \alpha_0 c (V_{1z} - V_{2z}) + \right. \\
& + \alpha_0 \gamma (\rho_2^0 - \rho_1^0) g) + \varepsilon \left(\rho_1^0 kc^2 V_{1x} \frac{\partial V_{1z}}{\partial x} + \rho_1^0 kc^2 V_{1z} \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} + \right. \\
& \quad \left. - + \alpha_0 c R \gamma (V_{1z} - V_{2z}) \right) = 0, \\
& \left(\rho_2^0 kc^2 \frac{\partial V_{2x}}{\partial t} - (1 - \alpha_0) \rho_2^0 \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0) g}{R} kc \frac{\partial V_{2x}}{\partial z} + \rho^0 kc^2 \frac{\partial P}{\partial x} - \right. \\
& \quad \left. - - R (1 - \alpha_0) c (V_{1x} - V_{2x}) \right) + \varepsilon \left(\rho_2^0 kc^2 V_{2x} \frac{\partial V_{2x}}{\partial x} + \rho_2^0 kc^2 V_{2z} \frac{\partial V_{2x}}{\partial z} + \right. \\
& \quad \left. - + \alpha_0 c R \gamma (V_{1x} - V_{2x}) \right) = 0, \\
& \left(\rho_2^0 kc^2 \frac{\partial V_{2z}}{\partial t} - (1 - \alpha_0) \rho_2^0 \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0) g}{R} kc \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} + \rho^0 kc^2 \frac{\partial P}{\partial z} - \right. \\
& \quad \left. - - R (1 - \alpha_0) c (V_{1z} - V_{2z}) + \alpha_0 \gamma (\rho_2^0 - \rho_1^0) g \right) + \\
& + \varepsilon \left(\rho_2^0 kc^2 V_{2x} \frac{\partial V_{2z}}{\partial x} + \rho_2^0 kc^2 V_{2z} \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} + \alpha_0 c R \gamma (V_{1z} - V_{2z}) \right) = 0. \quad (20)
\end{aligned}$$

На свободной поверхности слоя выполняются кинематическое

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \alpha_0)V_{1z} - \alpha_0 V_{2z} + \alpha_0 \gamma \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{cR} \\
& \quad + \varepsilon \left(\alpha_0 \gamma (V_{1z} - V_{2z}) + (1 - \alpha_0) \frac{\partial \xi}{\partial x} V_{1x} + \right. \\
& \quad \left. + \alpha_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} V_{2x} \right) + \varepsilon^2 \alpha_0 \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} (V_{2x} - V_{1x}) = 0, \quad z = \varepsilon \xi(t, x, z) \quad (21)
\end{aligned}$$

и динамические граничные условия

$$P - v^2 \xi = 0, \quad z = \varepsilon \xi(t, x, z), \quad (22)$$

где $v^2 = g/kc^2$.

Таким образом, получена нелинейная краевая задача для определения поля скоростей волнового движения слоя двухфазной жидкости неограниченной глубины, возмущений давления и концентрации, уравнения свободной поверхности.

5. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ НА СЛОЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

5.1. Решение линейной задачи

Будем рассматривать соответствующий линейный вариант задачи (20)–(22). Для этого положим в уравнениях (20) и граничных условиях (21), (22) $\varepsilon = 0$. В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
 -\alpha_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0) \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} - \alpha_0^2 G \frac{\partial \gamma}{\partial z} + (1 - \alpha_0) \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} &= 0, \\
 \alpha_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \alpha_0 \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} - \alpha_0(1 - \alpha_0)G \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \alpha_0 \frac{\partial V_{2x}}{\partial x} &= 0, \\
 \rho_1 \frac{\partial V_{1x}}{\partial t} + \alpha_0 \mu_1 G \frac{\partial V_{1x}}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} + r \alpha_0 (V_{1x} - V_{2x}) &= 0, \\
 \mu_1 \frac{\partial V_{1z}}{\partial t} + \alpha_0 \mu_1 G \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} + \alpha_0 r (V_{1z} - V_{2z}) + \alpha_0 \gamma r G &= 0, \\
 \mu_2 \frac{\partial V_{2x}}{\partial t} - (1 - \alpha_0) \mu_2 G \frac{\partial V_{2x}}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} - r(1 - \alpha_0)(V_{1x} - V_{2x}) &= 0, \\
 \mu_2 \frac{\partial V_{2z}}{\partial t} - (1 - \alpha_0) \mu_2 G \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} - r(1 - \alpha_0)(V_{1z} - V_{2z}) + \alpha_0 \gamma r G &= 0, \quad (23)
 \end{aligned}$$

где

$$G = \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{cR}, \quad r = \frac{R}{kc\rho^0}, \quad \mu_1 = \frac{\rho_1^0}{\rho^0}, \quad \mu_2 = \frac{\rho_2^0}{\rho^0}$$

и граничных условий

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \alpha_0)V_{1z} - \alpha_0 V_{2z} + \alpha_0 G \gamma = 0, \quad z = 0, \quad (24)$$

$$P - \nu^2 \xi = 0, \quad z = 0. \quad (25)$$

Решение задачи (23) – (25) должно удовлетворять ряду требований. Наличие относительного движения фаз и сил межфазного трения обуславливает диссипативный процесс – затухание волнового движения. В отсутствие дисперсной фазы ($\alpha_0 = 0$) или при одинаковых истинных плотностях фаз ($\rho_2^0 = \rho_1^0$) решение задачи должно переходить в известные

волновые решения для волнового движения бесконечно глубокого слоя идеальной жидкости [13]. Поэтому решение задачи в случае распространения по свободной поверхности слоя бегущей волны будем искать в виде

$$\begin{aligned}
P &= e^{-\beta t}(G_1 \cos(x-t) + G_2 \sin(x-t))e^z, \\
V_{1x} &= e^{-\beta t}(A_1 \cos(x-t) + A_2 \sin(x-t))e^z, \\
V_{1z} &= e^{-\beta t}(B_1 \cos(x-t) + B_2 \sin(x-t))e^z, \\
V_{2x} &= e^{-\beta t}(C_1 \cos(x-t) + C_2 \sin(x-t))e^z, \\
V_{2z} &= e^{-\beta t}(D_1 \cos(x-t) + D_2 \sin(x-t))e^z, \\
\gamma &= e^{-\beta t}(U_1 \cos(x-t) + U_2 \sin(x-t))e^z, \tag{26}
\end{aligned}$$

где $G_1, G_2, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, U_1, U_2$ – постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (26) в систему (23) и приравнявая коэффициенты при $\cos(x-t)$ и $\sin(x-t)$ в обеих частях уравнений, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned}
&\alpha_0(U_2 + U_1\beta) - (1 - \alpha_0)B_1 + \alpha_0^2GU_1 + (1 - \alpha_0)A_2 = 0, \\
&-\alpha_0(U_1 - U_2\beta) - (1 - \alpha_0)B_2 + \alpha_0^2GU_2 - (1 - \alpha_0)A_1 = 0, \\
&-\alpha_0(U_2 + U_1\beta) - \alpha_0D_1 + (1 - \alpha_0)\alpha_0GU_1 + \alpha_0C_2 = 0, \\
&\alpha_0(U_1 - U_2\beta) - \alpha_0D_2 + (1 - \alpha_0)\alpha_0GU_2 - \alpha_0C_1 = 0, \\
&-\mu_1(A_2 + A_1\beta) - \alpha_0\mu_1GA_1 + G_2 + r\alpha_0(A_1 - C_1) = 0, \\
&\mu_1(A_1 - A_2\beta) - \alpha_0\mu_1GA_2 - G_1 + r\alpha_0(A_2 - C_2) = 0, \\
&-\mu_1(B_2 + B_1\beta) - \alpha_0\mu_1GB_1 - G_1 + r\alpha_0(B_1 - D_1) + r\alpha_0GU_1 = 0, \\
&\mu_1(B_1 - B_2\beta) - \alpha_0\mu_1GB_2 - G_2 + r\alpha_0(B_2 - D_2) + r\alpha_0GU_2 = 0, \\
&-\mu_2(C_2 + C_1\beta) + (1 - \alpha_0)G\mu_2C_1 + G_2 - r(1 - \alpha_0)(A_1 - C_1) = 0, \\
&\mu_2(C_1 - C_2\beta) + (1 - \alpha_0)\mu_2GC_2 - G_1 - r(1 - \alpha_0)(A_2 - C_2) = 0, \\
&-\mu_2(D_2 + D_1\beta) + (1 - \alpha_0)\mu_2GD_1 - G_1 - r(1 - \alpha_0)(B_1 - D_1)r\alpha_0GU_1 = 0, \\
&\mu_2(D_1 - D_2\beta) + (1 - \alpha_0)\mu_2GD_2 - G_2 - r(1 - \alpha_0)(B_2 - D_2)r\alpha_0GU_2 = 0.
\end{aligned}$$

Система содержит двенадцать неизвестных. Ранг системы равен десяти, следовательно, две неизвестные будут свободными, а остальные коэффициенты будут выражены через них. При исследовании обнаружилось, что при выборе неизвестных G_1 и G_2 в качестве свободных и выражении их из первых шести граничных условий, дальнейшие выкладки имеют наиболее компактный и удобный вид. Решение системы, полученное при помощи пакета Maple, имеет вид

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 0, \\
 U_2 &= 0, \\
 A_1 &= \frac{1}{d}(a_1G_1 + a_2G_2), \\
 A_2 &= \frac{1}{d}(-a_2G_1 + a_1G_2), \\
 B_1 &= \frac{1}{d}(a_2G_1 - a_1G_2), \\
 B_2 &= \frac{1}{d}(a_1G_1 + a_2G_2), \\
 C_1 &= \frac{1}{d}(c_1G_1 + c_2G_2), \\
 C_2 &= \frac{1}{d}(-c_2G_1 + c_1G_2), \\
 D_1 &= \frac{1}{d}(c_2G_1 - c_1G_2), \\
 D_2 &= \frac{1}{d}(c_1G_1 + c_2G_2).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \mu_1 \left(\mu_2^2 ((\alpha_0 - 1)^2 G^2 - 2ck\beta G(\alpha_0 - 1) + c^2 k^2 \beta^2 + 1) \right. \\
 &\quad \left. + 3r\mu_2 \left(\left(\alpha_0 - \frac{2}{3} \right) G - \frac{2}{3} ck\beta \right) - r^2 (\alpha_0 - 1) \right) + \mu_2 r^2 \alpha_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= -(G^2\alpha_0^2 + \alpha_0(-2G\beta ck - 2G^2) + c^2k^2\beta^2 + 2ck\beta G + G^2 \\
&\quad + 1)(\alpha_0(G\mu_1 + r) - ck\beta\mu_1) \\
&\quad + r\mu_2 \left(G\mu_1\alpha_0^3 - 3G\alpha_0^2 \left(\frac{2}{3}ck\beta + G \right) \mu_1 + \frac{1}{3}r \right) \\
&\quad + \alpha_0(\mu_1(c^2k^2\beta^2 + 5G\beta ck + 2G^2 + 1) + r(\beta ck + G)) \\
&\quad - 2ck\beta\mu_1(ck\beta + G) \Big) + r^2\mu_1(\alpha_0 - 1)(-\beta ck + G\alpha_0) \\
c_1 &= \mu_2\mu_1^2(c^2k^2\beta^2 - 2G\alpha_0ck\beta + G^2\alpha_0^2 + 1) \\
&\quad + 3r\mu_1 \left(\left(-\frac{2}{3}ck\beta + G\alpha_0 - \frac{1}{3}G \right) \mu_2 - \frac{1}{3}r(\alpha_0 - 1) \right) + \mu_2r^2\alpha_0 \\
c_2 &= \\
&\quad - ((G\mu_2 - r)\alpha_0 + r + \mu_2(-\beta ck - G))(c^2k^2\beta^2 - 2G\alpha_0ck\beta + G^2\alpha_0^2 + 1)\mu_1^2 \\
&\quad - r\mu_1 \left(G^2\mu_2\alpha_0^3 - 2G\alpha_0^2 \left(\mu_2ck\beta + \frac{1}{2}r \right) \right) \\
&\quad + \alpha_0(r(ck\beta + G) - \mu_2(-c^2k^2\beta^2 + Gck\beta + G^2 - 1)) - ckr\beta \\
&\quad + \mu_2(c^2k^2\beta^2 + Gck\beta - 1) \Big) - \mu_2r^2\alpha_0(-ck\beta + G\alpha_0 - G) \\
d &= (c^2k^2\beta^2 - 2G\alpha_0ck\beta + G^2\alpha_0^2 \\
&\quad + 1)((G^2\alpha_0^2 + \alpha_0(-2G\beta ck - 2G^2) + c^2k^2\beta^2 + 2ck\beta G + G^2 \\
&\quad + 1)\mu_2^2 - 2r\mu_2(\alpha_0 - 1)(-ck\beta + G\alpha_0 - G) + r^2(\alpha_0 - 1)^2)\mu_1^2 \\
&\quad + 2r\alpha_0\mu_2\mu_2(-ck\beta + G\alpha_0)(G^2\alpha_0^2 + \alpha_0(-2G\beta ck - 2G^2) \\
&\quad + c^2k^2\beta^2 + 2ck\beta G + G^2 + 1)\mu_2 \\
&\quad - (G^2\alpha_0^2 + \alpha_0(-2G\beta ck - G^2) + c^2k^2\beta^2 + ck\beta G + 1)r(\alpha_0 - 1)) \\
&\quad + \alpha_0^2r^2\mu_2^2(G^2\alpha_0^2 + \alpha_0(-2G\beta ck - 2G^2) + c^2k^2\beta^2 + 2ck\beta G + G^2 \\
&\quad + 1)
\end{aligned}$$

Из решения (18) следует, что возмущение концентрации дисперсной фазы в линейном приближении равно нулю. Эта величина имеет более высокий порядок малости по сравнению с возмущением давления и скоростями волнового движения фаз.

5.2. Уравнение свободной поверхности. Дисперсионные соотношения

Для определения формы свободной поверхности необходимо подставить найденное решение (26) в кинематическое условие (24) и проинтегрировать его по t . При интегрировании предполагаем, что ось ox направлена вдоль среднего уровня волновой поверхности, т.е. выполняется условие [14]

$$\int_0^{2\pi} \xi(t, x) dt = 0.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \xi = \frac{e^{-t\beta}}{1 + \beta^2} & \left(-((1 - \alpha_0)(B_1 + B_2\beta) + \alpha_0(D_1 + D_2\beta)) \sin(x - t) + \right. \\ & \left. + ((1 - \alpha_0)(B_2 - B_1\beta) + \alpha_0(D_2 - D_1\beta)) \cos(x - t) \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где коэффициенты B_1 , B_2 , D_1 , D_2 определяются выражениями (27). Свободные коэффициенты G_1 и G_2 , как и для обычных поверхностных волн [13], могут быть определены из дополнительных начальных данных.

Найдем дисперсионное соотношение и уравнение для определения декремента затухания волны. Для этого подставим выражения для возмущения давления (26) и свободной поверхности (28) в динамическое условие (25). Выписывая коэффициенты при $\sin(x - t)$ и $\cos(x - t)$, получаем следующие уравнения

$$\begin{aligned} (1 + \beta^2)G_1 - v^2((1 - \alpha_0)(B_2 - B_1\beta) + \alpha_0(D_2 - D_1\beta)) &= 0, \\ (1 + \beta^2)G_2 + v^2((1 - \alpha_0)(B_1 + B_2\beta) + \alpha_0(D_1 + D_2\beta)) &= 0. \end{aligned}$$

После подстановки коэффициентов B_1 , B_2 , D_1 , D_2 , G_1 , G_2 уравнения примут вид

$$\begin{aligned} mG_1 + nG_2 &= 0 \\ nG_1 - mG_2 &= 0 \end{aligned}$$

где

$$m = d(1 + \beta^2) + v^2((1 - \alpha_0)(a_1 - \beta a_2) + \alpha_0(c_1 - \beta c_2)),$$

$$n = v^2((1 - \alpha_0)(a_2 + \beta a_1) + \alpha_0(c_2 + \beta c_1)).$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если ее определитель отличен от нуля, т.е.

$$m^2 + n^2 = 0.$$

Это возможно при одновременном выполнении равенств

$$d(1 + \beta^2) + v^2((1 - \alpha_0)(a_1 - \beta a_2) + \alpha_0(c_1 - \beta c_2)) = 0,$$

$$(1 - \alpha_0)(a_2 + \beta a_1) + \alpha_0(c_2 + \beta c_1) = 0. \quad (29)$$

Все величины, входящие в (29), следует записать в размерном виде. При этом уравнения системы принимают громоздкий вид. Чтобы упростить запись, введем вспомогательные величины, имеющие размерность скорости

$$g_1 = cG = \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R}, \quad R_1 = cr = \frac{R}{k}, \quad g_2 = \frac{g}{k}, \quad \beta_1 = c\beta.$$

Подставляя эти величины в (29), после несложных преобразований можно получить искомые уравнения.

Таким образом, получены уравнения для определения неизвестных фазовой скорости и декремента затухания волны.

5.3. Форма свободной поверхности. Декремент затухания и фазовая скорость.

Решив систему (29) найдём декремент затухания β и фазовую скорость c , задав значения среды: длина волны $\lambda = 1$ м, для недеформируемых шариков радиуса $a = 10^{-3}$ м, $\eta = 1.004 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, при объемной концентрации дисперсной фазы $\alpha_0 = 0.1$, плотность несущей фазы $\rho_1^0 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, а дисперсной $\rho_2^0 = 2600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, что соответствует характеристикам воды и песка.

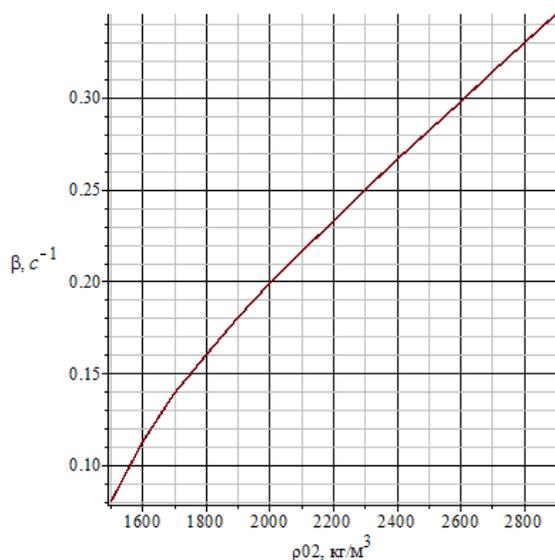


Рис. 5.1. Зависимость декремента затухания от плотности дисперсной фазы.

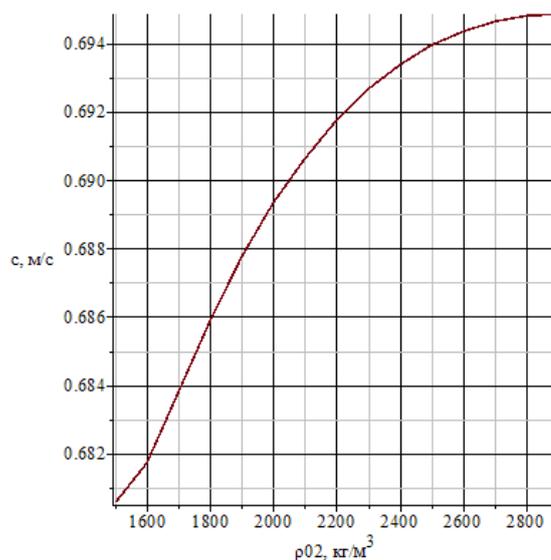


Рис. 5.2. Зависимость фазовой скорости от плотности дисперсной фазы.

Здесь изображена зависимость декремента затухания и фазовой скорости от плотности дисперсной фазы. Как видно из графиков, при росте плотности дисперсной фазы декремент затухания и фазовая скорость растёт.

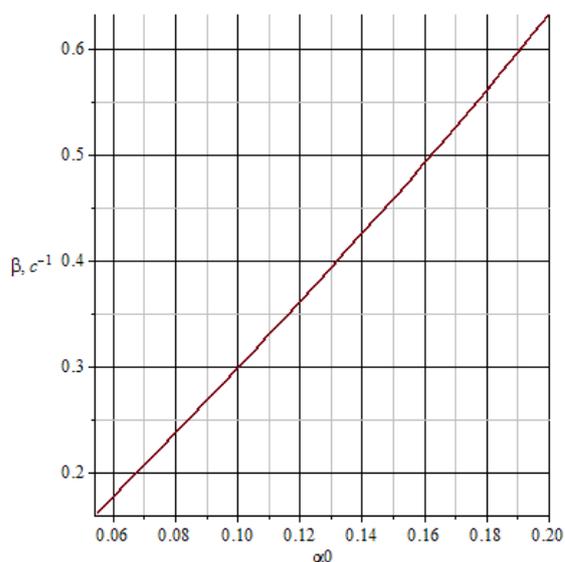


Рис. 5.3. Зависимость декремента затухания от объёмной концентрации дисперсной фазы.

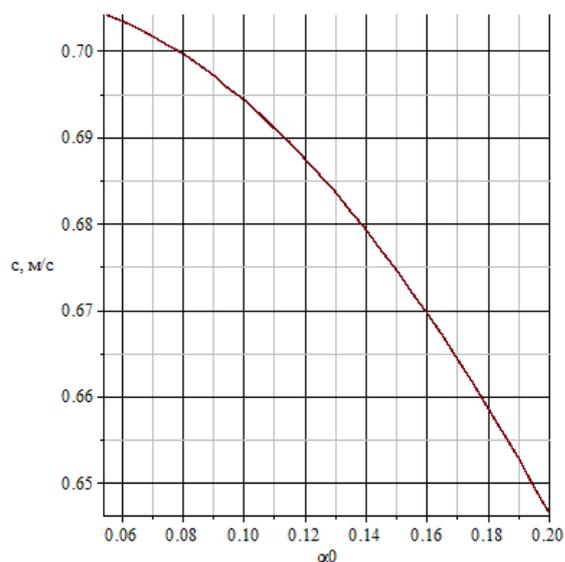


Рис. 5.4. Зависимость фазовой скорости от объёмной концентрации дисперсной фазы

Здесь изображена зависимость декремента затухания и фазовой скорости от объёмной концентрации дисперсной фазы. Как можно видеть, при росте объёмной концентрации дисперсной фазы декремент затухания растёт, а фазовая скорость убывает.

Также на Рис. 5.5. построена форма свободной поверхности для тех же характеристик среды.

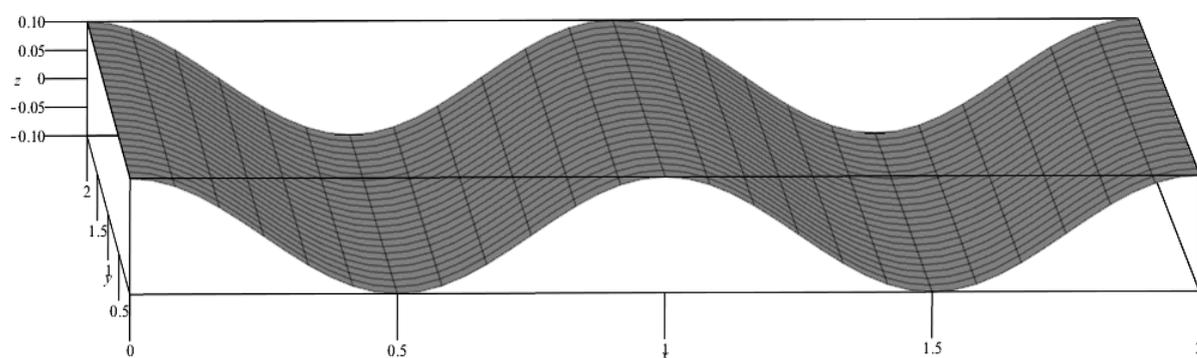


Рис. 5.5. Форма свободной поверхности

Заключение

1. Построена математическая модель распространения поверхностных волн малой амплитуды по слою дисперсной смеси бесконечной глубины.
2. В линейном приближении по малому амплитудному параметру найдены поле скоростей, давления и концентрации фаз, форма свободной поверхности в случае распространения по поверхности слоя бегущей волны.
3. Установлено, что возмущение концентрации является величиной более низкого порядка по сравнению с остальными волновыми возмущениями
4. Получены дисперсионные соотношения для определения фазовой скорости и декремента затухания. Показано влияние плотности и объёмной концентрации дисперсной фазы на фазовую скорость и декремент затухания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лабунцов Д.А, Ягов В.В. Л 127 Механика двухфазных систем: Учебное пособие для вузов — М.: издательство МЭИ, 2000. — 374 с: ил.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987 . - 336 с.: ил.
3. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М: «МИР» 1971. — 536 с.
4. Фортье А. Механика суспензий. М: «МИР» 1971. . — 264 с.
5. Габов С. А. Введение в теорию нелинейных волн. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 176 с.
6. Базаров И. П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1976. — 447 с.
7. Франк А. М. Дискретные модели несжимаемой жидкости. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 224 с.
8. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М: «МИР» 1967. - 310 с.
9. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. – 336 с.
10. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред //Прикладн. матем. и механика. 1956. Т. 20. №2. С. 184-195.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970. – 568 с.
12. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. – 816 с.
13. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во. Ленингр. ун-та, 1981. – 196 с.
14. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. – 425 с.