

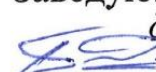
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК  
Кафедра математического моделирования

ДОПУЩЕНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК  
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ  
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой

 д.ф.-м.н., доцент  
Татосов А.В.

28 июня 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЬНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД,  
ОБРАЗОВАННЫХ ИЗВИЛИСТЫМИ КАНАЛАМИ

*01.04.01 Математика*

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнила работу  
Студентка 2 курса  
очной формы обучения



Хромова  
Надежда  
Александровна

Руководитель работы  
к. ф.-м. н., доцент



Игошин  
Дмитрий  
Евгеньевич

Рецензент  
к. ф.-м. н., научный сотрудник  
ТюмФ ИТПМ СО РАН



Бородин  
Станислав  
Леонидович

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ .....	5
§1.1. Теоретические работы .....	5
§1.2. Вычислительные работы .....	7
§1.3. Открытые программные комплексы в вычислительной гидродинамике .....	10
ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ, ОБРАЗОВАННОЙ СООБЩАЮЩИМИСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ КАНАЛАМИ .....	14
§2.1. Течение Пуазейля (тестовая задача) .....	14
§2.2. Геометрия задачи .....	19
§2.3. Просветность и пористость.....	21
§2.4. Проницаемость .....	24
ГЛАВА 3. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗВИЛИСТЫХ КАНАЛОВ .....	31
§3.1. Геометрия задачи .....	31
§3.2. Основные уравнения и численная реализация .....	36
§3.3. Анализ результатов.....	36
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	46

## ВВЕДЕНИЕ

Падение цен на углеводородное сырье на мировом рынке делает задачу снижения себестоимости их добычи как никогда **актуальной**. Одним из направлений решения этой задачи является изучение фильтрационно-емкостных свойств горных пород. Проведение дорогостоящих лабораторных экспериментов по изучению этих свойств потенциально можно заменить вычислительным экспериментом на модельной пористой среде.

Ввиду того, что поровое пространство горных пород имеет сложную структуру, невозможно получить точное аналитическое решение задачи течения флюида сквозь пористую среду. Поэтому создаются упрощенные математические модели порового пространства, воспроизводящие различные варианты геометрии пор.

**Объект исследования** - модельные пористые среды.

**Предмет исследования** - фильтрационно-емкостные свойства пористых сред, образованных извилистыми каналами.

**Целью** исследования является определение основных фильтрационных свойств пористых сред: просветности, пористости и проницаемости.

При выполнении работы были поставлены следующие **задачи**:

1. Овладеть навыками работы в открытых пакетах: Salome, OpenFOAM, ParaView (построение геометрии порового пространства, создание расчетной сетки, проведение численных расчетов);
2. Аналитически определить просветность и пористость в средах, образованных сообщающихся осесимметричных каналами; дать аналитическую оценку проницаемости;
3. На основе уравнения Дарси определить проницаемость по результатам численного интегрирования систем уравнений движения;
4. Определить коэффициент сопротивления извилистых каналов по результатам численного интегрирования систем уравнений движения.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

В *первой главе* приведен обзор отечественных и зарубежных литературных источников по моделированию и определению основных характеристик пористых сред. Рассмотрены статьи, носящие теоретический характер и работы по численному моделированию.

Во *второй главе* предложена модель пористой среды периодической структуры, образованная сообщающимися осесимметричными каналами, описывающая практически весь интервал возможных значений пористости. Для такой среды определены основные фильтрационные свойства: просветность, пористость и проницаемость. Для проницаемости получены как аналитическая, так и численная оценки, хорошо соответствующие друг другу.

В *третьей главе* учитывается влияние извилистости каналов на объемный расход через пористую среду. Показано, что гидравлическое сопротивление пористой среды зависит не только от размеров и формы сечения каналов, но и от извилистости. Рассмотрены два способа построения извилистых каналов: с направляющей в виде синусоиды и дуг окружностей. Определен коэффициент сопротивления канала.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на Международной научной студенческой конференции (Новосибирск, 2016) и частично были опубликованы в журнале «Вестник ТюмГУ. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика».

## ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В данной главе проведен обзор отечественных и зарубежных литературных источников по моделированию и определению основных характеристик пористых сред. Были рассмотрены статьи, носящие теоретический характер, работы по численному моделированию, а также проведен анализ открытых пакетов, используемых при гидродинамическом моделировании.

### §1.1. Теоретические работы

Структурные модели пористых сред впервые были рассмотрены в работе Сликтера [49], в отечественной науке начало исследований положено работой академика Лейбензона [25]. Дальнейшее развитие структурные модели получили в [42]. Большая часть рассмотренных работ использует регулярные структуры: среды, образованные упаковками шаров с постоянным диаметром (идеальный грунт) или системами капилляров (фиктивный грунт). При моделировании геометрии порового пространства также применяют корреляционные функции, фракталы или представляют пористую среду в виде поровых сетей.

В [22] построены геометрические модели низкопористых структур с кубической, гексагональной и тетраэдрической укладками зерен; для каждой укладки выведены формулы для пористости, просветности, удельной поверхности.

В [23] предложена полуоктаэдрическая модель структуры низкопористых материалов, для которой определены критические пористости для проницаемости таких материалов. Уточнены выражения для извилистости пористого пространства зернистых и кавернозных сред во всем диапазоне проницаемой пористости.

В [37] приведены характеристики пористых материалов - проницаемость, матричность структуры и коэффициент извилистости порового пространства. Показано, что проницаемость различных материалов

не зависит от пористости, а определяется структурой порового пространства. Отмечено, что с увеличением пористости матричность материала и коэффициент извилистости существенно уменьшаются.

В [9] получены расчетные формулы для практически важных структурных характеристик металлических проволочных сеток, часто используемых в технике фильтрации.

Горные породы часто имеют распределение пор по размерам с двумя доминирующими значениями, обычно их называют макропоры и микропоры. Высококачественные описание таких материалов требуют явного представления двойной пористости. Модель двойной пористости широко применяется в моделировании водных и нефтяных резервуаров, почвы и т. д., определение проницаемости таких сред является одним из направлений в области массопереноса в пористых средах в последние десятилетия. В [44, 47] разработана структура из конечных элементов для фильтрации жидкости в средах двойной пористости.

В [38] уточнена модель Козени—Кармана. Предложена формула проницаемости породы, образованной извилистыми трубками. Обнаружен параметр, однозначно связывающий теоретические проницаемости по данным исследований керна с теоретическими проницаемостями по данным ГИС.

В [10] выполнена оценка применимости модели Козени, используемой для прогнозирования проницаемости низкопористых сред. Показано, что эффективность применения модели зависит от плотности волокон и фазового состояния фильтруемой среды. Определены допущения, выполнение которых обеспечивает высокую точность прогноза проницаемости.

В [11, 12] рассматриваются различные варианты представления числа Рейнольдса и коэффициента гидравлического сопротивления для пористых сред. Вывод формул производится на примере модельных пористых сред с периодической структурой, образованной системами капилляров и упаковками шаров с постоянным диаметром. Дается обобщение формулы

Козени для определения диаметра капилляра в идеальной пористой среде эквивалентной фиктивной по проницаемости и пористости.

## **§1.2. Вычислительные работы**

В [27] выполнен анализ гидродинамических условий при фильтрации и коэффициента проницаемости пористой среды при ламинарном течении несжимаемой жидкости на основе асимптотических решений системы уравнений Навье-Стокса. Показано, что метод малого параметра позволяет получить оценки градиентов давлений и скоростей на масштабе порядка характерного размера пористой структуры.

Для решения множества фундаментальных и прикладных задач самых различных научных дисциплин и производственных направлений необходимо проектировать материалы с заданными структурными характеристиками и физико-химическими свойствами. Одним из методов количественного описания микроструктуры пористых материалов и сред является применение корреляционных функций, с помощью которых можно проводить сборки/реконструкции структур. В [21] произведено создание образцов материалов различной структуры по аналитически заданным корреляционным функциям, для которых по результатам численного моделирования была найдена проницаемость. Показано, что можно сконструировать пористый материал с желаемыми физическими (проницаемость) и структурными (линейные размеры порового пространства) свойствами.

В [20] с применением численного моделирования проведен поиск конфигурации прямолинейного канала, в котором в наибольшей степени воспроизводилось бы течение в слое из частиц сферической формы.

В [31] решена задача о ламинарном двумерном течении вязкой несжимаемой жидкости в пористой средой, образованной системой призм. Рассмотрено два вида течений: сдвиговое за счет движения верхней стенки канала и градиентное из-за наличия перепада давления вдоль канала.

В [43] проведено моделирование процесса течения ньютоновской жидкости в пористой среде. Анализ течения на микроуровне позволил получить макроскопический закон фильтрации, а также критические значения градиентов давления. Показано, что при больших градиентах давления закон Дарси наиболее хорошо работает в мелкопоровых коллекторах и нарушается во всем диапазоне градиентов для крупнопоровых пород, а при низких градиентах линейный закон фильтрации выполняем только для крупнопоровых пород.

В [53] для вычисления проницаемости волокнистых пористых сред с учетом их микроструктуры представлен численно-аналитический подход. Для определения проницаемости на основе модели вязкой несжимаемой жидкости пористая среда представлена в виде цилиндров.

Моделирование пористых сред с деформациями и фильтрацией является довольно сложной задачей. Если возникают большие деформации, появляется неоднородное поле пористости. С вычислительной точки зрения это существенно меняет математическое описание задачи. В [51] проанализированы последствия возникновения неоднородности пористости в двухфазной пористой среде для течения Дарси и Дарси-Бринкмана.

В случае увеличения напряжения низкопроницаемая порода претерпевает довольно небольшие изменения пористости, но наблюдается значительное снижение проницаемости. Эмпирические отношения, основанные на лабораторных данных, дают плохую согласованность для небольших напряжений и неразумный прогноз для некоторых эффективных напряжений. В [54] разработан ряд теоретических моделей для определения основных соотношений между пористостью, проницаемостью и эффективными напряжениями для низкопроницаемых пород.

Проницаемость часто определяется экспериментально в лаборатории по образцам шлифов. Статья [48] посвящена новому способу использования существующего испытательного стенда для определения проницаемостей пористой среды.



В [45] разработана модель для двумерной неньютоновской фильтрации в пористых средах.

В работе [46] исследован поток жидкости в деформируемой пористой среде с одной трещиной. Перетоки жидкости между трещиной и окружающей пористой средой учитываются через определение соответствующих граничных условий на трещине, полученных путем осреднения потока Дарси внутри трещины.

В [6] исследуется фильтрация сжимаемой жидкости в неоднородной недеформируемой гранулированной среде. Показано, что в случае неоднородного поля скоростей возникает тензор дополнительных напряжений в связи с переносом частиц жидкости в поперечном направлении при обтекании гранул среды в продольном направлении.

Большой набор микроскопических параметров моделирования потока в объеме пористой среды, образованной цилиндрами представлен в [50]. Для каждого выбранного числа Рейнольдса моделируются 10 различных пористостей в диапазоне 5-95%. Число Рейнольдса изменяется от  $Re = 10^{-3}$  до  $Re = 105$ , охватывающий режим течения Стокса, режим ламинарного потока и режима турбулентности потока. Для  $Re \leq 200$  численно решены уравнения Навье-Стокса. Осредненные уравнения Навье-Стокса используются для моделирования режима турбулентности. Численные результаты позволяют исследовать микроскопические особенности течения в зависимости от пористости и числа Рейнольдса.

В [40] разработана методика для расчета распределения локальных коэффициентов фильтрации в неоднородной капиллярно-пористой среде. Путем анализа изображений шлифов ряда почв в реальном масштабе и при микроскопическом увеличении определены диаметры и площади макро- и микропор. Предложена модель структуры порового пространства.

В статье [29] предложен подход к представлению пористой среды с помощью моделей поровых сетей и указаны методы получения данных для их построения. Описан метод расчета различных фильтрационных

характеристик пористой среды с использованием этих моделей. Представлен метод генерации моделей поровых сетей на основе распределений их параметров. Предложена общая схема использования моделей поровых сетей при моделировании на масштабах нефтегазовых пластов.

В ряде работ [5, 18, 47, 52] пористая среда представляет собой фрактальный объект. В [18] приведены методики определения извилистости и пористости для таких сред. В [47] проницаемость среды определена согласно фрактальной теории, основанной на том, что распределение длин случайных переломов подчиняется фрактальному закону, потока в каждой из трещин — кубическому. Пористая матрица состоит из извилистых капилляров, размеры которых следуют фрактальному закону. В [5] в рамках ячеечного метода Хаппеля и Бреннера с использованием уравнений Бринкмана вычислена гидродинамическая проницаемость среды. В [52] для определения скорости потока, средней скорости потока, а также проницаемости пористой среды, состоящей из ряда извилистых капилляров / пор с произвольными формами была применена фрактальная теория.

В [39] рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. Методом интегральных энергетических оценок устанавливается свойство конечной скорости стабилизации решения при малом коэффициенте объемной сжимаемости твердой среды.

В [36] описана система количественного анализа микроструктуры, состоящая из растрового электронного микроскопа (РЭМ) и ПО. Помимо широко известных планиметрических характеристик микроструктуры грунтов также могут быть получены показатели формы зерен, коэффициент извилистости, значения удельной поверхности, проницаемости и др.

### **§1.3. Открытые программные комплексы в вычислительной гидродинамике**

Вычислительная гидродинамика — подраздел механики сплошных сред, включающий совокупность физических, математических и численных

методов, предназначенных для вычисления характеристик потоковых процессов.

Существует множество программ вычислительной гидродинамики: Advanced Simulation Library, ANSYS, Autodesk Simulation CFD, OpenFOAM, Flowvision, SolidWorks, Code Aster, Code Saturn, Elmer и др.

После анализа существующих пакетов для решения задач была выбрана связка пакетов (таблица 1): Salome-OpenFoam-ParaView. Данное ПО является открытым и свободным, предназначенным для гидродинамического моделирования.

Таблица 1. Процесс решения задач

Этапы решения задачи	Содержание этапа	Инструмент
Подготовка расчётов	Построение геометрии, сеток	Salome
	Начальные, граничные условия, физические величины	Файлы настроек
Вычисления	simpleFoam (стандартный решатель для стационарных задач)	OpenFoam
Обработка вычислений	Визуализация результатов	ParaView

Для численного моделирования был выбран пакет OpenFOAM.

OpenFOAM — свободно распространяемый пакет вычислительной гидродинамики. В его основе лежит набор библиотек, предоставляющих инструменты для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Вместе с кодом поставляется набор программ - решателей, в которых реализованы различные математические модели механики сплошных сред. OpenFOAM позволяет решать следующие задачи:

- Прочностные расчеты;
- Гидродинамика ньютоновских и неньютоновских вязких жидкостей как в несжимаемом, так и сжимаемом приближении с учётом конвективного теплообмена и действием сил гравитации;

- Задачи теплопроводности в твёрдом теле;
- Многофазные задачи, в том числе с описанием химических реакций компонент потока.

В OpenFOAM встроено несколько решателей для несжимаемой жидкости (таблица 2).

Таблица 2. Решатели для несжимаемой жидкости

Решатель	Описание
adjointShape-OptimizationFoam	Стационарный решатель для несжимаемого, турбулентного течения неньютоновских жидкостей с оптимизацией формы канала путем применения "закупорки" регионов, вызывающих потерю давления, оцененных с помощью сопряженных ячеек
boundaryFoam	Стационарный решатель для несжимаемого, одномерного, турбулентного течения, обычно применяется для генерирования условий граничного слоя на входе
icoFoam	Переходный решатель для несжимаемого, ламинарного течения ньютоновской жидкости
nonNewtonianIcoFoam	Переходный решатель для несжимаемого, ламинарного течения неньютоновских жидкостей
pimpleDyMFoam	Переходный решатель для несжимаемого течения ньютоновской жидкости по движущейся сетке с помощью PIMPLE (PISO-SIMPLE) алгоритма
pimpleFoam	Переходный решатель с большим шагом по времени для несжимаемого течения с помощью PIMPLE (PISO-SIMPLE) алгоритма
pisoFoam	Переходный решатель для несжимаемого течения
porousSimpleFoam	Стационарный решатель для несжимаемого, турбулентного потока с неявной или явной обработкой

	пористости
shallowWaterFoam	Переходный решатель для уравнений невязкой мелкой воды с вращением
simpleFoam	Стационарный решатель для несжимаемого турбулентного течения
SRFSimpleFoam	Стационарный решатель для несжимаемого, турбулентного течения неньютоновских жидкостей во вращающемся каркасе
SRFPimpleFoam	Переходный решатель с большим шагом по времени для несжимаемого течения во вращающемся каркасе с помощью PIMPLE (PISO-SIMPLE) алгоритма

## **ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ, ОБРАЗОВАННОЙ СООБЩАЮЩИМИСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ КАНАЛАМИ**

В данной главе предложена модель пористой среды периодической структуры, описывающая практически весь интервал возможных значений пористости (0; 1). В отличие от ранее рассмотренных моделей в качестве основного структурного элемента среды взяты сообщающиеся осесимметричные каналы переменного сечения. Осевая симметрия часто используется при моделировании массопереноса в микроканалах пористой среды [7, 8].

Высокопористые проницаемые ячеистые материалы (ВПЯМ) и их получение является одним из перспективных направлений неорганического материаловедения. ВПЯМ используются в таких направлениях, как очистка промышленных газов от примесей, разделение парогазовых сред, газораспределение и выравнивание газовых потоков, смешивание, электрохимия, экология, охрана окружающей среды, теплообмен, связанный с передачей тепла между средами, создание композиционных материалов. Разнообразные области применения ВПЯМ определяют сочетание в материале таких свойств как развитая удельная поверхность, конструктивная прочность, низкое гидравлическое сопротивление, высокая проницаемость. ВПЯМ, получаемые дублированием ячеистых полимерных материалов, имеют пористость 75 – 97%, проницаемость  $10^{-8} - 10^{-9} \text{ м}^2$  и размер каналов 0,2 – 5 мм [3].

### **§2.1. Течение Пуазейля (тестовая задача)**

**Математическая модель.** Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости по каналу произвольного сечения (одинакового вдоль всей длины канала). В качестве оси  $x$  выберем ось канала.

Скорость  $v$  жидкости направлена везде по оси  $x$  и является функцией только от  $y$  и  $z$ .

Уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно, а  $y$ - и  $z$ -компоненты уравнения Навье — Стокса дают  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ ,  $x$ -компонента уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости дает

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Отсюда

$$\frac{dp}{dx} = \text{const.}$$

Поэтому градиент давления запишем в виде  $\frac{\Delta p}{l}$ , где  $\Delta p$  — разность давлений на концах канала, а  $l$  — длина канала.

Уравнение должно быть решено при граничном условии  $v = 0$  на контуре сечения канала.

Рассмотрим канал кругового сечения радиуса  $R$ . Выбирая начало координат в центре кругового сечения и вводя полярные координаты, имеем в силу симметрии  $v = v(r)$ . Воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в полярных координатах, имеем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{\mu l}.$$

Интегрируя, находим:

$$v = - \frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + a \ln r + b.$$

Постоянную  $a$  полагаем равной нулю, поскольку скорость должна оставаться конечной во всем сечении канала, включая его центр. Постоянную  $b$  определим из условия  $v = 0$  при  $r = R$  и найдем скорость:

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2). \quad (2.1)$$

Получили, что скорость имеет параболический профиль.

Вычислим объемный расход жидкости

$$Q = 2\pi \int_0^R r v dr. \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.2) с учетом (2.1), получаем:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8 \mu l} R^4. \quad (2.3)$$

Показано, что объемный расход пропорционален четвертой степени радиуса канала.

Найдем среднюю скорость течения жидкости. По определению средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{S}, \quad (2.4)$$

где  $S = \pi R^2$  – площадь поперечного сечения канала.

Подставляя (2.3) в (2.4), получаем:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\pi \Delta p}{8 \mu l} R^4 \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{\Delta p}{8 \mu l} R^2.$$

В (2.1) максимальная скорость достигается при  $r = 0$ :

$$v_{\text{max}} = \frac{\Delta p}{4 \mu l} R^2.$$

Таким образом, максимальная скорость течения жидкости в 2 раза больше средней скорости.

**Численная реализация.** На рассмотренной выше математической модели проведем тестирование используемой для гидродинамических расчетов связки пакетов SALOME-OpenFOAM. Геометрия задачи и расчетная сетка построены в пакете SALOME. Для сравнения относительной погрешности точного, найденного по формуле (2.3), и численного решений были построены 2 типа сеток: гексаэдральная и тетраэдральная. Расчеты проведены в пакете OpenFOAM. Для задачи стационарного течения несжимаемой жидкости оптимально подходит приложение simpleFoam (таблица 2) с алгоритмом SIMPLE (с одним неортогональным корректором). При численном решении системы уравнений Навье – Стокса была использована следующая конечно – разностная аппроксимация: для градиента давления – линейная схема Гаусса второго порядка, для дивергенции – схема Гаусса с ограничителем SuperBeeV, для лапласиана –



линейная схема Гаусса второго порядка с коррекцией. Для решения СЛАУ был использован алгоритм GAMG.

В расчетах были использованы следующие параметры: длина канала  $L = 10^{-3}$  м, радиус канала  $R = 0,1 \cdot L$  м, плотность флюида  $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , динамическая вязкость флюида  $\mu = 10^{-3}$  Па · с, перепад давления на входе и выходе  $\Delta p = 1$  Па.

На рис. 2.1 показана зависимость скорости от поперечной координаты, найденная по результатам численного моделирования в OpenFOAM. Получен близкий к параболическому профиль скорости (рис. 2.1), что согласуется с аналитическим решением (2.1).

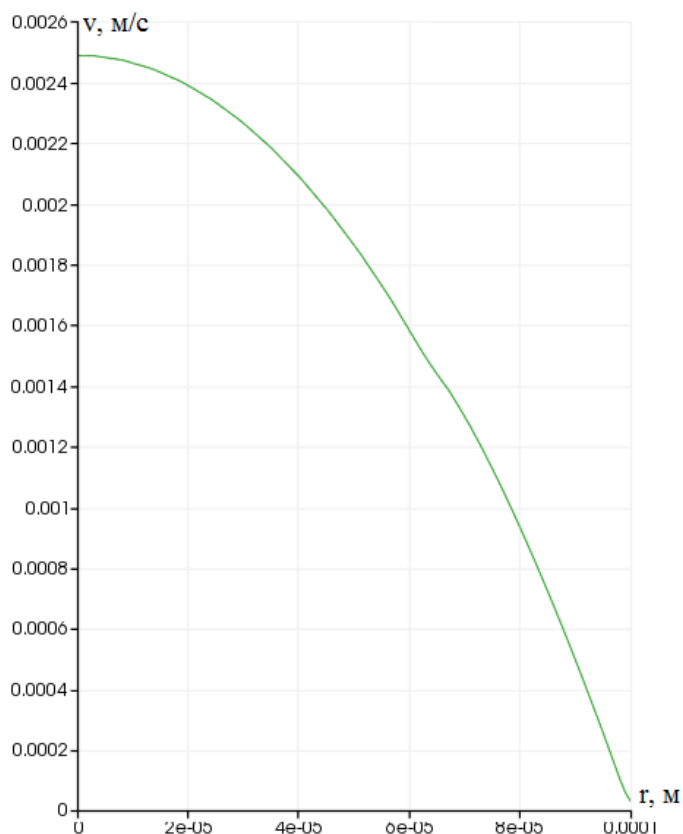


Рис. 2.1. Зависимость скорости от поперечной координаты  $r$

На рис. 2.2 и рис. 2.3 показана зависимость погрешности вычислений  $\varepsilon$  от числа элементарных объемов  $N$ . Видно, что погрешность решения на гексаэдральной сетке оказалась меньше, чем на тетраэдральной.

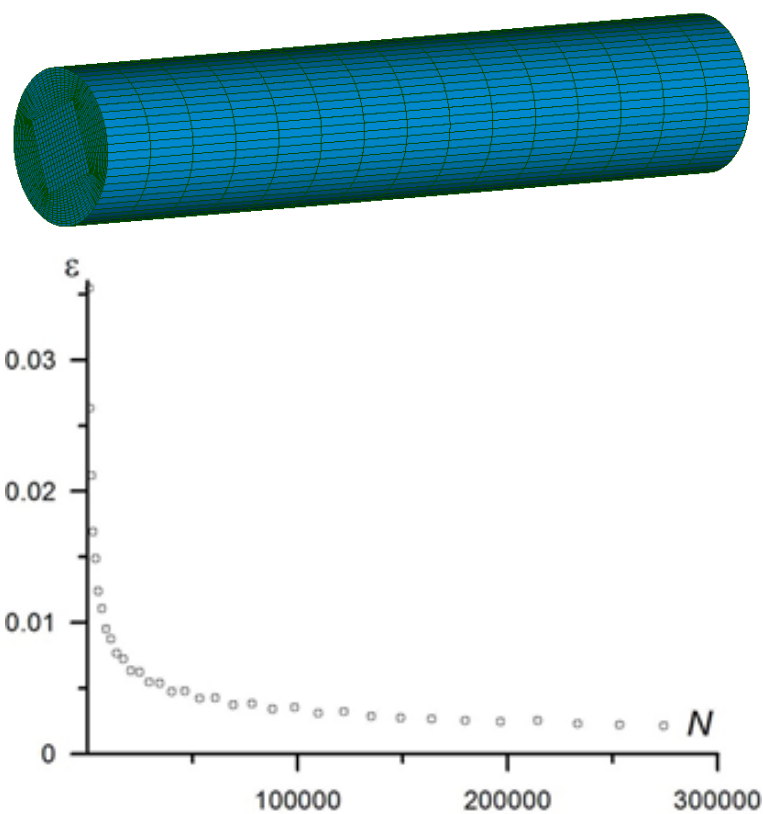


Рис. 2.2. Зависимость погрешности вычислений  $\varepsilon$  от числа элементарных объемов  $N$  для расчетов на гексаэдральной сетке

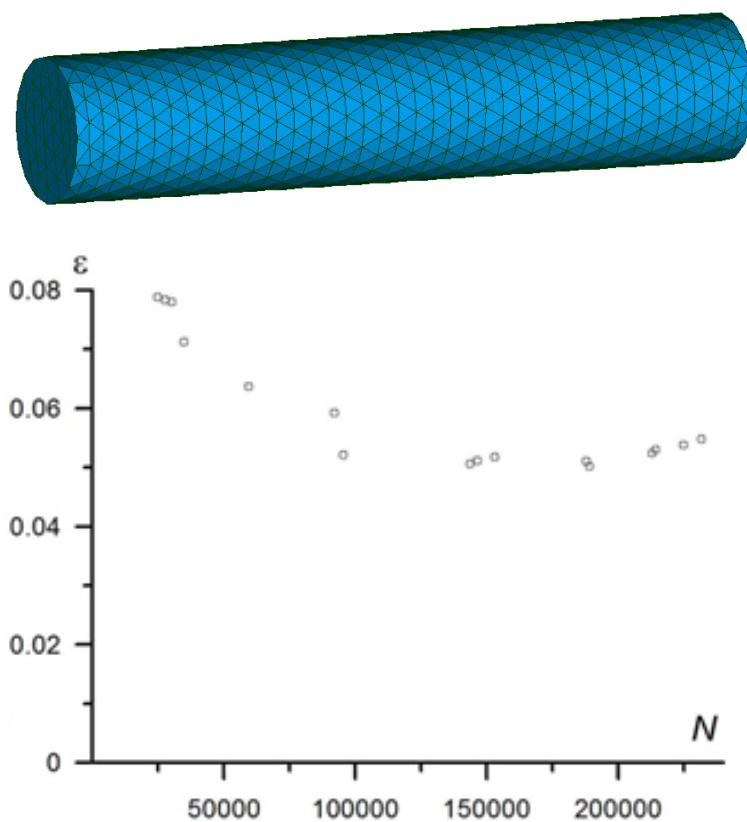


Рис. 2.3. Зависимость погрешности вычислений  $\varepsilon$  от числа элементарных объемов  $N$  для расчетов на тетраэдральной сетке

## §2.2. Геометрия задачи

Рассмотрим канал переменного сечения длиной  $L$  со слабо меняющимся радиусом  $R = R(z)$ ,  $dR/dz \ll 1$ . Форму канала зададим вращением относительно оси  $Oz$  кривой

$$R(z) = \frac{R_{max} + R_{min}}{2} + \frac{R_{max} - R_{min}}{2} \cos \frac{2\pi z}{L}, \quad (2.5)$$

$$R_{max} \leq 0.1L, R_{min} \leq R_{max}.$$

Использование трех независимых геометрических параметров при моделировании пористой среды позволяет воспроизвести широкий диапазон значений пористости в различных средах. Смещая соседние каналы один относительно другого на  $L/2$  вдоль оси  $Oz$ , можно добиться большого разброса значений проницаемости в модельной среде даже при высокой пористости (рис. 2.4)

$$R'(z) = \frac{R_{max} + R_{min}}{2} - \frac{R_{max} - R_{min}}{2} \cos \frac{2\pi z}{L}. \quad (2.6)$$

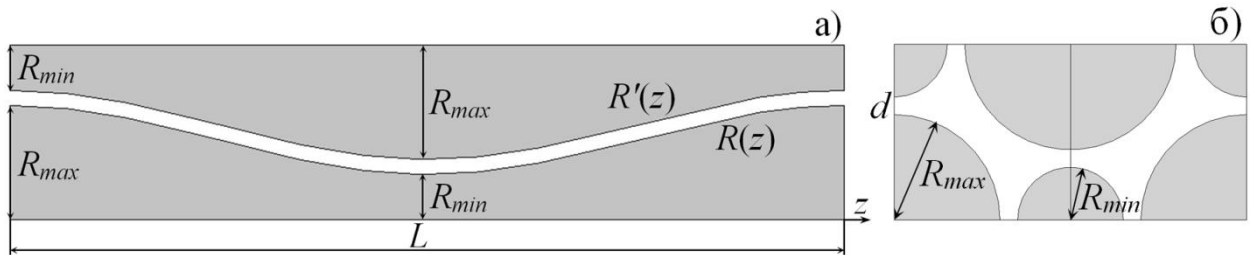


Рис. 2.4. Схема расположения каналов: продольное (а) и поперечное (б) сечения

Располагая оси каналов (2.5) и (2.6) в вершинах ромбов со стороной  $d$  так, как показано на рис. 2.5, получим высокопористую среду, каналы которой сообщаются при  $R_{max} > d \cdot \sin(\alpha/2)$ . При  $R_{max} > d \cdot \cos(\alpha/2)$  каналы сообщаются в двух поперечных направлениях. Элементом рассмотренной пористой среды будет ячейка в виде прямого параллелепипеда высотой  $L$ , с основанием в виде ромба со стороной  $d$  и острым углом  $\alpha \in (\pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2)$ . Однако рассматривать удобнее ячейку в виде прямоугольного параллелепипеда с верхним основанием  $ABCD$ , содержащим в общей сложности два полных канала. На рис. 2.5 справа показан один центральный канал.

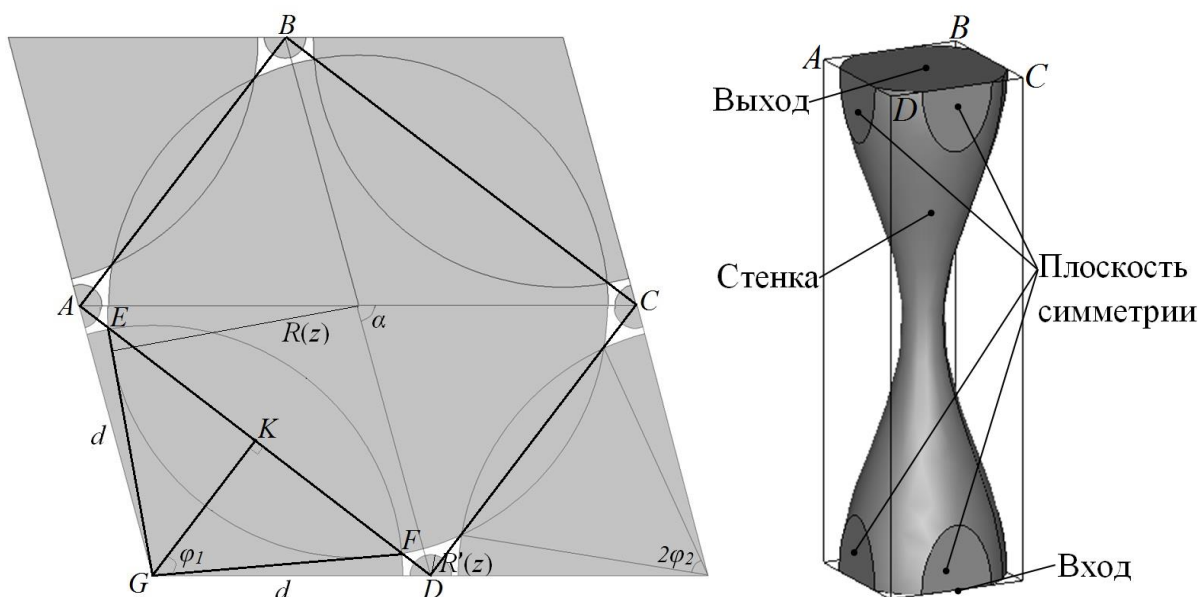


Рис. 2.5. Поперечное сечение четырех смежных ячеек при  $z = 0$  (слева) и отдельный канал (справа)

Анализ геометрии каналов показывает, что при  $R_{min} + R_{max} \geq d$  скелет “рвется” в поперечном направлении (рис. 2.6). Поэтому ограничимся областью допустимых значений для максимального и минимального радиусов канала в виде  $R_{min} + R_{max} < d$ .

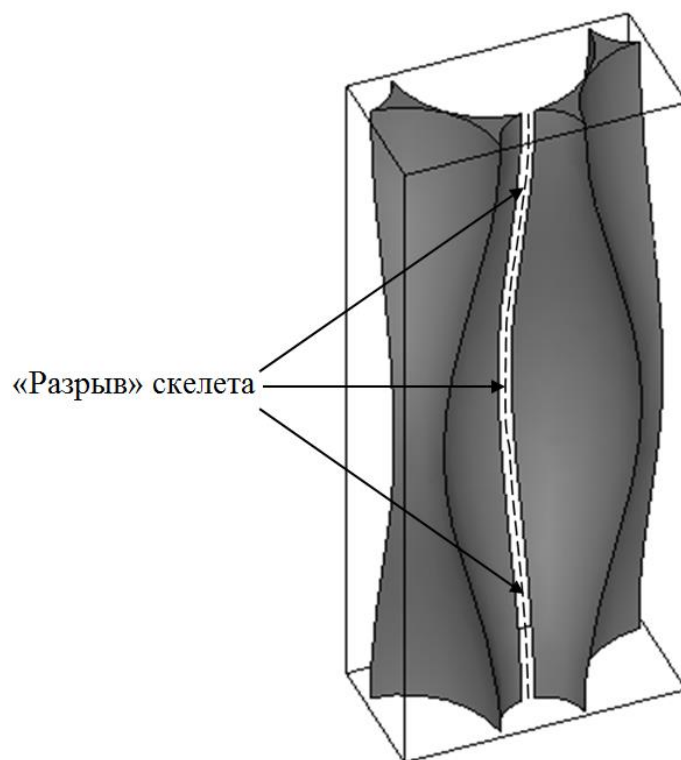


Рис. 2.6. Скелет пористой среды

### §2.3. Просветность и пористость

Рассмотрим ячейку в виде прямоугольного параллелепипеда с верхним основанием  $ABCD$ . Просветность есть отношение площади пор в поперечном сечении к общей площади сечения

$$n(z) = \frac{S_{\Pi}(z)}{S}, \quad S = 2d^2 \sin \alpha. \quad (2.7)$$

Площадь пор в ячейке составляют окружности за вычетом их пересечений в виде сегментов

$$S_{\Pi}(z) = \pi R(z)^2 + \pi R'(z)^2 - 2 \cdot S_{\text{сегм1}}(z) - 2 \cdot S_{\text{сегм2}}(z). \quad (2.8)$$

Найдем площадь сегментов при  $R_{\max} > d \cdot \sin(\alpha/2)$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{сегм1}}(z) &= S_{\text{сектор}} - S_{\Delta EFG} = \frac{2\varphi_1}{2\pi} \cdot \pi R(z)^2 - 0.5 \cdot R(z)^2 \cdot \sin 2\varphi_1 = \\ &= R(z)^2 \cdot (\varphi_1 - 0.5 \cdot \sin 2\varphi_1). \end{aligned}$$

Тогда

$$S_{\text{сегм1}}(z) = \begin{cases} R(z)^2 \cdot (\varphi_1 - 0.5 \cdot \sin 2\varphi_1), & R(z) > d \cdot \sin(\alpha/2), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Рассмотрим  $\Delta KFG$ . По определению

$$\cos \varphi_1(z) = \frac{GK}{GF} = \frac{d \cdot \sin(\alpha/2)}{R(z)}.$$

Отсюда

$$\varphi_1(z) = \arccos[(d/R(z)) \cdot \sin(\alpha/2)]. \quad (2.10)$$

Аналогично для случая  $R_{\max} > d \cdot \cos(\alpha/2)$  получаем

$$\begin{aligned} S_{\text{сегм2}}(z) &= \begin{cases} R(z)^2 \cdot (\varphi_2 - 0.5 \cdot \sin 2\varphi_2), & R(z) > d \cdot \cos(\alpha/2), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \varphi_2(z) &= \arccos[(d/R(z)) \cdot \cos(\alpha/2)]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Введем безразмерные параметры  $\rho_{\max} = R_{\max}/d$ ,  $\rho_{\min} = R_{\min}/d$ .

На рис. 2.7 представлена зависимость просветности от продольной координаты при различных значениях  $\rho_{\min}$ . Видно, что максимальное значение просветности достигается в середине ячейки и на краях. С увеличением  $\rho_{\min}$  растет среднее значение просветности, при  $\rho_{\min} = \rho_{\max}$  просветность не зависит от  $z$ .

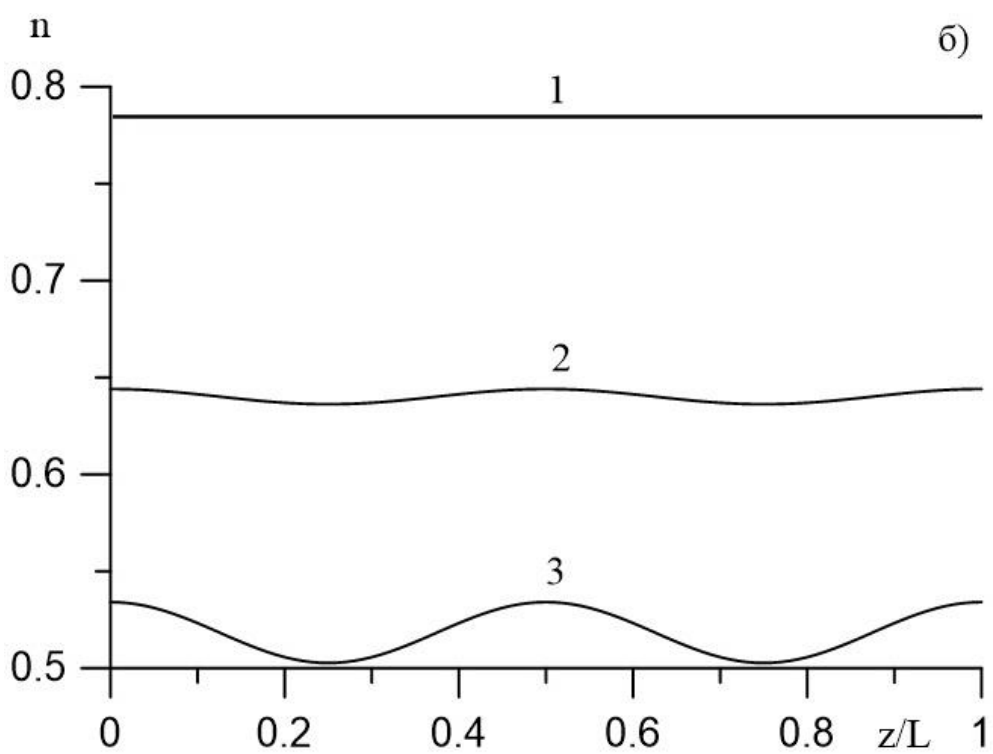
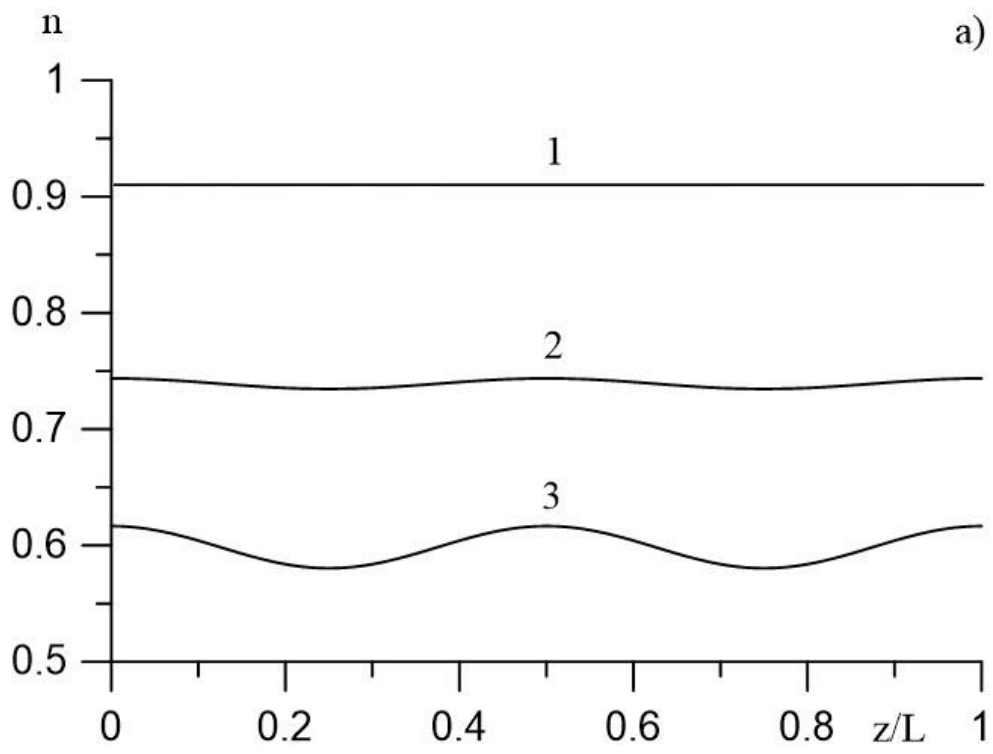


Рис. 2.7. Просветность в зависимости от продольной координаты

при  $\rho_{max} = 0,5$ ,  $\alpha = 60^\circ$  (а) и  $\alpha = 90^\circ$  (б);

$\rho_{min} = 0,5$  (линия 1),  $\rho_{min} = 0,4$  (линия 2),  $\rho_{min} = 0,3$  (линия 3)

На рис. 2.8 в виде изолиний приведена зависимость максимальной просветности от двух параметров:  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$ . Видно, что с увеличением угла  $\alpha$  при фиксированных значениях  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$  просветность уменьшается, поскольку при  $\alpha = 60^\circ$  имеем более плотную упаковку каналов.

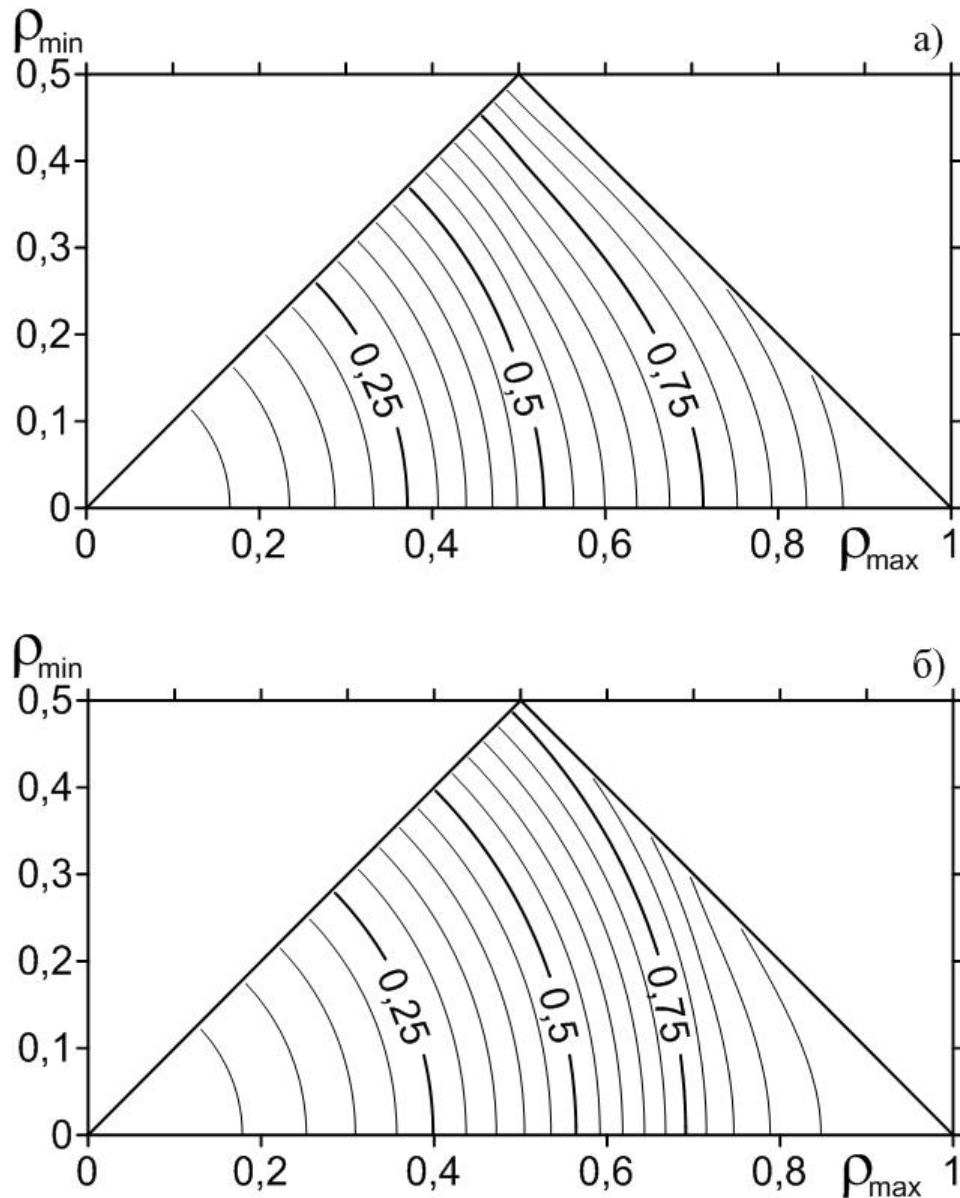


Рис. 2.8. Максимальная просветность (при  $z = 0$ ) в зависимости от  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$  в виде изолиний при  $\alpha = 60^\circ$  (а) и  $\alpha = 90^\circ$  (б)

Пористость среды найдем, интегрируя просветность (2.7) с учетом (2.8) – (2.11) вдоль выделенного направления

$$m = \frac{1}{L} \int_0^L n(z) dz.$$

На рис. 2.9 в виде изолиний приведена зависимость пористости от двух параметров:  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$ . Видно, что с увеличением угла  $\alpha$  при фиксированных значениях  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$  пористость уменьшается.

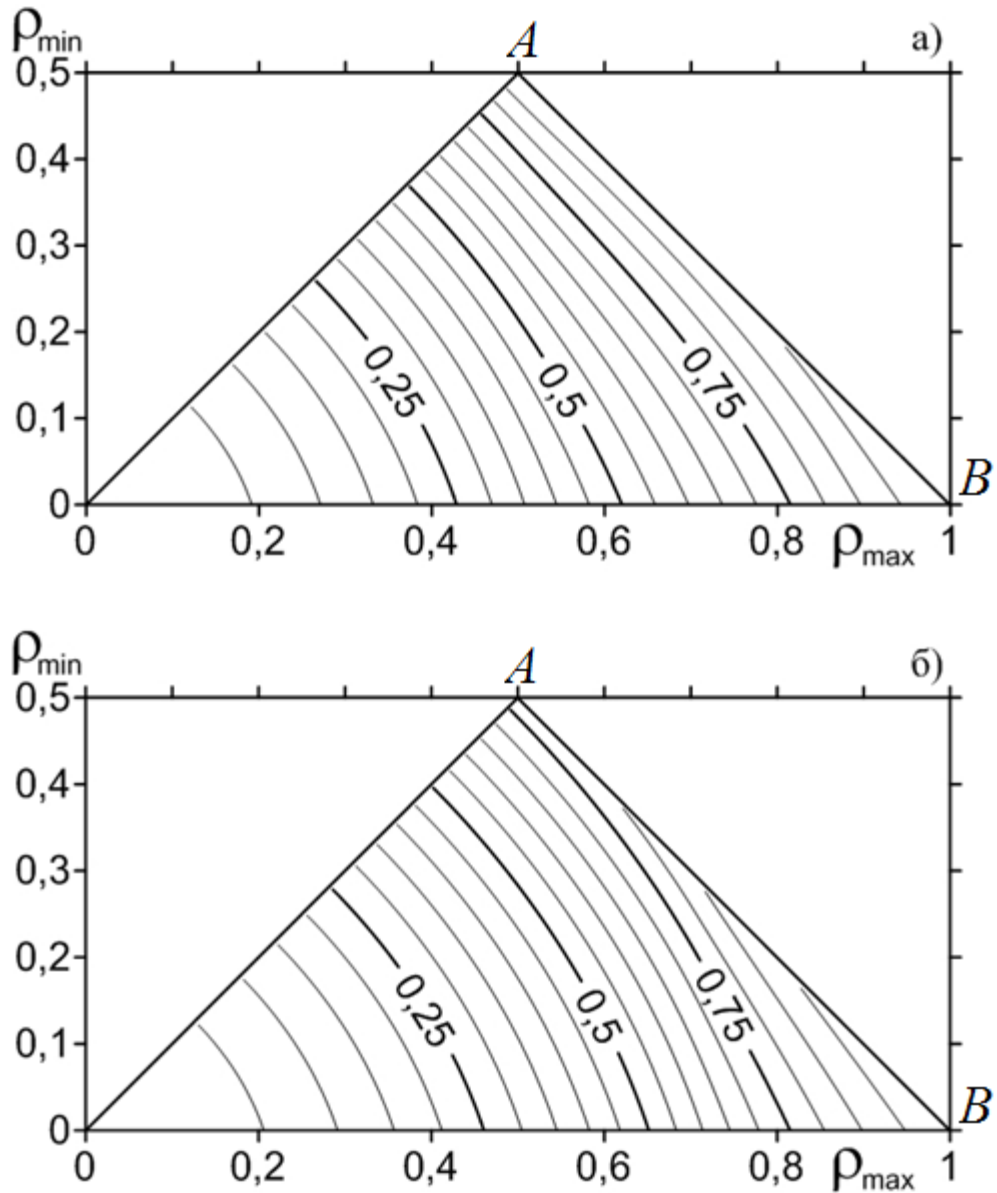


Рис. 2.9. Пористость в зависимости от  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$  в виде изолиний при  $\alpha = 60^\circ$  (а) и  $\alpha = 90^\circ$  (б)

### §2.4. Проницаемость

Проницаемость рассмотренной среды определим по результатам численного решения системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.12)$$



в стационарной постановке с граничными условиями, соответствующими прилипанию на стенке, непротеканию на плоскостях симметрии и заданному давлению на входе и выходе

$$\begin{array}{ll}
 \text{вход} & \frac{d\vec{v}}{dn} = 0, \quad p = p_1, \\
 \text{выход} & \frac{d\vec{v}}{dn} = 0, \quad p = p_2, \\
 \text{стенка} & v = 0, \quad \frac{dp}{dn} = 0, \\
 \text{плоскость симметрии} & v_n = 0, \quad \frac{dp}{dn} = 0.
 \end{array} \tag{2.13}$$

Одномерная фильтрация флюида через пористую среду описывается законом Дарси

$$u = \frac{k \Delta p}{\mu L}, \tag{2.14}$$

где  $\Delta p = p_1 - p_2$  — перепад давления,  $L$  — толщина среды,  $k$  — проницаемость среды,  $\mu$  — динамическая вязкость флюида. С другой стороны, скорость фильтрации по определению

$$u = \frac{Q}{S}, \tag{2.15}$$

где  $Q$  — объемный расход флюида через поперечное сечение среды площадью  $S$ . Определяя объемный расход через поперечное сечение канала по результатам численного решения системы (2.12) - (2.13) из (2.14) - (2.15) найдем проницаемость рассмотренной среды с учетом размеров ячейки

$$k = \frac{\mu L Q}{S \Delta p} = \frac{\mu L Q}{d^2 \sin \alpha \Delta p}. \tag{2.16}$$

В [26] показано, что для каналов цилиндрической формы объемный расход

$$Q = \frac{\pi R_*^4 \Delta p}{8 \mu L}. \tag{2.17}$$

В [17] получена аналитическая оценка проницаемости для каналов со слабо меняющимся радиусом. Такому каналу можно поставить в соответствие цилиндрический канал с эквивалентным радиусом  $R_*$ , при котором объемные расходы через указанные каналы будут равны при соответствующих  $\Delta p$ ,  $L$ ,  $\mu$

$$R_*^4 = L / \left( \int_0^L \frac{dz}{R^4(z)} \right). \tag{2.18}$$

Подставляя (2.5) в (2.18), имеем

$$R_*^4 = \frac{16R_{max}^3\sqrt{R_{max}R_{min}}R_{min}^3}{5R_{max}^3 + 3R_{max}^2R_{min} + 3R_{max}R_{min}^2 + 5R_{min}^3} = \frac{(4R_{max}R_{min})^2\sqrt{\rho_m^3}}{5\rho_m^3 + 3\rho_m^2 + 3\rho_m + 5},$$

$$\rho_m = R_{max}/R_{min}. \quad (2.19)$$

Окончательно, из системы (2.16), (2.17), (2.19) получим аналитическую оценку проницаемости для рассмотренной среды

$$k = \frac{2\pi\sqrt{\rho_m^3}}{(5\rho_m^3 + 3\rho_m^2 + 3\rho_m + 5)\sin\alpha} \cdot \left(\frac{R_{max}R_{min}}{d}\right)^2. \quad (2.20)$$

**Численная реализация.** Геометрия задачи и расчетная сетка построены в пакете SALOME. Для сообщающихся каналов использована сетка с элементарными объемами в виде тетраэдров, для не сообщающихся — в виде гексаэдров [15, 16]. Расчеты проведены в пакете OpenFOAM. Для OpenFOAM были применены те же настройки, что и для тестовой задачи о течении Пуазейля.

В расчетах были использованы следующие параметры: длина канала  $L = 10^{-2}$  м, поперечный размер ячейки  $d = 2 \cdot 10^{-3}$  м, плотность флюида  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, динамическая вязкость флюида  $\mu = 10^{-3}$  Па·с, перепад давления на входе и выходе  $\Delta p = 1$  Па. Задача (2.12) – (2.13) решалась численно для различных значений  $R_{min}$  и  $R_{max}$ .

На рис. 2.10 в виде изолиний приведена зависимость проницаемости от безразмерных параметров  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$ . Видно, что при фиксированных значениях  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$  с увеличением угла  $\alpha$  проницаемость уменьшается. Это связано с тем, что уменьшается средняя по длине канала просветность (пористость).

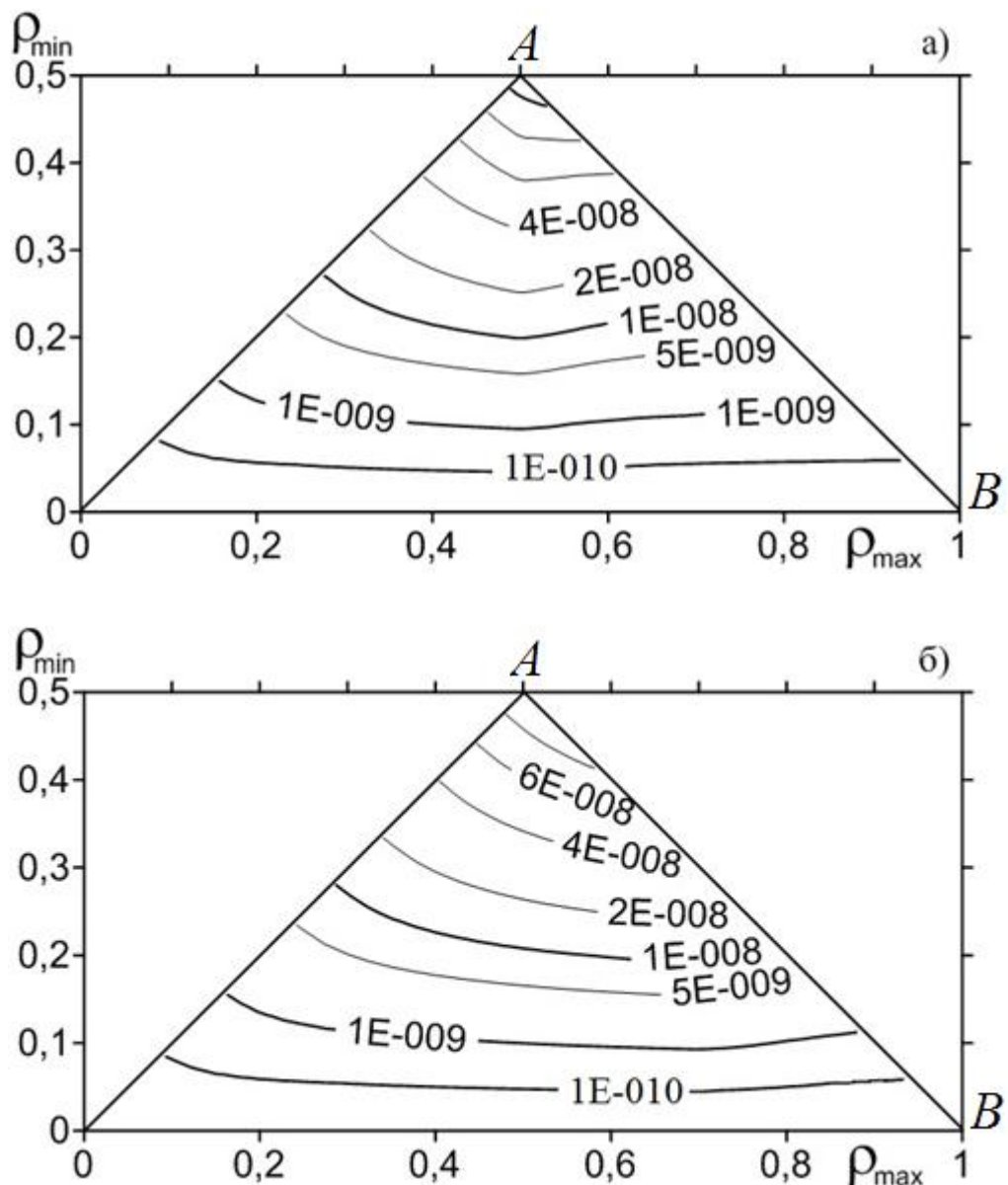


Рис. 2.10. Проницаемость ( $m^2$ ) в зависимости от  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$  в виде изолиний при  $\alpha = 60^\circ$  (а) и  $\alpha = 90^\circ$  (б)

На рис. 2.11 в виде изолиний приведена зависимость проницаемости от пористости и  $\rho_{max}$ . Область  $OAB$  на рис. 2.9 и рис. 2.10 соответствует области определения на рис. 2.11. Видно, что при фиксированной пористости с увеличением  $\rho_{max}$  проницаемость уменьшается, поскольку растет гидравлическое сопротивление; а при фиксированном значении  $\rho_{max}$  с увеличением пористости проницаемость увеличивается.

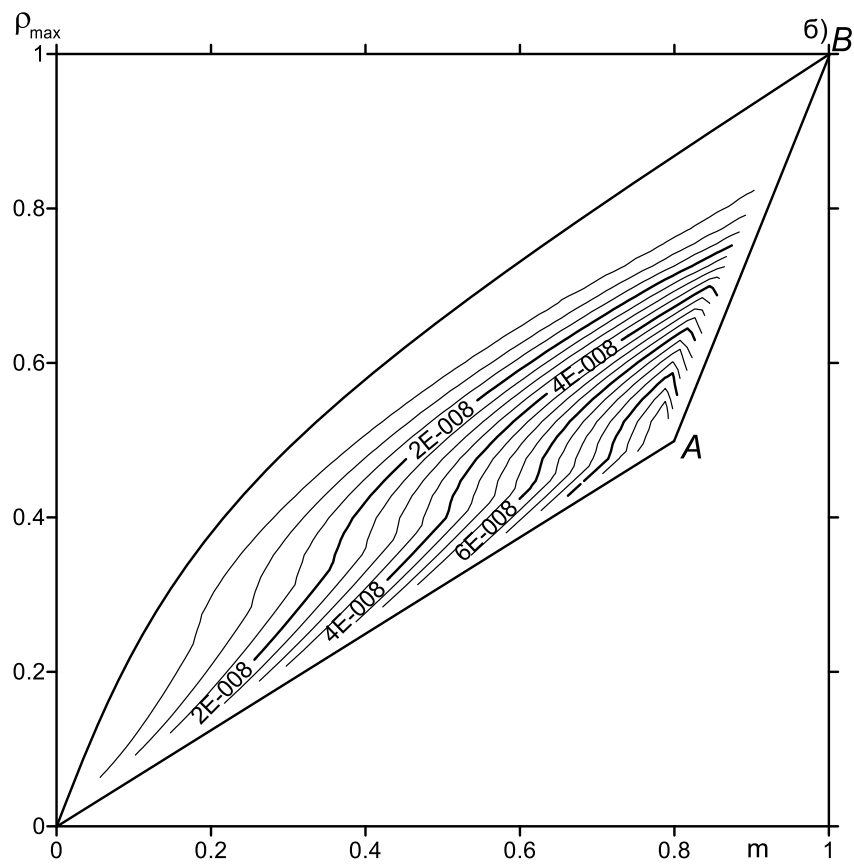
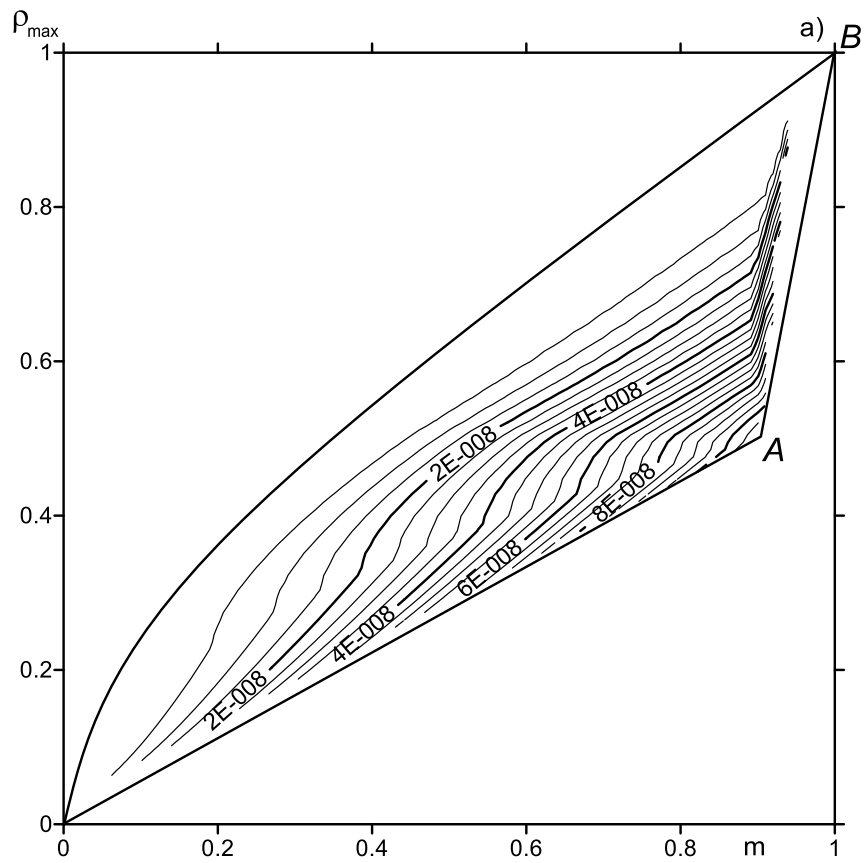


Рис. 2.11. Проницаемость ( $m^2$ ) в зависимости от пористости  $m$  и  $\rho_{max}$  в виде изолиний при  $\alpha = 60^\circ$  (а) и  $\alpha = 90^\circ$  (б)

Безразмерную величину  $\tilde{k} = k/S = k/(d^2 \sin \alpha)$  назовем приведенной проницаемостью. Например, для среды, образованной плотно уложенными параллельными цилиндрическими каналами из (2.16) и (2.17)

$$\tilde{k} = \frac{\pi R_*^4}{8d^4 \sin^2 \alpha} = |d = 2R_*| = \frac{\pi}{128 \sin^2 \alpha}.$$

При  $\alpha = 60^\circ$  имеем  $\tilde{k} = \pi/96 \approx 0,03272$  (точка  $P_1$  на рис. 2.12а), при  $\alpha = 90^\circ$  —  $\tilde{k} = \pi/128 \approx 0,02454$  (точка  $P_2$  на рис. 2.12б). Приведенной проницаемостью удобно пользоваться, поскольку она не зависит от линейных размеров канала.

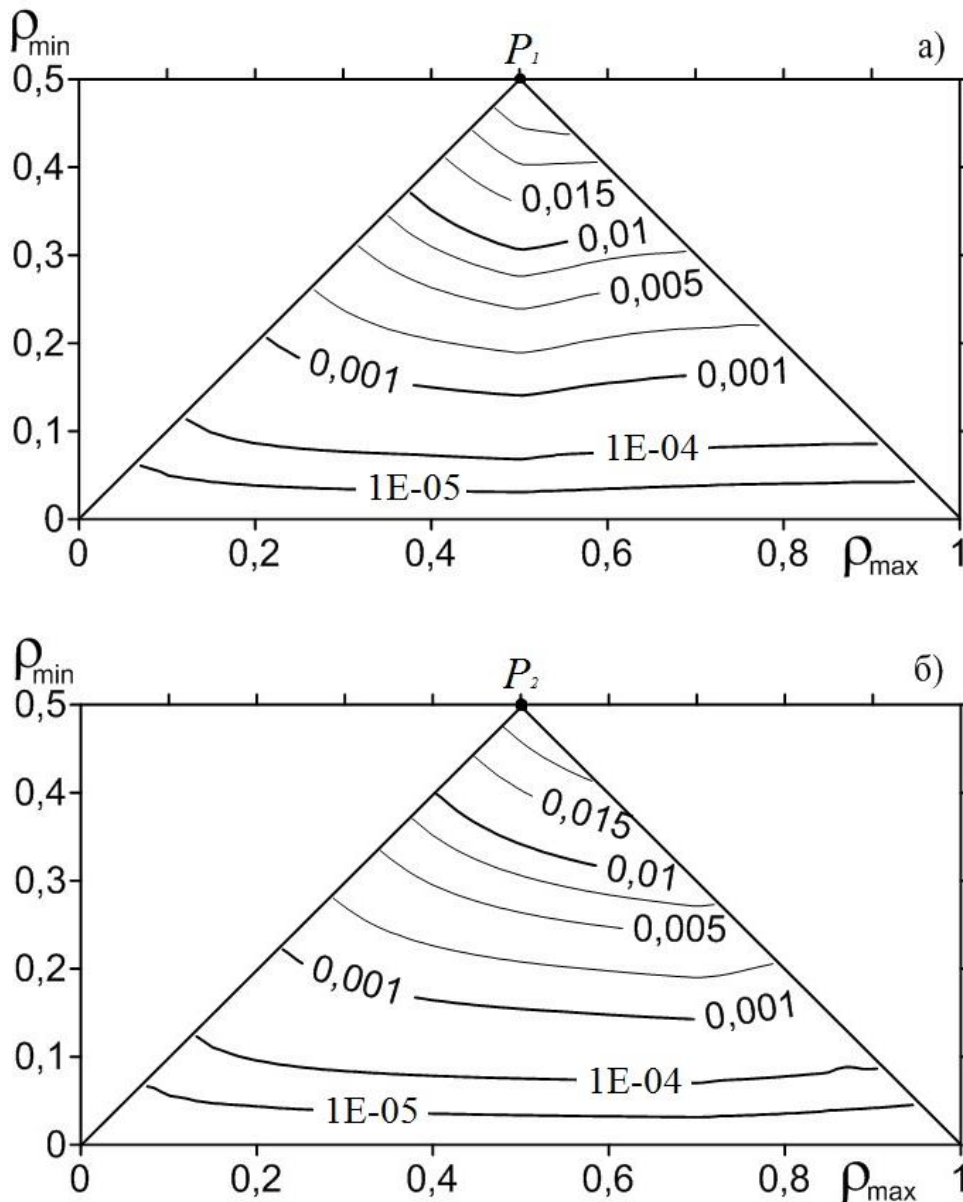


Рис. 2.12. Приведенная проницаемость в зависимости от  $\rho_{\min}$  и  $\rho_{\max}$  в виде изолиний для ячеек при  $\alpha = 60^\circ$  (а) и  $\alpha = 90^\circ$  (б)

На рис. 2.13 показано относительное отклонение аналитической оценки проницаемости от численной. Видно, что при  $\rho_{max} > 0.5$  (рис. 2.13а) и при  $\rho_{max} > 0.7$  (рис. 2.13б) отклонение быстро растет с увеличением  $\rho_{max}$ . В первую очередь это связано с тем, что при таких  $\rho_{max}$  расчетная сетка состоит из тетраэдров. Кроме этого, поперечное сечение каналов в широких местах отличается от круга, для которого получена аналитическая оценка.

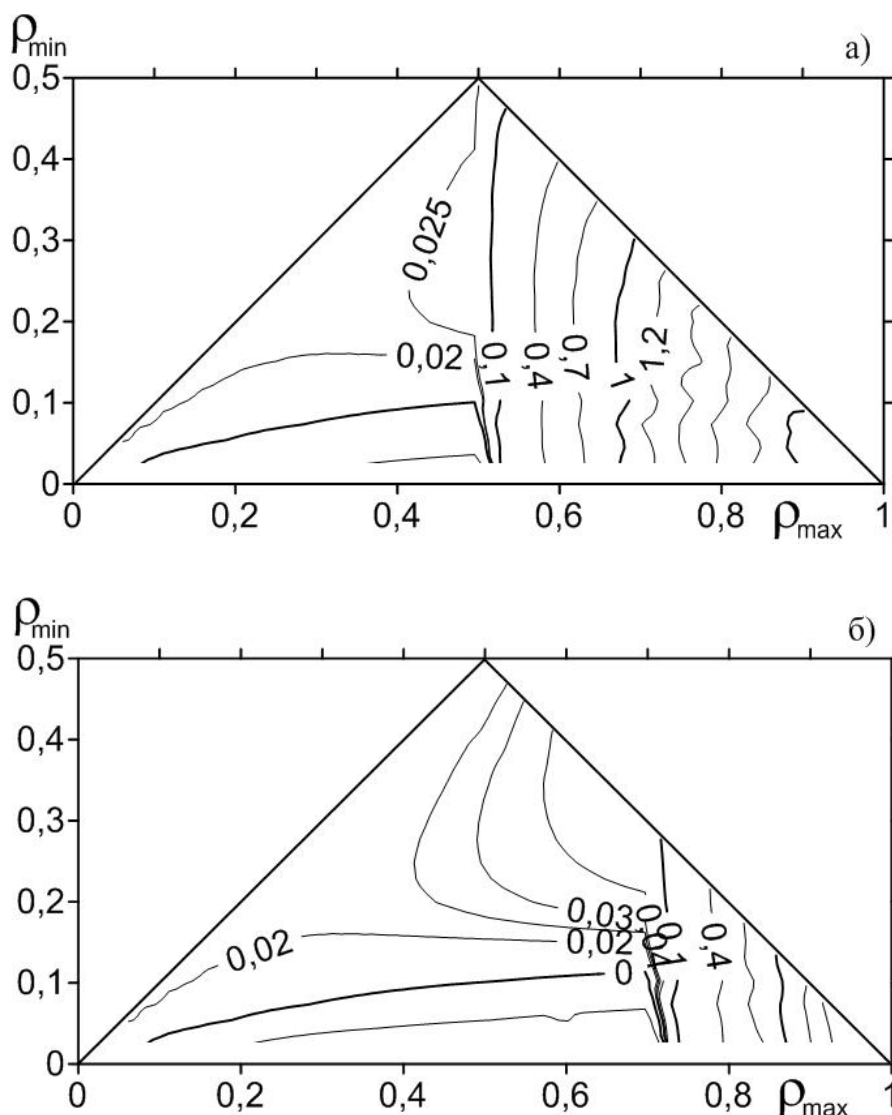


Рис. 2.13. Отклонение аналитической оценки проницаемости относительно численной (изолинии) в зависимости от  $\rho_{min}$  и  $\rho_{max}$  при  $\alpha = 60^\circ$  (а) и  $\alpha = 90^\circ$  (б)

**Заключение.** Для модельной среды, рассмотренной в работе, определены основные фильтрационные свойства: пористость и проницаемость. Для проницаемости получены как аналитическая, так и численная оценки, хорошо соответствующие друг другу.

## ГЛАВА 3. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗВИЛИСТЫХ КАНАЛОВ

Гидравлическое сопротивление пористой среды зависит не только от размеров и формы сечения каналов, но и от извилистости. В третьей главе учитывается влияние извилистости каналов на объемный расход через пористую среду. Рассмотрены два способа построения извилистых каналов: с направляющей в виде синусоиды и дуг окружностей. Исследуется влияние средней кривизны по длине канала на объемный расход.

### §3.1. Геометрия задачи

Рассмотрим канал круглого сечения, образуемый движением окружности радиуса  $r$  вдоль кривой, заданной выражением:

$$f(z) = A \cos \frac{2\pi \cdot z}{L}, \quad 0 \leq z \leq L. \quad (3.1)$$

Плоскость окружности всегда перпендикулярна направляющей. Назовем такой канал каналом первого типа (рис. 3.1).

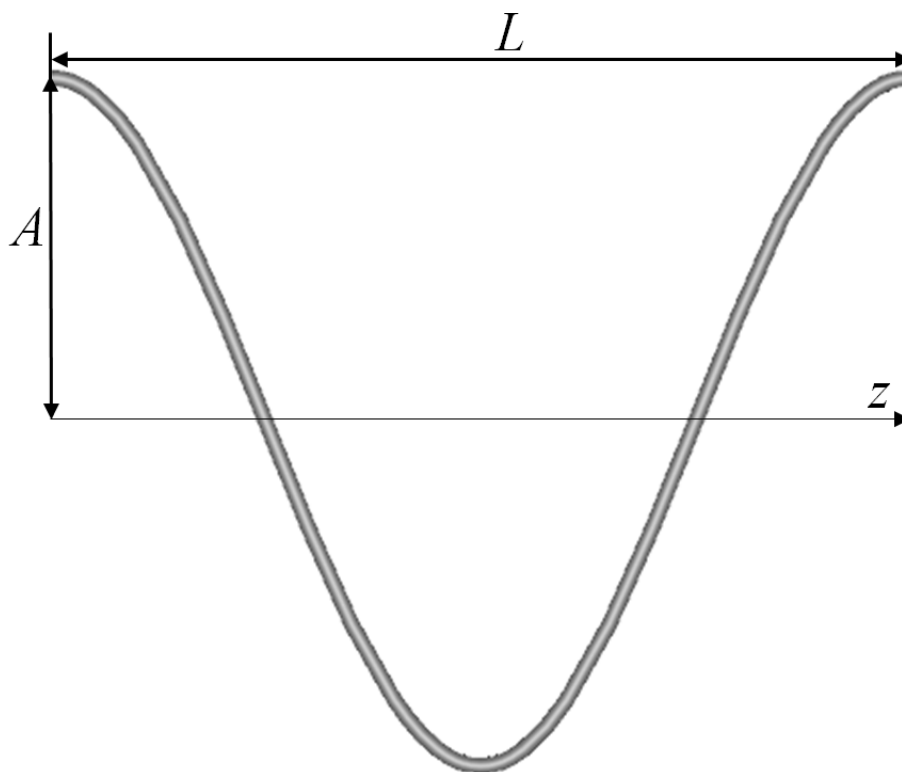


Рис. 3.1. Канал первого типа при  $A = 0,4$

Также рассмотрим канал (рис. 3.2), образуемый движением окружности радиуса  $r$  вдоль кривой, состоящей из дуг окружностей радиуса  $R$ :

$$R = \frac{L}{4 \sin \varphi}, \quad 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.2)$$

Назовем такой канал каналом второго типа.

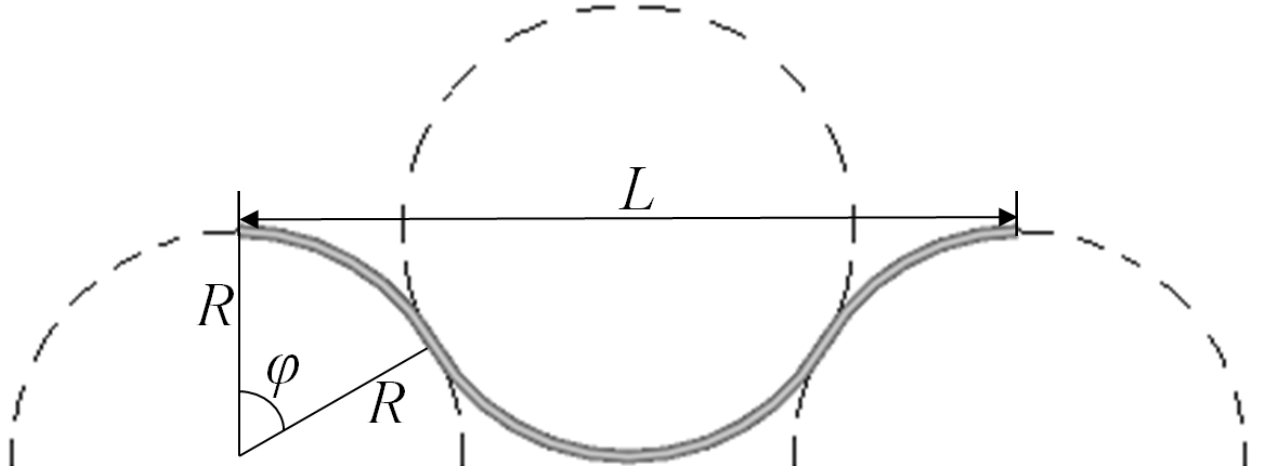


Рис. 3.2. Канал второго типа при  $\varphi = \pi/3$

Найдем длину направляющей для канала первого типа по формуле [35]:

$$L^* = \int_0^L \sqrt{1 + f'^2(z)} dz,$$

для канала второго типа:

$$L^* = 4 \cdot \frac{\varphi}{2\pi} \cdot 2\pi R = 4R\varphi.$$

Извилистостью  $\alpha$  назовем отношение длины направляющей  $L^*$  к длине  $L$  отрезка, соединяющего вход и выход канала:

$$\alpha = \frac{L^*}{L}.$$

На рис. 3.3 показана зависимость извилистости от параметра  $A$  для канала первого типа и от угла  $\varphi$  для канала второго типа.



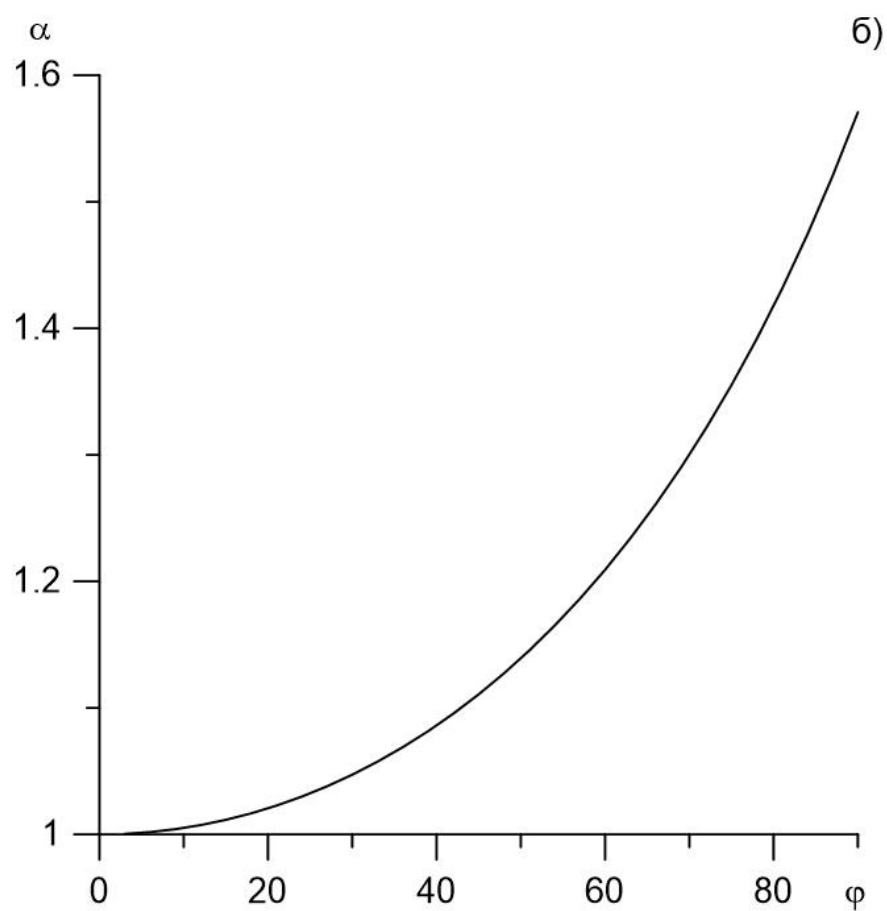
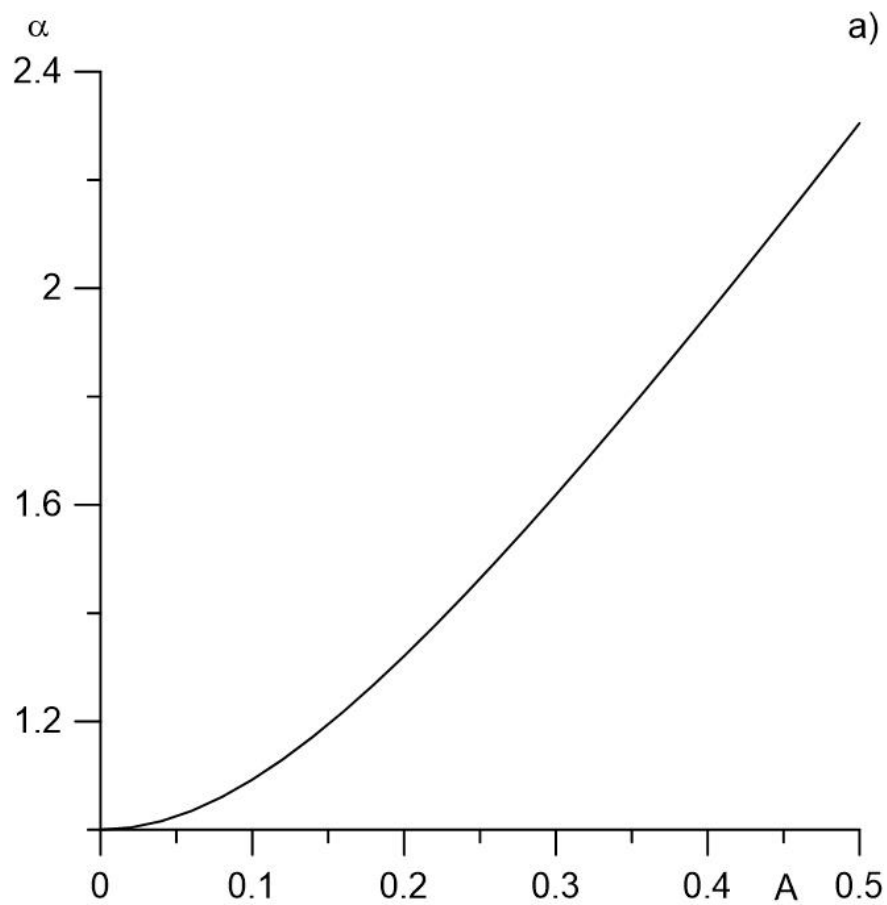


Рис. 3.3. Извилистость для каналов первого (а) и второго (б) типа

Вычислим кривизну направляющей для канала первого типа [33]:

$$k(z) = \frac{|f(z)''|}{\left(\sqrt{1 + f(z)'^2}\right)^3} = \frac{\left|A \cdot \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cdot \cos \frac{2\pi \cdot z}{L}\right|}{\left(\sqrt{1 + \left(A \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot z}{L}\right)^2}\right)^3},$$

найдем среднюю кривизну по длине канала

$$\tilde{k} = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} k(z) dz.$$

Поскольку направляющая канала второго типа составлена из дуг окружностей одинакового радиуса, она имеет постоянную кривизну. Для канала второго типа средняя кривизна

$$\tilde{k} = k = \frac{1}{R}.$$

Приведенную среднюю кривизну определим следующей формулой:

$$k^* = \tilde{k} \cdot L.$$

На рис. 3.4 показана зависимость приведенной средней кривизны направляющей от параметра  $A$  для канала первого типа и от угла  $\varphi$  для канала второго типа. Зависимость приведенной средней кривизны направляющей канала первого типа от параметра  $A$  не возрастает монотонно, а имеет экстремум, поскольку при больших  $A$  большая часть длины канала приходится на участки, близкие к прямым, и с ростом  $A$  их доля возрастает, что ведет к убыванию приведенной средней кривизны. Для канала второго типа приведенная средняя кривизна монотонно растет с увеличением угла  $\varphi$ .

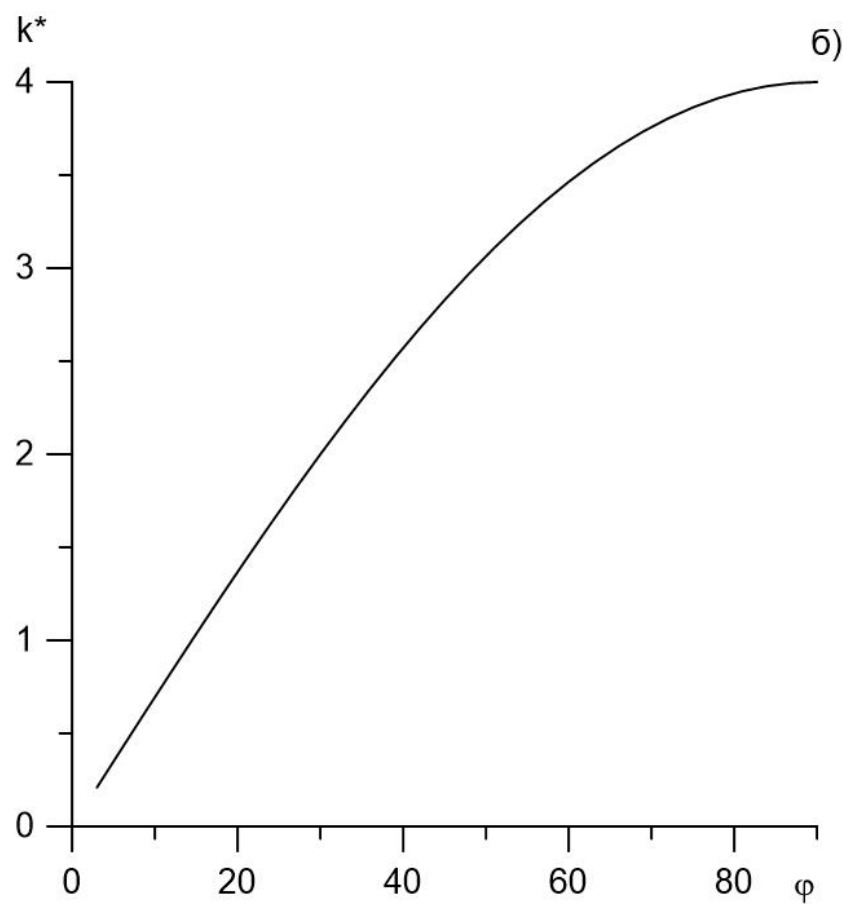
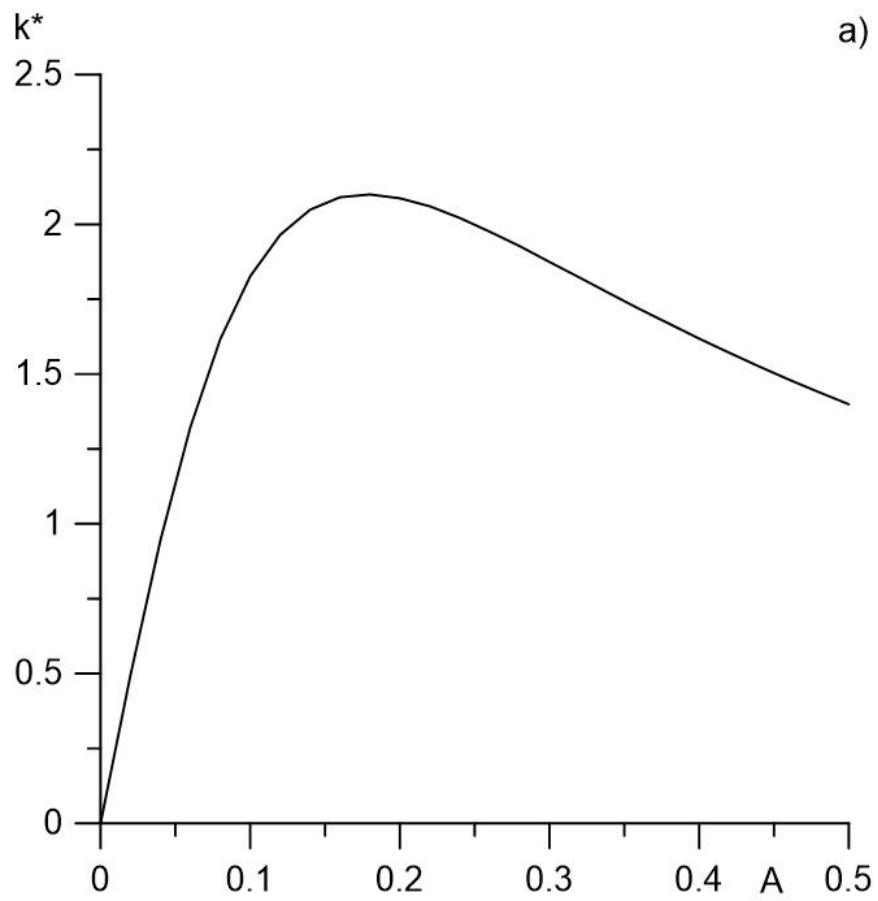


Рис. 3.4. Приведенная средняя кривизна направляющей для каналов первого (а) и второго (б) типа

### §3.2. Основные уравнения и численная реализация

Объемный расход в канале определим по результатам численного решения системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3.3)$$

в стационарной постановке с граничными условиями, соответствующими прилипанию на стенке и заданному давлению на входе и выходе

$$\begin{array}{ll} \text{вход} & \frac{d\vec{v}}{dn} = 0, \quad p = p_1, \\ \text{выход} & \frac{d\vec{v}}{dn} = 0, \quad p = p_2, \\ \text{стенка} & v = 0, \quad \frac{dp}{dn} = 0. \end{array} \quad (3.4)$$

**Численная реализация.** Геометрия задачи и расчетная сетка построены в пакете SALOME. Для каналов использована сетка с элементарными объемами в виде гексаэдров. Расчеты проведены в пакете OpenFOAM. Для OpenFOAM были применены те же настройки, что и для тестовой задачи о течении Пуазейля.

В расчетах были использованы следующие параметры: длина прямого канала  $L = 10^{-3}$  м, радиус образующей окружности  $r = 10^{-2} \cdot L = 10^{-5}$  м, плотность флюида  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, динамическая вязкость флюида  $\mu = 10^{-3}$  Па·с. Задача (3.3)-(3.4) решалась численно для перепада давления  $\Delta p \in [2; 2 \cdot 10^6]$ , параметра  $A$ :  $0 \leq A \leq 0.5$  и угла  $\varphi \in \left[\frac{\pi}{60}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\varphi_i = \frac{\pi}{60} \cdot i$ ,  $i = \overline{1, 30}$ .

### §3.3. Анализ результатов

На рис. 3.5 показана зависимость объемного расхода от перепада давления для различных значений извилистости. Видно, что с увеличением извилистости канала объемный расход уменьшается.

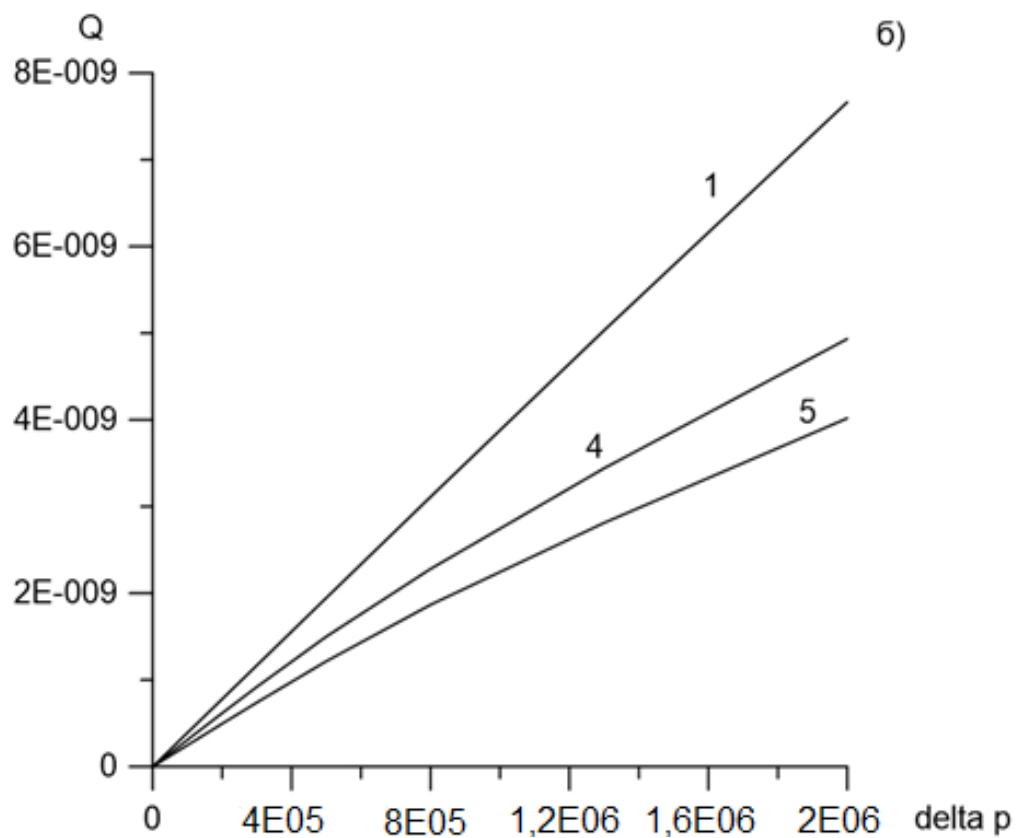
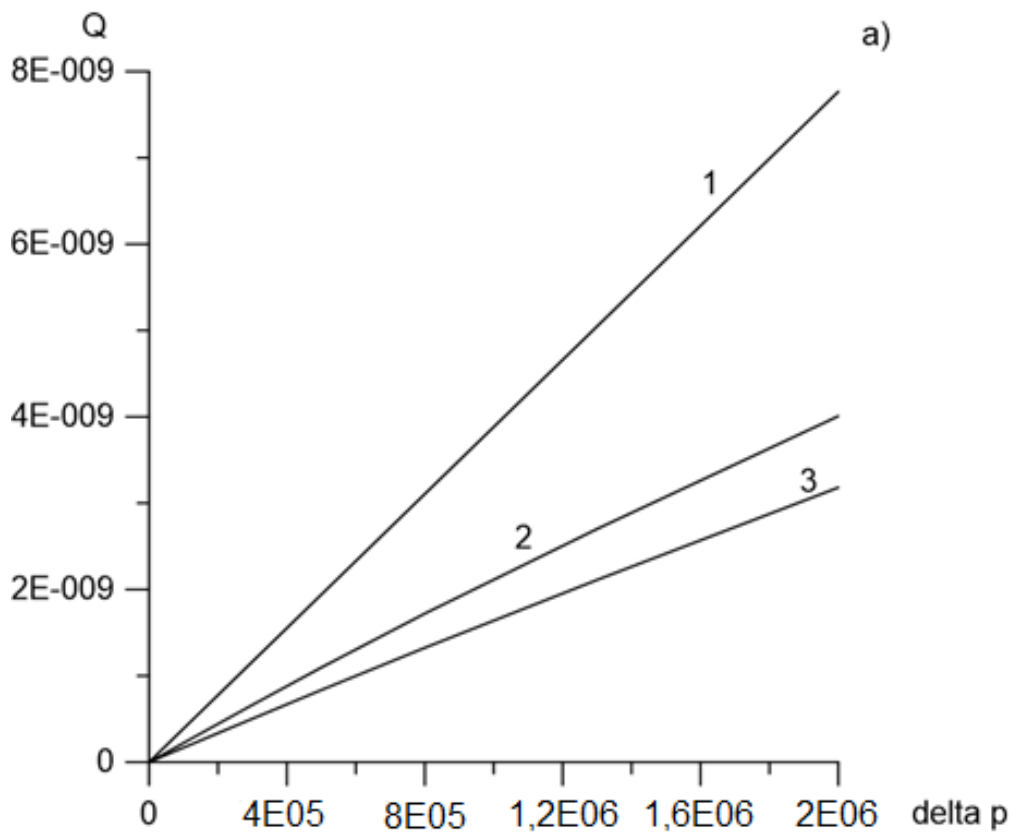


Рис. 3.5. Объемный расход в зависимости от перепада давления при  $\alpha = 1$  (линия 1),  $\alpha = 1,75$  (линия 2),  $\alpha = 2,3$  (линия 3),  $\alpha = 1,26$  (линия 4),  $\alpha = 1,57$  (линия 5) для каналов первого (а) и второго (б) типа

Поскольку граничные условия на входе и выходе заданы через перепад давления, то удобно ввести безразмерный критерий, зависящий от перепада давления, аналогичный числу Рейнольдса. По определению число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu} = \frac{2 v r}{\nu}, \quad (3.5)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$  — характерная скорость,  $D$  — диаметр канала,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости. Подставляя (2.4) в (3.5), имеем:

$$Re = \frac{2 Q r}{\nu \pi r^2} = \frac{2 Q}{\nu \pi r}. \quad (3.6)$$

Аналог числа Рейнольдса  $Re^*$  получим, подставив (2.3) в (3.6):

$$Re^* = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \mu L^*} \cdot \frac{2}{\nu \pi r} = \frac{r^3 \Delta p}{4 \nu^2 L^* \rho}. \quad (3.7)$$

Определим приведенный перепад давления следующей формулой:

$$p^* = \alpha Re^*. \quad (3.8)$$

Применяя к (3.8) определение извилистости и (3.7), имеем:

$$p^* = \frac{L^*}{L} \cdot \frac{r^3 \Delta p}{4 \nu^2 L^* \rho} = \frac{r^3 \Delta p}{4 \nu^2 L \rho}.$$

Обезразмерим объемный расход, поделив его на расход  $Q_p$ , полученный по Пуазейлю (2.3):

$$Q^* = \frac{Q}{Q_p}.$$

Приведенным объемным расходом назовем величину

$$\tilde{Q} = \alpha Q^*.$$

На рис. 3.6 в виде изолиний показана зависимость *безразмерного* объемного расхода от приведенного давления и извилистости канала. Видно, что при фиксированной извилистости с увеличением приведенного перепада давления *безразмерный* объемный расход уменьшается. Связано это с тем, что при больших  $p^*$  средняя скорость течения выше, а, значит, выше центростремительная сила при движении по криволинейным траекториям. В

роли центростремительной силы в данном случае выступает сила реакции со стороны скелета, т.е. сила сопротивления скелета. Показано, что при фиксированном приведенном перепаде давления с увеличением извилистости *безразмерный* объемный расход уменьшается.

На рис. 3.7 в виде изолиний показана зависимость *приведенного* объемного расхода от приведенного давления и извилистости канала. Видно, что при фиксированной извилистости с увеличением приведенного перепада давления *приведенный* объемный расход уменьшается. Показано, что при фиксированном приведенном перепаде давления с увеличением извилистости *приведенный* объемный расход для канала первого типа сначала уменьшается (участок *СВ*), а затем увеличивается (участок *ВА*). Это связано с немонотонностью средней кривизны (рис. 3.4). Для канала второго типа *приведенный* объемный расход сначала уменьшается, а затем (с  $\alpha \approx 1,1$ ) практически не меняется.

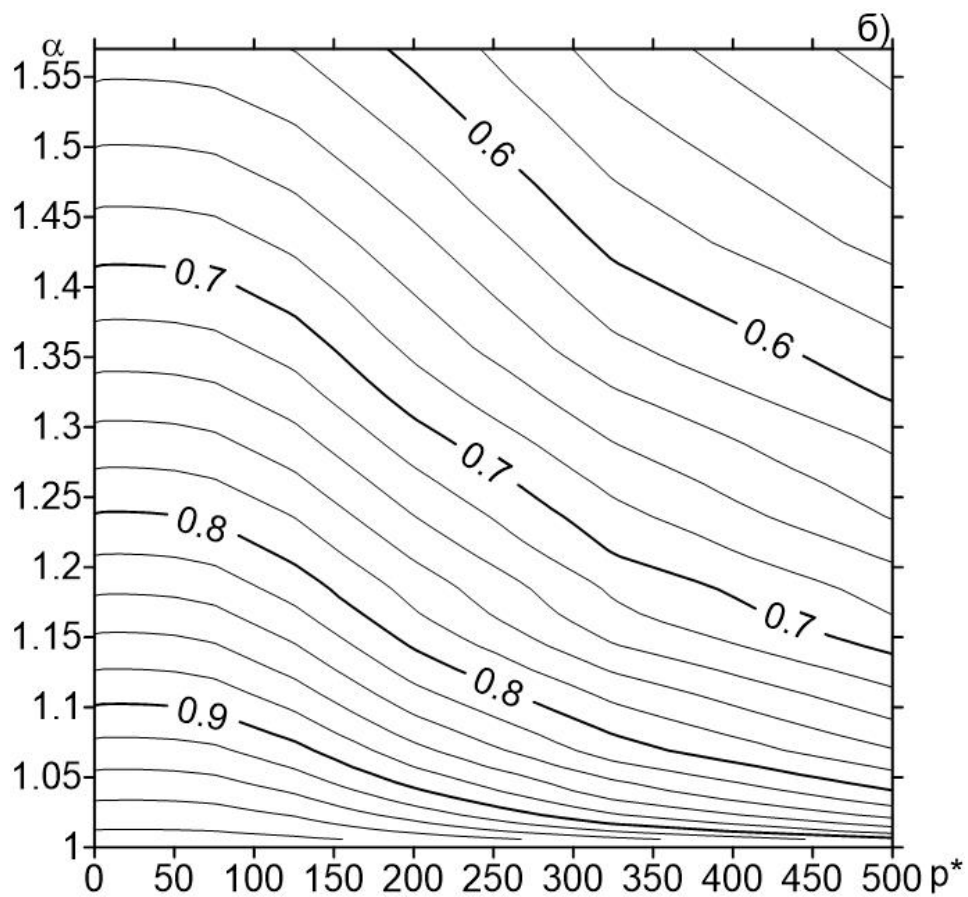
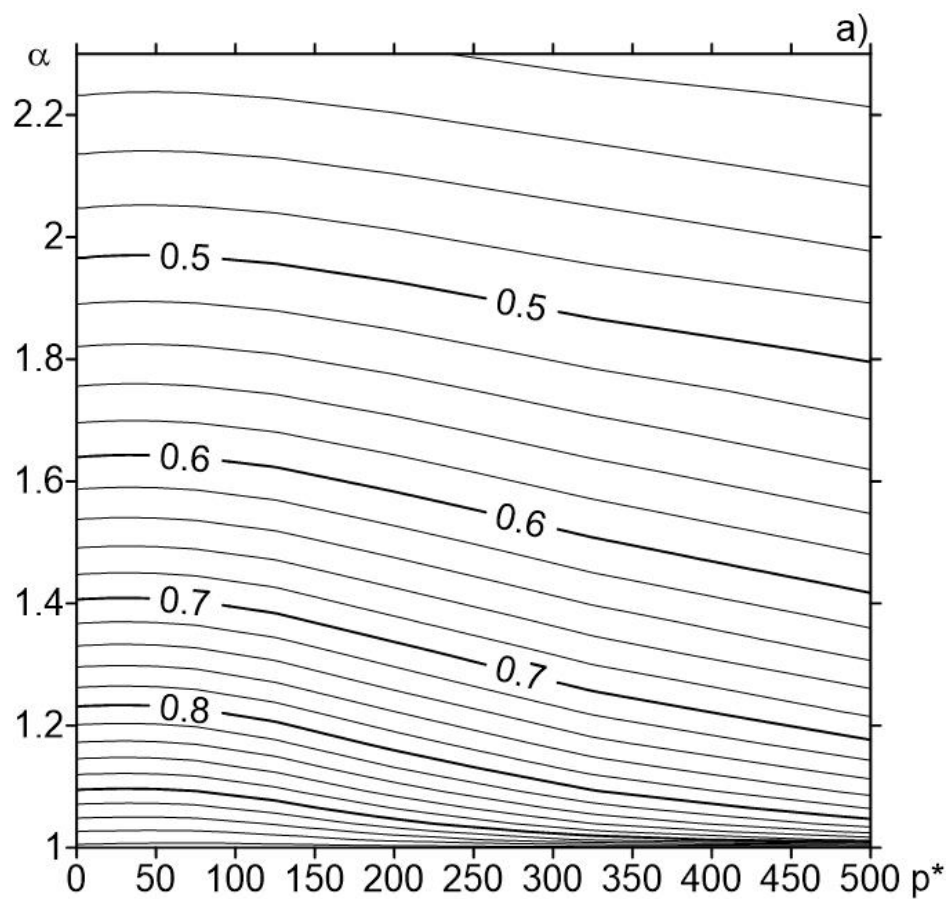


Рис. 3.6. Безразмерный объемный расход в зависимости от приведенного перепада давления и извилистости для каналов первого (а) и второго (б) типа



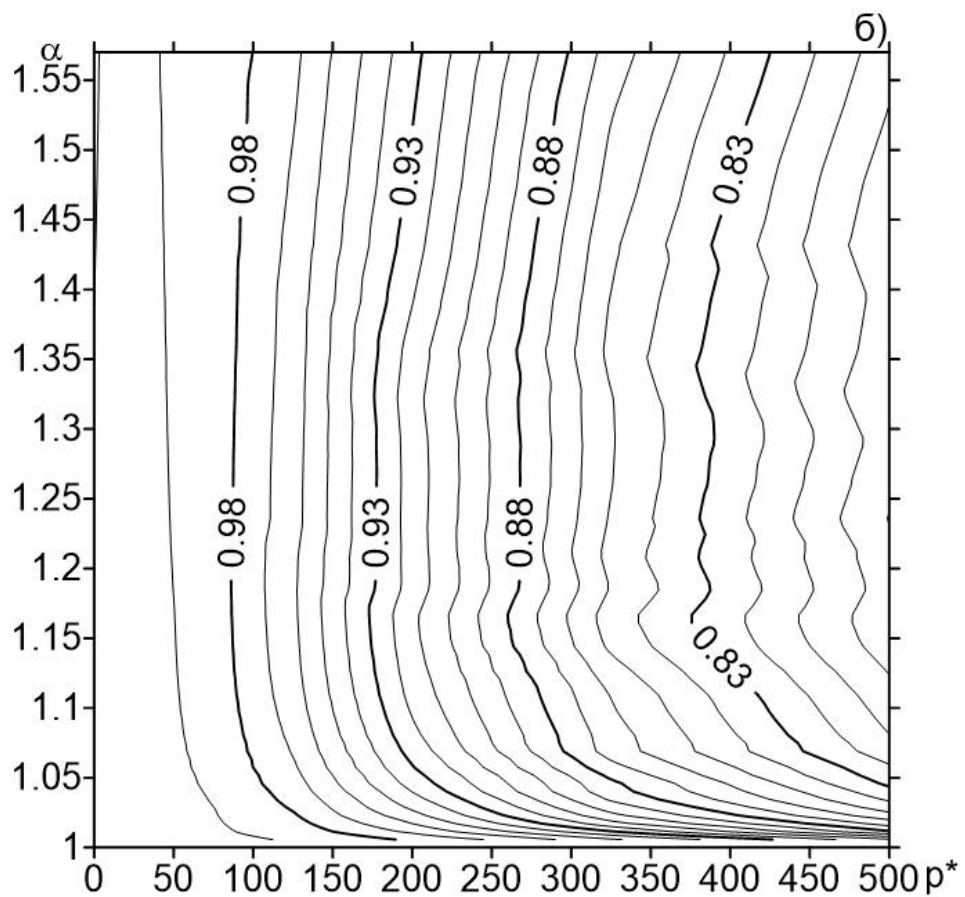
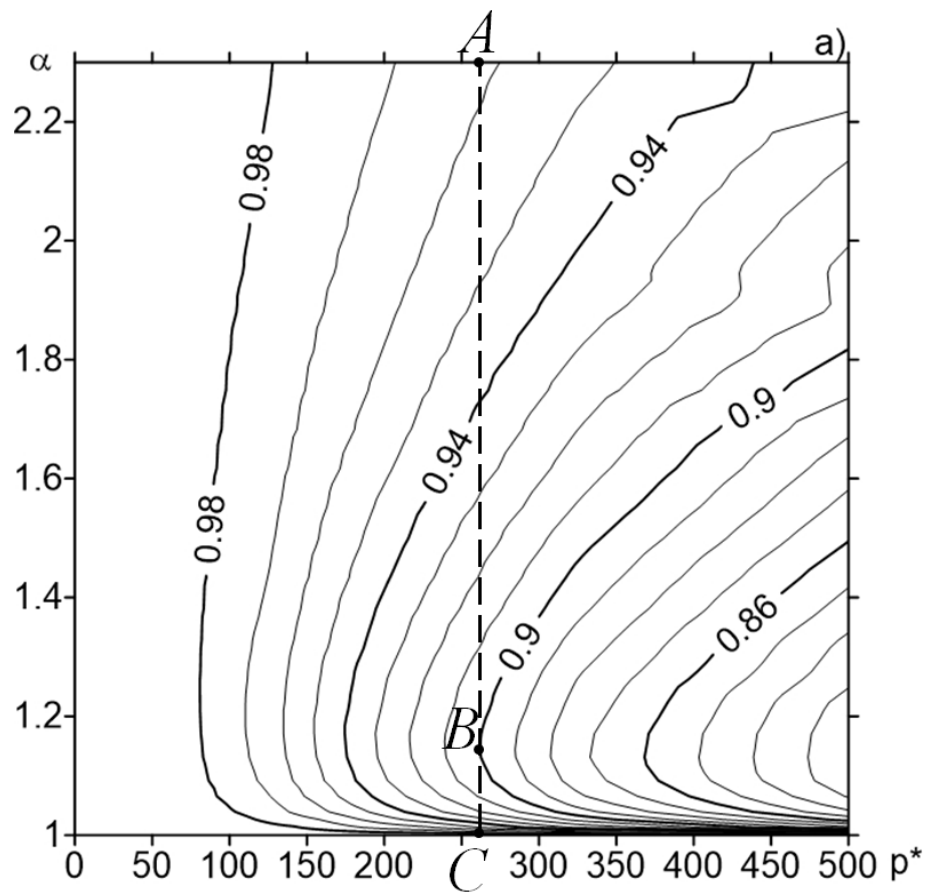


Рис. 3.7. Приведенный объемный расход в зависимости от приведенного перепада давления и извилистости для каналов первого (а) и второго (б) типа

В гидравлике характеристикой гидравлического сопротивления является коэффициент сопротивления трубы. Введем его для рассматриваемых каналов. Коэффициентом сопротивления канала  $\lambda$  называется отношение силы сопротивления к скоростному напору и площади контакта жидкости с боковой стенкой канала:

$$\lambda = \frac{F_{mp}}{ES_{бок}}. \quad (3.9)$$

Подставляя выражение для скоростного напора  $E = \rho_0 v_{cp}^2 / 2$ , имеем:

$$\lambda = \frac{2 \cdot F_{тр}}{\rho_0 v_{cp}^2 S_{бок}}. \quad (3.10)$$

Сила сопротивления трения со стороны канала уравнивает силу, движущую канал за счет перепада давления и вычисляется по формуле:

$$F_{тр} = S_0 \Delta p. \quad (3.11)$$

Применив (3.11) к (3.10), имеем:

$$\lambda = \frac{2 \cdot S_0 \Delta p}{\rho_0 v_{cp}^2 S_{бок}}. \quad (3.12)$$

С учетом (2.4),  $S_0 = \pi r^2$ ,  $S_{бок} = 2\pi r \cdot L^*$  получаем:

$$\lambda = \frac{2 \cdot S_0 \Delta p \cdot S_0^2}{\rho_0 Q^2 S_{бок}} = \frac{2 \cdot \Delta p \cdot S_0^3}{\rho_0 Q^2 S_{бок}} = \frac{2 \cdot \Delta p \cdot \pi^3 \cdot r^6}{\rho_0 Q^2 \cdot 2\pi r \cdot L^*} = \frac{\Delta p \cdot \pi^2 \cdot r^5}{\rho_0 Q^2 \cdot L^*}.$$

Для течения Пуазейля коэффициент сопротивления выражается через число Рейнольдса и равен:

$$\lambda_p = \frac{16}{Re}.$$

На рис. 3.8 в виде изолиний показана зависимость коэффициента сопротивления канала от приведенного давления и извилистости канала. Видно, что при фиксированной извилистости с увеличением приведенного перепада давления коэффициент сопротивления канала уменьшается, поскольку инерционные силы начинают преобладать над вязкими. Показано, что при фиксированном приведенном перепаде давления с увеличением извилистости коэффициент сопротивления канала увеличивается, так как с увеличением длины канала сила вязкого трения растет. При больших

перепадах давления с увеличением извилистости коэффициент сопротивления возрастает быстрее.

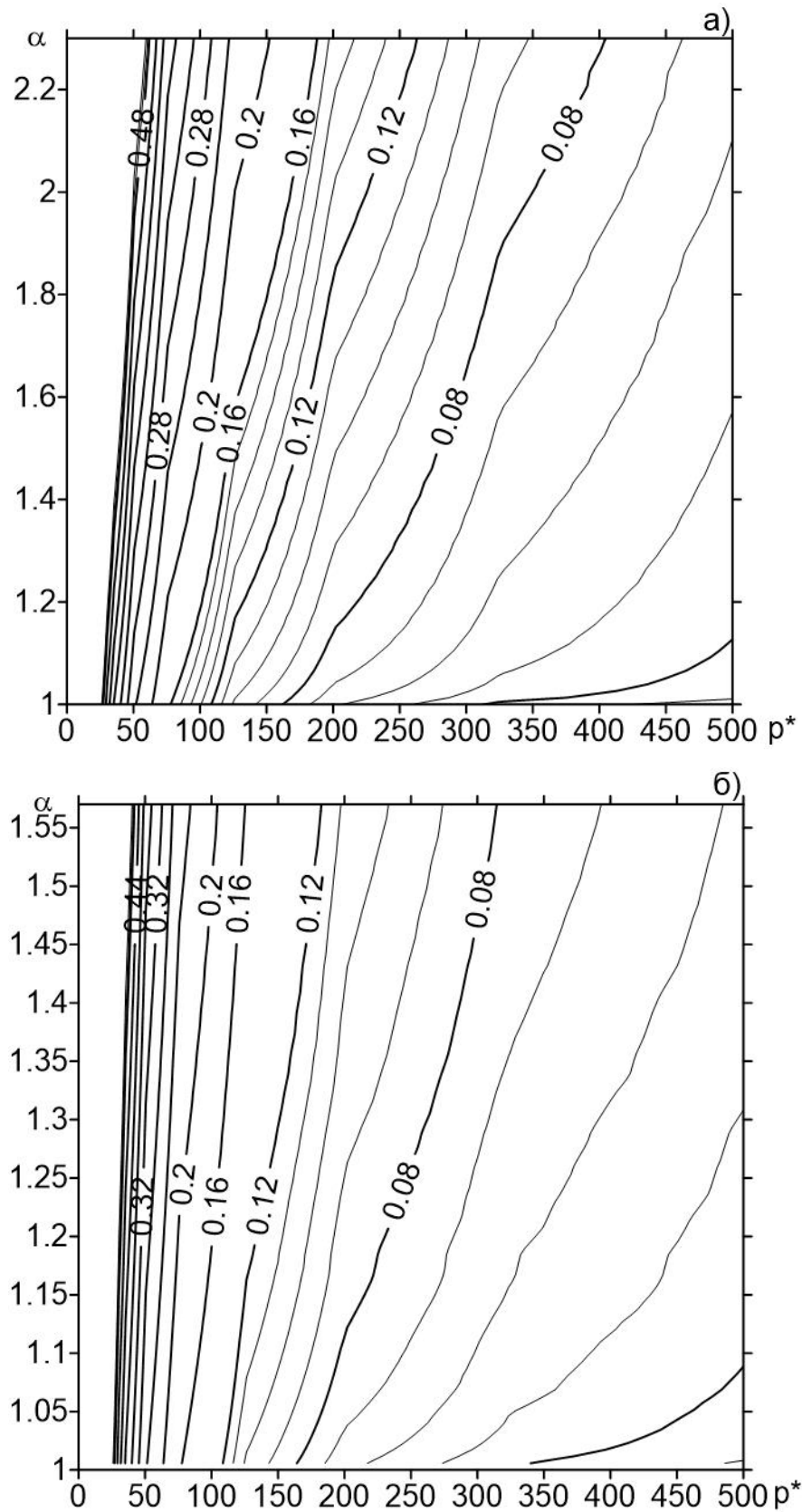


Рис. 3.8. Коэффициент сопротивления канала в зависимости от приведенного перепада давления и извилистости для каналов первого (а) и второго (б) типа

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской диссертации предложена модель пористой среды периодической структуры, образованная сообщающимися осесимметричными каналами, описывающая практически весь интервал возможных значений пористости.

Для такой среды определены основные фильтрационные свойства: просветность, пористость и проницаемость. Для проницаемости получены как аналитическая, так и численная оценки, хорошо соответствующие друг другу.

Показано, что при фиксированной пористости с увеличением  $\rho_{max}$  проницаемость уменьшается, поскольку растет гидравлическое сопротивление; а при фиксированном значении  $\rho_{max}$  с увеличением пористости проницаемость увеличивается.

В третьей главе учитывается влияние извилистости каналов на объемный расход через пористую среду. Рассмотрены два способа построения извилистых каналов: с направляющей в виде синусоиды и дуг окружностей. Подтверждено, что гидравлическое сопротивление пористой среды зависит не только от размеров и формы сечения каналов, но и от извилистости.

Получено, что при фиксированной извилистости с увеличением перепада давления объемный расход уменьшается в связи с тем, что при больших перепадах давления средняя скорость течения выше, а, значит, выше центробежная сила при движении по криволинейным траекториям. В роли центробежной силы в данном случае выступает сила реакции со стороны скелета, т.е. сила сопротивления скелета.

Установлено, что при фиксированном перепаде давления с увеличением извилистости объемный расход для канала первого типа сначала уменьшается, а затем увеличивается в связи с немонотонностью средней кривизны. Для канала второго типа объемный расход сначала уменьшается, а затем практически не меняется.

В гидравлике характеристикой гидравлического сопротивления является коэффициент сопротивления трубы. Для рассматриваемых каналов определен коэффициент сопротивления канала. Показано, что при фиксированной извилистости с увеличением перепада давления коэффициент сопротивления канала уменьшается, поскольку инерционные силы начинают преобладать над вязкими. Получено, что при фиксированном перепаде давления с увеличением извилистости коэффициент сопротивления канала увеличивается, поскольку с увеличением длины канала сила вязкого трения растет. При больших перепадах давления с увеличением извилистости коэффициент сопротивления возрастает быстрее.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игошин Д. Е. Основные фильтрационные свойства пористой среды, образованной сообщающимися осесимметричными каналами / Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико–математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Том 1. № 4 (4). – С. 69 – 79.
2. Хромова Н. А. Основные свойства модельных пористых сред периодической структуры, образованных извилистыми каналами / Н. А. Хромова // МНСК-2016: материалы 54-й Международной научной студенческой конференции. НГУ. – Новосибирск. – 2016. – Математика. – С. 196.
3. Анциферов В. Н. Применение ячеистых высокопористых материалов / В. Н. Анциферов, М. Ю. Калашникова // Экология и промышленность России. — 1997. – № 11. – С. 14–17.
4. Басниев К. С. Нефтегазовая гидромеханика: учебное пособие для вузов / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с.
5. Васин С. И. Течение вязкой жидкости в модельной пористой среде с фрактальной структурой / С. И. Васин, Т. В. Харитонова, А. Н. Филиппов // Коллоидный журнал. – 2011. – Т. 73. № 2. – С. 155–163.
6. Гаврилов А. В. Течение жидкости в неоднородной гранулированной среде / А. В. Гаврилов, И. В. Ширко // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74. № 3. – С. 375–390.
7. Губайдуллин А. А. Моделирование динамики капли нефти в капилляре с сужением / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. – 2013. – № 7. – С. 71 – 77.
8. Губайдуллин А. А. Собственные частоты продольных колебаний капли в сужении капилляра / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико–математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Том 1. № 2(2). – С. 85 – 91.

9. Девисилов В. А. Металлические проволочные сетки для фильтрования жидкостей и газов. Часть 1. Структурные характеристики и их расчет / В. А. Девисилов, В. С. Спиридонов // Безопасность в техносфере. – 2009. – № 3. – С. 46–55.
10. Дедов А. В. Использование модели Козени для прогнозирования проницаемости нетканых иглопробивных материалов / А. В. Дедов // Материаловедение. – 2013. – № 5. – С. 15–17.
11. Дмитриев Н. М. К определению коэффициента гидравлического сопротивления для фильтрационных течений в модельных пористых средах / Н. М. Дмитриев, А. А. Мурадов // Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. – 2010. – № 1. – С. 45–57.
12. Дмитриев М. Н. К определению фильтрационного числа Рейнольдса и характерного линейного размера для идеальных и фиктивных пористых сред / М. Н. Дмитриев, Н. М. Дмитриев // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 4. – С. 97–104.
13. Игошин Д. Е. Моделирование пористой среды регулярными упаковками пересекающихся сфер / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова, П. Я. Мостовой // Вестник Тюменского государственного университета. Серия «Физико–математические науки. Информатика». – 2014. – №7. – С. 34 – 42.
14. Игошин Д. Е. Проницаемость пористой среды периодической структуры с разветвляющимися каналами / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико–математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Том 1. № 2 (2). – С. 131 – 141.
15. Игошин Д. Е. Численное исследование зависимости проницаемости от пористой среды, образованной каналами регулярной структуры / Д. Е. Игошин, Р. С. Сабуров // Вестник Тюменского государственного университета. Физико–математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Том 1. № 1 (1). – С. 84 – 90.

16. Игошин Д. Е. Численное определение проницаемости в среде периодической структуры, образованной разветвляющимися каналами / Д. Е. Игошин // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. – 2015. – № 12. – С. 30 – 33.

17. Игошин Д. Е. Численные и аналитические оценки проницаемости пористой среды, образованной каналами, имеющими вращательную симметрию / Д. Е. Игошин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико–математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Том 1. № 3 (3). – С. 112 – 121.

18. Измеров М. А. Фильтрационная модель протекания через фрактальную пористую среду / М. А. Измеров, В. П. Тихомиров // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2014. – № 3 (305). – С. 7–14.

19. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред / Х. Х. Имомназаров // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2001. – Т. IV. № 2. – С. 154–165.

20. Кабаньков О. Н. Модельный канал для анализа течения и теплообмена одно- и двухфазных сред в шаровой засыпке / О. Н. Кабаньков, Л. А. Сукомел, В. В. Ягов // Инженерно–физический журнал. – 2013. – Т. 86. № 2. – С. 270–277.

21. Карсанина М. В. Моделирование структуры материалов, обладающих желаемыми свойствами, с помощью корреляционных функций / М. В. Карсанина, К. М. Герке, Р. В. Васильев, Д. В. Корост // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27. № 4. – С. 50–63.

22. Кирсанов Ю. А. Моделирование геометрических и теплофизических свойств низкопористой структуры / Ю. А. Кирсанов, Е. А. Марфин, В. А. Данилов, Г. В. Башкирцев // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2011. – № 3. – С. 51–58.



23. Крючков Ю. Н. Особенности свойств пористых и композиционных материалов / Ю. Н. Крючков // Теоретические основы химической технологии. – 2007. – Т. 41. № 1. – С. 79–87.
24. Куршин А. П. Закономерности изменения проницаемости пористых сред при фильтрационных течениях / А. П. Куршин // Ученые записки ЦАГИ. – 2008. – Т. XXXIX. № 1–2. – С. 125–135.
25. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л. С. Лейбензон. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 244 с.
26. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
27. Лукашева Г. Н. Анализ гидродинамических условий при фильтрации на масштабе зерна фиктивного грунта на основе асимптотических решений системы уравнений Навье–Стокса / Г. Н. Лукашева, А. В. Юровский // Электротехнические и информационные комплексы и системы. – 2010. – Т. 6. № 4. – С. 60–64.
28. Максимов А. Ю. Поведение капли несмачивающей жидкости в трехмерной модели пористой среды / А. Ю. Максимов // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. – 2015. – № 12. – С. 34 – 37.
29. Марков П. В. Использование моделей микроструктуры пористой среды при расчете фильтрационных характеристик для гидродинамических моделей / П. В. Марков, С. П. Родионов // Нефтепромысловое дело. – 2015. – № 11. – С. 64–75.
30. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. – М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 640 с.
31. Мосина Е. В. Численное исследование течения на границе жидкость – пористая среда / Е. В. Мосина // Теоретические основы химической технологии. – 2010. – Т. 44. № 5. – С. 536–542.

32. Пивень В. Ф. Исследование граничных задач плоскопараллельных течений жидкости в анизотропной пористой среде / В. Ф. Пивень // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45. № 9. – С. 1286–1297.
33. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. — М.: Наука, 1974. – 176 с.
34. Ромм Е. С. Структурные модели порового пространства горных пород / Е. С. Ромм. – Л.: Недра, 1985. – 240 с.
35. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1 / В. И. Смирнов. — М.: Наука, 1974. – 479 с.
36. Соколов В. Н. Исследование микроструктуры грунтов с помощью компьютерного анализа РЭМ-изображений / В. Н. Соколов, Д. И. Юрковец, О. В. Разгулина // Геоэкология, инженерная геология, гидрогеология, геокриология. – 2008. – № 4. – С. 377–382.
37. Солонин С. М. Мезоструктурная обусловленность свойств пористых материалов. Обобщенные характеристики порового пространства пористых материалов / С. М. Солонин, Л. И. Чернышев // Порошковая металлургия. – 2008. – № 11–12. – С. 71–79.
38. Сорокин А. Г. Теоретическое моделирование коэффициента проницаемости при фильтрации несжимаемых жидкостей / А. Г. Сорокин // Известия высших учебных заведений. Геология и разведка. – 2012. – № 6. – С. 47–54.
39. Токарева М. А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде / М. А. Токарева // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 2. № 1. – С. 153–157.
40. Усъяров О. Г. Моделирование структуры порового пространства и пространственного распределения коэффициента фильтрации / О. Г. Усъяров // Коллоидный журнал. – 2003. – Т. 65. № 1. – С. 103–108.

41. Франк А. М. Дискретные модели несжимаемой жидкости / А. М. Франк. – Москва: Физматлит, 2001. – 212 с.
42. Хейфец Л. И. Многофазные процессы в пористых средах / Л. И. Хейфец, А. В. Неймарк. – М.: Химия, 1982. – С. 29–33.
43. Чагиров П. С. Новый метод определения границ применимости закона Дарси / П. С. Чагиров, В. В. Кадет // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4–3. – С. 1243–1244.
44. Jinhyun Choo Stabilized mixed finite elements for deformable porous media with double porosity / Jinhyun Choo, Ronaldo I. Borja // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 293 (2015). – pp. 131–154.
45. Valentina Ciriello Porous gravity currents: A survey to determine the joint influence of fluid rheology and variations of medium properties / Valentina Ciriello, Sandro Longo, Luca Chiapponi, Vittorio Di Federico // Advances in Water Resources. – 92 (2016). – pp. 105–115.
46. Mariela Luege Coupled mechanical and fluid flow analysis in fractured saturated porous media using the XFEM / Mariela Luege, Javier Lucero, Celeste Torrijos, Antonio Orlando // Applied Mathematical Modelling. – 40 (2016). – pp. 4480–4504.
47. Tongjun Miao Fractal analysis of permeability of dual-porosity media embedded with random fractures / Tongjun Miao, Shanshan Yang, Zhangcai Long, Boming Yu // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 88 (2015). – pp. 814–821.
48. H. Najmi Effect of flow configuration on Darcian and Forchheimer permeabilities determination in a porous composite tube / H. Najmi, E. El-Tabach, K. Chetehouna, N. Gascoïn, F. Falempin // International Journal of Hydrogen Energy. – 41 (2016). – pp. 316–323.
49. Slichter C.S. Theoretical investigations of the motion of groundwater / Slichter C.S. // 19th Annual Report of the United States Geological Survey. – part 2 (1899). – pp. 295 – 384.

50. Federico E. Teruel Characterization of a porous medium employing numerical tools: Permeability and pressure–drop from Darcy to turbulence / Federico E. Teruel, Rizwan–uddin // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 52 (2009). – pp. 5878–5888.

51. A.–T. Vuong Two finite element approaches for Darcy and Darcy–Brinkman flow through deformable porous media—Mixed method vs. NURBS based (isogeometric) continuity / A.–T. Vuong, C. Ager, W.A. Wall // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. –305 (2016). – pp. 634–657.

52. Shifang Wang A permeability model for power–law fluids in fractal porous media composed of arbitrary cross–section capillaries / Shifang Wang, Tao Wu, Hongyan Qi, Qiusha Zheng, Qian Zheng // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 437 (2015). – pp. 12–20.

53. K. Yazdchi Microstructural effects on the permeability of periodic fibrous porous media / K. Yazdchi, S. Srivastava, S. Luding // International Journal of Multiphase Flow. –37 (2011). – pp. 956–966.

54. Jiangtao Zheng Relationships between permeability, porosity and effective stress for low–permeability sedimentary rock / Jiangtao Zheng, Liange Zheng, Hui–Hai Liu, Yang Ju // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. –78 (2015). – pp. 304–318.