


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра математического моделирования

ДОПУЩЕНО К ЗАЩИТЕ В ГАК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
 Татосов А.В.
21 июня 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Взаимодействие поверхностной волны с вертикальной стенкой

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнила работу
Студентка 2 курса
очной формы обучения



Спиридонова
Наталья
Александровна

Руководитель работы
К.ф.-м.н,
доцент



Басинский
Константин
Юрьевич

Рецензент:
к.ф.-м.н,
доцент



Шалагинов
Сергей
Дмитриевич

Тюмень 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1.	6
Нелинейная краевая задача о волновом движении.....	6
1.1. Основные уравнения.....	6
1.2. Граничные условия.....	8
Глава 2.	9
Взаимодействие плоских волн с вертикальной стенкой.....	9
2.1. Постановка задачи	9
2.2. Линейная задача взаимодействия плоской волны с вертикальной стенкой.	12
2.2.1. Определение и решение исходной системы уравнений	12
2.2.2. Определение уравнения свободной поверхности	16
2.2.3. Частота и коэффициент затухания волны.	17
2.2.4. Определение свободных коэффициентов задачи.	19
2.2.5. Определение давления	20
Заключение.	30
Приложение 1.	31
Приложение 2.	36
Список литературы	38

ВВЕДЕНИЕ

В теории волн фундаментальное значение имеет линейное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа, называемое волновым уравнением [1]

$$\Delta v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Здесь Δ обозначен оператор Лапласа, который в зависимости от постановки задачи, записывается в декартовых или криволинейных координатах, c – постоянная, характеризующая свойства среды.

В присутствии источников или внешних сил процесс возникновения и распространения волн описывается следующим уравнением

$$\Delta v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(r, t) \quad (2)$$

где $f(r, t)$ – некоторая функция, характеризующая внешнее воздействие.

В реальной среде могут происходить необратимые процессы передачи энергии волны частицам среды (диссипация); скорость распространения волны может стать функцией частоты (дисперсия). Это явление учитывается введением в волновое уравнение (1) дополнительных линейных членов, структура которых может быть различной в зависимости от конкретных физических механизмов взаимодействия волн со средой:

$$\Delta v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = L(v) \quad (3)$$

Уравнения (1)-(3) могут быть записаны как для скалярной переменной v , так и для векторной переменной \vec{v} . Решение волнового уравнения должно находиться с учетом начальных и граничных условий, соответствующих физической постановке задачи.

Уравнения (2) и (3) описывают волны в однородных изотропных средах. Если среда неоднородна, то уравнение, описывающее волновой процесс, может быть приведено к (1) или (2), причем c^2 при этом не постоянная величина, а функция координат: $c^2(x, y, z)$.

Большое значение в теории волн имеют гармонические волны. Функция $v(x, y, z, t)$, описывающая гармоническую волну, может быть представлена в виде

$$v(x, y, z, t) = \frac{1}{2} [A(x, y, z)e^{i\omega t} + A^*(x, y, z)e^{-i\omega t}] \quad (4)$$

где A – комплексная величина. Подставив (4) в (1), получим уравнение

$$\Delta A + k^2 A = 0, \quad (5)$$

где $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. При подстановке (4) в (3) опять получим уравнение (5), однако k^2 в этом случае зависит от частоты более сложным образом и является комплексной величиной $k^2 = [k'(\omega) + ik''(\omega)]^2$. Уравнение (5) называется уравнением Гельмгольца или приведенным волновым уравнением.

Задача исследования волн сводится к определению поведения в пространстве и времени величин, характеризующих волновой процесс и может быть разделена на два этапа:

1) Воспользовавшись исходной системой уравнений, описывающих волновое поле в среде (например, уравнениями механики для сплошной среды), получить волновое уравнение типа (1)-(5). Сформулировать начальные и граничные условия поставленной задачи.

2) Решить полученные уравнения при заданных начальных и граничных условиях. Сделать анализ результатов.

Задачи волнового движения однофазной жидкости хорошо изучены и представлены в работах [1]-[3],[5],[8]-[11]. В задачах движения многофазной жидкости возникают дополнительные трудности из-за учета межфазового взаимодействия и структуры фаз. Это приводит к необходимости учета дополнительных параметров и выявлению дополнительных условий для совместности системы уравнений, описывающих задачу. Одним из таких условий стало условие равенства возмущений давления в фазах, представленное в работе [7].

Задача взаимодействия однофазной волны рассматривается в работах [1] -[3]. Давление на стенку в работе [2] представлено как сумма гидростатического давления и динамической составляющей давления. Решение раскладывается в ряд по степеням малого параметра.

Задачами нашего исследования являются выявление функциональной зависимости давления двухфазной жидкости на вертикальную стенку от параметров волны и среды при условии непротекания стенки и дна, а так же рассмотрение на примерах влияния этих параметров на возмущение давления и давление в целом.

ГЛАВА 1.

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О ВОЛНОВОМ ДВИЖЕНИИ

1.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим слой двухфазной жидкости постоянной глубины, находящейся на твердом горизонтальном основании и ограниченный вертикальной непроницаемой стенкой. На стенку набегают волна (Рис.1). Исследуем давление, оказываемое на стенку в зависимости от параметров волны и среды.

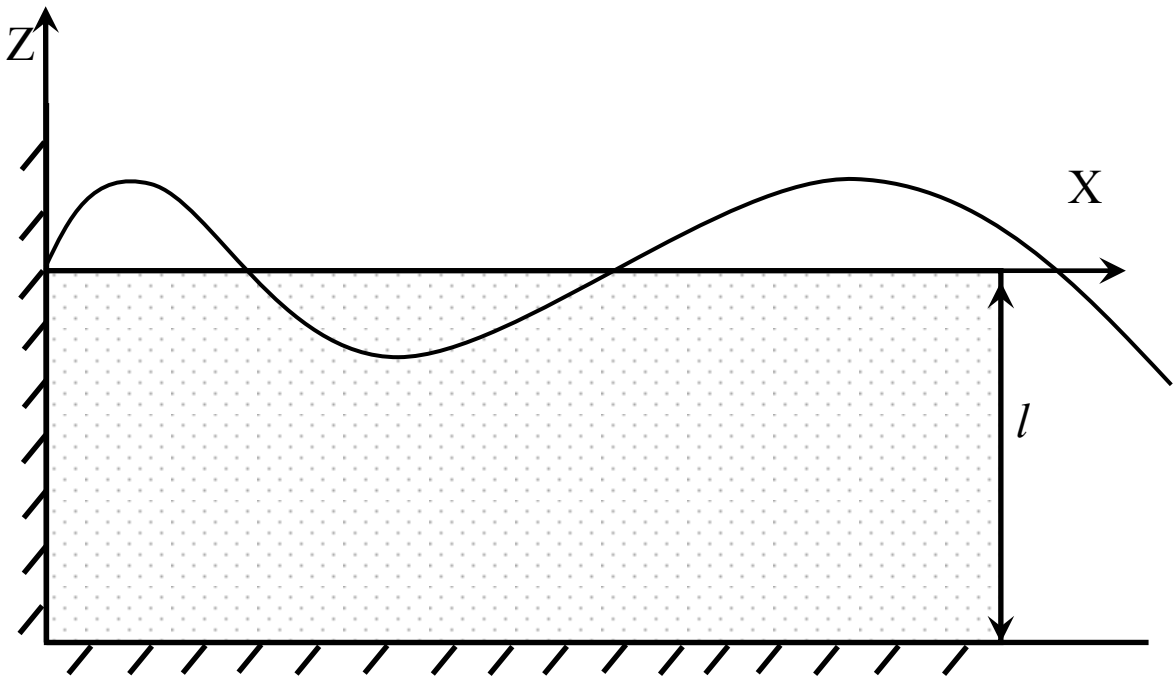


Рис. 1.

Будем полагать, что свободная поверхность граничит со средой малой плотности, которая характеризуется постоянным давлением. Пусть несущая фаза является идеальной несжимаемой жидкостью. Вязкость этой фазы проявляется только на межфазовой границе. Дисперсная фаза представлена в виде недеформируемых частиц. Предположим так же, что отсутствуют тепло- и массообмен. Опишем движение уравнениями [1]

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t^*} + \bar{\nabla}(\rho_1 \bar{v}_1^*) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t^*} + \bar{\nabla}(\rho_2 \bar{v}_2^*) = 0, \quad (6)$$

$$\rho_1 \frac{d\bar{v}_1^*}{dt^*} = -\alpha_1 \bar{\nabla} P_1 - \alpha_1 \alpha_2 \chi^m \rho_1^0 \left(\frac{d\bar{v}_1^*}{dt^*} - \frac{d\bar{v}_2^*}{dt^*} \right) - \alpha_1 \alpha_2 R (\bar{v}_1^* - \bar{v}_2^*) + \rho_1 \bar{g},$$

$$\rho_2 \frac{d\bar{v}_2^*}{dt^*} = -\alpha_2 \bar{\nabla} P_2 + \alpha_1 \alpha_2 \chi^m \rho_2^0 \left(\frac{d\bar{v}_1^*}{dt^*} - \frac{d\bar{v}_2^*}{dt^*} \right) + \alpha_1 \alpha_2 R (\bar{v}_1^* - \bar{v}_2^*) + \rho_2 \bar{g},$$

$$\rho_1 = \rho_1^0 \alpha_1, \rho_2 = \rho_2^0 \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \rho_1^0, \rho_2^0 = \text{const.}$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения:

размерные величины индексируются верхним индексом «звездочка»,

α_1, α_2 – объемная концентрация несущей и дисперсной фаз

соответственно,

\bar{v}_1^*, \bar{v}_2^* – векторы скоростей фаз,

P_1, P_2 – давление в несущей и дисперсной фазах соответственно,

ρ_1, ρ_2 – приведенные плотности фаз,

ρ_1^0, ρ_2^0 – истинные плотности фаз,

\bar{g} – ускорение силы тяжести,

R – коэффициент, характеризующий силу вязкого трения Стокса,

$\chi^m = \frac{s}{2}$ – экспериментально определяемый безразмерный

коэффициент, учитывающий силу присоединенных масс. ($s=0$ или $s=1$ в зависимости от того, учитывается или нет сила присоединенных масс).

1.2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Граничные условия запишем в соответствии с [4]. Координатные оси располагаем следующим образом (Рис.1): невозмущенная свободная поверхность совпадает с плоскостью $z^* = 0$, дно совпадает с плоскостью $z^* = -l$. Зададим уравнением $z^* = \xi(t^*, x^*, y^*)$ возмущение свободной поверхности, вызванное распространением волны (в нашем случае плоской волны $z^* = \xi(t^*, x^*)$). Условие отсутствия потока массы смеси через часть свободной поверхности, занимаемую несущей и дисперсной фазами, будут иметь вид [1]

$$\alpha_1 \rho_1^0 (v_{1n}^* - V_n) = 0, \quad \alpha_2 \rho_2^0 (v_{2n}^* - V_n) = 0,$$

где v_{1n}^*, v_{2n}^* - нормальная составляющая скорости несущей и дисперсной фаз соответственно,

V_n - нормальная составляющая скорости свободной поверхности. Условие отсутствия потока массы через единую для обеих фаз поверхность запишется в виде

$$\alpha_1 v_{1n}^* - \alpha_2 v_{2n}^* = V_n, \quad z^* = \xi(t^*, x^*, y^*), \quad (7)$$

где $\alpha_1 v_{1n}^* - \alpha_2 v_{2n}^*$ - нормальная составляющая объемной скорости смеси.

Запишем условие непрерывности потока импульса через часть свободной поверхности, занимаемой конкретной фазой в форме [1]

$$\alpha_1 (\rho_1^0 v_{1n}^* (v_{1n}^* - V_n) + P_1 - P_a) = 0, \quad \alpha_2 (\rho_2^0 v_{2n}^* (v_{2n}^* - V_n) + P_2 - P_a) = 0.$$

При условии отсутствия потока массы будем иметь

$$\alpha_1 (P_1 - P_a) = 0, \quad \alpha_2 (P_2 - P_a) = 0.$$

Для единой свободной поверхности $z^* = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi = \xi$ получим

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_a, \quad z^* = \xi(t^*, x^*, y^*). \quad (8)$$

Условия (2), (3) являются кинематическим и динамическим граничными условиями. Будем полагать горизонтальную поверхность дна и вертикальную стенку гидрофобной, тогда из условия отсутствия протекания смеси получим

$$v_{1n}^* = 0, \quad v_{2n}^* = 0, \quad z^* = -l, \quad x^* = 0. \quad (9)$$

ГЛАВА 2.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН С ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКОЙ

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение жидкости в плоскости x^*z^* , вызванное распространением волны по поверхности слоя. Будем полагать, что в невозмущенном слое дисперсная фаза распределена равномерно, т.е.

$$\alpha(z^*) = \alpha_0 = \text{const.} \quad (10)$$

Запишем безразмерные волновые уравнения и граничные условия. Будем полагать, что длина волны много больше ее высоты. Тогда в качестве малого параметра [1] примем

$$\varepsilon = k\xi_{\max},$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, λ – длина волны, ξ_{\max} – максимальное значение высоты свободной поверхности.

Введем следующие безразмерные переменные и величины [3]

$$\begin{aligned} t = \omega t^*, x = kx^*, z = kz^*, l = kl^*, \mu_1 = \frac{\rho_1^0}{\rho^0}, r = \frac{R}{\rho^0 \omega_0}, \\ \gamma = \frac{\alpha'}{\varepsilon \alpha_0}, \zeta = \frac{k\xi}{\varepsilon}, \bar{v}_1 = \frac{k\bar{v}_1^*}{\varepsilon \omega_0}, \bar{v}_2 = \frac{k\bar{v}_2^*}{\varepsilon \omega_0}, p = \frac{p'k^2}{\varepsilon \rho^0 \omega_0^2}, c = \frac{\omega^*}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

$\rho_0 = (1 - \alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0\rho_2^0$ – плотность покоящейся смеси, c_0 – фазовая скорость линейной задачи, $\omega^* = kc^*$, – частота волны.

Получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} -\alpha_0 c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0) \left[\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right] - \varepsilon \alpha_0 \left\{ v_{1x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \gamma \left[\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right] \right\} \\ = 0, \\ c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} + \varepsilon \left\{ v_{2x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \gamma \left[\frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0\right) c \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} - \frac{s}{2} \alpha_0 c \mu_1 \frac{\partial v_{2x}}{\partial t} - r \alpha_0 (v_{2x} - v_{1x}) + \frac{\partial p}{\partial x} + \\
& + \varepsilon \left\{ \mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0\right) \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \right] - \mu_1 \frac{s}{2} \alpha_0 \left[v_{2x} \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \right] \right. \\
& \quad \left. - r \alpha_0 \gamma (v_{2x} - v_{1x}) - \mu_1 \frac{s}{2} \alpha_0 \gamma c \left(\frac{\partial v_{2x}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} \right) \right\} \\
& \quad + \varepsilon^2 \mu_1 \frac{s}{2} \alpha_0 \gamma \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} - v_{2x} \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} - v_{2z} \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \right] = 0, \\
& \mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0\right) c \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} - \frac{s}{2} \alpha_0 c \mu_1 \frac{\partial v_{2z}}{\partial t} - r \alpha_0 (v_{2z} - v_{1z}) + \frac{\partial p}{\partial z} + \\
& + \varepsilon \left\{ \mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0\right) \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right] - \mu_1 \frac{s}{2} \alpha_0 \left[v_{2x} \frac{\partial v_{2z}}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right] \right. \\
& \quad \left. - r \alpha_0 \gamma (v_{2z} - v_{1z}) - \mu_1 \frac{s}{2} \alpha_0 \gamma c \left(\frac{\partial v_{2z}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} \right) \right\} \\
& \quad + \varepsilon^2 \mu_1 \frac{s}{2} \alpha_0 \gamma \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - v_{2x} \frac{\partial v_{2z}}{\partial x} - v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right] = 0, \\
& \mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) c \frac{\partial v_{2x}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) c \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} + r (1 - \alpha_0) (v_{2x} - v_{1x}) + \frac{\partial p}{\partial x} \\
& + \varepsilon \left\{ \left(\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \right) \left[v_{2x} \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \right] - r \alpha_0 \gamma (v_{2z} - v_{1z}) \right. \\
& \quad \left. - \mu_1 \frac{s}{2} \alpha_0 \gamma c \left(\frac{\partial v_{2x}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} \right) \right\} \\
& \quad + \varepsilon^2 \mu_1 \frac{s}{2} \alpha_0 \gamma \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} - v_{2x} \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} - v_{2z} \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_2 + \frac{s}{2}\mu_1(1 - \alpha_0)c \frac{\partial v_{2z}}{\partial t} - \frac{s}{2}\mu_1(1 - \alpha_0)c \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} + r(1 - \alpha_0)(v_{2z} - v_{1z}) + \frac{\partial p}{\partial z} \\
& + \varepsilon \left\{ \left(\mu_2 + \frac{s}{2}\mu_1(1 - \alpha_0) \right) \left[v_{2x} \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \right] \right. \\
& - \frac{s}{2}\mu_1(1 - \alpha_0) \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right] - r\alpha_0\gamma(v_{2z} - v_{1z}) \\
& \left. - \mu_1 \frac{s}{2}\alpha_0\gamma c \left(\frac{\partial v_{2z}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} \right) \right\} \\
& + \varepsilon^2 \mu_1 \frac{s}{2}\alpha_0\gamma \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - v_{2x} \frac{\partial v_{2z}}{\partial x} - v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned}
c \frac{\partial \zeta}{\partial t} - (1 - \alpha_0)v_{1z} - \alpha_0 v_{2z} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} [(1 - \alpha_0)v_{1x} + \alpha_0 v_{2x}] - \alpha_0\gamma(v_{2z} - v_{1z}) \right\} \\
+ \varepsilon^2 \alpha_0\gamma \frac{\partial \zeta}{\partial x} (v_{2x} - v_{1x}) = 0, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$p - v_0^2 \zeta + \varepsilon \alpha_0 (\mu_1 - \mu_2) v_0^2 \zeta \gamma = 0, v_0^2 = \frac{gk}{\omega_0^2}.$$

На дне при $z = -l$ $v_{iz} = 0$, и на вертикальной стенке при $x = 0$ $v_{ix} = 0, i = 1, 2$. Это условия непротекания.

2.2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКОЙ.

2.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу в линейной постановке. Для этого в уравнениях (12)-(13) будем полагать $\varepsilon = 0$. Кроме того, частота волны ω^* равна частоте волны, соответствующей линейной задаче ω_0 , откуда $c = \frac{\omega^*}{\omega_0} = 1$. Получим следующую систему уравнений и граничных условий

$$-\alpha_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0) \left[\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right] = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} = 0,$$

$$\mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0 \right) \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} - \frac{s}{2} \alpha_0 \mu_1 \frac{\partial v_{2x}}{\partial t} - r \alpha_0 (v_{2x} - v_{1x}) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0 \right) \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} - \frac{s}{2} \alpha_0 \mu_1 \frac{\partial v_{2z}}{\partial t} - r \alpha_0 (v_{2z} - v_{1z}) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \frac{\partial v_{2x}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} + r (1 - \alpha_0) (v_{2x} - v_{1x}) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \frac{\partial v_{2z}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} + r (1 - \alpha_0) (v_{2z} - v_{1z}) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - (1 - \alpha_0) v_{1z} - \alpha_0 v_{2z} = 0, \quad (15)$$

$$p - v_0^2 \zeta = 0, v_0^2 = \frac{gk}{\omega_0^2}. \quad (16)$$

На дне $z = -l$ и на вертикальной стенке $x = 0$ выполнены условия непротекания

$$v_{iz} = 0, v_{ix} = 0, i = 1, 2. \quad (17)$$

Решение (14)-(16) будем искать в виде

$$v_{ix} = \frac{e^{-bt}}{sh(l)} [A_i \cos(t) + B_i \sin(t)] \sin(x) ch(z + l),$$

$$v_{iz} = \frac{e^{-bt}}{sh(l)} [C_i \cos(t) + D_i \sin(t)] \cos(x) sh(z + l), \quad (18)$$

$$p = \frac{e^{-bt}}{sh(l)} [K \cos(t) + L \sin(t)] \cos(x) ch(z + l),$$

$$\gamma = \frac{e^{-bt}}{sh(l)} [G_1 \cos(t) + G_2 \sin(t)] \cos(x) ch(z + l).$$

$b = \frac{\beta}{\omega}$ – безразмерный коэффициент затухания.

Данное представление вида решений обусловлено следующими факторами:

- при отсутствии дисперсной фазы вид решения должен соответствовать известному виду решения волнового уравнения идеальной несжимаемой жидкости;
- вид решения должен удовлетворять условиям непротекания на границах (на дне и на вертикальной стенке);
- решения должны «затухать» с течением времени.

Подставим (18) в уравнения (14). Получим следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_i, B_i, C_i, D_i, K, L, G_1, G_2$.

$$-\alpha_0(-bG_1 + G_2) + (1 - \alpha_0)(A_1 + C_1) = 0,$$

$$-\alpha_0(-bG_2 + G_1) + (1 - \alpha_0)(B_1 + D_1) = 0,$$

$$-bG_1 + G_2 + A_2 + C_2 = 0,$$

$$-bG_2 + G_1 + B_2 + D_2 = 0,$$

$$\mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0\right) (-bA_1 + B_1) - \frac{s}{2} \alpha_0 \mu_1 (-bA_2 + B_2) - r \alpha_0 (A_2 - A_1) - K = 0,$$

$$\mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0\right) (-bB_1 - A_1) - \frac{s}{2} \alpha_0 \mu_1 (-bB_2 - A_2) - r \alpha_0 (B_2 - B_1) - L = 0,$$

$$\mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0\right) (-bC_1 + D_1) - \frac{s}{2} \alpha_0 \mu_1 (-bC_2 + D_2) - r \alpha_0 (C_2 - C_1) + K = 0,$$

$$\mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0\right) (-bD_1 - C_1) - \frac{s}{2} \alpha_0 \mu_1 (-bD_2 - C_2) - r \alpha_0 (D_2 - D_1) + L = 0,$$

$$\left[\mu_2 + \frac{s}{2}\mu_1(1 - \alpha_0)\right](-bA_2 + B_2) - \frac{s}{2}\alpha_0\mu_1(1 - \alpha_0)(-bA_1 + B_1) \\ + r(1 - \alpha_0)(A_2 - A_1) - K = 0,$$

$$\left[\mu_2 + \frac{s}{2}\mu_1(1 - \alpha_0)\right](-bA_2 + B_2) - \frac{s}{2}\alpha_0\mu_1(1 - \alpha_0)(-bA_1 + B_1) \\ + r(1 - \alpha_0)(A_2 - A_1) - K = 0,$$

$$\left[\mu_2 + \frac{s}{2}\mu_1(1 - \alpha_0)\right](-bB_2 + A_2) - \frac{s}{2}\alpha_0\mu_1(1 - \alpha_0)(-bB_1 - A_1) \\ + r(1 - \alpha_0)(B_2 - B_1) - L = 0,$$

$$\left[\mu_2 + \frac{s}{2}\mu_1(1 - \alpha_0)\right](-bC_2 + D_2) - \frac{s}{2}\alpha_0\mu_1(1 - \alpha_0)(-bC_1 + D_1) \\ + r(1 - \alpha_0)(C_2 - C_1) + K = 0,$$

$$\left[\mu_2 + \frac{s}{2}\mu_1(1 - \alpha_0)\right](-bD_2 - C_2) - \frac{s}{2}\alpha_0\mu_1(1 - \alpha_0)(-bD_1 - C_1) \\ + r(1 - \alpha_0)(D_2 - D_1) + L = 0.$$

Откуда получаем

$$A_1 = -C_1 = A_{11}K + A_{12}L,$$

$$A_2 = -C_2 = A_{21}K + A_{22}L,$$

$$B_1 = -D_1 = B_{11}K + B_{12}L,$$

$$B_2 = -D_2 = B_{21}K + B_{22}L,$$

$$G_1 = G_2 = 0,$$

где

$$A_{11} = \frac{(w-n)(d \cdot e - v \cdot m) + (m-d)(d \cdot f + a \cdot m) + (e-v)(a \cdot e - v \cdot f)}{(a \cdot e - v \cdot f)^2 + (w \cdot v - n \cdot e)^2 + (m \cdot n - d \cdot w)^2 + (a \cdot m - d \cdot f)^2 + 2(-d \cdot e + v \cdot m) \cdot (f \cdot n - a \cdot w)},$$

$A_{12} =$

$$= \frac{(m-d)(d \cdot w - n \cdot m) + (e-v)(w \cdot v - n \cdot e) + (a-f)(m \cdot v - d \cdot e)}{(a \cdot e - v \cdot f)^2 + (w \cdot v - n \cdot e)^2 + (m \cdot n - d \cdot w)^2 + (a \cdot m - d \cdot f)^2 + 2(-d \cdot e + v \cdot m) \cdot (f \cdot n - a \cdot w)}$$

$$a = -b\mu_1 \left(1 + \frac{s\alpha_0}{2}\right) + r\alpha_0, d = -\frac{1}{2}\mu_1 s\alpha_0,$$

$$e = -b \cdot \left[\mu_2 + \frac{s\mu_1(1 - \alpha_0)}{2}\right] + r(1 - \alpha_0),$$

$$f = \frac{s\mu_1(1 - \alpha_0)}{2} - r(1 - \alpha_0), m = \mu_2 + \frac{s\mu_1(1 - \alpha_0)}{2},$$

$$n = \mu_1 \left(1 + \frac{s\alpha_0}{2}\right), v = \frac{1}{2}\mu_1 sb\alpha_0 - r\alpha_0, w = -\frac{1}{2}\mu_1 s(1 - \alpha_0).$$

Из равенства нулю коэффициентов G_1 и G_2 следует, что в линейной задаче возмущение концентрации дисперсной фазы равно нулю.

Вид других коэффициентов весьма объемён и представлен в Приложении 2. Там же представлен процесс получения решения системы. Хотелось бы отметить, что коэффициенты, необходимые в процессе исследования возмущения давления пересчитывались в зависимости от свойств фаз, длины волны и т.д.

2.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Определим форму свободной поверхности из условия (15)

$$\zeta(x, t) = \frac{e^{-bt}}{(b^2 + 1)} \{A[\cos(x + t) + \cos(x - t)] + B[\sin(x + t) + \sin(x - t)]\} \\ + \int F(x) dx = \frac{e^{-bt} \cos(x)}{(b^2 + 1)} [A \cos(t) + B \sin(t)] + \int F(x) dx,$$

где

$$A = \alpha_0(bC_1 - bC_2 - D_2 + D_1) - D_1 - bC_1,$$

$$B = \alpha_0(-C_1 + C_2 - bD_2 + bD_1) - bD_1 + C_1.$$

Входящие в выражение постоянные D_i, C_i найдены выше.

Определим $F(x)$ из условия [1]

$$\int_0^{2\pi} \zeta(x, t) dx = 0.$$

Откуда получим, что $F(x)$ может быть любой функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\int_0^{2\pi} F(x) dx = 0.$$

В размерном виде уравнение запишется следующим образом:

$$\xi^* = \frac{\varepsilon \omega^2}{k(\beta^2 + \omega^2)} e^{-\beta t^*} \cdot \sqrt{A^{*2} + B^{*2}} \sin(\omega t^* + \alpha) \cos(kx^*),$$

где $\alpha = \arctg\left(\frac{A^*}{B^*}\right)$, A^*, B^* – коэффициенты, зависящие от свободных переменных K^*, L^* , выраженных через размерные характеристики смеси.

2.2.3. ЧАСТОТА И КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ ВОЛНЫ.

Для определения коэффициента затухания и частоты волны подставим в уравнения (15) и (16) выражения (18). Воспользовавшись свойством линейной независимости тригонометрических функций, приравняем коэффициенты при $\sin(x - t)$ и $\cos(x - t)$, получаем следующие уравнения

$$\begin{cases} K(b^2 + 1)^2 \operatorname{cth} l = v_o^2 (\delta_1 K + \delta_2 L) \\ L(b^2 + 1)^2 \operatorname{cth} l = v_o^2 (-\delta_2 K + \delta_1 L) \end{cases}$$

Данная система имеет нетривиальное решение для K и L , если ее определитель равен нулю, т. е.

$$\left[(b^2 + 1)^2 \operatorname{cth} l - v_o^2 \delta_1 \right]^2 + v_o^4 \delta_2^2 = 0.$$

это возможно при одновременном выполнении равенств

$$\begin{cases} \delta_2 = 0 \\ \delta_1 = (b^2 + 1)^2 \operatorname{cth} l / v_o^2 \end{cases}$$

$$\text{где } \delta_1 = 1 - b^2 + 2(b^2 + 1)(\mu - \mu_1 \mu_2) [2br + (1 - b^2) \mu_1 (s + 2\mu_2)] / d,$$

$$\delta_2 = -2b + 4(b^2 + 1)(\mu - \mu_1 \mu_2) [r - b\mu_1 (s + 2\mu_2)] / d$$

$$d = (2r - b\mu_1 (s + 2\mu_2))^2 + \mu_1^2 (s + 2\mu_2)^2.$$

Воспользуемся формулами, полученными в работе [4]. Выпишем их с учетом наших обозначений. В результате получим для коэффициента затухания:

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{k_2}{2} + \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + \frac{k_1^3}{27}}} k + \sqrt[3]{-\frac{k_2}{2} - \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + \frac{k_1^3}{27}}} k +$$

$$+ \frac{2R}{3\rho_1^0 \left(s + \frac{\rho_2^0}{(1-\alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0\rho_2^0} \right)},$$

где

$$k_1 =$$

$$\frac{1}{12 \left(\frac{\rho_1^0}{\rho^0} \right)^2 \left(s + \frac{2\rho_2^0}{\rho^0} \right)^2} \left(\frac{3\rho_1^0}{\rho^0} \left(s + \frac{2\rho_2^0}{\rho^0} \right) \left(s \frac{\rho_1^0}{\rho^0} + 2 \left(\alpha_0 \frac{\rho_1^0}{\rho^0} + (1-\alpha_0) \frac{2\rho_2^0}{\rho^0} \right) g^2 th(lk) - \frac{4R^2}{(\rho^0)^2 k^2} \right) \right),$$

$$k_2 = \frac{1}{54 \left(\frac{\rho_1^0}{\rho^0} \right)^3 \left(s + \frac{2\rho_2^0}{\rho^0} \right)^3} \frac{Rg^2 th(kl)}{\rho_0 k^3} \left(\frac{4R^2}{(\rho^0)^2 k^2} + \frac{9\rho_1^0}{\rho^0} \left(s + \frac{2\rho_2^0}{\rho^0} \right) \left(s \frac{\rho_1^0}{\rho^0} - \alpha_0 \frac{\rho_1^0}{\rho^0} - (1-\alpha_0) \frac{\rho_2^0}{\rho^0} + \frac{3\rho_1^0 \rho_2^0}{(\rho^0)^2} \right) \right).$$

Для частоты волны

$$\omega = \sqrt{\frac{gtgh(kl)}{k^3} + \frac{2\alpha_0(1-\alpha_0)(\rho_1^0 - \rho_2^0)^2 g \cdot th(kl)}{k^3 (s\rho_0 + 2\rho_2^0)\rho_1^0} + \frac{\beta}{k^4} \left(3\beta - \frac{4R}{\rho_1^0 (s\rho_0 + 2(\rho_2^0)^2)} \right)}$$

2.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАДАЧИ.

Для определения свободных коэффициентов K, L воспользуемся дополнительными условиями на границе области изучаемой жидкости. Будем полагать, что на вертикальной стенке высота волны жидкости в начальный момент времени достигает своего наибольшего значения и равна ξ_{max}^* . Тогда получим

$$\xi_{max}^* = \frac{\varepsilon\omega^2}{(\beta^2 + \omega^2)k} e^{-\beta t^*} \cdot A^*, \quad A^* = \frac{(\beta^2 + \omega^2)k}{\varepsilon\omega^2} e^{\beta t^*} \xi_{max}^*.$$

Откуда

$$-\alpha_0(D_1^* + D_2^*) + D_1^* = \frac{ke^{\beta t}}{\varepsilon} \xi_{max}^*. \quad (19)$$

Кроме того, из этого же условия будем иметь, что

$$\arctg\left(\frac{A^*}{B^*}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad B^* = 0.$$

Из последнего равенства получим

$$-\alpha_0\left(C_1^* + C_2^* - \frac{\beta}{\omega}D_2^* + \frac{\beta}{\omega}D_1^*\right) - \frac{\beta}{\omega}D_1^* + C_1^* = 0. \quad (20)$$

Так как, входящие в уравнения коэффициенты C_i^*, D_i^* ($i=1,2$), линейно зависят от свободных коэффициентов K, L , то мы получаем систему двух линейных однородных уравнений с двумя переменными. Задавая значения параметров жидкости, таких как: глубина жидкости, плотность несущей и дисперсной фаз, коэффициент затухания, концентрация примеси в покоящейся фазе, размер частиц примеси, и решая систему, мы получим значения свободных коэффициентов для каждой конкретной задачи.

2.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ

Запишем давление в смеси как сумму двух давлений в каждой из фаз[4]:

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2,$$

где P_1, P_2 – давления в фазах, α_2 - концентрация дисперсной фазы, а $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$.

Для свободной поверхности $\xi^* = f(x, t)$ получим $P = P_a$, где P_a - атмосферное давление. Будем полагать, что в отсутствии волны жидкость находилась в покое. Тогда из условия равенства на границе давления в смеси и атмосферного давления найдем гидростатическую составляющую давления в каждой фазе

$$P_{i0} = P_a - z^* \rho_i^0 g, \quad i = 1, 2.$$

Определим давление в фазах как сумму гидростатического давления и возмущения давления p' , вызванного движением жидкости. Будем полагать, что возмущение давления в обеих фазах одинаково, тогда

$$P_i = P_a - z^* \rho_i^0 g + p'.$$

Особое внимание следует обратить на объемную концентрацию несущей и дисперсной фаз α_1, α_2 . В дисперсной фазе концентрация может быть представлена как сумма концентрации примеси в отсутствии волны ($\alpha(z^*)$) и возмущения концентрации дисперсной фазы (α').

$$\alpha_1 = 1 - \alpha(z^*) - \alpha', \quad \alpha_2 = \alpha(z^*) + \alpha'$$

Полагая $\alpha(z) = \text{const} = \alpha_0$ и учитывая, что при решении линейной задачи (как показано п. 2.2.1) возмущение концентрации дисперсной фазы равно нулю, будем иметь

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_0, \quad \alpha_2 = \alpha_0.$$

Окончательно для давления в смеси будем иметь соотношение

$$P = P_a - (\rho_1^0(1 - \alpha_0) + \rho_1^0 \alpha_0) g z^* + p'. \quad (21)$$

Выразим возмущение давления из соотношения связывающего его с безразмерным (p) и представим последнее с учетом формул (18). Тогда

$$p' = p \frac{\varepsilon \rho^0 \omega_0^2}{k^2} =$$

$$= \frac{\varepsilon \rho^0 \omega_0^2}{k^2} \frac{e^{-\beta t^*}}{\text{sh}(kl^*)} [K \cos(\omega t^*) + L \sin(\omega t^*)] \cos(kx^*) \text{ch}(kz^* + kl^*).$$

Для того чтобы получить давление на стенку проинтегрируем выражение (16) по переменной z , предварительно отметив что на стенке $x^* = 0$. Таким образом, давление найдется как следующий интеграл

$$P =$$

$$= \int_{-l^*}^{\xi^*} \left(P_a - (\rho_1^0(1 - \alpha_0) + \rho_1^0 \alpha_0) g z^* \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon \rho^0 \omega_0^2}{k^2} \frac{e^{-\beta t^*}}{\text{sh}(kl^*)} [K \cos(\omega t^*) + L \sin(\omega t^*)] \text{ch}(kz^* + kl^*) \right) dz^* =$$

$$= P_a \cdot (\xi^* + l^*) - \frac{(\rho_1^0(1 - \alpha_0) + \rho_1^0 \alpha_0) g [(\xi^*)^2 - (l^*)^2]}{2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon \rho^0 \omega_0^2}{k^3} \frac{e^{-\beta t^*}}{\text{sh}(kl^*)} [K \cos(\omega t^*) + L \sin(\omega t^*)] \text{sh}(k\xi^* + kl^*).$$

2.2.6. ПРимеры расчетов.

На рисунке 2.1. проведен вид свободной поверхности в слое смеси толщиной $l^* = 10$ м, вызванной распространением волны длиной $\lambda = 1$ м. Несущей фазой является жидкость плотности $\rho_1^0 = 1000$ кг/м³, динамическая вязкость которой характеризуется коэффициентом $\eta = 1.004 \cdot 10^{-3}$ Па·с; дисперсная фаза представляет собой недеформируемые сферические частицы радиуса $a = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м при различной концентрации дисперсной фазы. Сплошной линией показано изменение свободной поверхности при $\alpha = 0.3$, пунктирной линией при $\alpha = 0.1$. Из графика видно, что увеличение концентрации дисперсной фазы приводит к быстрому затуханию колебаний свободной поверхности.

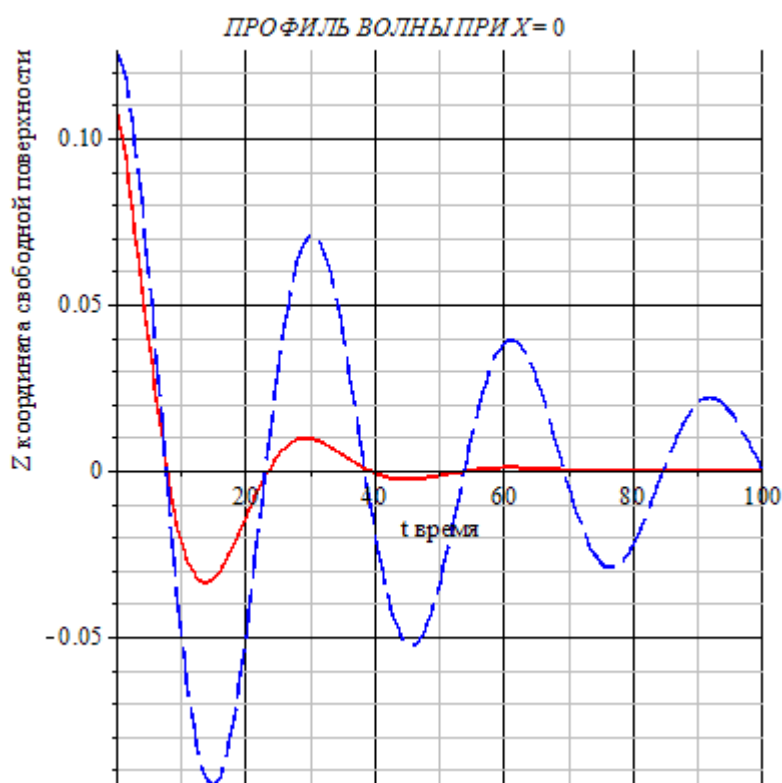


Рис.2.1.

Сравним влияние на свободную поверхность радиусов частиц при одинаковой концентрации и прочих параметрах (Рис.2.2).

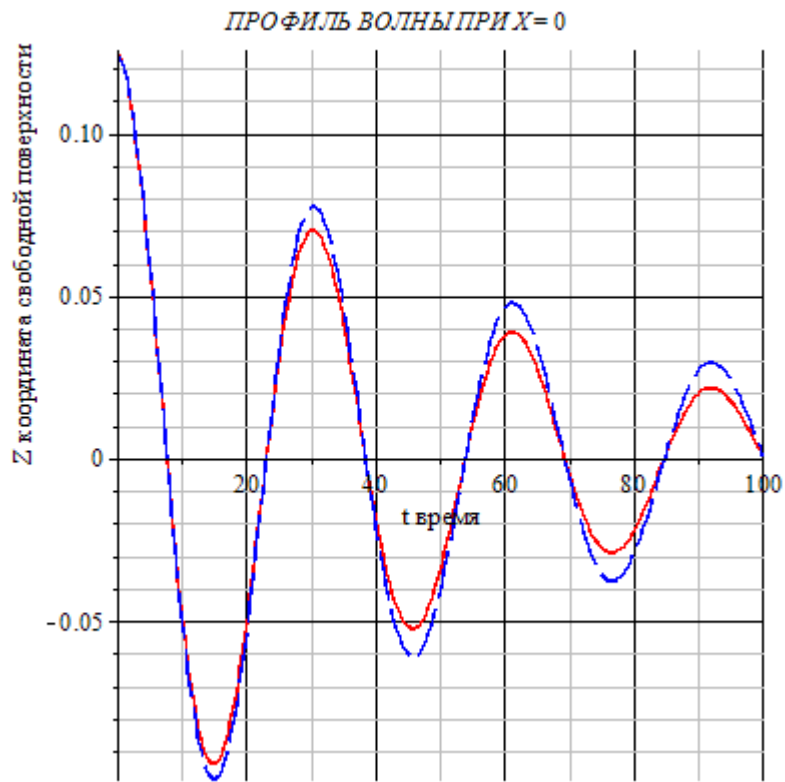
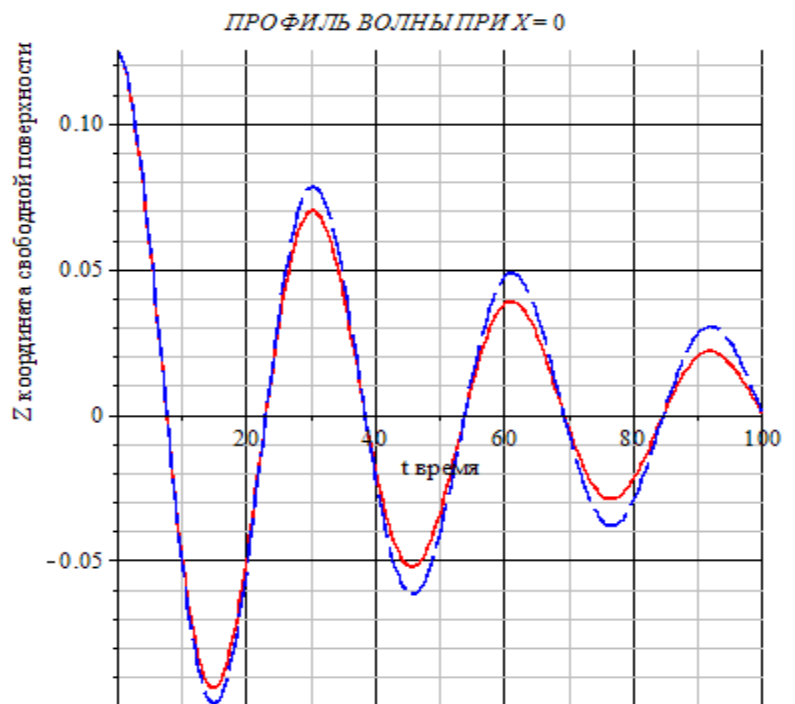


Рис.2.2.

Сплошная линия соответствует радиусу частиц $a = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м
пунктирная линия $a = 0,22 \cdot 10^{-2}$ м. Профиль свободной поверхности



практически идентичен.

Рис. 2.3.

На Рис.2.3. приведен график свободной поверхности при различных значениях коэффициента динамической вязкости несущей фазы. Сплошная линия соответствует коэффициенту вязкости $\eta = 1.004 \cdot 10^{-3} \text{Па} \cdot \text{с}$, пунктирная линия $\eta = 1.307 \cdot 10^{-3} \text{Па} \cdot \text{с}$. Более вязкая несущая фаза приводит к скорейшему затуханию колебаний.

Проанализируем влияние радиуса частиц дисперсной фазы, вязкости несущей фазы, плотности несущей фазы и длины волны на изменение давления..

Будем полагать, что частицы имеют сферическую форму. Радиус сфер $a=0.25 \cdot 10^{-2} \text{м}$, $a=0.22 \cdot 10^{-2} \text{м}$, $a=0.2 \cdot 10^{-2} \text{м}$ при одинаковых прочих параметрах: глубина 10 м, плотность несущей фазы $\rho_1^0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность дисперсной фазы $\rho_2^0 = 0.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, концентрация дисперсной фазы $\alpha_0 = 0.1$.

Ниже приведены графики возмущения давления и давления на стенку:

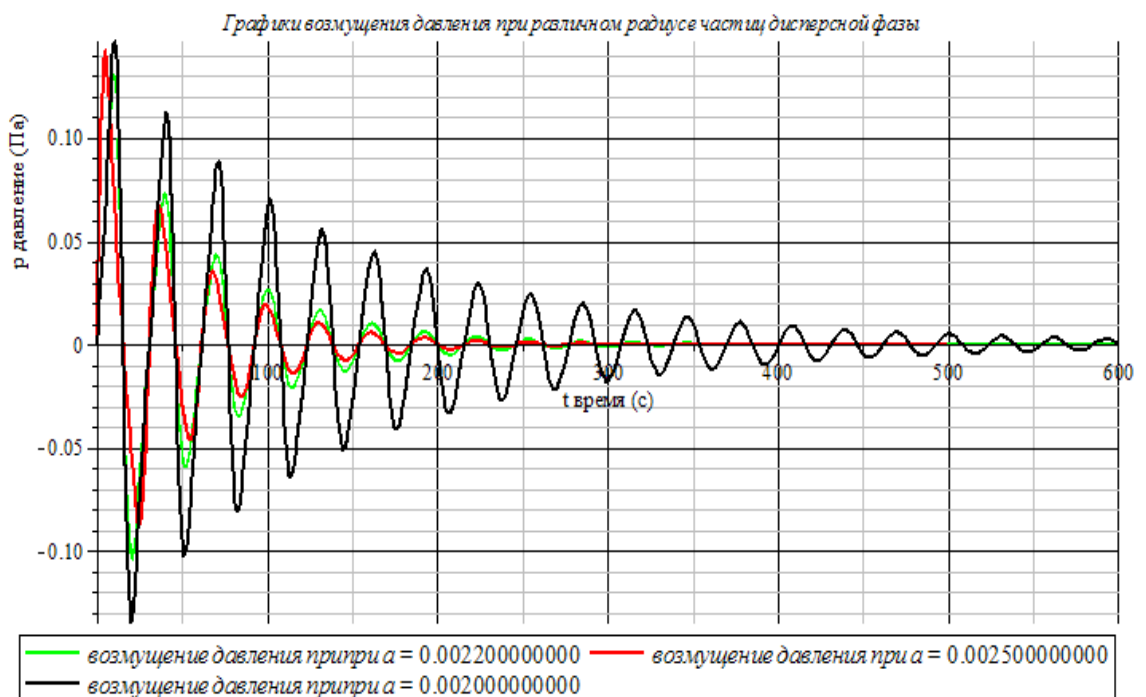


Рис. 2.4.

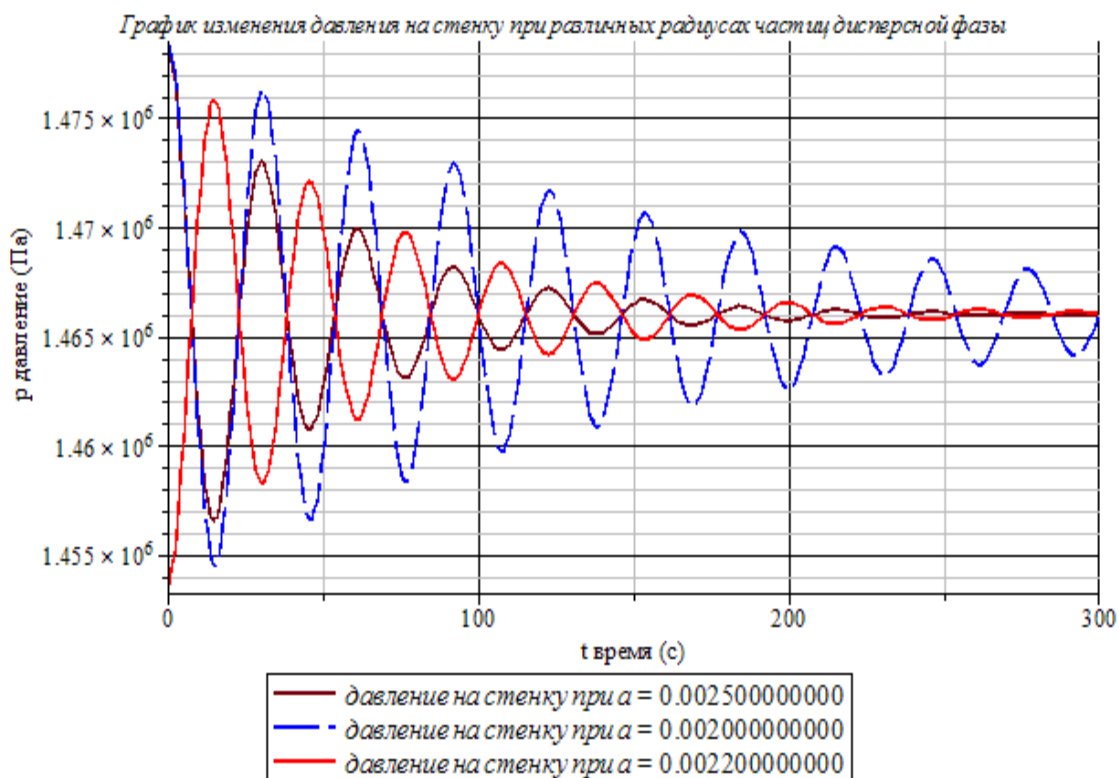


Рис.2.5.

Из графика (Рис.2.4.) видно, что наибольшее возмущение давления происходит при самом малом значении радиуса частиц дисперсной фазы. С ростом радиуса возмущение давления и давление (Рис.2.5.) делаются меньше. Кроме того, при наибольшем радиусе колебания быстрее затухают.

Рассмотрим несущие фазы с коэффициентом динамической вязкости $\mu = 0.1004 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\mu = 0.1307 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\mu = 0.798 \text{ Па} \cdot \text{с}$ м при одинаковых прочих параметрах: глубина 10 м, плотность несущей фазы $\rho_1^0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность дисперсной фазы $\rho_2^0 = 0.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, концентрация дисперсной фазы $\alpha_0 = 0.1$, диаметр частиц дисперсной фазы $a=0.25 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

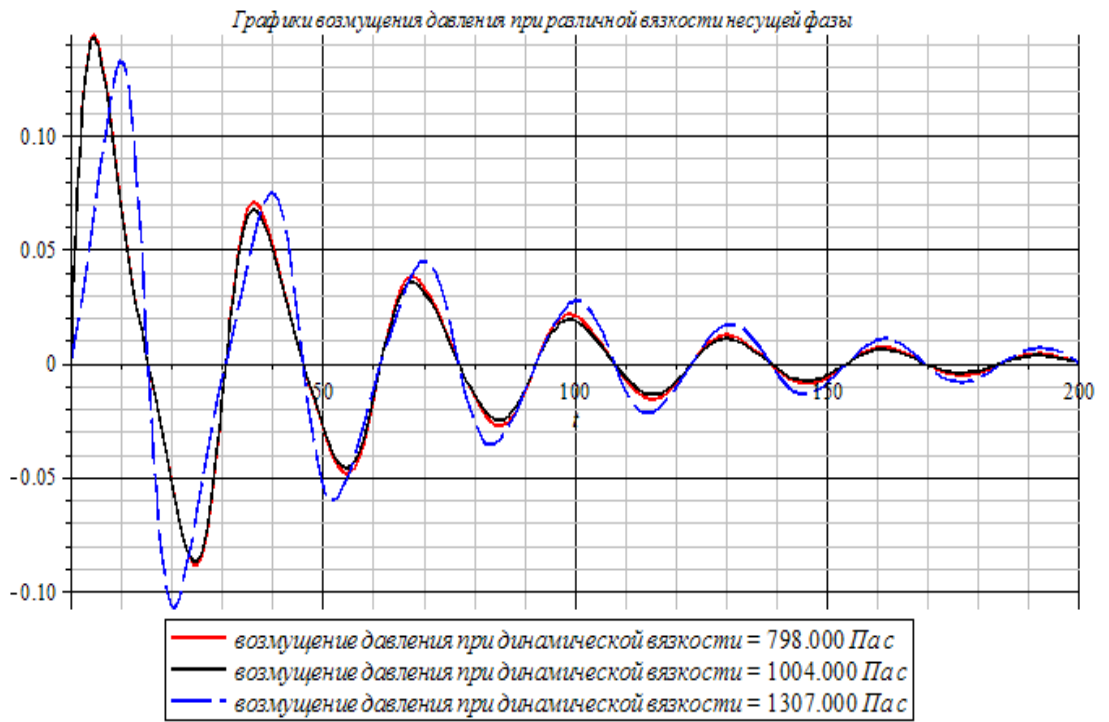


Рис.2.6.

Графики возмущения давления практически не отличаются, хотя видно незначительное смещение гребней волны.

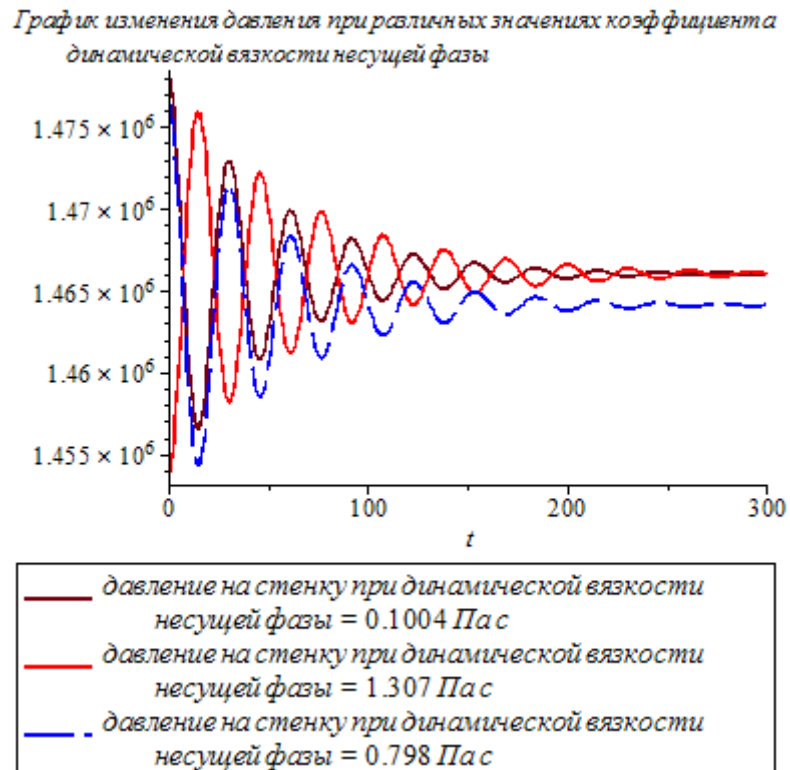


Рис.2.7.

На рисунке 2.7 показано изменение давления на вертикальную стенку. Наибольшие колебания давления соответствуют наибольшему значению коэффициента динамической вязкости. На рисунке 2.8 показан график возмущения давления при концентрации частиц дисперсной фазы $\alpha_0 = 0.3, \alpha_0 = 0.1, \alpha_0 = 0.05$. Глубина 10 м, плотность несущей фазы $\rho_1^0 = 10^3$ кг/м³, плотность дисперсной фазы $\rho_2^0 = 0.5 \cdot 10^3$ кг/м³ коэффициент динамической вязкости несущей фазы $\mu = 0.1004$ Па · с , диаметр частиц дисперсной фазы $a=0.25 \cdot 10^{-2}$ м.

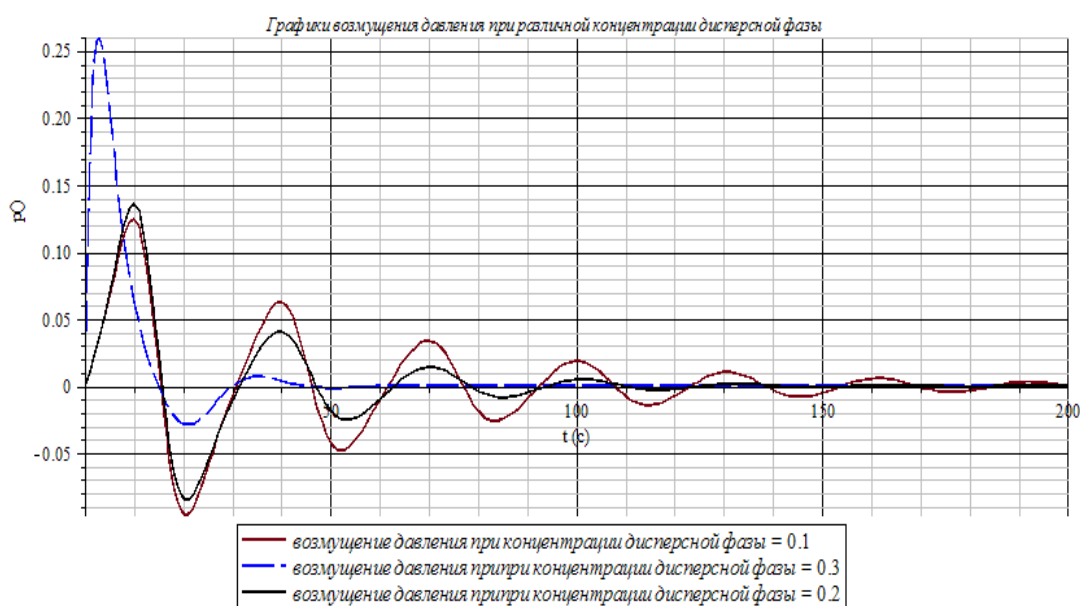
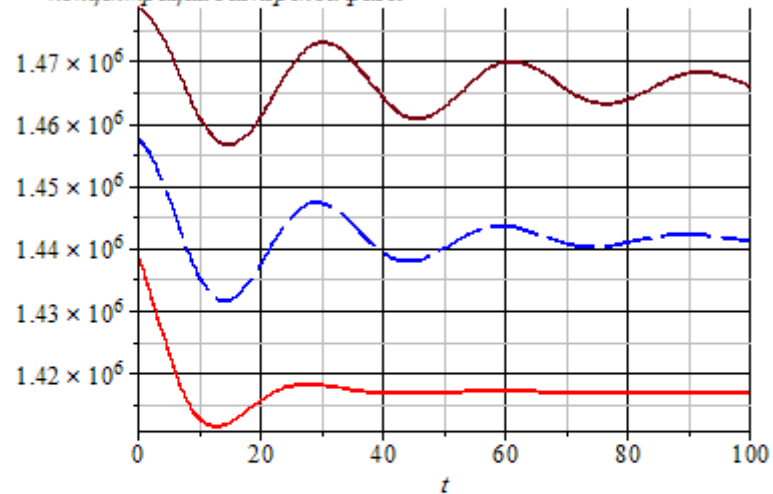


Рис.2.8.

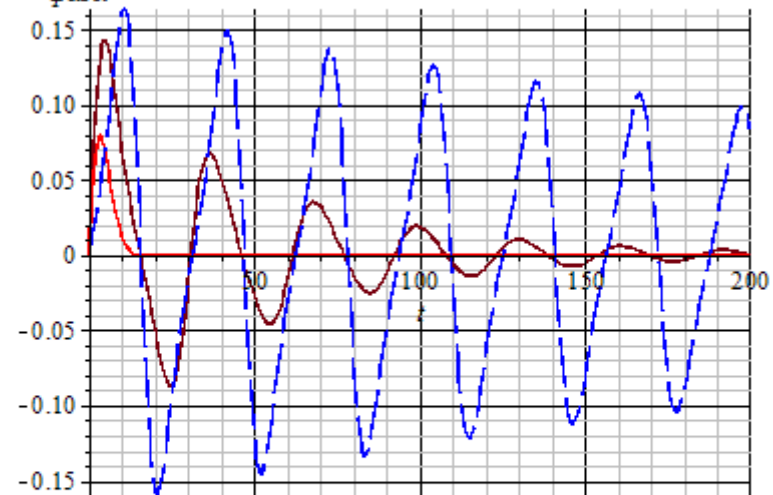
Большая концентрация приводит более быстрому затуханию колебаний возмущения давления. График нагрузки на вертикальную стенку приведен на рис. 2.9.

График изменения нагрузки на вертикальную стенку при различной концентрации дисперсной фазы



- нагрузка на стенку при концентрации дисперсной фазы = 0.1
- нагрузка на стенку при концентрации дисперсной фазы = 0.3
- нагрузка на стенку при концентрации дисперсной фазы = 0.2

Графики возмущения давления при различной плотности дисперсной фазы



- возмущение давления при плотности дисперсной фазы " $0.5 \cdot 10^3$ кг/м³"
- возмущение давления при плотности дисперсной фазы " $0.2 \cdot 10^3$ кг/м³"
- возмущение давления при плотности дисперсной фазы " $1.5 \cdot 10^3$ кг/м³"

Рис.2.9.

На рисунке 2.9 показано изменение возмущения давления при различной плотности дисперсной фазы. Видно, что более плотная дисперсная фаза приводит к большему возмущению давления на вертикальную стенку.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В ходе исследования выяснена функциональная зависимость возмущения давления и давления двухфазной жидкости на вертикальную стенку от длины волны, динамической вязкости несущей фазы, радиуса частиц, плотности и концентрации дисперсной фазы. Получено уравнение свободной поверхности волны. На основании рассмотренных примеров и расчетов, выполненных с помощью математического пакета Maple 17 выявлено что:

1. Увеличение концентрации дисперсной фазы приводит к быстрому затуханию колебаний свободной поверхности.
2. Профиль свободной поверхности практически идентичен при различном радиусе частиц дисперсной фазы (разность радиусов незначительная).
3. Более вязкая несущая фаза приводит к скорейшему затуханию колебаний свободной поверхности.
4. Наибольшее возмущение давления происходит при самом малом значении радиуса частиц дисперсной фазы. С ростом радиуса возмущение давления и давление делаются меньше. Кроме того, при наибольшем радиусе колебания давления быстрее затухают.
5. Графики возмущения давления практически не отличаются, хотя видно незначительное смещение гребней волны при различных значениях коэффициента динамической вязкости.
6. Наибольшие колебания давления соответствуют наибольшему значению коэффициента динамической вязкости.
7. Большая концентрация дисперсной фазы приводит более медленному затуханию колебаний возмущения давления.
8. Более плотная дисперсная фаза приводит к большему возмущению давления на вертикальной стенке.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Общая программа расчета характеристик волнового движения, возмущения давления и давления.

```

> restart;
> rho := proc(p01, p02, alpha) : evalf(p01*(1-alpha) + p02*alpha, 5) : end proc: #плотность покоящейся смеси#
> rho(103, 0.5*103, 0.2) :
> R := proc(a, eta) : evalf( $\frac{9 \cdot \eta}{2 \cdot a^2}$ , 5) : end proc: # сила вязкого трения Стокса#
> R(0.25*10-2, 1.004*10-3) :
> kl := proc(rho, rho1, rho2, alpha, s, k, R, l) : evalf( $\frac{\left(\frac{3 \cdot \rho01}{\rho0} \cdot \left(s + 2 \cdot \frac{\rho02}{\rho0}\right) \cdot \left(s \cdot \frac{\rho01}{\rho0} + 2 \cdot \left(\frac{(1-\alpha) \cdot \rho01}{\rho0} + \alpha \cdot \frac{\rho02}{\rho0}\right) \cdot 9.81^2 \cdot k^2 \cdot \tanh(k \cdot l) - \frac{4 \cdot R^2}{(\rho0)^2 \cdot k^2}\right)}{12 \cdot \left(\frac{\rho01}{\rho0}\right)^2 \cdot \left(s + \frac{2 \cdot \rho02}{\rho0}\right)^2}\right), 5) :
end proc:
> kl(900, 103, 0.5*103, 0.2, 1,  $\frac{6.28}{1}$ , 722.88, 10) : #kl для определения коэффициента затухания#
> k2 := proc(rho, rho1, rho2, alpha, s, k, R, l) :
evalf( $\frac{\left(\frac{R}{\rho0 \cdot k} \cdot \left(4 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{\rho0^2 \cdot k^2} + 9 \cdot \frac{\rho01}{\rho0} \cdot \left(s + 2 \cdot \frac{\rho02}{\rho0}\right) \cdot \left(s \cdot \frac{\rho01}{\rho0} - \left((1-\alpha) \cdot \frac{\rho01}{\rho0} + \alpha \cdot \frac{\rho02}{\rho0}\right) + 3 \cdot \frac{\rho01}{\rho0} \cdot \frac{\rho02}{\rho0}\right) \cdot 9.81^2 \cdot k^2 \cdot \tanh(k \cdot l)\right)}{54 \cdot \left(\frac{\rho01}{\rho0}\right)^3 \cdot \left(s + \frac{2 \cdot \rho02}{\rho0}\right)^3}\right), 5) : end
proc:
> k2(900, 103, 0.5*103, 0.2, 1,  $\frac{6.28}{1}$ , 722.88, 10) : #k2 для определения коэффициента затухания#
> beta := proc(k, kl, k2, R, rho1, rho2, s, alpha) : evalf( $\sqrt[3]{-\frac{k2}{2} + \sqrt{\frac{k2^2}{4} + \frac{k1^3}{27}}} \cdot k + \sqrt[3]{-\frac{k2}{2} + \sqrt{\frac{k2^2}{4} + \frac{k1^3}{27}}} \cdot k + \frac{2 \cdot R}{3 \cdot \rho01 \cdot \left(s + 2 \cdot \frac{\rho02}{(1-\alpha) \cdot \rho01 + \alpha \cdot \rho02}\right)}$ ,
5) : end proc: #коэффициент затухания#
> beta( $\frac{6.28}{1}$ , 0.63161, 0.018570, 950.00, 722.88, 103, 0.5*103, 1, 0.2) :
> omega := proc(k, rho, rho1, rho2, alpha, s, R, l, beta) : sqrt( $\frac{9.81 \cdot \tanh(k \cdot l)}{k^3} + \frac{2 \cdot \alpha(1-\alpha) \cdot (\rho01 - \rho02)^2 \cdot 9.81 \cdot \tanh(k \cdot l)}{k^3 \cdot (s \cdot \rho0 + 2 \cdot \rho02) \cdot \rho01} + \frac{\beta}{k^4} \cdot \left(3 \cdot \beta - \frac{4 \cdot R \cdot \rho0}{\rho01 \cdot (s \cdot \rho0 + 2 \cdot \rho02^2)}\right)$ ) : end
proc:
> omega( $\frac{6.28}{1}$ , 900, 103, 0.5*103, 0.2, 1, 722.88, 10, 5.5833) :
> with(linalg) :
> C := matrix([[1-alpha, 0, 0, 0, 1-alpha, 0, 0, 0, alpha*b-alpha], [0, 0, 1-alpha, 0, 0, 0, 1-alpha, 0, alpha*alpha*b], [0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -b, 1], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, -1, -b], [-b*mu, 1$$ 
```

```

+ \frac{s \cdot \alpha 0}{2} + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), -\frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, 0, 0 \Big|, \left[-L, 0, 0, 0, -\mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2}\right.
- r \cdot \alpha 0, 0, 0 \Big|, \left[K, \left(\mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}\right) \cdot (-b) + r \cdot (1 - \alpha 0), -\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, \mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0 \Big|, \left[L, -\mu 2 - \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2},\right.
\left.\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot b \cdot \mu 1}{2} - r \cdot (1 - \alpha 0), \left(\mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}\right) \cdot (-b) + r \cdot (1 - \alpha 0), 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \Big] :
=
> rank(CA1) :
> simplify(evalf(det(CA1), 2)) :
> DEA1 := collect(% {mu1, mu2}) :
> \frac{DEA1}{DE} :
=
> collect(% {K, L}) :
> factor(%):
> simplify\left(\text{evalf}\left(\text{subs}\left(\left\{\mu 1 = \frac{\rho 10}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}, \mu 2 = \frac{\rho 20}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}, b = \frac{\beta}{\omega}, 1 = k \cdot 1^*, r = \frac{R}{((1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20) \cdot \omega}\right\}, \%, 3\right)\right) :
> A1 := simplify\left(\text{evalf}\left(\text{subs}\left(\left\{\rho 10 = 10^3, \rho 20 = 0.5 \cdot 10^3, \beta = 5.5833, s = 1, \alpha 0 = 0.2, k = \frac{6.28}{1}, 1^* = 10, R = 722.88, \omega = 0.3190626699\right\}, \%, 3\right)\right) :
=
> CA2 := matrix\left(\left[\left[1 - \alpha 0, 0, 0, 0, 1 - \alpha 0, 0, 0, 0, \alpha 0 \cdot b, -\alpha 0\right], \left[0, 0, 1 - \alpha 0, 0, 0, 0, 1 - \alpha 0, 0, \alpha 0, \alpha 0 \cdot b\right], \left[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -b, 1\right], \left[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, -1, -b\right], \left[-b \cdot \mu 1\right.\right.
\left.\left.\left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, K, \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), -\frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \left[-\mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), L, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \left[0,\right.\right.
\left.\left.-K, 0, 0, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), -\frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, 0, 0 \right], \left[0, -L, 0, 0, -\mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r\right.\right.
\left.\left.\cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, 0, 0 \right], \left[\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot b \cdot \mu 1}{2} - r \cdot (1 - \alpha 0), K, -\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, \mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \left[\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, L,\right.\right.
\left.\left.\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot b \cdot \mu 1}{2} - r \cdot (1 - \alpha 0), \left(\mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}\right) \cdot (-b) + r \cdot (1 - \alpha 0), 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \right] \Big] :
=
> rank(CA2) :
> simplify(evalf(det(CA2), 2)) :
> DEA2 := collect(% {mu1, mu2}) :
> \frac{DEA2}{DE} :
=
> simplify\left(\text{evalf}\left(\text{subs}\left(\left\{\mu 1 = \frac{\rho 10}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}, \mu 2 = \frac{\rho 20}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}, b = \frac{\beta}{\omega}, 1 = k \cdot 1^*, r = \frac{R}{((1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20) \cdot \omega}\right\}, \%, 3\right)\right) :
> A2 := simplify\left(\text{evalf}\left(\text{subs}\left(\left\{\rho 10 = 10^3, \rho 20 = 0.5 \cdot 10^3, \beta = 5.5833, s = 1, \alpha 0 = 0.2, k = \frac{6.28}{1}, 1^* = 10, R = 722.88, \omega = 0.3190626699\right\}, \%, 3\right)\right) :
=
> collect(% {K, L}) :
> CB1 := matrix\left(\left[\left[1 - \alpha 0, 0, 0, 0, 1 - \alpha 0, 0, 0, 0, \alpha 0 \cdot b, -\alpha 0\right], \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - \alpha 0, 0, \alpha 0, \alpha 0 \cdot b\right], \left[0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -b, 1\right], \left[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, -1, -b\right], \left[-b \cdot \mu 1\right.\right.
\left.\left.\left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, K, -\frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \left[-\mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, L, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \left[0, 0, -K, 0, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right)\right.\right.
\left.\left.+ \frac{s \cdot \alpha 0}{2} + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), -\frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, 0, 0 \right], \left[0, 0, -L, 0, -\mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r\right.\right.
\left.\left.\cdot \alpha 0, 0, 0 \right], \left[\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot b \cdot \mu 1}{2} - r \cdot (1 - \alpha 0), \left(\mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}\right) \cdot (-b) + r \cdot (1 - \alpha 0), K, \mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \left[\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, -\mu 2\right.\right.
\left.\left.-\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, L, \left(\mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}\right) \cdot (-b) + r \cdot (1 - \alpha 0), 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \right] \Big] :
=
> rank(CB1) :
> simplify(evalf(det(CB1), 2)) :
> DEB1 := collect(% {mu1, mu2}) :
> \frac{DEB1}{DE} :
=
> simplify\left(\text{evalf}\left(\text{subs}\left(\left\{\mu 1 = \frac{\rho 10}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}, \mu 2 = \frac{\rho 20}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}, b = \frac{\beta}{\omega}, 1 = k \cdot 1^*, r = \frac{R}{((1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20) \cdot \omega}\right\}, \%, 3\right)\right) :
> B1 := simplify\left(\text{evalf}\left(\text{subs}\left(\left\{\rho 10 = 10^3, \rho 20 = 0.5 \cdot 10^3, \beta = 5.5833, s = 1, \alpha 0 = 0.2, k = \frac{6.28}{1}, 1^* = 10, R = 722.88, \omega = 0.3190626699\right\}, \%, 3\right)\right) :
=
> \{
> CB2 := matrix\left(\left[\left[1 - \alpha 0, 0, 0, 0, 1 - \alpha 0, 0, 0, 0, \alpha 0 \cdot b, -\alpha 0\right], \left[0, 0, 1 - \alpha 0, 0, 0, 0, 1 - \alpha 0, 0, \alpha 0, \alpha 0 \cdot b\right], \left[0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -b, 1\right], \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, -b\right], \left[-b \cdot \mu 1\right.\right.

```



```

+  $\frac{s \cdot \alpha 0}{2} + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), -\frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, 0, 0, K, 0, 0, 0 \left[ -\mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, 0, 0, L, 0, 0, 0 \right], \left[ 0, 0, 0, 0, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, -K, -\frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, 0, 0 \right], \left[ 0, 0, 0, 0, -\mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, -L, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, 0, 0 \right], \left[ \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot b \cdot \mu 1}{2} - r \cdot (1 - \alpha 0), \left(\mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}\right) \cdot (-b) + r \cdot (1 - \alpha 0), -\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, \mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, 0, 0, K, 0, 0, 0 \right], \left[ \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, -\mu 2 - \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot b \cdot \mu 1}{2} - r \cdot (1 - \alpha 0), \left(\mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}\right) \cdot (-b) + r \cdot (1 - \alpha 0), 0, 0, L, 0, 0, 0 \right] \Bigg] :
=
> rank(CD1) :
> simplify(evalf(det(CD1), 2)) :
> DED1 := collect(% {mu1, mu2}) :
>  $\frac{DED1}{DE}$  :
=
> simplify( evalf( subs( { mu1 =  $\frac{\rho 10}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}$ , mu2 =  $\frac{\rho 20}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}$ , b =  $\frac{\beta}{\omega}$ , 1 = k \cdot 1^*$ , r =  $\frac{R}{((1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20) \cdot \omega}$  }, % ), 3 ) ) :
=
> D1 := simplify( evalf( subs( { rho10 = 10^3, rho20 = 0.5 \cdot 10^3, beta = 5.5833, s = 1, alpha0 = 0.2, k =  $\frac{6.28}{1}$ , 1^* = 10, R = 722.88, omega = 0.3190626699 } }, % ), 3 ) ) :
=
> CD2 := matrix( [ [ 1 - alpha0, 0, 0, 0, 1 - alpha0, 0, 0, 0, alpha0 \cdot b, -alpha0 ], [ 0, 0, 1 - alpha0, 0, 0, 0, 1 - alpha0, 0, alpha0, alpha0 \cdot b ], [ 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -b, 1 ], [ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -b ], [ -b \cdot mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), -\frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, 0, 0, 0, K, 0, 0 \left[ -\mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, 0, 0, L, 0, 0 \right], \left[ 0, 0, 0, 0, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1 \cdot b}{2} - r \cdot \alpha 0, \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), -K, 0, 0 \right], \left[ 0, 0, 0, 0, -\mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right), \frac{s \cdot \alpha 0 \cdot \mu 1}{2}, -b \cdot \mu 1 \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \alpha 0}{2}\right) + r \cdot \alpha 0, -L, 0, 0 \right], \left[ \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot b \cdot \mu 1}{2} - r \cdot (1 - \alpha 0), \left(\mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}\right) \cdot (-b) + r \cdot (1 - \alpha 0), -\frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, \mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, 0, 0, 0, K, 0, 0 \right], \left[ \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, -\mu 2 - \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}, \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot b \cdot \mu 1}{2} - r \cdot (1 - \alpha 0), \left(\mu 2 + \frac{s \cdot (1 - \alpha 0) \cdot \mu 1}{2}\right) \cdot (-b) + r \cdot (1 - \alpha 0), 0, 0, 0, L, 0, 0 \right] \Bigg] :
=
> rank(CD2) :
> simplify(evalf(det(CD2), 2)) :
> DED2 := collect(% {mu1, mu2}) :
>  $\frac{DED2}{DE}$  :
=
> simplify( evalf( subs( { mu1 =  $\frac{\rho 10}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}$ , mu2 =  $\frac{\rho 20}{(1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20}$ , b =  $\frac{\beta}{\omega}$ , 1 = k \cdot 1^*, r =  $\frac{R}{((1 - \alpha 0) \cdot \rho 10 + \alpha 0 \cdot \rho 20) \cdot \omega}$  }, % ), 3 ) ) :
=
> D2 := simplify( evalf( subs( { rho10 = 10^3, rho20 = 0.5 \cdot 10^3, beta = 5.5833, s = 1, alpha0 = 0.2, k =  $\frac{6.28}{1}$ , 1^* = 10, R = 722.88, omega = 0.3190626699 } }, % ), 3 ) ) :
=
> ?
> coeff(% {K, L}) :
> KL := proc( k, beta, omega, alpha0, epsilon, D1, D2, C1, C2, xi_max ) : evalf( solve( [ -alpha0 \cdot (D1 + D2) + D1 = k \cdot  $\frac{1}{\epsilon}$  \cdot xi_max, alpha0 \cdot \left(-C1 + C2 - \frac{\beta}{\omega} \cdot D2 + \frac{\beta}{\omega} \cdot D1\right) - \frac{\beta}{\omega} \cdot D1 + C1 ], {K, L} ), 5 ) : end proc

```

```

-
> KL  $\left( \frac{6.28}{1}, 5.5833, 0.3190626699, 0.2, 0.1, 0.0524L - 0.00299K, 0.0830L - 0.00499K, 0.00296L + 0.0522K, 0.00499L + 0.0828K, 0.1 \right)$ :
=
> simplify( evalf(  $\alpha 0 \cdot \left( \frac{\beta}{\omega} \cdot C1 - \frac{\beta}{\omega} \cdot C2 - D2 + D1 \right) - D1 - \frac{\beta}{\omega} \cdot C1 \right) )$ :
=
> A := simplify( evalf( subs( { K = 4120.1, L = 474.86,  $\alpha 0 = 0.2, \beta = 5.5833, \omega = 0.3190626699$  }, %), 3) ) :
=
> simplify( evalf(  $\alpha 0 \cdot \left( -C1 + C2 - \frac{\beta}{\omega} \cdot D2 + \frac{\beta}{\omega} \cdot D1 \right) - \frac{\beta}{\omega} \cdot D1 + C1 \right) )$ :
=
> B := simplify( evalf( subs( { K = 4120.1, L = 474.86,  $\alpha 0 = 0.2, \beta = 5.5833, \omega = 0.3190626699$  }, %), 6) ) :
=
> P := proc( k,  $\beta, \omega, \rho 0, \varepsilon, l, K, L, A, B$  ) : evalf  $\left( \frac{\varepsilon \cdot \rho 0 \cdot \omega^2}{k^2 \cdot \sinh(l \cdot k)} \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sqrt{K^2 + L^2} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \int_{-l}^l \frac{e^{-\omega^2 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \arctan\left(\frac{A}{B}\right)\right)}{k \cdot (\omega^2 + \beta^2)} \cosh(k \cdot (z + l)) dz, 5 \right)$  : end proc
=
#процедура определения возмущения давления#
> P  $\left( \frac{6.28}{1}, 5.5833, 0.3190626699, 900, 0.1, 10, 4120, -4240, -77.6, 0.0162977 \right)$ :
=
> P := proc( k,  $\beta, \omega, \rho 0, \varepsilon, l, Pa, \rho 10, \rho 20, A, B, \alpha 0$  ) : evalf  $\left( 1.3446 \cdot 10^{-28} \cdot e^{-0.01562 t} \sin(0.20394 t) \sinh(0.78437 e^{-0.015620 t} \sin(0.20395 t - 1.5708)) + 62.800 \right) +$ 
 $\frac{e^{-\omega^2 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \arctan\left(\frac{A}{B}\right)\right)}{k \cdot (\omega^2 + \beta^2)}$ 
 $\int_{-l}^l (Pa - (\rho 10 \cdot (1 - \alpha 0) + \rho 20 \cdot \alpha 0) \cdot 9.81 \cdot z) dz, 5$  : end proc
:
> P  $\left( \frac{6.28}{1}, 0.01562, 0.2039350026, 950, 0.1, 10, 10^5, 10^3, 0.5 \cdot 10^3, -7.89, 0.0000117685, 0.1 \right)$ :
:
> with(plots) : #блок построения графиков#
:
> p1 := plot(  $2.8308 \cdot 10^{-25} \cdot e^{-5.3123 t} \sin(0.30984 t) \sinh(2.5893 e^{-5.3125 t} \sin(0.30986 t - 1.5274)) + 62.800$  ), t = 0 .. 2, style = line, legend =
'возмущение давления при длине волны  $\lambda = 1$  м' : #для длины волны 1 м#
:
> p2 := plot(  $9.1033 \cdot 10^{-12} \cdot e^{-2.6571 t} \sin(1.0970 t) \sinh(0.82511 e^{-2.6571 t} \sin(1.0970 t - 1.2937)) + 31.400$  ), t = 0 .. 2, legend = возмущение давления при длине волны  $\lambda$ 
= 2 м', color = blue, linestyle = longdash) : #для длины волны 2 м#
:
> p3 := plot(  $0.00031329 e^{-1.3294 t} \sin(4.0732 t) \sinh(0.23858 e^{-1.3293 t} \sin(4.0732 t - 1.5674)) + 15.700$  ), t = 0 .. 1, legend = возмущение давления при длине волны  $\lambda$ 

```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Вид коэффициентов задачи

$$\begin{aligned}
 A_2 := & \left((-0.75L^2s^2\omega^2 + 0.50Ls\omega^3 - 0.38L^3s^3\omega^2 - 0.062L^4s^4\omega^2 + 0.062L^4s^4\omega^3 - 0.50Ls\omega^2 + 0.75L^2s^2\omega^3 + 0.38L^3s^3\omega^3 + 0.19L^2b^2s^4\omega^3 \right. \\
 & - 1.1Kb^3s^3\omega^2 + 2.2Kb^3s^2\omega^3 + 0.062Kb^4s^4\omega^3 - 2.2Lb^4s^2\omega^2 - 0.19Lb^2s^4\omega^2 + 1.1Lb^2s^3\omega^3 - 2.2Kb^3s^2\omega^2 - 0.062Kb^4s^4\omega^2 \\
 & + 0.38Kb^3s^3\omega^3 - 1.1Lb^2s^3\omega^2 + 2.2Lb^2s^2\omega^3 - 0.38Kb^3s^3\omega^2 + 0.75Kb^3s^2\omega^3 - 2.2Lb^2s^2\omega^2 - 0.75Kb^3s^2\omega^2 + 0.062Kb^7s^4\omega^3 \\
 & - 0.062Kb^7s^4\omega^2 + 0.38Kb^7s^3\omega^3 + 0.062Lb^6s^4\omega^3 - 0.38Kb^7s^3\omega^2 + 0.75Kb^7s^2\omega^3 + 0.19Kb^5s^4\omega^3 - 0.062Lb^6s^4\omega^2 + 0.38Lb^6s^3\omega^3 \\
 & + 0.50Kb^7s\omega^3 - 0.50Kb^7s\omega^2 + 0.50Lb^6s\omega^3 + 1.5Kb^5s\omega^3 - 0.50Lb^6s\omega^2 - 1.5Kb^5s\omega^2 + 1.5Lb^4s\omega^3 + 1.5Kb^3s\omega^3 - 1.5Lb^4s\omega^2 \\
 & - 1.5Kb^3s\omega^2 + 1.5Lb^2s\omega^3 + 0.50Kb^5s\omega^3 - 1.5Lb^2s\omega^2 - 0.50Kb^5s\omega^2 - 0.75Kb^7s^2\omega^2 - 0.19Kb^5s^4\omega^2 + 1.1Kb^5s^3\omega^3 - 0.38Lb^6s^3\omega^2 \\
 & + 0.75Lb^6s^2\omega^3 + 0.19Lb^4s^4\omega^3 - 1.1Kb^5s^3\omega^2 + 2.2Kb^5s^2\omega^3 + 0.19Kb^5s^4\omega^3 - 0.75Lb^6s^2\omega^2 - 0.19Lb^4s^4\omega^2 + 1.1Lb^4s^3\omega^3 \\
 & - 2.2Kb^5s^2\omega^2 - 0.19Kb^5s^4\omega^2 + 1.1Kb^3s^3\omega^3 - 1.1Lb^4s^3\omega^2 + 2.2Lb^4s^2\omega^3 \Big) \mu^3 + (Kr\omega^2 - 4.8Kb^4rs^2\omega^3 + 2.Lb^5rs^2\omega^2 - 2.Lb^5rs\omega^3 \\
 & - 1.Lb^3rs^3\omega^3 + 4.8Kb^4rs^2\omega^2 - 7.Kb^4rs\omega^3 - 0.50Kb^2rs^3\omega^3 + 2.Lb^5rs\omega^2 + Lb^3rs^3\omega^2 - 4.Lb^3rs^2\omega^3 + 7.Kb^4rs\omega^2 + 0.50Kb^2rs^3\omega^2 \\
 & - 2.8Kb^2rs^2\omega^3 - 0.50Kb^6rs^3\omega^3 + 0.50Kb^6rs^3\omega^2 - 2.2Kb^6rs^2\omega^3 - 0.50Lb^5rs^3\omega^3 + 2.2Kb^6rs^2\omega^2 - 3.Kb^6rs\omega^3 - 1.Kb^4rs^3\omega^3 \\
 & + 2.Lbrs\omega^2 + 4.Lb^3rs^2\omega^2 - 4.Lb^3rs\omega^3 - 0.50Lbrs^3\omega^3 + 2.8Kb^2rs^2\omega^2 - 5.Kb^2rs\omega^3 + 4.Lb^3rs\omega^2 + 0.50Lbrs^3\omega^2 - 2.Lbrs^2\omega^3 \\
 & + 5.Kb^2rs\omega^2 + 2.Lbrs^2\omega^2 - 2.Lbrs\omega^3 + 0.50Lb^5rs^2\omega^2 - 2.Lb^5rs^2\omega^3 + 3.Kb^6rs\omega^2 + Kb^4rs^3\omega^2 + (-1.L\omega^2 - 3.Kb^5\omega^2 - 1.Lb^6\omega^2 \\
 & - 3.Lb^2\omega^2 - 0.75L^2s^2\omega^2 - 3.Lb^4\omega^2 - 0.50Ls\omega^3 - 0.12L^3s^3\omega^2 - 0.062L^4s^4\omega^3 - 1.5Ls\omega^2 - 3.Kb^3\omega^2 - 1.Kb^7\omega^2 - 0.75L^2s^2\omega^3 \\
 & - 0.38L^3s^3\omega^3 - 1.bK\omega^2 - 0.19Lb^2s^4\omega^3 - 0.38Kb^3s^3\omega^2 - 2.2Kb^3s^2\omega^3 - 0.062Kb^4s^4\omega^3 - 2.2Lb^4s^2\omega^2 - 1.1Lb^2s^3\omega^3 - 2.2Kb^3s^2\omega^2 \\
 & - 0.38Kb^3s^3\omega^3 - 0.38Lb^2s^3\omega^2 - 2.2Lb^2s^2\omega^3 - 0.12Kb^3s^3\omega^2 - 0.75Kb^3s^2\omega^3 - 2.2Lb^2s^2\omega^2 - 0.75Kb^3s^2\omega^2 - 0.062Kb^7s^4\omega^3 \\
 & - 0.38Kb^7s^3\omega^2 - 0.062Lb^6s^4\omega^3 - 0.12Kb^7s^3\omega^2 - 0.75Kb^7s^2\omega^3 - 0.19Kb^5s^4\omega^3 - 0.38Lb^6s^3\omega^3 - 0.50Kb^7s\omega^3 - 1.5Kb^7s\omega^2 \\
 & - 0.50Lb^6s\omega^3 - 1.5Kb^5s\omega^3 - 1.5Lb^6s\omega^2 - 4.5Kb^5s\omega^2 - 1.5Lb^4s\omega^3 - 1.5Kb^3s\omega^3 - 4.5Lb^4s\omega^2 - 4.5Kb^3s\omega^2 - 1.5Lb^2s\omega^3 \\
 & - 0.50Kb^5s\omega^3 - 4.5Lb^2s\omega^2 - 1.5Kb^5s\omega^2 - 0.75Kb^7s^2\omega^2 - 1.1Kb^5s^3\omega^3 - 0.12Lb^6s^3\omega^2 - 0.75Lb^6s^2\omega^3 - 0.19Lb^4s^4\omega^3 - 0.38Kb^5s^3\omega^2 \\
 & - 2.2Kb^5s^2\omega^3 - 0.19Kb^5s^4\omega^2 - 0.75Lb^6s^2\omega^2 - 1.1Lb^4s^3\omega^3 - 2.2Kb^5s^2\omega^2 - 1.1Kb^3s^3\omega^3 - 0.38Lb^4s^3\omega^2 - 2.2Lb^4s^2\omega^3 \Big) \mu^2 - 1.Kr\omega^3 \\
 & + 0.25Krs^2\omega^2 - 1.Krs\omega^3 + Krs\omega^2 - 1.Kb^6r\omega^3 + Kb^6r\omega^2 - 3.Kb^4r\omega^3 + 3.Kb^4r\omega^2 - 3.Kb^2r\omega^3 - 0.25Krs^2\omega^3 + 3.Kb^2r\omega^2 \Big) \mu^4 \\
 & + (1.5Lb^4r^2s^2\omega^3 - 4.5Kb^5r^2s\omega^2 + 2.Kb^3r^2s^2\omega^3 - 1.5Lb^4r^2s^2\omega^2 + 3.5Lb^4r^2s\omega^3 - 2.Kb^3r^2s^2\omega^2 + 7.Kb^3r^2s\omega^3 + 1.5Kb^5r^2s^2\omega^3 \\
 & - 2.5Kb^2r^2s\omega^2 - 3.5Lb^4r^2s\omega^2 + 2.Lb^2r^2s^2\omega^3 - 7.Kb^3r^2s\omega^2 + 0.50Kb^2r^2s^2\omega^3 - 2.Lb^2r^2s^2\omega^2 + 5.Lb^2r^2s\omega^3 - 0.50Kb^2r^2s^2\omega^2 \\
 & + 2.5Kb^2r^2s\omega^3 - 5.Lb^2r^2s\omega^2 - 1.5Kb^5r^2s\omega^2 + 4.5Kb^5r^2s\omega^3 + (-1.Kr\omega^2 + 4.Lb^5r\omega^2 + 8.Lb^3r\omega^2 + 4.8Kb^4r^2s^2\omega^3 + Lb^5r^2s\omega^2 \\
 & + 2.Lb^5rs\omega^3 + Lb^3rs^3\omega^3 + 1.2Kb^4r^2s^2\omega^2 + 7.Kb^4rs\omega^3 + 0.50Kb^2r^2s^3\omega^3 + 4.Lb^5rs\omega^2 + 4.Lb^3rs^2\omega^3 + 5.Kb^4rs\omega^2 + 2.8Kb^2r^2s^2\omega^3 \\
 & + 0.50Kb^6rs^3\omega^3 + 2.2Kb^6rs^2\omega^3 + 0.50Lb^5rs^3\omega^3 + 0.75Kb^6rs^2\omega^2 + 3.Kb^6rs\omega^3 + Kb^4rs^3\omega^3 + 4.Lbrs\omega^2 + 2.Lb^3rs^2\omega^2 + 4.Lb^3rs\omega^3 \\
 & + 0.50Lbrs^3\omega^3 + 0.25Kb^2rs^2\omega^2 + 5.Kb^2rs\omega^3 + 8.Lb^3rs\omega^2 + 2.Lbrs^2\omega^3 + Kb^2rs\omega^2 + Lbrs^2\omega^2 + 2.Lbrs\omega^3 + 2.Lb^5rs^2\omega^3 \\
 & + 3.Kb^6rs\omega^2 + 4.Lbr\omega^2 + Kr\omega^3 - 0.25Krs^2\omega^2 + Krs\omega^3 - 1.Krs\omega^2 + Kb^6r\omega^3 + 3.Kb^6r\omega^2 + 3.Kb^4r\omega^3 + 3.Kb^4r\omega^2 + 5.Kb^4r\omega^3 + 3.Kb^2r\omega^3 \\
 & + 0.25Krs^2\omega^3 + Kb^2r\omega^2 \Big) \mu^2 - 3.Kb^2r^2\omega^2 + Lr^2\omega^3 - 1.Lr^2\omega^2 + 3.Kb^2r^2\omega^3 + 3.Kb^5r^2\omega^3 - 3.Kb^3r^2\omega^2 + Lb^4r^2\omega^3 + 6.Kb^3r^2\omega^3 \\
 & - 1.Lb^4r^2\omega^2 - 6.Kb^3r^2\omega^2 + 2.Lb^2r^2\omega^3 + 0.50Lr^2s^2\omega^3 - 2.Lb^2r^2\omega^2 - 0.50Lr^2s^2\omega^2 + 1.5Lr^2s\omega^3 - 1.5Lr^2s\omega^2 \Big) \mu^3 + \left(\left(\right. \right. \\
 & - 1.5Lb^4r^2s^2\omega^3 - 1.5Kb^5r^2s\omega^2 - 2.Kb^3r^2s^2\omega^3 - 3.5Lb^4r^2s\omega^3 - 7.Kb^3r^2s\omega^3 - 1.5Kb^5r^2s^2\omega^3 + 0.50Kb^2r^2s\omega^2 - 2.5Lb^4r^2s\omega^2 \\
 & - 2.Lb^2r^2s^2\omega^3 - 1.Kb^3r^2s\omega^2 - 0.50Kb^2r^2s^2\omega^3 - 5.Lb^2r^2s\omega^3 - 2.5Kb^2r^2s\omega^2 - 3.Lb^2r^2s\omega^2 - 4.5Kb^5r^2s\omega^3 + Kb^2r^2\omega^2 - 1.Lr^2\omega^3 \\
 & - 1.Lr^2\omega^2 - 3.Kb^2r^2\omega^3 - 3.Kb^5r^2\omega^3 - 3.Kb^3r^2\omega^2 - 1.Lb^4r^2\omega^3 - 6.Kb^3r^2\omega^2 - 5.Lb^4r^2\omega^2 - 2.Kb^3r^2\omega^2 - 2.Lb^2r^2\omega^3 \\
 & - 0.50Lr^2s^2\omega^3 - 6.Lb^2r^2\omega^2 - 1.5Lr^2s\omega^3 - 0.50Lr^2s\omega^2 \Big) \mu^2 - 3.Kb^4r^3\omega^3 + 3.Kb^4r^3\omega^2 - 2.Lb^3r^3\omega^3 - 4.Kb^2r^3\omega^3 + Kr^3\omega^2 \\
 & - 1.Kr^3\omega^3 - 2.Lb^3r^3\omega^2 - 2.Kb^4r^3s\omega^3 + 2.Kb^2r^3s\omega^2 + 2.Kb^4r^3s\omega^2 - 2.Lb^3r^3s\omega^3 + 2.Lb^3r^3s\omega^2 + 4.Kb^2r^3\omega^2 - 2.Kb^2r^3s\omega^3 \\
 & + 2.Lb^3r^3\omega^2 - 2.Lb^3r^3s\omega^3 + 2.Lb^3r^3\omega^2 + 2.Lb^3r^3s\omega^2 \Big) \mu^2 + \left((2.Lb^3r^3s\omega^3 + 3.Kb^4r^3\omega^3 - 1.Kr^3\omega^2 + 2.Lb^3r^3\omega^2 + 2.Lb^3r^3\omega^2 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4.Kb^2r^3\alpha\alpha^3 + 2.Lbr^3\alpha\alpha^3 + 2.Kb^2r^3s\alpha\alpha^3 + 2.Kb^4r^3s\alpha\alpha^3 + Kb^4r^3\alpha\alpha^2 + 2.Lb^3r^3\alpha\alpha^3 + 2.Lb^3r^3s\alpha\alpha^3 + Kr^3\alpha\alpha^3) \mu_2 - 1.Lb^2r^4\alpha\alpha^2 \\
& - 1.Kb^3r^4\alpha\alpha^2 + Lb^2r^4\alpha\alpha^3 + Lr^4\alpha\alpha^3 + Kbbr^4\alpha\alpha^3 - 1.Kbbr^4\alpha\alpha^2 + Kb^3r^4\alpha\alpha^3 - 1.Lr^4\alpha\alpha^2) \mu_1 + (-1.Kbbr^4\alpha\alpha^3 - 1.Kb^3r^4\alpha\alpha^3 - 1.Lb^2r^4\alpha\alpha^3 \\
& - 1.Lr^4\alpha\alpha^3) \mu_2) / ((b^6s^2\alpha\alpha^2 + 0.25b^8s^3\alpha\alpha^2 + 0.25b^8s^3\alpha\alpha^4 - 2.b^6s^2\alpha\alpha^3 + b^6s^3\alpha\alpha^4 - 2.b^6s^3\alpha\alpha^3 + 0.062b^8s^4\alpha\alpha^4 - 0.12b^8s^4\alpha\alpha^3 + 0.25b^8s^2\alpha\alpha^2 \\
& + 1.5b^4s^3\alpha\alpha^4 + 0.25b^8s^2\alpha\alpha^4 + 0.062b^8s^4\alpha\alpha^2 + 1.5b^4s^2\alpha\alpha^4 - 3.b^4s^3\alpha\alpha^3 - 0.50b^8s^3\alpha\alpha^3 + b^2s^2\alpha\alpha^2 + b^6s^2\alpha\alpha^4 - 0.50b^8s^2\alpha\alpha^3 + 1.5b^4s^3\alpha\alpha^2 \\
& - 3.b^4s^2\alpha\alpha^3 + b^2s^3\alpha\alpha^4 + 1.5b^4s^2\alpha\alpha^2 - 2.b^2s^3\alpha\alpha^3 + b^2s^2\alpha\alpha^4 + b^2s^3\alpha\alpha^2 - 2.b^2s^2\alpha\alpha^3 + 0.25b^6s^4\alpha\alpha^4 - 0.50b^6s^4\alpha\alpha^3 + 0.25b^6s^4\alpha\alpha^2 \\
& + 0.38b^4s^4\alpha\alpha^4 - 0.75b^4s^4\alpha\alpha^3 + 0.38b^4s^4\alpha\alpha^2 + 0.25b^2s^4\alpha\alpha^4 - 0.50b^2s^4\alpha\alpha^3 + 0.25b^2s^4\alpha\alpha^2 + b^6s^2\alpha\alpha^2 + 0.25s^3\alpha\alpha^4 - 0.50s^3\alpha\alpha^3 + 0.25s^2\alpha\alpha^4 \\
& + 0.25s^3\alpha\alpha^2 - 0.50s^2\alpha\alpha^3 + 0.25s^2\alpha\alpha^2 + 0.062s^4\alpha\alpha^4 - 0.12s^4\alpha\alpha^3 + 0.062s^4\alpha\alpha^2) \mu_1^6 + (-1.5b^5rs^3\alpha\alpha^4 + 3.b^5rs^3\alpha\alpha^3 - 1.5b^5rs^3\alpha\alpha^2 \\
& - 0.50b^7rs^3\alpha\alpha^4 + b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^2 - 0.50b^7rs^3\alpha\alpha^2 + 3.b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^2 + 2.b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 4.5b^5rs^2\alpha\alpha^4 - 1.5b^7rs^2\alpha\alpha^4 - 1.5b^7rs^2\alpha\alpha^3 \\
& + 9.b^5rs^2\alpha\alpha^3 - 3.b^5rs^2\alpha\alpha^4 - 0.50b^7rs^2\alpha\alpha^4 + b^7rs^2\alpha\alpha^3 - 0.50b^7rs^2\alpha\alpha^2 - 1.5b^5rs^2\alpha\alpha^4 + 3.b^5rs^2\alpha\alpha^3 - 1.5b^5rs^2\alpha\alpha^2 + 3.b^7rs^2\alpha\alpha^3 - 1.5b^7rs^2\alpha\alpha^4 \\
& - 1.5b^7rs^2\alpha\alpha^2 + 2.b^7rs^2\alpha\alpha^3 - 1.5b^5rs^2\alpha\alpha^2 - 4.5b^5rs^2\alpha\alpha^2 + 6.b^5rs^2\alpha\alpha^3 - 4.5b^5rs^2\alpha\alpha^4 - 3.b^5rs^2\alpha\alpha^2 + 9.b^5rs^2\alpha\alpha^3 - 3.b^5rs^2\alpha\alpha^4 - 4.5b^5rs^2\alpha\alpha^2 \\
& + 6.b^5rs^2\alpha\alpha^3 - 1.5b^7rs^2\alpha\alpha^4 - 3.b^7rs^2\alpha\alpha^3 + (-1.b^8s\alpha\alpha^3 + b^8s\alpha\alpha^2 - 4.b^6s\alpha\alpha^3 + 4.b^2s\alpha\alpha^2 + 4.b^6s\alpha\alpha^2 - 6.b^4s\alpha\alpha^3 + 6.b^4s\alpha\alpha^2 - 4.b^2s\alpha\alpha^3 \\
& + 4.b^6s^2\alpha\alpha^2 + 0.25b^8s^3\alpha\alpha^2 - 0.50b^8s^3\alpha\alpha^4 - 2.b^6s^2\alpha\alpha^3 - 2.b^6s^3\alpha\alpha^4 + b^6s^3\alpha\alpha^3 - 0.12b^8s^4\alpha\alpha^4 + 0.12b^8s^4\alpha\alpha^3 + b^8s^2\alpha\alpha^2 - 3.b^4s^3\alpha\alpha^4 \\
& - 0.50b^8s^2\alpha\alpha^4 - 3.b^4s^2\alpha\alpha^4 + 1.5b^4s^3\alpha\alpha^3 + 0.25b^8s^3\alpha\alpha^3 + 4.b^2s^2\alpha\alpha^2 - 2.b^6s^2\alpha\alpha^4 - 0.50b^8s^2\alpha\alpha^3 + 1.5b^4s^3\alpha\alpha^2 - 3.b^4s^2\alpha\alpha^3 - 2.b^2s^3\alpha\alpha^4 \\
& + 6.b^4s^2\alpha\alpha^2 + b^2s^3\alpha\alpha^3 - 2.b^2s^2\alpha\alpha^4 + b^2s^3\alpha\alpha^2 - 2.b^2s^2\alpha\alpha^3 - 0.50b^6s^4\alpha\alpha^4 + 0.50b^6s^4\alpha\alpha^3 - 0.75b^4s^4\alpha\alpha^4 + 0.75b^4s^4\alpha\alpha^3 - 0.50b^2s^4\alpha\alpha^4 \\
& + 0.50b^2s^4\alpha\alpha^3 + b^6s^3\alpha\alpha^2 - 0.50s^3\alpha\alpha^4 + 0.25s^3\alpha\alpha^3 - 0.50s^2\alpha\alpha^4 + 0.25s^3\alpha\alpha^2 - 0.50s^2\alpha\alpha^3 + s^2\alpha\alpha^2 - 0.12s^4\alpha\alpha^4 + 0.12s^4\alpha\alpha^3 + s\alpha\alpha^2 - 1.s\alpha\alpha^3) \\
& \mu_2) \mu_1^5 + (1.5b^6r^2s^2\alpha\alpha^4 - 3.b^6r^2s^2\alpha\alpha^3 + 3.b^6r^2s^2\alpha\alpha^2 + 1.5b^6r^2s^2\alpha\alpha^2 - 6.b^6r^2s^2\alpha\alpha^3 - 5.b^6r^2s^2\alpha\alpha^3 + 2.5b^2r^2s^2\alpha\alpha^2 + 3.5b^4r^2s^2\alpha\alpha^4 \\
& - 7.b^4r^2s^2\alpha\alpha^3 + 3.5b^4r^2s^2\alpha\alpha^2 + 2.5b^2r^2s^2\alpha\alpha^4 + 5.b^2r^2s^2\alpha\alpha^2 + 3.b^6r^2s^2\alpha\alpha^2 + 7.b^4r^2s^2\alpha\alpha^4 - 14.b^4r^2s^2\alpha\alpha^3 + 7.b^4r^2s^2\alpha\alpha^2 + 5.b^2r^2s^2\alpha\alpha^4 \\
& - 10.b^2r^2s^2\alpha\alpha^3 - 2.r^2s\alpha\alpha^3 + 3.b^2r^2\alpha\alpha^4 + r^2s\alpha\alpha^4 + b^6r^2\alpha\alpha^4 - 2.b^6r^2\alpha\alpha^3 + r^2s\alpha\alpha^2 + 3.b^2r^2\alpha\alpha^2 + b^6r^2\alpha\alpha^2 + 3.b^4r^2\alpha\alpha^4 - 6.b^4r^2\alpha\alpha^3 + 3.b^4r^2\alpha\alpha^2 \\
& + 0.50r^2s^2\alpha\alpha^4 - 1.r^2s^2\alpha\alpha^3 + 0.50r^2s^2\alpha\alpha^2 - 6.b^2r^2\alpha\alpha^3 + (b^8s\alpha\alpha^3 + b^8s\alpha\alpha^2 + 4.b^6s\alpha\alpha^3 + 4.b^2s\alpha\alpha^2 + 4.b^6s\alpha\alpha^2 + 6.b^4s\alpha\alpha^3 + 6.b^4s\alpha\alpha^2 \\
& + 4.b^2s\alpha\alpha^3 + b^6s^2\alpha\alpha^2 + 0.25b^8s^3\alpha\alpha^4 + 4.b^6s^2\alpha\alpha^3 + b^6s^3\alpha\alpha^4 + b^6s^3\alpha\alpha^3 + 0.062b^8s^4\alpha\alpha^4 + 0.25b^8s^2\alpha\alpha^2 + 1.5b^4s^3\alpha\alpha^4 + 0.25b^8s^2\alpha\alpha^4 \\
& + 1.5b^4s^2\alpha\alpha^4 + 1.5b^4s^3\alpha\alpha^3 + 0.25b^8s^3\alpha\alpha^3 + b^2s^2\alpha\alpha^2 + b^6s^2\alpha\alpha^4 + b^8s^2\alpha\alpha^3 + 6.b^4s^2\alpha\alpha^3 + b^2s^3\alpha\alpha^4 + 1.5b^4s^2\alpha\alpha^2 + b^2s^3\alpha\alpha^3 + b^2s^2\alpha\alpha^4 \\
& + 4.b^2s^2\alpha\alpha^3 + 0.25b^6s^4\alpha\alpha^4 + 0.38b^4s^4\alpha\alpha^4 + 0.25b^2s^4\alpha\alpha^4 + 0.25s^3\alpha\alpha^4 + 0.25s^3\alpha\alpha^3 + 0.25s^2\alpha\alpha^4 + s^2\alpha\alpha^2 + 0.25s^2\alpha\alpha^2 + 0.062s^4\alpha\alpha^4 + s\alpha\alpha^2 \\
& + s\alpha\alpha^3 + b^8\alpha\alpha^2 + 4.b^6\alpha\alpha^2 + 6.b^4\alpha\alpha^2 + 4.\alpha\alpha^2b^2 + \alpha\alpha^2) \mu_2^2 + (3.b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 3.b^5rs^3\alpha\alpha^3 + b^7rs^3\alpha\alpha^4 - 1.b^7rs^3\alpha\alpha^3 + 3.b^7rs^3\alpha\alpha^4 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^2 \\
& + 2.b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^2 + 2.b^7rs^3\alpha\alpha^3 + 9.b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 4.b^7rs^3\alpha\alpha^2 - 4.5b^5rs^3\alpha\alpha^3 + 6.b^5rs^3\alpha\alpha^4 + b^7rs^3\alpha\alpha^4 - 1.b^7rs^3\alpha\alpha^3 + 3.b^5rs^3\alpha\alpha^4 \\
& - 3.b^5rs^3\alpha\alpha^3 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^2 + 2.b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^2 + 2.b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 4.b^7rs^3\alpha\alpha^2 - 4.5b^5rs^3\alpha\alpha^2 + 6.b^5rs^3\alpha\alpha^3 + 9.b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 12.b^5rs^3\alpha\alpha^2 \\
& - 4.5b^5rs^3\alpha\alpha^3 + 6.b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 4.5b^5rs^3\alpha\alpha^2 + 6.b^5rs^3\alpha\alpha^3 + 3.b^7rs^3\alpha\alpha^4 - 12.b^5rs^3\alpha\alpha^2 + 2.b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 6.b^5rs^3\alpha\alpha^2 - 2.b^7rs^3\alpha\alpha^2 + 6.b^5rs^3\alpha\alpha^3 - 6.b^5rs^3\alpha\alpha^2 \\
& + 6.b^5rs^3\alpha\alpha^3 + 2.\alpha\alpha^3br - 2.\alpha\alpha^2br) \mu_2 + r^2\alpha\alpha^2 - 2.r^2\alpha\alpha^3 + r^2\alpha\alpha^4) \mu_1^4 + ((-1.5b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 0.50b^7rs^3\alpha\alpha^4 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^4 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^3 \\
& - 1.b^7rs^3\alpha\alpha^4 - 4.b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 4.5b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 1.b^7rs^3\alpha\alpha^2 - 4.5b^5rs^3\alpha\alpha^3 - 3.b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 0.50b^7rs^3\alpha\alpha^4 - 1.5b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 1.b^7rs^3\alpha\alpha^2 \\
& - 4.b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 1.b^7rs^3\alpha\alpha^2 - 12.b^5rs^3\alpha\alpha^3 - 4.5b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 3.b^5rs^3\alpha\alpha^2 - 4.5b^5rs^3\alpha\alpha^3 - 3.b^5rs^3\alpha\alpha^4 - 12.b^5rs^3\alpha\alpha^3 - 1.5b^7rs^3\alpha\alpha^4 - 3.b^5rs^3\alpha\alpha^2 \\
& - 2.b^7rs^3\alpha\alpha^3 - 6.b^5rs^3\alpha\alpha^2 - 2.b^7rs^3\alpha\alpha^2 - 6.b^5rs^3\alpha\alpha^3 - 6.b^5rs^3\alpha\alpha^2 - 6.b^5rs^3\alpha\alpha^3 - 2.\alpha\alpha^3br - 2.\alpha\alpha^2br) \mu_2^2 + (-3.b^6r^2s^2\alpha\alpha^4 + 3.b^6r^2s^2\alpha\alpha^3 \\
& - 6.b^6r^2s^2\alpha\alpha^2 + 3.b^6r^2s^2\alpha\alpha^2 + 5.b^2r^2s^2\alpha\alpha^3 - 7.b^4r^2s^2\alpha\alpha^4 + 7.b^4r^2s^2\alpha\alpha^3 - 5.b^2r^2s^2\alpha\alpha^4 + 5.b^2r^2s^2\alpha\alpha^2 + 3.b^6r^2s^2\alpha\alpha^2 - 14.b^4r^2s^2\alpha\alpha^4 \\
& + 7.b^4r^2s^2\alpha\alpha^3 + 7.b^4r^2s^2\alpha\alpha^2 - 10.b^2r^2s^2\alpha\alpha^4 + 5.b^2r^2s^2\alpha\alpha^3 + r^2s\alpha\alpha^3 - 6.b^2r^2\alpha\alpha^4 - 2.r^2s\alpha\alpha^4 - 2.b^6r^2\alpha\alpha^4 - 2.b^6r^2\alpha\alpha^3 + r^2s\alpha\alpha^2 + 4.b^2r^2\alpha\alpha^2 \\
& + 4.b^6r^2\alpha\alpha^2 - 6.b^4r^2\alpha\alpha^4 - 2.b^4r^2\alpha\alpha^3 + 8.b^4r^2\alpha\alpha^2 - 1.r^2s^2\alpha\alpha^4 + r^2s^2\alpha\alpha^3 + 2.b^2r^2\alpha\alpha^3 + 2.r^2\alpha\alpha^3 - 2.r^2\alpha\alpha^4) \mu_2 - 2.b^7r^3\alpha\alpha^4 - 2.b^5r^3s\alpha\alpha^4 \\
& + 4.b^7r^3s\alpha\alpha^3 + 4.b^5r^3\alpha\alpha^3 - 2.b^7r^3s\alpha\alpha^2 - 2.b^5r^3s\alpha\alpha^2 - 4.b^3r^3\alpha\alpha^2 - 2.b^7r^3s\alpha\alpha^4 + 8.b^3r^3s\alpha\alpha^3 - 4.b^3r^3s\alpha\alpha^2 + 4.b^7r^3\alpha\alpha^3 + 8.b^3r^3\alpha\alpha^3 \\
& - 4.b^3r^3s\alpha\alpha^4 - 2.b^5r^3\alpha\alpha^2 - 4.b^3r^3\alpha\alpha^4 + 4.b^5r^3s\alpha\alpha^3 - 2.b^5r^3\alpha\alpha^4 - 2.b^7r^3\alpha\alpha^2) \mu_1^3 + ((5.b^2r^2s\alpha\alpha^4 + 3.5b^4r^2s^2\alpha\alpha^4 + 7.b^4r^2s\alpha\alpha^4 \\
& + 1.5b^6r^2s^2\alpha\alpha^4 + 3.b^6r^2s\alpha\alpha^4 + 8.b^4r^2\alpha\alpha^3 + 2.5b^2r^2s^2\alpha\alpha^4 + 3.b^4r^2\alpha\alpha^2 + 7.b^4r^2s\alpha\alpha^3 + 5.b^2r^2s\alpha\alpha^3 + r^2s\alpha\alpha^4 + r^2s\alpha\alpha^3 + 0.50r^2s^2\alpha\alpha^4 \\
& + 4.b^6r^2\alpha\alpha^3 + 3.b^6r^2s\alpha\alpha^3 + b^6r^2\alpha\alpha^2 + 3.b^4r^2\alpha\alpha^4 + b^6r^2\alpha\alpha^4 + 3.b^2r^2\alpha\alpha^4 + 4.b^2r^2\alpha\alpha^3 + 3.b^2r^2\alpha\alpha^2 + r^2\alpha\alpha^4 + r^2\alpha\alpha^2) \mu_2^2 + (4.b^7r^3s\alpha\alpha^4 \\
& - 4.b^7r^3s\alpha\alpha^3 - 2.b^5r^3\alpha\alpha^2 + 4.b^5r^3\alpha\alpha^4 + 4.b^5r^3s\alpha\alpha^4 - 4.b^5r^3s\alpha\alpha^3 - 2.b^7r^3\alpha\alpha^2 + 8.b^3r^3s\alpha\alpha^4 + 8.b^3r^3\alpha\alpha^4 - 8.b^3r^3s\alpha\alpha^3 - 2.b^5r^3\alpha\alpha^3 \\
& - 4.b^3r^3\alpha\alpha^2 - 4.b^3r^3\alpha\alpha^3 + 4.b^7r^3\alpha\alpha^4 - 2.b^7r^3\alpha\alpha^3) \mu_2 + b^4r^4\alpha\alpha^4 - 2.b^4r^4\alpha\alpha^3 + 2.b^2r^4\alpha\alpha^2 + b^4r^4\alpha\alpha^2 + r^4\alpha\alpha^4 - 2.r^4\alpha\alpha^3 + 2.b^2r^4\alpha\alpha^4 + r^4\alpha\alpha^2 \\
& - 4.b^2r^4\alpha\alpha^3) \mu_1^2 + ((-4.b^3r^3\alpha\alpha^4 - 4.b^3r^3s\alpha\alpha^4 - 2.b^5r^3s\alpha\alpha^4 - 2.b^7r^3\alpha\alpha^3 - 4.b^3r^3\alpha\alpha^3 - 2.b^5r^3\alpha\alpha^4 - 2.b^7r^3s\alpha\alpha^4 - 2.b^5r^3\alpha\alpha^3 - 2.b^7r^3\alpha\alpha^4) \mu_2^2 \\
& + (2.r^4\alpha\alpha^3 - 2.r^4\alpha\alpha^4 - 4.b^2r^4\alpha\alpha^4 + 4.b^2r^4\alpha\alpha^3 - 2.b^4r^4\alpha\alpha^4 + 2.b^4r^4\alpha\alpha^3) \mu_2) \mu_1 + (r^4\alpha\alpha^4 + b^4r^4\alpha\alpha^4 + 2.b^2r^4\alpha\alpha^4) \mu_2^2)
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во. Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.
2. Алешков Ю. З. Теория взаимодействия волн с преградами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 372 с.
3. Алешков Ю. З. Течение и волны в океане. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1996. 228 с.
4. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Исследование распространения волн по свободной поверхности двухфазной жидкой смеси // Вестн. ТюмГУ. 2001. №2. с.182-190.
5. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 1. М. Физматгиз, 1963, 584 с
6. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
7. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред //Прикладн. матем. и механика. 1956. Т. 20. №2. С. 184-195.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1968. 242 с.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Ч. 2. М.: Изд-во МГУ, 1968. 438 с.
10. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
- 11.Хажоян М.Г., Хакимзянов Г. С. Численное моделирование взаимодействия поверхностных волн с подводными препятствиями // Вычислительные технологии. Сер. Механика. 2003. №4, т.8. С. 108-122.
- 12.Green A. E. Naghdi P. M. On basic equations for mixtures // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1969. V.2 2, Pt. 4. P. 427-438.

