МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра математического моделирования

ДОПУЩЕНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
________Татосов А.В.
21 июня 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМАЦИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА
МЕТОДАМИ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил работу Студент 2 курса очной формы обучения	Сафрыгин Станислав Владимирович
Руководитель работы Старший преподаватель	Бельмецев Николай Фёдорович
Рецензент Научный сотрудник, к.ф.- м. н. ТюмФ ИТПМ СО РАН	Боталов Андрей Юрьевич

Тюмень 2016

Оглавление

Введение

В настоящее время имеется множество различных методов построения численных решений уравнений Ламе классической статической теории упругости. Лучший способ проверки численных расчётов – использование точных решений. Построение точных решений уравнений теории упругости, обладающих симметриями, возможно с помощью методов группового анализа дифференциальных уравнений [1].

Применение группового анализа к построению точных решений используется уже достаточно давно, но в связи с большой трудоемкостью до сих пор не проведено построение всех решений, обладающих симметриями, даже для линейных уравнений теории упругости. Огромный шаг в данном направлении был сделан Чиркуновым Ю.А. в монографии «Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений» [2]. Инструмент группового анализа имеет свои условия и ограничения на применимость к рассматриваемым задачам, но зачастую позволяет находить их частные решения.

В монографии [2] приводится система уравнений в частных производных первого порядка, эквивалентная исходным уравнениям Ламе (гл.6 монографии). Там же построены различные подсистемы данных уравнений. Исследованию одной из этих подсистем посвящена данная работа.

О групповом анализе

Опишем кратко терминологию группового анализа, используемую в данной работе.

Определение: Семейство преобразований $\{T_a\}$ с параметром называется локальной непрерывной группой Ли, если существует окрестность изменения параметра этого семейства $\Delta' \subset \Delta \subset \boldsymbol{R}$ такая, что:

1. $\{T_a\}$ в Δ' замкнуто, т.е. для $\forall\ a,b \in \Delta'$ и T_a, T_b:
   $T_b T_a = T_c \in \{T_a\}$ (или коротко $c = \varphi(a,b), c \in \Delta$);
2. $\varphi(a,b) \in C^2(\Delta' \times \Delta')$;
3. Выполнена локальная упорядоченность:
   $\forall a,b \in \Delta'\ \ T_a = T_b \Rightarrow a = b$;
4. $\exists$ преобразование $T_0 \in \{T_a\}$:
   $T_0 T_a = T_a T_0 = T_a$;
5. $\exists$ обратный элемент в группе $T_a^{-1} \in \{T_a\}$:
   $T_a^{-1} T_a = T_a T_a^{-1} = T_0$

Определение (Ибрагимов Н.Х. [5]): Касательное векторное поле, записываемое в виде дифференциального оператора первого порядка

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

который ведёт себя как скаляр при произвольной замене переменных, называется инфинитезимальным (бесконечно малым) оператором группы.

Определение (Ибрагимов Н.Х. [5]): Функция $F(x,y)$ называется инвариантом группы обратимых преобразований $\bar{x} = \varphi(x,y,a)$, $\bar{y} = \psi(x,y,a)$ (здесь a - вещественный параметр), если для каждой точки (x,y) функция F

постоянна вдоль траектории, описываемой преобразованными точками $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y)$$

Определение: Многообразие M инвариантно относительно действия многопараметрической группы Ли G_r ,если для всякой точки $x \in M$ и любого преобразования $T \in G_r$ справедливо: $Tx \in M$

Определение: Рассматривается линейное пространство операторов L и набор операторов $X_1, X_2, X_3 \in L$.Вводится операция коммутации $[\cdot,\cdot]$ и коммутатор $[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$. Операторы $X_1, X_2, X_3 \in L$ образуют алгебру Ли, если выполнено:

1. Дистрибутивность умножения коммутаторов относительно сложения: $[C_1X_1 + C_2X_2, X_3] = C_1[X_1, X_3] + C_2[X_2, X_3]$;
2. некоммутативность коммутатора: $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$;
3. первое тождество Якоби: $[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_2] + [[X_3, X_1], X_2] = 0$;
4. второе тождество Якоби : $\begin{matrix} (x) \to (y), X \to X' \\ [X_1^{'}, X_2^{'}] = [X_1, X_2]^{'} \end{matrix}$;
5. $[X_{\underset{k}{1}}, X_{\underset{k}{2}}] = [X_1, X_2]_k$.

Применение группового анализа заключается в отыскании локальных непрерывных групп Ли, не меняющих вид дифференциального многообразия (дифференциальных уравнений), построении оптимальной системы подалгебр для соответствующей алгебры Ли, и построении смежных классов инвариантных и частично инвариантных решений.

Глава 1. Постановка задачи

1.1. Вступление

Кратко опишем результаты исследования задачи для уравнений Ламе из монографии Чиркунова Ю. А.[2].

Состояние равновесия однородной изотропной упругой среды при отсутствии массовых сил описывается системой уравнений Ламе:

$$(\lambda+\mu)\nabla div(\boldsymbol{u})+\mu\Delta\boldsymbol{u}=0 \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,...,u_n)$ $(n\geq 2)$ есть функция точки $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, а $\lambda>0,\mu>0$ - постоянные коэффициенты Ламе.

После группового расслоения уравнений (1), получаем автоморфную систему:

$$\begin{aligned}&(2+\frac{\lambda}{\mu})div(\boldsymbol{u})=\theta(\boldsymbol{x}),\\&\partial_x\boldsymbol{u}-(\partial_x\boldsymbol{u})^T=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}),\end{aligned} \qquad (2)$$

и разрешающую систему вида:

$$\begin{aligned}&\nabla\theta+div(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{0},\\&\boldsymbol{a}\cdot\partial\boldsymbol{\omega}\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle+\boldsymbol{b}\cdot\partial\boldsymbol{\omega}\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle+\boldsymbol{c}\cdot\partial\boldsymbol{\omega}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0,\end{aligned} \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ - произвольные (пробные) векторы из $\boldsymbol{R}^n$. Первое уравнение системы (3) – условие совместности системы уравнений (2) с системой уравнений (1), а второе уравнение той же системы (3) – условие совместности системы (2).

Объединение систем (2) и (3) есть групповое расслоение уравнений Ламе (1).

Из промежуточных формул и леммы о гармонической функции, которые в данной работе не приводятся (см. гл. 6, параграф 2, [2]), следует, что общее решение автоморфной системы (2) имеет вид:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 t\boldsymbol{\omega}(t\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{x} \rangle dt + \frac{1}{n-4}\nabla\{|\boldsymbol{x}|^2 [\int_0^1 t\theta(t\boldsymbol{x})dt -$$
$$-\frac{(\lambda+\mu)n+4\mu}{4(\lambda+2\mu)}\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1}\theta(t\boldsymbol{x})dt]\} + \nabla h(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

где λ, μ - коэффициенты Ламе, $h(x)$- произвольная гармоническая функция, n– размерность пространства. Формула (4) справедлива для случаев $n \neq 4$. Формула (4) является известной формулой Колосова – Мусхелишвили при $n = 2$. При $n > 2$ можно считать формулу (4) многомерным аналогом этой формулы. Данная формула позволяют из решений $\theta, \boldsymbol{\omega}$ разрешающей системы (3) получать решения уравнений Ламе.

Для удобства так же можно переписать разрешающую систему (3), когда $n = 3$ в виде:

$$\begin{aligned} &\nabla\theta - rot(\boldsymbol{\omega}) = 0, \\ &div(\boldsymbol{\omega}) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

Разрешающая система (5) состоит из четырёх неизвестных скалярных функций: функции θ ,характеризующей объёмную деформацию, и трёх компонент вектора $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$, характеризующих изменение формы упругих элементов.

В монографии предлагается ввести новые зависимые и независимые комплексные переменные:

$$u = \theta + i\omega^3, v = \omega^2 - i\omega^1,$$
$$x = \frac{1}{2}(x_1 + ix_2), y = \frac{1}{2}(-x_1 + ix_2), t = x_3, \tag{6}$$

которые позволяют записать систему (5) в простом виде:

$$\begin{aligned} &\partial_t u = \partial_x v, \\ &\partial_t v = \partial_y u, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\partial_x = \partial_{x_1} - i\partial_{x_2}, \partial_y = -\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}$ - операторы формального дифференцирования.

Предполагается, что в системе (7) величины t, x, y - независимые комплексные переменные.

Комплексную систему (7) удобно использовать для получения точных решений системы (5).

Также в монографии проведено исследование групповых свойств системы (7), построена оптимальная система подгрупп основной допускаемой группы Ли, порожденной базисом операторов:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \partial_x, Y_2 = \partial_y, Y_3 = \partial_t, Y_4 = u\partial_u + v\partial_v,\\
&Y_5 = 2x\partial_x + t\partial_t + v\partial_v, Y_6 = 2y\partial_y + t\partial_t + u\partial_u,\\
&Y_7 = t\partial_x + 2y\partial_t - u\partial_v, Y_8 = t\partial_y + 2x\partial_t - v\partial_u,\\
&Y_9 = t^2\partial_x + 4y^2\partial_y + 4ty\partial_t - 2yu\partial_u - 2(tu - 3yv)\partial_v,\\
&Y_{10} = 4x^2\partial_x + t^2\partial_y + 4tx\partial_t - 2(tv + 3xu)\partial_u - 2xv\partial_v,\\
&Y_{11} = tx\partial_x + ty\partial_y + \frac{1}{2}(t^2 + 4xy)\partial_t - (tu + yv)\partial_u - (tv + xu)\partial_v.
\end{aligned}$$

Там же найдены её универсальные инварианты. Использование последних позволяет упрощать уравнения (7).

1.2. Подмодели

Рассмотрим подалгебру $\langle Y_2+\alpha Y_4+Y_5\rangle$ из оптимальной системы подалгебр для основной группы Ли, допускаемой уравнениями (7). Базис инвариантов соответствующей $\langle Y_2+\alpha Y_4+Y_5\rangle$ подгруппы Ли имеет вид:

$$I^1=t\,\mathrm{e}^{-y},I^2=x\,\mathrm{e}^{-2y},I^3=u\,\mathrm{e}^{-\alpha y},I^4=v\,\mathrm{e}^{-(\alpha+1)y} \tag{8}$$

Для подалгебры $\langle Y_2+\alpha Y_4+Y_5\rangle$ с инвариантами (8) инвариантное решение имеет вид:

$$u=\varphi(\xi,\eta)\,\mathrm{e}^{\alpha y},v=\psi(\xi,\eta)\,\mathrm{e}^{(\alpha+1)y}, \tag{9}$$

где $\xi=t\,\mathrm{e}^{-y},\eta=x\,\mathrm{e}^{-2y}$, а переменные x,y,t - независимые комплексные переменные (6), α -произвольное комплексное число. Функция $\varphi(\xi,\eta)$ - любое решение уравнения:

$$\varphi_{\xi\xi}+\xi\varphi_{\xi\eta}+2\eta\varphi_{\eta\eta}+(2-\alpha)\varphi_\eta=0, \tag{10}$$

а функция $\psi=\psi(\xi,\eta)$ определяется из вполне интегрируемой системы:

$$\begin{aligned}&\psi_\xi=\alpha\varphi-\xi\varphi_\xi-2\eta\varphi_\eta,\\&\psi_\eta=\varphi_\xi\end{aligned} \tag{11}$$

Для подалгебры $\langle Y_2+Y_4+Y_7\rangle$ из оптимальной системы подалгебр для основной группы Ли, допускаемой уравнениями (7). Базис инвариантов соответствующей $\langle Y_2+Y_4+Y_7\rangle$ подгруппы Ли имеет вид:

$$I^1=t^2-4xy,I^2=y,I^3=ue^{-\frac{t}{2y}},I^4=(v+\frac{tu}{2y})e^{-\frac{t}{2y}} \tag{12}$$

Для подалгебры $\langle Y_2+Y_4+Y_7\rangle$ с инвариантами (12) инвариантное решение имеет вид:

$$\begin{aligned}&u=\varphi(\xi,\eta)\,\mathrm{e}^{y},\\&v=[\psi(\xi,\eta)-y\varphi(\xi,\eta)]\,\mathrm{e}^{y},\end{aligned} \tag{13}$$

где $\xi = t - y^2, \eta = x + \frac{2}{3}y^3 - ty$, а переменные x, y, t - независимые комплексные переменные (6). Здесь функция $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$ - любое решение уравнения Трикоми с младшим членом:

$$\varphi_{\xi\xi} + \xi\varphi_{\eta\eta} - \varphi_\eta = 0, \tag{14}$$

а функция $\psi = \psi(\xi, \eta)$ определяется из вполне интегрируемой системы

$$\begin{aligned} \psi_\xi &= \varphi - \xi\varphi_\eta, \\ \psi_\eta &= \varphi_\xi \end{aligned} \tag{15}$$

Постановка задачи состоит в следующем:

1) Найти любое нетривиальное решение, которое удовлетворяет уравнению (10) и системе уравнений (11);
2) Применить формулу (4) для найденного решения уравнения (10) и системы (11), получая решение уравнений Ламе (1).
3) Применить формулу (4) к известному решению уравнения (14) и системы (15), если решение имеет вид:

$$\varphi(\xi, \eta) = \eta + \frac{\xi^2}{2} + C_1, \tag{16}$$

$$\psi(\xi, \eta) = \eta\xi + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2} + C_1\xi + C_2, \tag{17}$$

где $C_1 = const, C_2 = const$

1.3. Инвариантные решения

Построим инвариантные решения уравнений (10), (11) для однопараметрических подгрупп Ли, допускаемых уравнением (10) с операторами:

$$X_1 = \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + 2\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi} - \xi\frac{\partial}{\partial\xi} - 2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}$$

Вычислим инварианты подгруппы с операторами $\langle X_1, X_2 \rangle$

1) Найдём инварианты подгруппы с оператором X_1:

$$X_1 = \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + 2\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Инвариантное относительно подгруппы с оператором X_1 решение построим с помощью инвариантов. Для этого запишем характеристическую систему уравнения $X_1 I = 0$:

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\eta}{2\eta} = \frac{d\varphi}{\varphi}$$

Инварианты находим как решение данной характеристической системы:

$$I^1 = \frac{\eta}{\xi^2}, I^2 = \frac{\varphi}{\xi}$$

Представление инвариантного решения имеет вид:

$$\varphi = \xi\Phi(I^1), \tag{18}$$

где $\Phi(I^1)$- произвольная гладкая функция своего аргумента

Подстановка выражения (18) в уравнение (10) даёт уравнение для поиска функции φ:

$$\Phi'' + (\frac{2p+1-\alpha}{4p^2})\Phi' = 0, p = \frac{\eta}{\xi^2}, \Phi = \Phi(p)$$

и применяя обозначение:

$$erf(s)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-t^2}dt$$

Находим отсюда:

$$\varphi(\xi,\eta)=C_2\xi(2\sqrt{\frac{\eta}{\xi^2}}\,\mathrm{e}^{\frac{(1-\alpha)\xi^2}{4\eta}}-\frac{\sqrt{\pi}(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha-1}}erf(\frac{\xi\sqrt{\alpha-1}}{2\sqrt{\eta}}))+C_1\xi \qquad (19)$$

После подстановки решения (19) в систему уравнений (11), из которой (вполне интегрируемой системы) находим функцию ψ:

$$\psi(\xi,\eta)=-\frac{C_2\xi^2\sqrt{\pi(\alpha-1)^3}}{2}+\{\frac{C_2\xi^2\sqrt{\pi}\sqrt{(\alpha-1)^3}}{4}+\frac{C_2\eta\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha-1}}{2}\}erf(\frac{\xi\sqrt{\alpha-1}}{2\sqrt{\eta}})+$$

$$+C_2\xi\sqrt{\eta}(\alpha-1)\mathrm{e}^{-\frac{(\alpha-1)\xi^2}{4\eta}}+\frac{C_2\xi^2\sqrt{\pi(\alpha-1)^5}}{2}+\frac{C_1\xi^2(\alpha-1)}{2}+C_1\eta+C_3$$

2) Найдём инварианты подгруппы с оператором X_2:

$$\mathrm{X}_2=\frac{\partial}{\partial\varphi}-\xi\frac{\partial}{\partial\xi}-2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}$$

Запишем характеристическую систему уравнения $X_2 I=0$:

$$\frac{d\varphi}{1}=-\frac{d\xi}{\xi}=-\frac{d\eta}{2\eta}$$

Инварианты находим как решение данной характеристической системы:

$$I^1=\varphi+\ln(\xi), I^2=\frac{\eta}{\xi^2}$$

Представление инвариантного решения имеет вид:

$\varphi=\Phi(I^2)-\ln(\xi)$,где $\Phi(I^2)$ - произвольная гладкая функция своего аргумента

Уравнение (10) даёт уравнение для поиска функции:

$$\Phi''+\frac{1}{4}(\frac{6p-\alpha}{p^2})\Phi'+\frac{1}{4p^2}=0, p=\frac{\eta}{\xi^2}, \Phi=\Phi(p)$$

Выполнив замену:

$Z=\Phi', Z'=\Phi''$

Получим уравнение:

$$Z' + \frac{1}{4}(\frac{6p-\alpha}{p^2})Z = -\frac{1}{4p^2}$$

применим обозначения:

$$erf(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-t^2}dt\,,\ Ei(n,s) = \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t^n}dt$$

Решая последнее уравнение методом Бернулли, находим:

$$\Phi = -\frac{1}{2}\ln(p) + \frac{\sqrt{\pi}\alpha}{4\sqrt{-\alpha}}\int \frac{1}{\sqrt[2]{p^3}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4p}} erf(\frac{\sqrt{-\alpha}}{2\sqrt{p}})dp - \frac{2\sqrt{\pi}C_2}{\sqrt{\alpha}} erf(\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{p}}) + C_1$$

Таким образом:

$$\varphi(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}Ei(1,\frac{\alpha\xi^2}{4\eta}) - \frac{2\sqrt{\pi}C_2}{\sqrt{\alpha}} erf(\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{2\sqrt{\eta}}) - \ln(\xi) + C_1$$

После подстановки решения φ в систему (11), имеем вполне интегрируемую систему для поиска функции ψ ,из которой следует:

$$\psi(\xi,\eta) = [C_2\frac{\alpha^2\xi^4}{4} - \frac{\alpha\xi}{4} + \frac{\alpha\xi}{2\sqrt{\eta}}]Ei(1,\frac{\alpha\xi^2}{4\eta}) + \sqrt{\alpha}\sqrt{\pi}[1-\sqrt{\eta} + \frac{\alpha^2}{12}\xi^4 + \frac{2}{3}C_2\alpha\xi^3]erf(\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{2\sqrt{\eta}}) -$$

$$-\alpha(\xi\ln(\xi) - \xi) + \alpha C_1\xi + \xi - \frac{\eta}{\xi} + \{\eta[\frac{1}{\xi} - C_2\alpha\xi^2] + \frac{\sqrt{\eta}}{3}[4C_2\alpha\xi^2 + \frac{\alpha^2\xi^3}{2}] +$$

$$+\frac{\sqrt{\eta^3}}{3}[8C_2 - \alpha\xi]\}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\xi^2}{4\eta}} + C_3$$

Глава 2. Решение разрешающей системы

2.1. Первое решение разрешающей системы

Переходя к построению решений уравнений (10) и (11), выпишем найденные ранее решения:

$$\varphi(\xi,\eta) = C_2\xi(2\sqrt{\frac{\eta}{\xi^2}}e^{\frac{(1-\alpha)\xi^2}{4\eta}} - \frac{\sqrt{\pi}(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha-1}}erf(\frac{\xi\sqrt{\alpha-1}}{2\sqrt{\eta}})) + C_1\xi$$

$$\psi(\xi,\eta) = -\frac{C_2\xi^2\sqrt{\pi(\alpha-1)^3}}{2} + \{\frac{C_2\xi^2\sqrt{\pi}\sqrt{(\alpha-1)^3}}{4} + \frac{C_2\eta\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha-1}\}}{2}erf(\frac{\xi\sqrt{\alpha-1}}{2\sqrt{\eta}}) +$$

$$+C_2\xi\sqrt{\eta}(\alpha-1)\mathrm{e}^{-\frac{(\alpha-1)\xi^2}{4\eta}} + \frac{C_2\xi^2\sqrt{\pi(\alpha-1)^5}}{2} + \frac{C_1\xi^2(\alpha-1)}{2} + C_1\eta + C_3$$

Подстановка найденных ранее решений в формулы (13) дают выражения:

$$u(t,x,y) = \{iC_2Bt\sqrt{\pi}erf(i\frac{Bt}{\sqrt{x}}) + C_1t + 2C_2\sqrt{x}e^{\frac{B^2t^2}{x}}\}e^{-Ay},$$

$$v(t,x,y) = \{i\sqrt{\pi}C_2\{Bx + 2B^2t^2\}erf(i\frac{Bt}{\sqrt{x}}) - \tilde{C}At\sqrt{x}e^{\frac{B^2t^2}{x}} +$$

$$+i16C_2B^5t^2\sqrt{\pi} - 2C_1B^2t^2 - i4C_2B^3t^2\sqrt{\pi} + C_1x\}e^{-Ay} + C_3e^{Ey},$$

где $A = 1-\alpha, B = \frac{\sqrt{A}}{2}, E = \alpha + 1$

Учитывая введённые комплексные переменные (6) , находим:

$$v(x_1,x_2,x_3) = e^{A_0x_1}\{\sqrt{\pi}C_2\{\frac{A_2}{2}(ix_1 - x_2) + iA_0x_3^2\}erf(R_2 + iR_1) - C_2A_0x_3e^{\Omega_1}(r_1 + ir_2)\times$$

$$\times[\cos\Omega_2 - i\sin\Omega_2] + i16C_2A_2^5x_3^2\sqrt{\pi} - C_1A_0x_3^2 - i4C_2A_2^3x_3^2\sqrt{\pi} + C_1(x_1 + ix_2)\}\times$$

$$\times[\cos(A_0x_2) - i\sin(A_0x_2)] + C_3e^{-A_1x_1}[\cos(A_1x_2) + i\sin(A_1x_2)],$$

$$u(x_1,x_2,x_3) = e^{A_0x_1}\{iC_2A_2x_3\sqrt{\pi}erf(R_2 + iR_1) + C_1x_3 + C_2e^{\Omega_1}(r_1 + ir_2)\times$$

$$\times\{\cos\Omega_2 - i\sin\Omega_2\}\}\{\cos(A_0x_2) - i\sin(A_0x_2)\},$$

где

$$A_0 = \frac{1-\alpha}{2}; A_1 = \frac{\alpha+1}{2}; A_2 = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2}; \Omega_1 = \frac{A_0 x_1 x_3^2}{r_3}; \Omega_2 = \frac{A_0 x_2 x_3^2}{r_3}; R_1 = \frac{A_2 r_1 x_3}{\sqrt{r_3}}; R_2 = \frac{A_2 r_2 x_3}{\sqrt{r_3}}$$

$$r_1 = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1}, r_2 = sgn(x_2)\sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1}, r_3 = x_1^2 + x_2^2$$

Выделив мнимые и действительные части в полученных выражениях, находим компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ и скалярную функцию θ:

$$\theta = \mathrm{Re}[u(x_1, x_2, x_3)] = e^{A_0 x_1}\{C_1 x_3 \cos A_0 x_2 + C_2\{r_1 \cos(A_0 x_2 + \Omega_2) +$$

$$+ r_2 \sin(\Omega_2 + A_0 x_2)\}e^{\Omega_1} + \frac{C_2\sqrt{\pi}A_2 x_3}{2}\{erf(R_2 - iR_1)\ \ \sin(A_0 x_2) - \cos(A_0 x_2)\ \ +$$

$$+ erf(R_2 + iR_1)\ \ \cos(A_0 x_2) + \sin(A_0 x_2)\ \ \}\}$$

$$\omega^1 = \mathrm{Re}[v(x_1, x_2, x_3)] = e^{A_0 x_1}\{[C_1 x_1 - C_1 A_0 x_3^2]\cos A_0 x_2 - C_2 A_0 x_3 e^{\Omega_1}\{r_1 \cos(\Omega_2 + A_0 x_2) +$$

$$+ r_2 \sin(\Omega_2 + A_0 x_2)\} + C_1 x_2 \sin A_0 x_2 - 4C_2 A_2^3 x_3^2 \sqrt{\pi} \sin A_0 x_2 + 16 C_2 A_2^5 x_3^2 \sqrt{\pi} \sin A_0 x_2 +$$

$$+ \sqrt{\pi} C_2\{\frac{A_2 x_1}{4}\cos A_0 x_2 + A_2^2 x_3^2 \cos A_0 x_2 + \frac{A_2 x_2}{4}\sin A_0 x_2\}[erf(R_2 + iR_1) - erf(R_2 - iR_1)] +$$

$$+ \{\frac{\sqrt{\pi}C_2 A_2}{4} x_1 \sin A_0 x_2 + \sqrt{\pi} C_2 A_2^2 x_3^2 \sin A_0 x_2 - \frac{A_2\sqrt{\pi}C_2}{4} x_2 \cos A_0 x_2\}[erf(R_2 + iR_1) +$$

$$+ erf(R_2 - iR_1)]\}\} + C_3 e^{-A_1 x_1}\cos A_1 x_2$$

$$\omega^2 = \operatorname{Im}[v(x_1,x_2,x_3)] = e^{A_0x_1}\{C_1x_2\cos A_0x_2 - 4C_2A_2^3x_3^2\sqrt{\pi}\cos A_0x_2 +$$

$$+16C_2A_2^5x_3^2\sqrt{\pi}\cos A_0x_2 - C_2A_0te^{\Omega_1}\{r_2\cos(\Omega_2 + A_0x_2) - r_1\sin(\Omega_2 + A_0x_2)\} -$$

$$-C_1x_1\sin A_0x_2 + C_1A_0x_3^2\sin(A_0x_2) + \{\sqrt{\pi}C_2A_2^2x_3^2 + \frac{A_2\sqrt{\pi}C_2}{4}x_1\}\cos(A_0x_2)\times$$

$$\times\{erf(R_2+iR_1) + erf(R_2-iR_1)\} + \{erf(R_2-iR_1) - erf(R_2+iR_1)\}[\sqrt{\pi}C_2A_2^2x_3^2\sin A_0x_2 +$$

$$+\frac{A_2x_2}{4}\cos A_0x_2] + \frac{\sqrt{\pi}A_2C_2}{4}\sin(A_0x_2)[(x_2-x_1)erf(R_2+iR_1) + (x_1+x_2)erf(R_2-iR_1)]\}\} +$$

$$+C_3e^{-A_1x_1}\sin A_1x_2$$

$$\omega^3 = \operatorname{Im}[u(x_1,x_2,x_3)] = e^{A_0x_1}\{-C_1x_3\sin A_0x_2 + C_2e^{\Omega_1}\{r_2\cos(\Omega_2 + A_0x_2) -$$

$$-r_1\sin(\Omega_2 + A_0x_2)\} - \frac{C_2\sqrt{\pi}A_2x_3}{2}[erf(R_2+iR_1)[\sin(A_0x_2) - \cos(A_0x_2)] -$$

$$-erf(R_2-iR_1)[\cos A_0x_2 + \sin A_0x_2]]\}$$

Подстановка θ и $\boldsymbol{\omega}$ в формулу (4) при $n=3$ позволяет получить вектор перемещений для уравнений Ламе (1)

2.2. Второе решение разрешающей системы

Переходя к построению решений уравнений (10) и (11), выпишем найденные ранее выражения:

$$\varphi(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}Ei(1,\frac{\alpha\xi^2}{4\eta}) - \frac{2\sqrt{\pi}C_2}{\sqrt{\alpha}}erf(\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{2\sqrt{\eta}}) - \ln(\xi) + C_1$$

$$\psi(\xi,\eta) = [C_2\frac{\alpha^2\xi^4}{4} - \frac{\alpha\xi}{4} + \frac{\alpha\xi}{2\sqrt{\eta}}]Ei(1,\frac{\alpha\xi^2}{4\eta}) + \sqrt{\alpha}\sqrt{\pi}[1 - \sqrt{\eta} + \frac{\alpha^2}{12}\xi^4 +$$

$$+\frac{2}{3}C_2\alpha\xi^3]erf(\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{2\sqrt{\eta}}) - \alpha(\xi\ln(\xi) - \xi) +$$

$$+\alpha C_1\xi + \xi - \frac{\eta}{\xi} + \{\eta[\frac{1}{\xi} - C_2\alpha\xi^2] + \frac{\sqrt{\eta}}{3}[4C_2\alpha\xi^2 + \frac{\alpha^2\xi^3}{2}] +$$

$$+\frac{\sqrt{\eta^3}}{3}[8C_2 - \alpha\xi]\}\exp(-\frac{\alpha\xi^2}{4\eta}) + C_3$$

Подстановка найденных ранее решений в формулы (13) дают выражения:

$$u(t,x,y) = (-\frac{1}{2}Ei(1,\frac{\alpha t^2}{4x}) - \frac{2\sqrt{\pi}C_2}{\sqrt{\alpha}}erf(\frac{\sqrt{\alpha}t}{2\sqrt{x}}) - \ln t + y + C_1)e^{\alpha y}$$

$$v(t,x,y) = [C_2\frac{\alpha^2t^4e^{(\alpha-3)y}}{4} - \frac{\alpha t}{4}e^{\alpha y} + \frac{\alpha t}{2\sqrt{x}}e^{(\alpha+1)y}]Ei(1,\frac{\alpha t^2}{4x}) +$$

$$+\sqrt{\alpha}\sqrt{\pi}[e^{(\alpha+1)y} - \sqrt{x}e^{\alpha y} + \frac{\alpha^2}{12}t^4e^{(\alpha-3)y} + \frac{2}{3}C_2\alpha t^3e^{(\alpha-2)y}]erf(\frac{\sqrt{\alpha}t}{2\sqrt{x}}) +$$

$$+(\alpha ty - \alpha t\ln(t) + \alpha t - \frac{x}{t} + \alpha C_1t + t)e^{\alpha y} + \{\frac{x}{t}e^{\alpha y} + e^{(\alpha-3)y}[\frac{\sqrt{x}}{3}\frac{\alpha^2t^3}{2} - C_2x\alpha t^2 -$$

$$-\alpha t\frac{\sqrt{x^3}}{3}] + [4\frac{\sqrt{x}}{3}C_2\alpha t^2 + 8\frac{\sqrt{x^3}}{3}C_2]e^{(\alpha-2)y}\}e^{-\frac{\alpha t^2}{4x}} + C_3e^{(\alpha+1)y}$$

Выделив мнимые и действительные части в выше представленных выражениях, находим компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ и скалярную функцию θ:

$$\theta = \operatorname{Re}[u(x_1, x_2, x_3)] = (-\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-R_1 z}}{z}\cos(R_2 z)dz - \frac{2\sqrt{\pi}C_2}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{Re}[erf(\frac{\sqrt{\alpha}x_3}{2}\frac{r_1 - ir_2}{r_3})] - \ln x_3 -$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + C_1)\cos A_0 x_2 + (\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-R_1 z}}{z}\sin(R_2 z)dz - i\frac{2\sqrt{\pi}C_2}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{Im}\{erf(\frac{\sqrt{\alpha}x_3}{2}\frac{r_1 - ir_2}{r_3})\})\sin A_0 x_2$$

$$\omega^3 = \operatorname{Im}[u(x_1, x_2, x_3)] = (-\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-R_1 z}}{z}\sin(R_2 z)dz - \frac{2\sqrt{\pi}C_2}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{Im}\{erf(\frac{\sqrt{\alpha}x_3}{2}\frac{r_1 - ir_2}{r_3})\} +$$

$$+\frac{x_2}{2})P_1^0(-x_1, x_2) + (-\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-R_1 z}}{z}\cos(R_2 z)dz - \frac{2\sqrt{\pi}C_2}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{Re}\{erf(\frac{\sqrt{\alpha}x_3}{2}\frac{r_1 - ir_2}{r_3})\} -$$

$$-\ln x_3 - \frac{x_1}{2} + C_1)P_2^0(-x_1, x_2)$$

$$
\begin{aligned}
\omega^2 &= \mathrm{Re}[v(x_1,x_2,x_3)] = [C_2A_0^2x_3^4P_1^3(-x_1;x_2) - \frac{A_0x_3}{2}P_1^0(-x_1;x_2) + \frac{\alpha r_1 x_3}{2r_3}P_1^1(-x_1;x_2) + \\
&+\frac{\alpha r_2 x_3}{2r_3}P_2^1(-x_1;x_2)]\int_1^\infty \frac{1}{z}\Lambda_1(-R_1z;R_2z)dz + [\frac{A_0x_3}{2}P_2^0(-x_1;x_2) - \\
&-C_2A_0^2x_3^4P_2^3(-x_1;x_2) + \frac{A_0x_3r_2}{r_3}P_1^1(-x_1;x_2) - \frac{A_0x_3r_1}{r_3}P_2^1(-x_1;x_2)]\int_1^\infty \frac{1}{z}\Lambda_2(-R_1z;R_2z)dz + \\
&+\sqrt{\alpha}\sqrt{\pi}[P_1^1(-x_1;x_2) - \frac{r_1}{2}P_1^0(-x_1;x_2) + \frac{r_2}{2}P_2^0(-x_1;x_2) + \frac{\alpha^2x_3^4}{12}P_1^3(-x_1;x_2) + \\
&+\frac{2}{3}C_2\alpha x_3^3P_1^2(-x_1;x_2)]\mathrm{Re}\{erf(\frac{\sqrt{\alpha}x_3}{2}\frac{r_1-ir_2}{r_3})\} + \sqrt{\alpha}\sqrt{\pi}i[P_2^1(-x_1;x_2) - \frac{r_1}{2}P_2^0(-x_1;x_2) - \\
&-\frac{r_2}{2}P_1^0(-x_1;x_2) + \frac{\alpha^2x_3^4}{12}P_2^3(-x_1;x_2) + \frac{2C_2\alpha x_3^3}{3}P_2^2(-x_1;x_2)]\mathrm{Im}\{erf(\frac{\sqrt{\alpha}x_3}{2}\frac{r_1-ir_2}{r_3})\} + \\
&+(-\frac{\alpha x_3}{2}x_1 - \alpha x_3\ln x_3 + \alpha x_3 - \frac{x_1}{2x_3} + \alpha C_1x_3 + x_3)P_1^0(-x_1;x_2) - (\frac{\alpha x_3}{2} - \frac{1}{2x_3})x_2P_2^0(-x_1;x_2) + \\
&+\{\frac{x_1}{2x_3}P_1^0(-x_1;x_2) - \frac{x_2}{2x_3}P_2^0(-x_1;x_2) - P_2^3(-x_1;x_2)[\frac{\alpha^2x_3^3}{12}r_2 - \frac{C_2\alpha x_3^2}{2}x_2 - \frac{\alpha x_3}{12}(r_1x_2 + r_2x_1)] + \\
&+P_1^3(-x_1;x_2)[\frac{\alpha^2x_3^3}{12}r_1 - \frac{C_2\alpha x_3^2}{2}x_1 - \frac{\alpha x_3}{12}(r_1x_1 - r_2x_2)] + [\frac{2C_2\alpha x_3^2}{3}r_1 + \frac{2C_2}{3}(r_1x_1 - r_2x_2)]\times \\
&\times P_1^2(-x_1;x_2) - [\frac{2}{3}r_2C_2\alpha x_3^2 + \frac{2C_2}{3}(r_1x_2 + r_2x_1)]P_2^2(-x_1;x_2)\}P_1^0(-\frac{x_3^2x_1}{r_3^2};\frac{x_3^2x_2}{r_3^2}) - \\
&-\{\frac{x_1}{2x_3}P_2^0(-x_1;x_2) + \frac{x_2}{2x_3}P_1^0(-x_1;x_2) + P_1^3(-x_1;x_2)[\frac{\alpha^2x_3^3}{12}r_2 - \frac{C_2\alpha x_3^2}{2}x_2 - \\
&-\frac{\alpha x_3}{12}(r_1x_2 + r_2x_1)] + P_2^3(-x_1;x_2)[\frac{\alpha^2x_3^3}{12}r_1 - \frac{C_2\alpha x_3^2}{2}x_1 - \frac{\alpha x_3}{12}(r_1x_1 - r_2x_2)] + \\
&+[\frac{2C_2\alpha x_3^2}{3}r_1 + \frac{2C_2}{3}(x_1r_1 - x_2r_2)]P_2^2(-x_1;x_2) + \\
&+[\frac{2}{3}r_2C_2\alpha x_3^2 + \frac{2C_2}{3}(x_1r_2 + x_2r_1)]P_1^2(-x_1;x_2)\}P_2^0(-\frac{x_3^2x_1}{r_3^2};\frac{x_3^2x_2}{r_3^2}) + C_3P_1^1(-x_1;x_2)
\end{aligned}
$$

$$\omega^1 = \mathrm{Im}[v(x_1,x_2,x_3)] = [\frac{C_2\alpha^2 x_3^4}{4}P_1^3(-x_1;x_2) - \frac{\alpha x_3}{4}P_1^0(-x_1;x_2) + \frac{\alpha x_3}{2r_3}(r_1 P_1^1(-x_1;x_2) +$$

$$+r_2 P_2^1(-x_1;x_2))]\int_1^\infty \frac{1}{z}\Lambda_2(-R_1 z;R_2 z)dz + [C_2\frac{\alpha^2 x_3^4}{4}P_2^3(-x_1;x_2) - \frac{\alpha x_3}{4}P_2^0(-x_1;x_2) +$$

$$+\frac{\alpha x_3 r_1}{2r_3}P_2^1(-x_1;x_2) - \frac{\alpha x_3 r_2}{2r_3}P_1^1(-x_1;x_2)]\int_1^\infty \frac{1}{z}\Lambda_1(-R_1 z;R_2 z)dz + \sqrt{\alpha}\sqrt{\pi}[P_1^1(-x_1;x_2) -$$

$$-\frac{1}{2}(r_1 P_1^0(-x_1;x_2) - r_2 P_2^0(-x_1;x_2)) + \frac{\alpha^2 x_3^4}{12}P_1^3(-x_1;x_2) + \frac{2C_2\alpha x_3^3}{3}P_1^2(-x_1;x_2)]\times$$

$$\times\mathrm{Im}\{erf(\frac{\sqrt{\alpha}x_3}{2}\frac{r_1 - ir_2}{r_3})\} + \sqrt{\alpha}\sqrt{\pi}[P_2^1(-x_1;x_2) - \frac{1}{2}(r_1 P_2^0(-x_1;x_2) + r_2 P_1^0(-x_1;x_2)) +$$

$$+\frac{\alpha^2 x_3^4}{12}P_2^3(-x_1;x_2) + \frac{2C_2\alpha x_3^3}{3}P_2^2(-x_1;x_2)]\mathrm{Re}\{erf(\frac{\sqrt{\alpha}x_3}{2}\frac{r_1 - ir_2}{r_3})\} + (-\frac{\alpha x_3}{2}x_1 - \alpha x_3\ln x_3 +$$

$$+\alpha x_3 - \frac{x_1}{2x_3} + \alpha C_1 x_3 + x_3)P_2^0(-x_1;x_2) + (\frac{\alpha x_3}{2}x_2 - \frac{1}{2x_3}x_2)P_1^0(-x_1;x_2) + \{\frac{1}{2x_3}(x_1 P_1^0(-x_1;x_2) -$$

$$-x_2 P_2^0(-x_1;x_2)) + P_1^3(-x_1;x_2)[\frac{\alpha^2 x_3^3}{12}r_1 - \frac{C_2\alpha x_3^2}{2}x_1 - \frac{\alpha x_3}{12}(r_1 x_1 - r_2 x_2)] +$$

$$+[\frac{2C_2\alpha x_3^2}{3}r_1 + \frac{2C_2}{3}(x_1 r_1 - x_2 r_2)]P_1^2(-x_1;x_2)\}P_2^0(-\frac{x_3^2 x_1}{r_3^2};\frac{x_3^2 x_2}{r_3^2}) + \{\frac{x_1}{2x_3}P_2^0(-x_1;x_2) +$$

$$+\frac{x_2}{2x_3}P_1^0(-x_1;x_2) + P_1^3(-x_1;x_2)[\frac{\alpha^2 x_3^3}{12}r_2 - \frac{C_2\alpha x_3^2}{2}x_2 - \frac{\alpha x_3}{12}(x_2 r_1 + x_1 r_2)] +$$

$$+P_2^3(-x_1;x_2)[x_3^3(\frac{\alpha^2}{12}r_1 - \frac{C_2\alpha}{2}x_1) - \frac{\alpha x_3}{12}(x_1 r_1 - x_2 r_2)] + [\frac{2C_2\alpha x_3^2}{3}r_1 +$$

$$+\frac{2C_2}{3}(r_1 x_1 - r_2 x_2)]P_2^2(-x_1;x_2) + [\frac{2C_2\alpha x_3^2}{3}r_2 + \frac{2C_2}{3}(r_1 x_2 + x_1 r_2)]P_1^2(-x_1;x_2)\}\times$$

$$\times P_1^0(-\frac{x_3^2 x_1}{r_3^2};\frac{x_3^2 x_2}{r_3^2}) + C_3 P_2^1(-x_1;x_2)$$

$$A_3 = \frac{\alpha - 3}{2}; A_1 = \frac{\alpha + 1}{2}; A_2 = \frac{\alpha - 2}{2}; A_0 = \frac{\alpha}{2}; R_1 = \frac{\alpha x_3^2 x_1}{2r_3^2}; R_2 = \frac{\alpha x_3^2 x_2}{2r_3^2}$$

$$L(x) = e^x; T_1(x) = \cos x; T_2(x) = \sin x;$$

$$\Lambda_1(x;y) = L(x)T_1(y) = e^x\cos y; \Lambda_2(x;y) = L(x)T_2(y) = e^x\sin y$$

$$P_i^j(x,y) = \Lambda_i(A^j x, A^j y), i = 1,2,3;\ j = 1,2,3$$

$$r_1 = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1}, r_2 = sgn(x_2)\sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1}, r_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Подстановка θ и $\boldsymbol{\omega}$ в формулу (4) при $n=3$ позволяет получить вектор перемещений для уравнений Ламе (1).

2.3. Инвариантное решение для уравнения Трикоми с младшим членом

Подстановка частных инвариантных решений (16) и (17) в формулы (13) даёт выражения:

$$u(t,x,y)=(x+\frac{2}{3}y^3-ty+\frac{(t-y^2)^2}{2}+C_1)e^y$$

$$v(t,x,y)=[(x+\frac{2}{3}y^3-ty)(t-y^2)+\frac{(t-y^2)^3}{6}-\frac{(t-y^2)^2}{2}+$$

$$+C_1(t-y^2)+C_2-y(x+\frac{2}{3}y^3-ty+\frac{(t-y^2)^2}{2}+C_1)]e^y$$

Выделив мнимые и действительные части в выше представленных выражениях, находим компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ и скалярную функцию θ:

$$\theta=\mathrm{Re}[u(x_1,x_2,x_3)]=\{\frac{x_1}{2}-\frac{x_1^3}{12}+\frac{x_1x_2^2}{4}+\frac{x_1x_3}{2}+\frac{x_3^2}{2}-\frac{x_1^2x_3}{4}+\frac{x_3x_2^2}{4}+\frac{x_1^4}{32}-$$

$$-\frac{3x_1^2x_2^2}{16}+\frac{x_2^4}{32}+C_1\}\Lambda_1-\{\frac{x_2}{2}+\frac{x_1^2x_2}{4}-\frac{x_2^3}{12}-\frac{x_2x_3}{2}+\frac{x_1x_2x_3}{2}-\frac{x_1^3x_2}{8}+\frac{x_1x_2^3}{8}\}\Lambda_2$$

$$\omega^3=\mathrm{Im}[u(x_1,x_2,x_3)]=\{\frac{x_1}{2}-\frac{x_1^3}{12}+\frac{x_1x_2^2}{4}+\frac{x_1x_3}{2}+\frac{x_3^2}{2}-\frac{x_1^2x_3}{4}+\frac{x_2^2x_3}{4}+\frac{x_1^4}{32}-$$

$$-\frac{3x_1^2x_2^2}{16}+\frac{x_2^4}{32}+C_1\}\Lambda_2+\{\frac{x_2}{2}+\frac{x_1^2x_2}{4}-\frac{x_2^3}{12}-\frac{x_2x_3}{2}+\frac{x_1x_2x_3}{2}-\frac{x_1^3x_2}{8}+\frac{x_1x_2^3}{8}\}\Lambda_1$$

где

$$\Lambda_1=e^{-\frac{1}{2}x_1}\cos\frac{x_2}{2}$$

$$\Lambda_2=e^{-\frac{1}{2}x_1}\sin\frac{x_2}{2}$$

$$\omega^1=\mathrm{Im}[v(x_1,x_2,x_3)]=[\frac{x_2x_3}{2}-\frac{x_1x_2^5x_3}{4}+\frac{x_1^3x_2^3x_3}{12}-\frac{x_2x_3^2}{2}+\frac{x_2^3}{8}+\frac{x_1^2x_2}{8}-\frac{x_2^5}{48}+\frac{5x_1^2x_2^3}{24}-$$

$$-\frac{5x_1^4x_2}{48}-\frac{x_2^3x_3}{8}+\frac{3x_1^2x_2x_3}{8}+\frac{x_1x_2x_3^2}{4}+\frac{x_1x_2^3x_3}{8}-\frac{x_1^3x_2x_3}{8}+\frac{x_1x_2^5}{64}-\frac{5x_1^3x_2^3}{96}+\frac{x_1^5x_2}{64}-$$

$$-x_1x_2x_3-\frac{x_1x_2^3}{8}+\frac{x_1^3x_2}{8}+C_1\frac{x_1x_2}{2}-\frac{x_1x_2^3}{6}+\frac{x_1^3x_2}{6}-\frac{x_2x_3^2}{4}-\frac{x_2^3x_3}{8}+\frac{3x_1^2x_2x_3}{8}-\frac{x_2^5}{64}+$$

$$+\frac{5x_1^2x_2^3}{32}-\frac{5x_1^4x_2}{64}-C_1\frac{x_2}{2}]\Lambda_1+[\frac{x_1x_3}{2}-\frac{x_2^6x_3}{12}+\frac{x_1^2x_2^4x_3}{4}-\frac{x_1x_3^2}{2}-\frac{x_1x_2^2}{8}-\frac{x_1^3}{8}+\frac{5x_1x_2^4}{48}-$$

$$-\frac{5x_1^3x_2^2}{24}+\frac{x_1^5}{48}+\frac{3x_1x_2^2x_3}{8}-\frac{x_1^3x_3}{8}+\frac{x_3^3}{6}+\frac{x_2^2x_3^2}{8}-\frac{x_1^2x_3^2}{8}+\frac{x_2^4x_3}{32}-\frac{3x_1^2x_2^2x_3}{16}+\frac{x_1^4x_3}{32}+$$

$$+\frac{x_2^6}{384}-\frac{15x_1^2x_2^4}{384}+\frac{15x_1^4x_2^2}{384}-\frac{x_1^6}{384}-\frac{x_3^2}{2}-\frac{x_2^2x_3}{4}+\frac{x_1^2x_3}{4}-\frac{x_2^4}{32}+\frac{3x_1^2x_2^2}{16}-\frac{x_1^4}{32}+$$

$$+C_1(x_3+\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4})+C_2+\frac{x_2^2}{4}+\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^4}{24}+\frac{x_1^2x_2^2}{4}-\frac{x_1^4}{24}-\frac{x_2^2x_3}{4}+\frac{x_1^2x_3}{4}+\frac{x_1x_3^2}{4}+$$

$$+\frac{3x_1x_2^2x_3}{8}-\frac{x_1^3x_3}{8}+\frac{5x_1x_2^4}{64}-\frac{5x_1^3x_2^2}{32}+\frac{x_1^5}{64}+\frac{C_1}{2}x_1]\Lambda_2$$

$$\omega^2=\mathrm{Re}[v(x_1,x_2,x_3)]=[\frac{x_1x_3}{2}-\frac{x_2^6x_3}{12}+\frac{x_1^2x_2^4x_3}{4}-\frac{x_1x_3^2}{2}-\frac{x_1x_2^2}{8}-\frac{x_1^3}{8}+\frac{5x_1x_2^4}{48}-\frac{5x_1^3x_2^2}{24}+$$

$$+\frac{x_1^5}{48}+\frac{3x_1x_2^2x_3}{8}-\frac{x_1^3x_3}{8}+\frac{x_3^3}{6}+\frac{x_2^2x_3^2}{8}-\frac{x_1^2x_3^2}{8}+\frac{x_2^4x_3}{32}-\frac{3x_1^2x_2^2x_3}{16}+\frac{x_1^4x_3}{32}+\frac{x_2^6}{384}-$$

$$-\frac{15x_1^2x_2^4}{384}+\frac{15x_1^4x_2^2}{384}-\frac{x_1^6}{384}-\frac{x_3^2}{2}-\frac{x_2^2x_3}{4}+\frac{x_1^2x_3}{4}-\frac{x_2^4}{32}+\frac{3x_1^2x_2^2}{16}-\frac{x_1^4}{32}+C_1(x_3+\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4})+$$

$$+C_2+\frac{x_2^2}{4}+\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^4}{24}+\frac{x_1^2x_2^2}{4}-\frac{x_1^4}{24}-\frac{x_2^2x_3}{4}+\frac{x_1^2x_3}{4}+\frac{x_1x_3^2}{4}+\frac{3x_1x_2^2x_3}{8}-\frac{x_1^3x_3}{8}+\frac{5x_1x_2^4}{64}-$$

$$-\frac{5x_1^3x_2^2}{32}+\frac{x_1^5}{64}+\frac{C_1}{2}x_1]\Lambda_1-[\frac{x_2x_3}{2}-\frac{x_1x_2^5x_3}{4}+\frac{x_1^3x_2^3x_3}{12}-\frac{x_2x_3^2}{2}+\frac{x_2^3}{8}+\frac{x_1^2x_2}{8}-\frac{x_2^5}{48}+$$

$$+\frac{5x_1^2x_2^3}{24}-\frac{5x_1^4x_2}{48}-\frac{x_2^3x_3}{8}+\frac{3x_1^2x_2x_3}{8}+\frac{x_1x_2x_3^2}{4}+\frac{x_1x_2^3x_3}{8}-\frac{x_1^3x_2x_3}{8}+\frac{x_1x_2^5}{64}-\frac{5x_1^3x_2^3}{96}+$$

$$+\frac{x_1^5x_2}{64}-\frac{x_1x_2x_3}{2}-\frac{x_1x_2^3}{8}+\frac{x_1^3x_2}{8}+C_1\frac{x_1x_2}{2}-\frac{x_1x_2^3}{6}+\frac{x_1^3x_2}{6}-\frac{x_1x_2x_3}{2}-\frac{x_2x_3^2}{4}-\frac{x_2^3x_3}{8}+$$

$$+\frac{3x_1^2x_2x_3}{8}-\frac{x_2^5}{64}+\frac{5x_1^2x_2^3}{32}-\frac{5x_1^4x_2}{64}-C_1\frac{x_2}{2}]\Lambda_2$$

Подстановка θ и $\boldsymbol{\omega}$ в формулу (4) при $n=3$ позволяет получить вектор перемещений для уравнений Ламе (1).

2.4. Восстановление вектора перемещений для уравнения Трикоми с младшим членом

Ранее (п. 2.3) были получены: скалярная функция θ, характеризующая объёмную деформацию и компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$, характеризующие изменение формы упругих элементов для уравнения Трикоми с младшим членом. На основе полученных данных и приведённой в работе формулы из монографии Чиркунова Ю.А. (4)[2], которая для двумерного пространства является известной формулой Колосова – Мусхелишвили найдём компоненты вектора перемещений. Они имеют следующий вид:

$$u^1 = A^1 + x_1(\Phi^1(\boldsymbol{x}) + \Phi^2(\boldsymbol{x}) + G_1(\boldsymbol{x}) + G_2(\boldsymbol{x}) + G_3(\boldsymbol{x})) + |\boldsymbol{x}|^2 (D_1^1 + D_2^1 + D_3^1) + I + I^1$$

$$u^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + x_2(\Phi^1(\boldsymbol{x}) + \Phi^2(\boldsymbol{x}) + G_1(\boldsymbol{x}) + G_2(\boldsymbol{x}) + G_3(\boldsymbol{x})) + |\boldsymbol{x}|^2 D^2 + I + I^2$$

$$u^3 = A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + x_3(\Phi^1(\boldsymbol{x}) + \Phi^2(\boldsymbol{x})) + |\boldsymbol{x}|^2 D^3 + I + I^3$$

где

$$
\begin{aligned}
&A^1 = -1440Zx_1^4x_2^4x_3 + 352(x_1^2x_2^8K_1 + x_1^7x_2^3K_2) + 504x_1^5x_2^5K_2 + (76x_2^9\left\{x_1 + x_3^2\right\} + 222x_1^6x_2^5 + \\
&+218x_1^4x_2^7 + 107x_1^2x_2^9 + 23x_1^{10}x_2 + 113x_1^8x_2^3 + 92x_1^9x_2)K_2 + 316x_1^9x_3K_1 + 632x_1^8x_3Z - \\
&-172x_2^9x_3K_2 - 608x_2^7x_3^2K_2 - \frac{8}{3}x_3^4M^8K_1 + (3040x_1^4x_2^3x_3^2 - 460x_1^8x_2x_3 + 184x_1^8x_2)K_2 + \\
&+(28x_1x_2^8x_3 + 1032x_1^5x_2^4x_3 + 552x_1^4x_2^6)K_1 + 168(10x_1x_2^6x_3^2Z - x_2^9K_2) + 84x_2^{10}K_1 + 21x_2^{11}K_2 + \\
&+976x_1^2x_2^2x_3(x_1^5K_1 - x_2^5K_2) - 96C_1x_1^3x_2^3x_3N^2K_2 + 1896x_1^3x_2^5x_3K_2\left\{x_3 - x_1\right\} + \\
&+K_1\{10C_1x_1^2x_2^2x_3N^6 + 100x_1^8x_2^2 + 10x_1^6x_2^6x_3 + 10x_1^4x_2^4x_3^3N^2 + x_3^3N^{10}\} + \\
&+\frac{1}{2}([10C_1x_1^4x_2^4x_3N^2 + C_1x_3N^{10}]T + 10x_1^2x_2^2x_3^3N^6K_1) + 1552(-x_1^2x_2^6x_3Z_1 - \left\{x_2^2 + x_1\right\}x_1^6x_2x_3K_2) + \\
&+128(10x_1^3x_2^2x_3^4Z - x_1^5x_3^4Z + K_2\left\{x_2^5x_3^4 - 10x_1^2x_2^3x_3^4\right\}) + 320(K_2(x_1^3 + x_2^4)x_1^3x_2^3 + x_1^2x_2^2x_3^4N^2K_1) + \\
&+384x_1^2x_2^4[x_1^4K_1 - x_2^3K_2] + 32(C_1x_1^2x_2^2x_3[x_1K_1 - x_2K_2]N^4 - C_1x_1x_2x_3N^6K_2 + x_1^2x_2^5x_3^2K_2 + \\
&+C_1x_1^2x_2^2x_3M^4Z) + \frac{41}{24}x_1^{12}x_3K_1 - 94[4x_1^8x_3^2 + x_1^9x_3^2]K_1 - \frac{17}{24}x_2^{12}x_3K_1 + 9x_1x_3^3N^8K_1 + \\
&+[x_3N^{10} + 10x_1^4x_2^4x_3N^2][\frac{79}{6}K_1x_1 + \frac{43}{6}K_2x_2] + \\
&+\frac{1}{3}(x_2x_3^4N^8K_2 - K_1\left\{x_1^2x_2^2x_3^2M^{10} + x_1x_3^4N^8\right\}) - 9x_2x_3^3N^8K_2 + \\
&+2(10C_1x_1^4x_2^4x_3N^2K_1 + C_1x_3N^{10}K_1 + x_1^4x_2^4x_3^4[x_2K_2 - x_1K_1] + \\
&+N^8[C_1x_2\{x_3^2 + x_1\}K_2 + C_2x_2x_3K_2 - x_1[C_1x_3^2K_1 + C_2x_3K_1] + x_2^2[C_1 + x_1]K_1]) + \\
&+24(K_2\left\{C_2x_1^3x_2^3x_3N^2\right\} + (C_1x_1^3x_2^6 + C_1x_1^5x_2^4)Z + 100x_1^6x_2x_3^2K_2) + \frac{T}{4}(10C_1x_1^2x_2^2x_3N^6 + \\
&+x_3^3N^{10} + 10x_1^4x_2^4x_3^3N^2) + 8(K_1[C_1x_1x_3N^8 + x_1^7x_2^4 + x_1^3x_2^8 - C_1x_3^2M^8 + C_1x_1^6x_2^4 + C_1x_1^2x_2^8 + \\
&+10x_1^3x_2^4x_3^4] + 10x_1^4x_2x_3^4K_2 + 10x_1x_2^4x_3^4 + K_2\{10C_1x_1^4x_2^3x_3^2 - C_1x_1^8x_2x_3 + C_2x_1x_2x_3N^6 - \\
&-10x_1^4x_2^5 + 10x_1^4x_2^3x_3^4 + C_1x_2^3[x_1^7 + x_1^6] + C_1x_1^3x_2^7 - C_1x_2^9x_3 - C_1x_1^2x_2^7\} + \\
&+[10C_1x_1^3x_2^4x_3^2 - C_2x_1^2x_2^2x_3M^4 + C_1x_1x_2^2N^6]Z) + N^4(\{8C_1x_1^2x_2^2x_3^2 + \\
&+8C_2x_1^2x_2^2x_3\}[x_2K_2 - x_1K_1]) + 64(\left\{-x_3^4N^6K_1 - 10x_1x_2^4x_3^4K_1\right\} + \\
&+\frac{11}{6}(K_2\left\{-10x_1^4x_2^5x_3^2N^2 - x_2x_3^2N^{10} + 10x_1^3x_2^3N^6 + x_1^{10}x_2^3 - x_1^2x_2^{11}\right\} + \\
&+K_1\{-x_1^2x_2^{10}x_3 - x_1x_3^2N^{10} - 10x_1^5x_2^4x_3^2N^2 - 10x_1^2x_2^4N^6\}) + x_1^5x_2^6K_1 + \\
&+48(C_1x_1^4x_2^4x_3[x_1K_1 - x_2K_2] + x_1x_2x_3^4[x_2^5K_1 + x_1^5K_2] + C_1x_1^3x_2^3x_3^2N^2K_2 + \\
&+C_1x_1x_2x_3^2[x_1^5K_2 + x_2^5Z]) + 12(x_1^4x_2^4[x_2K_2 - x_1K_1][C_1x_3^2 + C_2x_3] + C_1x_1^4x_2^5[x_1K_2 + x_2K_1] + \\
&+x_1^3x_2^3x_3^2N^4K_2) + +16(\{x_3M^8 - x_1^5x_3^2M^2\}C_1Z - C_1x_1^2x_2^2x_3^2M^4K_1 - x_1^5x_3^4M^2K_1 + \\
&+K_2\left\{C_1x_1x_2x_3^2N^6 + [C_1x_2^5x_3^2 + x_2^5x_3^4]M^2 + x_1^3x_2^3x_3^4N^2\right\}) +
\end{aligned}
$$

$$+Z(1024x_1^3x_2^6+1088x_1^5x_2^4+1328x_1^5x_2^2x_3^2+432x_3^3(x_1^6+x_2^6)-344x_2^8x_3-2160x_1^2x_2^2x_3^3N^2+$$
$$+3760x_1^3x_2^4x_3^2+320x_1x_2^8+384x_1^7x_2^2)$$

$$-\frac{226}{3}x_1^8x_2^2x_3^2K_1-\frac{434}{3}x_1^6x_2^4x_3^2K_1+\frac{395}{6}x_1^3x_2^2x_3N^6K_1-\frac{416}{3}x_1^4x_2^6x_3^2K_1-\frac{199}{3}x_1^2x_2^8x_3^2K_1+$$

$$+108(\left\{-x_1x_2x_3^3N^6\right\}K_2+x_1^2x_2^2x_3^3M^4K_1-10x_1^3x_2^3x_3^3[x_1K_2+x_2K_1])+\frac{4}{3}(x_1^2x_2^3x_3^4K_2N^4-x_1^3x_2^2x_3^4K_1N^4)+$$
$$+36(K_2\left\{-x_1x_2x_3N^8-x_1^2x_2^7x_3^3-x_1^6x_2^3x_3^3\right\}+K_1\left\{x_1^3x_2^6x_3^3+10x_1^4x_2^4x_3^2+x_1^7x_2^2x_3^3\right\})+$$
$$+4(\{100x_1^6x_2^2x_3+C_2x_3\{x_2^8-x_1^8\}\}Z+100x_1^3x_2^6x_3K_1-100x_1x_2^7x_3+C_1x_2M^8K_2)$$

$$\Phi^1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^4}F_1(368x_1^6-336x_2^6+x_1^2x_2^2(272x_1^2-432x_2^2)+$$
$$+8C_1(M^6+x_1^2x_2^2M^2)-288x_1^5x_3+96x_3^2N^4)+\frac{7}{4}x_1^5x_2^5(x_1L_2-x_2L_1)+\frac{11}{8}x_1^3x_2^3(x_1^5L_2-x_2^5L_1)+$$
$$+\frac{3}{4}x_1^4x_2^4(x_2^3L_2-x_1^3L_1)+11L_2x_1^5x_2^5+\frac{1}{8}(x_1^9L_1-x_2^9L_2)N^2+\frac{3}{8}x_1x_2(x_1^9L_2-x_2^9L_1)-$$
$$-\frac{e^{-\frac{x_1}{2}}\sin(\frac{x_2}{2})}{(x_1^2+x_2^2)^4}[768x_1^5x_2+1048x_1^3x_2^3+640x_1x_2^5+288x_3(x_1x_2N^4-x_2^5)]-$$
$$-96x_1^2x_2^2x_3^2(L_2x_2+L_1x_1)+576(x_1^2x_2^2x_3P[x_1-x_3]+x_2^3x_3L_2(x_1^3+x_1^2))+\frac{11}{4}x_1^2x_2^2M^6L_1$$

$$\Phi^2(\boldsymbol{x}) = 4(C_1x_1N^6L_1 - x_1^3x_2^2x_3L_1N^4 - x_1^2x_2^3x_3L_2N^4 + \{-x_1x_2 - C_1x_2\}N^6L_2) +$$
$$+36(x_2x_3N^6L_2 - x_1x_3L_1[x_1^3x_2^4 + N^6]) + 12(C_1x_1^3x_2^2L_1N^2 - C_1x_1^2x_2^3L_2N^2 + x_1^2x_2^2x_3^2L_1M^2 -$$
$$-x_1^3x_2^3L_2N^2 + x_3^2L_1M^6) + 48(L_2x_3^2[x_2^5 - x_1^3x_2^3] + L_1x_1^5x_3^2) + 144(-x_1^2x_2^2x_3L_1M^2 -$$
$$-x_1x_2x_3^2(L_1x_2^3 + L_2x_1^3) - x_3L_1M^6) + 864(x_1x_2^4x_3F_1 + x_1^4x_2x_3L_2) +$$
$$+\frac{22}{3}(L_1x_1^9 + L_2x_2^9 + x_1x_2(L_1x_2^7 + L_2x_1^7) + x_1^3x_2^3L_2N^4) + L_1(184x_1^7 + 46x_1^8 + 42x_2^8) -$$
$$-168x_2^7L_2 + \frac{11}{12}L_1M^{10} - 200L_2x_1^6x_2 + [180x_1^6x_2^2 + 152x_1x_2^6 + 488x_1^3x_2^4 + 520x_1^5x_2^2]L_1 +$$
$$+264L_1x_1^4x_2^4 + 264(L_1x_1^4x_2^4M^2 + L_2x_1x_2N^8) + 172L_1x_1^2x_2^6 +$$
$$+384L_2x_1x_2x_3^2(x_2^2 - x_1^2) - 536x_1^2x_2^5L_2 - 568x_1^4x_2^3L_2 - 32C_1L_2x_1^3x_2^3 +$$
$$+\frac{88}{3}(x_1^2x_2^3L_2 + x_1^3x_2^2L_1)N^4 + 44x_1^4x_2^4(x_2L_2 + x_1L_1) +$$
$$+2x_3^2[x_1L_1 - x_2L_2]N^6 + 108x_1^2x_2^2x_3(x_2L_2 - x_1L_1)N^2 - 16C_1x_1x_2N^4L_2 -$$
$$-24x_1x_2x_3[x_1x_2L_1 + x_3L_2]N^4 - x_3[x_2L_2 + x_1L_1]N^8 +$$
$$+6(\{x_1^4x_2^4x_3 - x_1^2x_2^2x_3^2N^2\}[x_2L_2 - x_1L_1] - x_3N^8L_1)$$

$$I = -\frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{2}\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left\{sx_1 + s^2x_1x_3 + s^2x_3^2\right\}ds -$$
$$-\frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{2}\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left\{s^2x_2x_3 - sx_2 - s^3x_1x_2x_3\right\}ds -$$
$$-\frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{12}(-s^3x_1^3\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^3x_2^3)ds -$$
$$-\frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{4}(\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)[s^3x_1x_2^2 - s^3x_1^2x_3 + s^3x_2^2x_3] - \sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^3x_1^2x_2)ds +$$
$$+\frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \frac{3\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{16}\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^4x_1^2x_2^2ds -$$
$$-\frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{96}3(\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^4x_1^4 + \cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^4x_2^4)ds -$$
$$-\frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}C_1\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)ds - \frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{8}\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)[s^4x_1^3x_2 - s^4x_1x_2^3]ds$$

$$D_1^1 = [432(x_2^4 x_3 - x_1 x_2^4) + 864 x_1^2 x_2^2 x_3 - 8C_1 x_1 x_2^4 + 1104 x_1^5 - 720 x_1^4 x_3 + 544 +$$
$$+192 x_1^3 x_3^2 + 16 C_1 x_1^3 x_2^2 + 24 C_1 x_1^5 - 576 x_1 x_2^2 x_3^2]P$$
$$D_2^1 = [\frac{5}{2} x_1^5 x_2^5 - \frac{x_1^3 x_2^7}{3} + \frac{17}{12} x_1^9 x_2 - \frac{7}{12} x_1 x_2^9 + \frac{1}{32} x_2^9 N^2 - \frac{11}{12} x_2^9 + \frac{1}{2} x_2 x_3^2 N^6 + \frac{77}{12} x_1^8 x_2 +$$
$$+\frac{55}{3} x_1^6 x_2^3 + \frac{33}{2} x_1^4 x_2^5 - \frac{3}{32} x_1^{10} x_2 + 3C_1 x_1^2 x_2^3 N^2 - \frac{11}{32} x_1^8 x_2^3 + \frac{11}{3} x_1^2 x_2^3 \left\{ x_1^5 + x_2^4 \right\} - \frac{7}{16} x_1^6 x_2^5 -$$
$$-\frac{3}{16} x_1^4 x_2^7 + \frac{1}{4} x_2 x_3 N^8 - 2112 x_1^2 x_2^3 - 27 x_1^2 x_2^3 x_3 N^2 + \frac{3}{2} \left\{ x_1^4 x_2^5 x_3 + x_1^2 x_2^3 x_3^2 N^2 \right\} +$$
$$+4\left\{ -x_1 x_2 x_3 N^6 - 10 C_1 x_1^4 x_2 + 10 x_2^7 \right\} + x_1^2 x_2^3 x_3 N^4 + C_1 x_2 N^6 - 12 x_1^3 x_2^3 x_3 N^2 + 720 x_1^2 x_2^3 x_3 +$$
$$+8C_1 \left\{ x_2 M^4 - x_1 x_2 N^4 \right\} + 116 x_1^2 x_2^5 - 1920 x_1^4 x_2 + 112 x_1^4 x_2^3 + 1728 x_1^3 x_2 x_3 - 320 x_2^5 +$$
$$+91 x_1^3 x_2^3 N^2 + \frac{91}{3} x_1 x_2 N^6 - 48 x_1^2 x_3^2 \left\{ x_2^3 + C_1 \right\} + 576 x_1 x_2 x_3 \left\{ x_2^2 - x_1 x_3 \right\} - 9 x_2 x_3 N^6 +$$
$$+36\left\{ x_1 x_2 x_3 N^4 + x_1^6 x_2 \right\} + 216 x_2^5 x_3 + 504 x_1^4 x_2 x_3 - 16 C_1 x_1^3 x_2^3 - 784 x_1^3 x_2^3 - 376 x_1 x_2^5 -$$
$$-408 x_1^5 x_2 + 72 x_1 x_2^3 x_3 \left\{ x_1^2 - x_2 \right\} + 192 L_2 \left\{ x_2^3 x_3^2 - x_1 x_2 x_3^2 N^2 \right\} - 24 x_2 x_3^2 N^4]L_2$$
$$D_3^1 = 28 C_1 x_1^4 x_2^2 L_1 - 45 x_1^3 x_2^2 x_3 N^2 L_1 + 20 C_1 x_1^2 x_2^4 L_1 - \frac{41}{6} x_2^8 L_1 + \frac{43}{2} x_1^8 L_1 + \frac{1}{4} x_1 x_3 N^8 L_1 -$$
$$-198 x_1^2 x_2^4 x_3 L_1 - 234 x_1^4 x_2^2 x_3 L_1 - 90 x_1^6 x_3 L_1 - 360 x_1^5 x_3 L_1 - 72 x_1 x_2^4 x_3 L_1 +$$
$$+\frac{3}{2} L_1 \left\{ x_1^5 x_2^4 x_3 - x_1^3 x_2^2 x_3^2 N^2 - 10 x_1^7 x_3 - 10 x_1 x_2^6 x_3 \right\} + 272 x_1^4 x_2^2 L_1 + 840 x_1^2 x_2^4 L_1 +$$
$$+160 x_2^6 L_1 + 552 x_1^6 L_1 + \frac{1}{24} x_2^{10} L_1 + \frac{1}{8} x_1^8 x_2^2 L_1 + \frac{173}{3} x_1^6 x_2^2 L_1 + 48 x_1^3 x_2^2 x_3^2 L_1 +$$
$$+406 x_1^3 x_2^4 L_1 + 134 x_1 x_2^6 L_1 + 410 x_1^5 x_2^2 L_1 + \frac{11}{4} x_1^9 L_1 + 138 x_1^7 L_1 - 8 x_1^6 x_2^2 x_3 L_1 +$$
$$+4(L_1 \left\{ x_1^6 x_3^2 N^6 + C_1 x_2^6 \right\}) - 54 x_2^6 x_3 L_1 + 12 L_1 \left\{ C_1 x_1^6 + x_1^4 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 x_3^2 \right\} +$$
$$+[\frac{11}{24} L_1 \left\{ x_1^{10} - 10 x_1 x_2^8 \right\} + \frac{1}{32} (L_1 \left\{ -x_1^{11} - x_1^9 x_2^2 \right\} + 44 x_1^4 x_2^4 L_1 - 432 x_1^3 x_2^2 x_3 L_1 +$$
$$+\frac{1}{2} L_1 \left\{ -x_1^7 x_3^2 - x_1 x_2^6 x_3^2 \right\} - \frac{11}{8} x_1^2 x_2^8 L_1 + 96 x_3^2 M^4 L_1 - 11 x_1^3 x_2^6 L_1 - \frac{11}{12} x_1^5 x_2^4 L_1 +$$
$$+\frac{3}{16} x_1^7 x_2^4 L_1 + 3L_1 \left\{ -x_1^8 x_3 - C_1 x_1^5 x_2^2 - C_1 x_1^3 x_2^4 \right\} + \frac{3}{32} x_1 x_2^{10} - 6 x_1^4 x_2^4 x_3 L_1 -$$
$$-\frac{47}{12} x_1^4 x_2^6 - \frac{37}{12} x_1^6 x_2^4 + \frac{7}{16} x_1^5 x_2^6 + \frac{11}{3} x_1^7 x_2^2 + \frac{11}{32} x_1^3 x_2^8]L_1 + 24 x_1 x_3^2 N^4 L_1$$
$$+L_1 \left\{ x_3 N^8 + x_1^3 x_2^2 x_3 N^4 - C_1 x_1 N^6 + x_1^2 x_2^6 \right\}$$

$$G_1(\boldsymbol{x}) = [1472x_1^7 - 1344x_1x_2^6 - 1728x_1^2x_2^4 + 1088x_1^4x_2^2 + 32(C_1M^6 + C_1x_1^2x_2^2M^2) -$$
$$-1152x_1^5x_3 + 384x_3^2N^4 + 2304x_1^2x_2^2x_3[x_1 - x_3] + 3456x_1x_2^4x_3]Z$$
$$G_2(\boldsymbol{x}) = [-3072x_1^5x_2 - 5632x_1^3x_2^3 - 2560x_1x_2^5 + 1152\left\{x_1x_2x_3N^4 - x_2^5x_3\right\} -$$
$$-384x_1^2x_2^3x_3^2 + 2304x_1^2x_2^3x_3\left\{1 + x_1\right\} + 3456x_1^4x_2x_3 - 672x_2^7 - 96x_1x_2x_3^2N^4 +$$
$$+44x_1^5x_2^5 + \frac{88}{3}\left\{x_2N^8 + x_1^3x_2^3N^4\right\} - \frac{1}{2}x_1^2N^9 + \frac{11}{2}x_1^8x_2^3 + 7x_1^6x_2^5 + 3x_1^4x_2^7 + \frac{3}{2}x_1^{10}x_2 +$$
$$+\frac{22}{3}x_1x_2N^8 - 8x_2x_3^2N^6 - 4x_2x_3N^8 - 2144x_1^2x_2^5 - 800x_1^6x_2 - 2272x_1^4x_2^3 +$$
$$+176x_1^4x_2^5 + \frac{352}{3}x_1^2x_2^3N^4 - 24\left\{x_1^4x_2^5x_3 + x_1^2x_2^3x_3^2N^2\right\} - 1536x_1x_2x_3^2M^2$$
$$-16\left\{C_1x_2N^6 + x_1^2x_2^3x_3N^4 + x_1x_2N^6\right\} - 48(C_1x_1^2x_2^3N^2 + x_1^3x_2^3N^2) + 432x_1^2x_2^3x_3N^2$$
$$+192x_2^3x_3^2(x_2^2 - x_1^3) - 64C_1x_1x_2N^4 - 28C_1x_1^3x_2^3 + 144x_2x_3N^6 - 576x_1^4x_2x_3^2]K_2$$
$$G_3(\boldsymbol{x}) = [184x_1^8 + 168x_2^8 + 736x_1^7 + \frac{88}{3}x_1N^8 - 96x_1^2x_2^2x_3N^4 + 1152x_1^5x_2x_3 -$$
$$-384x_1^3x_2^2x_3^2 - 144\left\{x_1^4x_2^4x_3 + x_1x_3N^6\right\} - 576\left\{x_1^2x_2^2x_3M^2 + x_1x_2^4x_3^2 + x_3M^6\right\} +$$
$$+48\left\{C_1x_1^3x_2^2N^2 + x_1^2x_2^2x_3^2M^2 + x_3^2M^6\right\} + 192x_1^5x_3^2 + \frac{1}{2}x_2^2N^9 - \frac{11}{2}x_1^3x_2^8 - 7x_1^5x_2^6 -$$
$$-3x_1^7x_2^4 - \frac{3}{2}x_1x_2^{10} + \frac{22}{3}x_1^4x_2^4M^2 + 8x_1x_3^2N^6 - 4x_1x_3N^8 + 1056x_1^4x_2^4 + \frac{11}{3}M^{10} +$$
$$+11x_1^2x_2^2M^6 + 2080x_1^5x_2^2 + 1952x_1^3x_2^4 + 608x_1x_2^6 + 688x_1^2x_2^6 + 720x_1^6x_2^2 +$$
$$+176x_1^5x_2^4 + \frac{352}{3}x_1^3x_2^2N^4 - 432x_1^3x_2^2x_3N^2 + 24\left\{x_1^3x_2^2x_3^2N^2 - x_3N^8 - x_1^5x_2^4x_3\right\} +$$
$$+16\left\{C_1x_1N^6 - x_1^3x_2^2x_3N^4\right\}]K_1$$

$$I^1 = -\frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)[\frac{1}{2}\left\{s + s^2x_3 - s^3x_1x_3\right\} - 4s^3M^2 + \frac{1}{8}s^4(x_1^3 - 3x_1x_2^2)]ds -$$

$$-\frac{3\lambda + 7\mu}{4\lambda + 8\mu}\int_0^1 \sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)(\frac{1}{2}\left\{-s^3x_1x_2 - s^3x_2x_3\right\} - \frac{1}{8}s^4x_2^3 + \frac{3}{8}s^4x_1^2x_2)ds -$$

$$-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\sqrt{s^3}e^{-\frac{sx_1}{2}}\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}C_1-\frac{3}{32}s^4x_1^2x_2^2-\frac{1}{64}s^4x_1^4-\frac{1}{4}\left\{sx_1+s^2x_1x_3+s^2x_3^2\right\}-\right.$$

$$\left.--\frac{1}{8}s^3\left\{x_1x_2^2-x_1^2x_3+x_2^2x_3-\frac{1}{3}x_1^3\right\}\right)ds-$$

$$-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\sqrt{s^3}e^{-\frac{sx_1}{2}}\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left(\left\{-\frac{1}{64}s^4x_2^4-\frac{1}{16}s^4x_1x_2M^2\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}x_2\left\{s^2x_3-s^3x_1x_3-s\right\}+\frac{1}{8}s^3x_1^2x_2-\frac{1}{24}s^3x_2^3\right)ds$$

$$A_1^2=-24(C_1x_1^6x_2^3Z+C_1x_1^4x_2^5Z-C_2x_1^5x_2^3x_3Z-C_2x_1^3x_2^5x_3Z)-$$

$$-32(C_1x_1^2x_2^7x_3+C_1x_1^7x_2^2x_3K_2+C_1x_1^3x_2^6x_3K_2+C_1K_1x_1^6x_2^3x_3-C_1K_2x_1^2x_2^6x_3+C_1K_2x_1^6x_2^2x_3+$$
$$+C_1x_1^7x_2x_3Z+C_1x_1x_2^7x_3Z)-12(-C_1K_2x_1^5x_2^4x_3^2-C_2K_1x_1^4x_2^5x_3-$$
$$-C_2K_2x_1^5x_2^4x_3+K_1x_1^6x_2^5+K_2C_1x_1^6x_2^4-C_1K_1x_1^4x_2^5x_3^2+C_1K_1x_1^5x_2^5)-$$
$$-\frac{5}{3}(x_1^7x_2^5x_3^2K_1+x_1^5x_2^7x_3^2K_1)-16(-C_1K_1x_1x_2^7x_3^2-C_1K_2x_1^6x_2^2x_3^2+$$

$$+C_1K_2x_1^2x_2^6x_3^2+K_1x_2^7x_3^4-K_2x_1^7x_3^4+C_1K_2x_1^8x_3-$$
$$-C_1K_2x_1^7x_3^2-C_1K_2x_2^8x_3-K_1x_1^2x_2^5x_3^4+K_2x_1^5x_2^2x_3^4-K_1x_1^5x_2^3x_3^4-K_1x_1^3x_2^5x_3^4+$$
$$+C_1x_2^7x_3^2Z-C_1K_1x_1^7x_2x_3^2+C_1K_2x_1^5x_2^2x_3^2-C_1x_1^2x_2^5x_3^2Z)-\frac{1}{12}K_2[x_2^{12}x_3^2-x_1^{12}x_3^2]-$$
$$-\frac{1}{2}(-K_1[C_1x_1^{10}x_2x_3+C_1x_2^{11}x_3]+K_2[C_1x_1^{11}x_3+C_1x_1x_2^{10}x_3])-$$
$$-\frac{5}{4}(-x_1^7x_2^7K_1-x_1^8x_2^6K_2-x_1^8x_2^3x_3^3K_1-x_1^2x_2^9x_3^3K_1+x_1^6x_2^7x_3^2K_1+x_1^7x_2^6x_3^2K_2+$$
$$+x_1^9x_2^2x_3^3K_2+x_1^3x_2^8x_3^3K_2)-20(C_1x_1^4x_2^6x_3K_2+C_1x_1^6x_2^4x_3K_2)-$$
$$-632(-x_1x_2^7x_3^2K_1-x_2^6x_2^2x_3^2K_2)-(x_2^{10}x_3^3K_2+x_1^{10}x_3^3K_2-x_1^9x_2x_3^2K_1-x_1x_2^9x_3^2K_1)-$$
$$-5(x_1^8x_2^2x_3^3K_2+x_1^2x_2^8x_3^3K_2+C_1x_1^7x_2^4x_3K_2+C_1x_1^5x_2^6x_3K_2-$$
$$-C_1x_1^6x_2^5x_3K_1-C_1x_1^4x_2^7x_3K_1)-10K_2[C_1x_1^2x_2^8x_3+x_1^6x_2^4x_3^3+x_1^4x_2^6x_3^3+C_1x_1^8x_2^2x_3]+$$
$$+128(x_1^5x_3^4K_2+x_2^5x_3^4Z)-320(x_1^2x_2^7Z+K_2[x_1^7x_2^2+x_1^4x_2^6+x_1^4x_2^2x_3^4+x_1^2x_2^4x_3^4])-$$
$$-84x_1x_2^9K_1+340(x_1^7x_2^2x_3^2K_2+x_1^2x_2^7x_3^2K_1)-\frac{110}{3}(-x_1^5x_2^5N^2K_1+[x_1^8x_2^4+x_1^6x_2^6]K_2)+$$

$$+8(-C_1x_1^3x_2^6x_3^2K_2-C_2x_3[x_1^2x_2^7+x_1^6x_2^3]K_1+C_1x_1x_2^8x_3K_2-C_2x_1^3x_2^2x_3N^4K_2+$$
$$+x_1^8x_2^3K_1+x_1^4x_2^7K_1+C_1x_1^2x_2^7Z+C_1x_1^7x_2^2K_2-$$
$$-C_1x_1^3x_2^6K_2+C_1x_1^3x_2^7K_1+C_1x_2^9x_3K_1+C_1x_1^9x_3K_2+$$
$$+C_1x_1^8x_2^2K_2-C_1x_3^2M^8K_2+C_1x_1^4x_2^6K_2-C_1x_1^6x_2^3x_3^2K_1-C_1x_1^7x_2^2x_3^2K_2+C_1x_1^8x_2x_3K_1-$$
$$-C_2x_1^2x_2^2x_3M^4K_2-C_2x_1^7x_2x_3Z-C_2x_1x_2^7x_3Z+C_1x_1^8x_2Z+K_1[C_1x_1^7x_2^3-C_1x_1^2x_2^7x_3^2])-$$
$$-2(-C_1x_1x_2^8x_3^2K_2-C_2x_1^8x_2x_3K_1-C_2x_1x_2^8x_3K_2+C_1x_1^{10}K_2+$$
$$+x_1^{10}x_2K_1+x_1^2x_2^9K_1-x_1^5x_2^4x_3^4K_2-C_1x_2^9x_3^2K_1+C_1x_1x_2^9K_1-C_2x_2^9x_3K_1+$$
$$+C_1x_1^2x_2^8K_2-C_2x_1^9x_3K_2-C_1x_1^8x_2x_3^2K_1+C_1x_1^9x_2K_1-x_1^4x_2^5x_3^4K_1+$$
$$+C_1x_1^{10}x_3K_2-C_1x_1^9x_3^2K_2+C_1x_2^{10}x_3K_2)$$
$$A_2^2=-4(C_1x_1^9K_2-C_1x_1x_2^8K_2-C_2x_1^8x_3K_2+C_2x_2^8x_3K_2-x_1^3x_2^7x_3^2K_1-x_1^7x_2^3x_3^2K_1)-$$
$$-\frac{1}{3}(-x_2^9x_3^4K_1-x_1^9x_3^4K_2-x_1^{10}x_2^2x_3^2K_2-x_1x_2^8x_3^4K_2+x_1^2x_2^{10}x_3^2K_2-x_1^8x_2x_3^4K_1)-$$
$$-48(K_1[-C_1x_1^5x_2^3x_3^2+C_1x_1^4x_2^5x_3-C_1x_1^3x_2^5x_3^2-x_1^6x_2x_3^4]+$$
$$+K_2[x_1x_2^6x_3^4+C_1x_1x_2^6x_3^2+C_1x_1^5x_2^4x_3]-C_1x_1^6x_2x_3^2Z)-$$
$$-61(x_2^{10}x_3K_2+x_1^{10}x_3K_2)-384(x_1^8x_2Z+x_1^7x_2^3K_1-x_1^3x_2^6K_2)-$$
$$-92x_1^{10}K_2-184x_1^9K_2+704x_1^7x_3^2K_2-23x_1^{11}K_2-432x_3^3N^6K_2-$$
$$-\frac{11}{3}(x_1^2N^{10}K_2-x_1x_2N^{10}K_1)-\frac{55}{24}x_1^5x_2^4M^4K_2-\frac{11}{24}x_1M^{12}K_2-$$
$$-\frac{55}{6}(K_1\left\{-x_1^8x_2^5-x_1^6x_2^7+x_1^8x_2^3x_3^2+x_1^2x_2^9x_3^2\right\}+K_2\left\{-x_1^9x_2^2x_3^2-x_1^3x_2^8x_3^2\right\})-$$
$$-100x_1^9x_2K_1-552x_1^5x_2^5K_1-352(K_2\left\{x_1^8x_2^2-x_1^8x_3^2\right\}+K_1x_1^3x_2^7)-$$
$$-\frac{1}{4}(K_2\left\{x_1^{11}x_3^3+x_1x_2^{10}x_3^3\right\}+\left\{-x_2^{11}x_3^3-x_1^{10}x_2x_3^3\right\}K_1)-\frac{11}{12}K_1(-x_1^2x_2^{11}-x_1^{12}x_2)-$$
$$-\frac{55}{12}K_1\left\{-x_1^4x_2^9-x_1^{10}x_2^3\right\}-488K_2\left\{x_1^8x_3-x_2^8x_3\right\}+\frac{145}{6}(x_1^7x_2^5x_3+x_1^5x_2^7x_3)K_1-$$
$$-\frac{11}{6}(K_2\left\{x_1^{11}x_2^2-x_1^3x_2^{10}-x_1^{11}x_3^2-x_1x_2^{10}x_3^2\right\}+K_1\left\{x_2^{11}x_3^2+x_1^{10}x_2x_3^2\right\})-$$
$$-\frac{1}{16}(K_2\left\{x_1^{14}-x_1^{13}x_3^2\right\}+K_1\left\{-x_2^{13}x_3^2+x_1x_2^{13}\right\})-\frac{7}{48}(x_1^{13}x_3K_2+x_2^{13}x_3K_1)-$$

$$-\frac{3}{16}(K_1\left\{-x_1^{13}x_2+x_1^{12}x_2x_3^2\right\}+K_2\left\{-x_1^2x_2^{12}+x_1x_2^{12}x_3^2\right\})-$$

$$-\frac{7}{8}(K_1\left\{x_1^{10}x_2^3x_3^2-x_1^{11}x_2^3\right\}+K_2\left\{x_1^3x_2^{10}x_3^2-x_1^4x_2^{10}\right\})-$$

$$-\frac{25}{16}(K_1\left\{-x_1^9x_2^5+x_1^8x_2^5x_3^2\right\}+K_2\left\{-x_1^6x_2^8+x_1^5x_2^8x_3^2\right\})-$$

$$-\frac{5}{16}(K_1\left\{-x_1^5x_2^9+x_1^4x_2^9x_3^2\right\}+K_2\left\{-x_1^{10}x_2^4+x_1^9x_2^4x_3^2\right\})-$$

$$-\frac{1}{8}(K_1\left\{x_1^3x_2^{11}-x_1^2x_2^{11}x_3^2\right\}+K_2\left\{x_1^{12}x_2^2-x_1^{11}x_2^2x_3^2\right\})-$$

$$-2160(-x_1^6x_2x_3^2Z+K_2\left\{-x_1^4x_2^2x_3^3-x_1^2x_2^4x_3^3\right\})-$$

$$-\frac{55}{3}(K_1\left\{x_1^6x_2^5x_3^2+x_1^4x_2^7x_3^2-x_1^3x_2^3N^6\right\}+\left\{x_1^{10}x_2^2+x_1^4x_2^8-x_1^7x_2^4x_3^2-x_1^5x_2^6x_3^2\right\}K_2)-656x_2^7x_3^2Z-$$

$$-54(K_2\left\{x_1^8x_3^3-x_2^8x_3^3+x_1^5x_2^4x_3^3\right\}+x_1^4x_2^5x_3^3K_1)-\frac{29}{24}(K_2\left\{x_1^{12}x_3-x_2^{12}x_3\right\}+K_1x_1x_2^8)-$$

$$-1088x_1^6x_2^3Z-1024x_1^4x_2^5Z+168x_1x_2^8K_2-21x_1x_2^{10}K_2-113x_1^9x_2^2K_2-222x_1^7x_2^4K_2-$$

$$-80(\left\{-x_1^5x_2^4+x_1^3x_2^4x_3^4+C_1x_1^3x_2^4x_3^2\right\}K_2-x_1^4x_2^3x_3^4K_1-C_1x_1^4x_2^3x_3^2Z)-$$

$$A_3^2=-107x_1^3x_2^8K_2-3520x_1^3x_2^4x_3^2K_2-\frac{7}{24}(x_1^2x_2^{11}x_3K_1+x_1^{11}x_2^2x_3K_2)+82x_2^9x_3^2K_1-$$

$$-218x_1^5x_2^6K_2+\frac{41}{3}x_2^{10}x_3^2K_2-504x_1^6x_2^4K_2+\frac{35}{48}x_1^4x_2^4x_3(K_1x_2^5+K_2x_1^5)-$$

$$-76(x_1x_2^8K_2\left\{x_1-x_3^2\right\})-244(x_2x_3N^8K_1+x_1x_3N^8K_2)-9(x_2x_3^3N^8K_1+x_1x_3^3N^8K_2)-$$

$$-\frac{5}{2}(K_1\left\{-x_1^4x_2^5x_3^3N^2-C_1x_1^2x_2^3x_3N^6\right\}+K_2\left\{x_1^5x_2^4x_3^3N^2+C_1x_1^3x_2^2x_3N^6\right\})+$$

$$+216(x_1^2x_3^3N^5K_1+x_2^2x_3^3M^5K_2)+328(-x_2^8x_3^2K_2+10x_1^4x_2^3x_3^2Z)+$$

$$+64(K_2(x_3^4N^6+10x_1x_2^4x_3^4)+x_2^6x_3^4K_1+10x_1^4x_2x_3^4Z)-$$

$$-\frac{61}{6}(K_1\left\{-x_2x_3N^{10}-10x_1^4x_2^5x_3N^2\right\}+K_2\left\{x_1x_3N^{10}+10x_1^5x_2^4x_3N^2\right\})+$$

$$+\frac{8}{3}x_3^4M^8K_2+88x_1^9x_3^2K_2+\frac{44}{3}x_1^{10}x_3^2K_2-1280x_1^2x_2^2x_3^4(x_2Z+K_2x_1)-$$

$$-976(x_1^7x_2x_3Z+x_1x_2^7x_3Z+x_1^2x_2^3x_3N^4K_1+K_2\left\{x_1^3x_2^2x_3N^4+x_1^2x_2^2x_3M^4\right\})-$$
$$-2928(x_1^5x_2^3x_3Z+x_1^3x_2^5x_3Z)+1728(x_1x_2^5x_3^3Z-x_1^5x_2x_3^3Z-K_2x_1^3x_2^{11}x_3)-$$
$$-1080x_1^3x_2^3x_3^3(x_1K_1-K_2x_2)-1464x_1^4x_2^4x_3(K_1x_2+K_2x_1)+464x_1^2x_2^5x_3^2Z+$$
$$+2088x_1^5x_2^3x_3^2K_1-\frac{1}{6}x_1x_2x_3^2N^{10}K_1-\frac{5}{6}x_1^3x_2^3x_3^2N^6K_1+$$
$$+256x_1x_2x_3^4M^4K_1+1992x_1^3x_2^5x_3^2K_1-324x_1^3x_2^3x_3^3N^2K_1-108(x_1x_2x_3^3N^6K_1+x_1^2x_2^2x_3^3M^4K_2)-$$
$$-305x_1^2x_2^2x_3N^6K_2-610x_1^4x_2^4x_3N^2K_2+492x_1^5x_2^4x_3^2K_2+316x_1^3x_2^6x_3^2K_2+$$
$$+\frac{217}{3}x_1^8x_2^2x_3^2K_2-120x_1^4x_2^4x_3^2K_2+-\frac{145}{24}x_1^4x_2^4x_3M^4K_2-\frac{29}{6}x_1^2x_2^2x_3M^8K_2+$$
$$+\frac{422}{3}x_1^4x_2^6x_3^2K_2+\frac{4}{3}(x_1^3x_2^2x_3^4N^4K_2+x_1^2x_2^3x_3^4N^4K_1)+$$
$$+\frac{175}{48}x_1^5x_2^5x_3(K_1x_1^3+K_2x_2^3)+\frac{35}{12}x_1^6x_2^6x_3(K_1x_2+K_2x_1)+\frac{15}{64}x_1^7x_2^7x_3(K_2x_2-K_1x_1)+$$
$$+\frac{65}{192}x_1^6x_2^6x_3(K_2x_1^3-K_1x_2^3)+\frac{35}{192}x_1^4x_2^4x_3(K_2x_1^7-K_1x_2^7)+x_1^3x_2^3x_3\frac{5}{64}(K_1x_1^9-K_2x_2^9)+$$
$$+\frac{305}{6}x_1^2x_2^2x_3(x_2K_1-x_1K_2)N^6+\frac{7}{16}x_1x_2x_3(K_1x_1^{11}+K_2x_2^{11})+$$
$$+[728x_1^2x_2x_3^2-648x_1x_2x_3^3](K_1x_1^5-K_2x_2^5)+\frac{49}{24}x_1^3x_2^3x_3(K_1x_1^7+K_2x_2^7)+$$
$$+\frac{16}{3}(x_1x_2x_3^4N^6K_1+x_1^2x_2^2x_3^4M^4K_2)-36x_1^2x_2^2x_3^3(x_2K_1+x_1K_2)N^4+\frac{208}{3}x_1^2x_2^8x_3^2K_2-$$
$$-96(C_1x_1^5x_2^3x_3+C_1x_1^3x_2^5x_3)Z+\frac{29}{12}x_1x_2x_3N^{10}K_1+6x_1^5x_2^5x_3^2K_1+\frac{145}{12}x_1^3x_2^3x_3N^6K_1+$$
$$+364x_1^6x_2^3x_3^2K_1+528x_1^4x_2^5x_3^2K_1+\frac{208}{3}x_1^8x_2x_3^2K_1+$$
$$+\frac{1}{192}(5x_1x_2x_3[x_2K_2+x_1K_1]M^{12}+x_3[x_2^5K_1-x_1^5K_2]N^{10})-$$
$$-896x_1^5x_2^2x_3^2K_2-1920x_1x_2^6x_3^2K_2+\frac{5}{12}x_1^4x_2^4x_3^2M^4K_2+\frac{428}{3}x_1^6x_2^4x_3^2K_2$$
$$D^2=\frac{11}{24}(-x_2^{10}L_2+10x_1^8x_2L_1)+\frac{1}{32}(\left\{-x_2^{11}-x_1^2x_2^9\right\}L_1+\left\{-x_1^{11}-x_1^9x_2^2\right\}L_2)+$$
$$+44x_1^4x_2^4L_2-\frac{11}{12}x_1^9L_2+432(x_1^4x_3L_2+x_1^2x_2^3x_3L_1)+96\left\{x_2^4x_3^2-x_1^4x_3^2\right\}L_2+$$
$$+\frac{1}{2}(\left\{-x_1^7x_3^2-x_1x_2^6x_3^2\right\}L_2-x_2x_3^2N^6L_1)+\frac{7}{12}x_1^9x_2L_1-\frac{5}{2}x_1^5x_2^5L_1+$$

$$+3(\left\{-x_2^8x_3-C_1x_1^5x_2^2-C_1x_1^3x_2^4\right\}L_2+\left\{-C_1x_1^2x_2^5-C_1x_1^4x_2^3\right\}L_1)+\frac{1}{3}x_1^7x_2^3L_1+$$

$$+\frac{3}{32}(x_1^{10}x_2L_1+x_1x_2^{10}L_2)+\frac{11}{32}(x_1^8x_2^3L_1+x_1^3x_2^8L_2)-\frac{17}{12}x_1x_2^9L_1+\frac{11}{8}x_1^8x_2^2L_2+$$

$$+\frac{11}{3}(\left\{-x_1^3x_2^7-x_1^2x_2^7\right\}L_1+x_1^7x_2^2L_2)+\frac{7}{16}(x_1^6x_2^5L_1+x_1^5x_2^6L_2)+11x_1^6x_2^3L_1+$$

$$+\frac{3}{16}(x_1^4x_2^7L_1+x_1^7x_2^4L_2)+\frac{11}{2}x_1^4x_2^5L_1+\frac{77}{12}x_1x_2^8L_2+\frac{55}{3}x_1^3x_2^6L_2+\frac{33}{2}x_1^5x_2^4L_2+$$

$$+\frac{47}{12}x_1^6x_2^4L_2+\frac{37}{12}x_1^4x_2^6L_2+\frac{1}{4}(-x_2x_3N^8L_1+x_1x_3N^8L_2)+$$

$$+L_1\left\{-x_1^2x_2^7x_3-x_1^6x_2^3x_3-C_1x_1^6x_2-C_1x_2^7\right\}+L_2\left\{x_1^8x_3+x_1^3x_2^2x_3N^4-C_1x_1N^6-x_1^6x_2^2\right\})+$$

$$+216x_1^5x_3L_2+272x_1^4x_2P+864(x_1^2x_2^2x_3L_2-x_1^2x_2^3P)-2112x_1^3x_2^2L_2-1600x_1x_2^4L_2+$$

$$+\frac{3}{2}(L_1\left\{-x_1^4x_2^5x_3-x_1^4x_2^3x_3^2-x_1^2x_2^5x_3^2-10x_2^7x_3-10x_1^6x_2x_3\right\}+$$

$$+\left\{x_1^5x_2^4x_3-x_1^5x_2^2x_3^2-x_1^3x_2^4x_3^2\right\}L_2)-6x_1^4x_2^4x_3L_2+90x_2^6x_3L_2+360x_2^5x_3L_1+$$

$$+4(\left\{-x_1^7x_2x_3-x_1x_2^7x_3\right\}L_1+\left\{-x_2^6x_3^2-x_1^6x_3^2-C_1x_1^6-10C_1x_1x_2^4\right\}L_2)-$$

$$-12(\left\{x_1^5x_2^3x_3+x_1^3x_2^5x_3\right\}L_1+\left\{C_1x_2^6+x_1^4x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^4x_3^2\right\}L_2)+54x_1^6x_3L_2+$$

$$+8(\left\{C_1x_1^5x_2+C_1x_1x_2^5\right\}L_1-\left\{x_1^2x_2^6x_3+C_1x_1^5\right\}L_2+C_1x_1^4x_2P)+234x_1^2x_2^4x_3L_2+$$

$$+27\left\{x_1^5x_2^2x_3+x_1^3x_2^4x_3\right\}L_2+720\left\{-x_2^4x_3+x_1^3x_2^2x_3\right\}L_2+\frac{85}{3}x_1x_2N^6L_1-$$

$$-24(\left\{x_1^5x_3^2+x_1x_2^4x_3^2\right\}L_2+\left\{x_2^5x_3^2+x_1^4x_2x_3^2\right\}L_1+C_1x_2^5P)+382x_1^2x_2^5L_1-$$

$$-192(\left\{x_1^3x_2x_3^2+x_1x_2^3x_3^2\right\}L_1+\left\{x_1^3x_3^2+x_1^6\right\}L_2-x_2^3x_3^2P)+130x_1^6x_2L_1+$$

$$+85\left\{x_1^5x_2^3+x_1^3x_2^5\right\}L_1+198x_1^4x_2^2x_3L_2+72\left\{-x_1^3x_2^3x_3+x_1^4x_2x_3\right\}L_1+$$

$$+16(C_1x_1^3x_2^3L_1-C_1x_1^2x_2^3P)-36\left\{x_1^5x_2x_3+x_1x_2^5x_3\right\}L_1-20C_1x_1^4x_2^2L_2+$$

$$+504\left\{x_1x_2^4x_3-x_2^6\right\}L_2-28C_1x_1^2x_2^4L_2-45\left\{x_1^2x_2^5x_3+x_1^4x_2^3x_3\right\}L_1-384x_1^5L_2-$$

$$-1232x_1^2x_2^4L_2-920x_1^4x_2^2L_2+328x_1^5x_2L_1+624x_1^3x_2^3L_1+296x_1x_2^5L_1+$$

$$+126x_2^7L_1+1728x_1x_2^3x_3P+\frac{45}{2}x_2^8L_2-\frac{47}{6}x_1^8L_2-\frac{11}{4}x_2^9L_1+\frac{179}{3}x_1^2x_2^6L_2+$$

$$+576(x_1^3x_2x_3P-x_1^2x_2x_3^2P+x_1x_2^2x_3^2L_2)+9\left\{x_1^7x_3+x_1x_2^6x_3\right\}L_2-1008x_2^5P-$$
$$-\frac{1}{24}x_1^{10}L_2+\frac{1}{7}x_1^2x_2^8L_2+386x_1^4x_2^3L_1-52x_1x_2^6L_2-152x_1^3x_2^4L_2-148x_1^5x_2^2L_2$$

$$I^2=-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{4}(\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left\{-s^4x_1x_2x_3-s^2x_2\right\}+$$
$$+\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left\{-s^2x_1-s^3x_3^2-s^3x_1^2+s^3x_2^2\right\})ds-$$

$$-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{6}(\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^4x_1^3+\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^4x_2^3)ds-$$
$$-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{3\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{4}(\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^3x_2x_3-\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^3x_1x_3)ds-$$

$$-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{64}(\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left\{-s^5x_1^4-s^5x_2^4\right\})ds-$$
$$-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{8}(\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left\{s^4x_1^2x_3-s^4x_2^2x_3\right\})ds-$$

$$-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{2}(\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left\{-C_1s-s-s^4x_1x_2^2+s^2x_3\right\}+\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left\{s^3x_1x_2-s^4x_1^2x_2\right\})ds-$$
$$-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{3\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{32}\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)s^5x_1^2x_2^2ds-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{16}(\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)\left\{s^5x_1^3x_2-s^5x_1x_2^3\right\})ds$$
$$A_1^3=24(-C_2x_1^5x_2^4Z-K_2\left\{C_2x_1^4x_2^5+x_1^5x_2^5(C_1x_3+C_2)+C_1x_1^8x_2x_3\right\}-$$
$$-K_1\{C_1x_1^8x_2^2+C_1x_1x_2^8x_3-C_1x_1^2x_2^8\})+3(x_1x_2N^{10}K_2-C_1x_1^2x_2^2N^8K_1)+$$
$$+32(-C_2x_1^3x_2^6Z-C_2x_1^6x_2^3K_2)+12(-C_2x_1x_2^8Z-C_2x_1^8x_2K_2)+$$

$$+16(K_1[-C_1x_1^4x_2^4M^2-x_1^5x_2^4x_3^3+x_3^3N^8]-C_1x_1^9Z+C_1x_1^8x_3Z+C_1x_2^8x_3Z+$$
$$+K_2[C_1x_1x_2N^8-x_1^4x_2^5x_3^3-C_1x_2^9+C_1x_1^3x_2^7x_3-C_1x_1^3x_2^3x_3N^4-C_2x_1^3x_2^3N^4])+$$
$$+\frac{1}{12}(x_2x_3N^{12}K_2+x_1x_3N^{12}K_1)+\frac{1}{2}(x_1^2x_2^3x_3N^8K_2-K_1C_1N^{12}+x_1^3x_2^2x_3N^8K_1)+$$

$$+\frac{5}{4}(x_1^4x_2^5x_3N^4K_2+x_1^5x_2^4x_3N^4K_1)+\frac{5}{16}(x_1^2x_2^2x_3M^{10}+x_1^6x_2^6x_3[x_1^2-N^2])K_1+$$

$$+x_2x_3^2N^{10}K_2+x_2^2x_1^2x_3^3M^6K_1-x_1x_3^2N^{10}K_1+\frac{5}{3}(x_1^6x_2^7x_3K_2+x_1^7x_2^6x_3K_1)+$$

$$+5(-K_1[x_1^3x_2^2x_3^2N^6+x_1^6x_2^6x_3^2]+x_1^2x_2^3x_3^2N^6K_2)+$$

$$+10(K_2[C_1x_1^2x_2^3N^6+x_1^4x_2^5x_3^2N^2]-K_1[C_1x_1^3x_2^2N^6+C_1x_1^6x_2^6+x_1^5x_2^4x_3^2N^2])+$$

$$+128(C_1x_1^6x_2^3K_2-C_1x_1^3x_2^6+x_2^6x_3^3-x_1^6x_3^3+x_1^6x_3^3K_1-x_2^6x_3^3K_1+C_1x_1^3x_2^6K_1)+$$

$$+864(x_1^5x_2x_3^2N^2K_2-x_1x_2^5x_3^2N^2K_2+x_1^2x_2^2x_3^2N^4K_1)+$$

$$+320(-x_1^6x_2x_3^3K_2+x_1^4x_2^3x_3^3K_2+x_1x_2^6x_3^3K_1-x_1^3x_2^4x_3^3K_1)+$$

$$+\frac{55}{2}x_1^4x_2^4x_3N^4K_1+\frac{110}{3}x_1^6x_2^6x_3K_1+\frac{2}{3}(x_1^4x_2^4x_3^3M^2K_1-x_1x_2x_3^3N^8K_2)+$$

$$+2(C_1x_2N^{10}K_2+K_1[C_1x_3M^{10}-C_1x_1N^{10}+C_2M^{10}x_2^{10}])-\frac{145}{6}K_2x_1^6x_2^7+$$

$$+4(C_2x_1^9K_1+C_2x_2^9K_2-C_2x_1^9x_2K_2-x_1^5x_2^5x_3^3K_2-$$

$$-C_2x_1^9-C_2x_1x_2^9K_2+C_1x_1^6x_2^4x_3K_1-C_1x_1^4x_2^6x_3K_1-C_1x_1^9x_2x_3K_2-$$

$$-C_1x_1x_2^9x_3K_2+C_2x_1^6x_2^4K_1-C_2x_1^4x_2^6K_1)+\frac{3}{16}(-x_1^{11}x_2^5K_2+x_1^5x_2^{11}K_2)+$$

$$+\frac{1}{3}(x_1^6x_2^6N^4K_1+x_3^3M^{10}K_1)+\frac{5}{48}(x_1^4x_2^4N^8K_1-x_1^7x_2^7M^2K_2-x_1^3x_2^3M^{10}K_2)$$

$$A_2^3=20C_1x_1^4x_2^4N^2[x_2K_2-x_1K_1]+2560x_1^3x_2^3x_3^3K_2-\frac{15}{2}C_1x_1^4x_2^4N^4K_1-$$

$$-160(C_1x_1^4x_2^4x_3Z+x_1^4x_2^4x_3^3K_1)+\frac{8}{3}(x_3^3[x_2^9K_2+x_1^9K_1]-x_1^3x_2^3x_3^3N^4K_2)-$$

$$-\frac{41}{24}x_1N^{12}K_1+\frac{15}{32}x_1^8x_2^8K_1-\frac{79}{6}x_1^{12}K_1-\frac{7}{48}M^{14}K_1-632x_1^9Z+$$

$$+8(x_1x_3[C_1x_1^8-x_2^8x_3^2]K_1-C_1M^{10}K_1+x_2x_3[C_1x_2^8-x_1^8x_3^2]K_2)-$$

$$-\frac{61}{6}x_2^{12}K_1-\frac{29}{24}x_2N^{12}K_2+\frac{1}{48}x_1x_2M^{14}K_2+11x_1^2x_2^2x_3N^8K_1+$$

$$+576(x_2^5x_1^2[x_3^3-x_2^2]K_2+x_1^7x_2^2Z-x_1^5x_2^2x_3^3K_1)+\frac{1}{16}x_3M^{14}K_1+$$

$$+48(C_1x_1^4x_2[x_1^4-x_2^4x_3]K_2-C_1x_1^5x_2^4x_3K_1+C_1x_1x_2^8Z)-1920x_1^2x_2^2x_3^3M^2Z+$$
$$+96(C_1x_1^5x_2^4Z+C_1x_1^4x_2^5[1+x_1]K_2)+6(C_1x_1^2x_2^2x_3+C_2x_1^2x_2^2)M^6K_1+$$
$$+3488x_1^3x_2^2x_3(x_2^3K_2-x_1^3Z)+3888x_1^2x_2^2x_3^2(x_1^3Z-x_2^3K_2)+$$
$$+2160(x_1x_2^4x_3^2M^2Z+x_1^4x_2^4x_3^2K_1+x_1^4x_2x_3^2M^2K_2)+\frac{47}{3}x_1^{11}x_3K_1+$$
$$+656x_2^7x_3(x_2Z-x_1^3K_2)-2144x_1^2x_2^3x_3(x_2^3Z+x_1^3K_2)-7040x_1^4x_2^4x_3Z+$$
$$+432(x_1^3x_2^6x_3^2K_1-x_1^7x_3^2Z+x_2^3x_3^2[x_1^6+x_2^4]K_2)+4480x_1^3x_2^3(x_2^3Z+x_1^3K_2)-$$
$$-\frac{145}{8}x_1^4x_2^5N^4K_2+752x_1^7x_3(x_1Z-x_2^3K_2)+4368x_1^5x_2^4Z+1320x_1x_2^8Z-$$
$$-54x_3^2(x_1^9K_1+x_2^9K_2)+94x_1^{10}x_3K_1+\frac{11}{6}x_3N^{12}K_1-\frac{29}{4}x_1^2x_2^3N^8K_2-$$
$$-\frac{35}{6}x_1^7x_2^7K_2-\frac{35}{8}x_1^5x_2^5N^4K_2-\frac{7}{4}x_1^3x_2^3N^8K_2-\frac{7}{24}x_1x_2N^{12}K_2-82x_2^{10}x_3K_1$$
$$A_3^3=-9x_3^2M^{10}K_1-4x_3^2N^{12}K_1-\frac{700}{3}x_1^6x_2^6K_1-\frac{21}{16}x_1^4x_2^4M^6K_1-\frac{35}{48}x_1^2x_2^2N^4M^6K_1-$$
$$-\frac{205}{6}x_1^7x_2^6K_1-\frac{205}{8}x_1^5x_2^4N^4K_1-\frac{41}{4}x_1^3x_2^2N^8K_1-216x_3^2N^8K_1-\frac{41}{3}x_2^{11}x_3K_2+$$
$$+\frac{9}{16}x_1^4x_2^4x_3M^6K_1+\frac{15}{8}x_1^5x_2^5x_3N^4K_2+\frac{3}{4}x_1^3x_2^3x_3N^8K_2+\frac{5}{2}x_1^7x_2^7x_3K_2-$$
$$-\frac{217}{3}x_1^2x_2^9x_3K_2+72x_1^3x_2^3x_3^2N^4K_2-152x_1x_2^9x_3K_2+\frac{1}{8}x_1x_2x_3N^{12}K_2+$$
$$+324x_1^4x_2^4x_3^2(x_1K_1+x_2K_2)+246x_1^8x_2^2x_3K_1+18x_3^2(x_1x_2N^8K_2-x_1^4x_2^4M^2K_1)+$$
$$+162x_1x_2x_3^2(x_2^7K_1+x_1^7K_2)-282x_1^2x_2^8x_3K_1-260x_1^4x_2^6x_3K_1+92x_1^6x_2^4x_3K_1+$$
$$+2528(x_1x_2^7x_3+x_1^7x_2^3)K_2+\frac{223}{3}x_1^9x_2^2x_3K_1-1056x_1^5x_2^5x_3K_2-3104x_1^7x_2x_3K_2-$$
$$-27x_1^2x_2^2x_3^2M^8K_1+\frac{422}{3}x_1^7x_2^4x_3K_1-768x_1x_2x_3^3N^4K_2-200x_1^9x_2x_3K_2+$$
$$+15x_1^3x_2^3N^6K_2+30x_1^5x_2^5N^2K_2-\frac{335}{2}x_1^4x_2^8K_1-\frac{365}{2}x_1^8x_2^4K_1-76x_1^{10}x_2^2K_1$$
$$+\frac{35}{3}x_1x_2^{10}x_3K_1-\frac{64}{3}x_1^3x_2^3x_3^3(x_2^3K_1+x_1^3K_2)+\frac{187}{3}x_1^3x_2^8x_3K_1+\frac{398}{3}x_1^5x_2^6x_3K_1-$$
$$-\frac{253}{3}x_1^8x_2^3x_3K_2-\frac{53}{3}x_1^{10}x_2x_3K_2-\frac{15}{4}x_1^4x_2^4x_3^2N^4K_1-\frac{3}{2}x_1^2x_2^2x_3^2N^8K_1-$$
$$-\frac{458}{3}x_1^4x_2^7x_3K_2-488x_2^9K_2+108x_1^5x_2^5x_3^2K_2-\frac{482}{3}x_1^6x_2^5x_3K_2-$$

$$-2816x_1^3x_2^3x_3(x_2^3K_1+x_1^3K_2)+192x_1^2x_2^2x_3(x_2^5K_2-x_1^5K_1)+244x_2^{10}K_1-$$

$$-1176x_1^8x_2x_3K_2-1776x_1^4x_2^5x_3K_2-936x_1x_2^8x_3K_1-79x_1^{11}K_1-316x_1^{10}K_1-$$
$$-56x_1^6x_2^4K_1+2352x_1^4x_2^5K_2+2040x_1^8x_2K_2-2448x_1^5x_2^4x_3K_1+61x_2^{11}K_2-$$

$$-646x_1^7x_2^4K_1-43x_1x_2^{10}K_1-732x_1^8x_2^2K_1+948x_1^2x_2^8K_1-1064x_1^4x_2^6K_1+$$

$$+754x_1^4x_2^7K_2+341x_1^2x_2^9K_2+97x_1^{10}x_2K_2-359x_1^9x_2^2K_1-251x_1^3x_2^8K_1+$$
$$+416x_1x_2^9K_2+328x_2^9x_3K_2+1952x_1^3x_2^7K_2+3360x_1^5x_2^5K_2-574x_1^5x_2^6K_1+$$

$$+376x_1^9x_3K_1-\frac{1}{192}N^{16}K_1+704x_1^9x_2K_2+449x_1^8x_2^3K_2+826x_1^6x_2^5K_2$$

$$D^3=144(-x_1^5P+x_1^5x_2L_2+x_1x_2^5L_2-x_2^5L_2-x_1x_2^4x_3L_1-x_1^4x_2x_3L_2)+$$

$$+576(-x_1^2x_2^2x_3P)+72(-x_1^6L_1-x_1^4x_2^2L_1+x_1^2x_2^4L_1)+288(x_1^3x_2^2P+x_1^3x_2^3L_2+x_1^2x_2^3L_2)+$$
$$+96(-x_1^3x_2^2x_3L_1-x_1^2x_2^3x_3L_2+x_3(x_1^4+x_2^4)P)+384(-x_1^3x_2x_3L_2+x_1x_2^3x_3L_2)+$$
$$+3(-x_2^8L_1-x_1^8L_1-x_1^4x_2^5L_2-x_1^5x_2^4L_1)+\frac{1}{2}(-x_1^9L_1-x_2^9L_2-x_1^8x_2L_2-x_1x_2^8L_1)+$$
$$+18(-x_1^7L_1+x_2^7L_2-x_1x_2^6L_1+x_1^6x_2L_2-x_1^4x_2^4L_1)+432(x_1^4x_2L_2+x_1x_2^4P)+$$

$$+12(x_1^4x_2^2x_3L_1-x_1^2x_2^4x_3L_1-x_1^6x_2^2L_1-x_1^2x_2^6L_1+x_1^6x_3L_1-x_2^6x_3L_1)+$$

$$+6(x_1^5x_2^2x_3L_1+x_1^3x_2^4x_3L_1-x_1^4x_2^3x_3L_2-x_1^2x_2^5x_3L_2)+$$

$$+2(x_1x_2^6x_3L_1-x_1^6x_2x_3L_2-x_1^6x_2^3L_2-x_1^2x_2^7L_2-x_1^7x_2^2L_1-x_1^3x_2^6L_1+x_1^7x_3L_1-x_2^7x_3L_2)-$$
$$-24x_1x_2x_3N^4L_2+48(x_2^5x_3L_2-x_1^3x_2^3x_3L_2+x_1^5x_3L_1)+54N^2(x_1^2x_2^3L_2-x_1^3x_2^2L_1)$$

$$I^3=-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{2}\sin\left(\frac{sx_2}{2}\right)(s^2x_2-s^3x_1x_2)ds-$$

$$-\frac{3\lambda+7\mu}{4\lambda+8\mu}\int_0^1\frac{\sqrt{s}e^{-\frac{sx_1}{2}}}{4}\cos\left(\frac{sx_2}{2}\right)\{\frac{1}{4}(s^3x_2^2-s^3x_1^2)+s^2x_3+\frac{s^2x_1}{2}\}ds$$

где

$$F_1 = e^{-\frac{x_1}{2}}\cos\frac{x_2}{2} - 1 \quad , \quad F_2 = e^{-\frac{x_1}{2}}\sin\frac{x_2}{2} + 1 \quad , \quad L_2 = \frac{e^{-\frac{x_1}{2}}\sin\frac{x_2}{2}}{(x_1^2 + x_2^2)^4} \quad , \quad K_1 = \frac{e^{-\frac{x_1}{2}}\cos\frac{x_2}{2}}{(x_1^2 + x_2^2)^5} \quad ,$$

$$Z = \frac{F_1}{(x_1^2 + x_2^2)^5}, P = \frac{F_1}{(x_1^2 + x_2^2)^4}, K_2 = \frac{e^{-\frac{x_1}{2}}\sin\frac{x_2}{2}}{(x_1^2 + x_2^2)^5}, T = x_1K_1 + x_2K_2, N^k = x_1^k + x_2^k,$$

$$M^k = x_1^k - x_2^k, L_1 = \frac{e^{-\frac{x_1}{2}}\cos\frac{x_2}{2}}{(x_1^2 + x_2^2)^4}$$

Заключение

В работе было проведено построение точных решений для некоторых подмоделей разрешающей системы в комплексных переменных, после чего сделан переход к действительным переменным и записаны решения системы (5) (найдены функции θ и $\boldsymbol{\omega}$). После этого была произведена подстановка соответствующих выражений θ и $\boldsymbol{\omega}$ в трехмерный аналог формулы Колосова-Мусхелишвили, и, в качестве результата, получено решение исходных уравнений Ламе (1), обладающее произволом в несколько констант.

Важность найденного аналитического решения заключается в возможности использования его при создании и компьютерной реализации методов численного моделирования, для проверки правильности численного решения.

Список литературы

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1978. – 339 с.
2. Чиркунов Ю.А. Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. - Новосибирск: НГУ экономики и управления, 2007. - 362 с.
3. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. - М.: Знание, Сер. Математика и кибернетика, №8, 1989. -48 с.
4. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука, 1983. -280 с.
5. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Знание, Сер. Математика и кибернетика, №7,1991. - 49 с.
6. Янке Е. Специальные функции. Формулы, Графики, Таблицы / Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.; пер. с нем. Л.И. Седова, ред. Л.И. Седова. - М.: Наука, 1964. -344 с.
7. Abramowitz M. Handbook of Mathematical Functions With Formulas Graphs, and Mathematical Tables/ Abramowitz M., Stegun I. - Washington, D.C., National Bureau Of Standarts, 1964.-1037 pp .
8. Ibragimov N.H. Introduction to modern group analysis. – Ufa: Tau, 2000.- 113 pp.