


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
КАФЕДРА МЕХАНИКИ МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ

ДОПУЩЕНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК  
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ  
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой  
к.ф.-м.н., доцент

  
П.Ю. Михайлов  
19.06. 2017 г.

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**  
**ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ**  
**ОБРАЗОВАННОЙ ИЗВИЛИСТЫМИ КАНАЛАМИ ПЕРЕМЕННОГО**  
**СЕЧЕНИЯ**

03.04.02 Физика

Магистерская программа «Техническая физика в нефтегазовых  
технологиях»

Выполнил работу  
Студент 2 курса  
очной  
формы обучения



Игнатъев  
Пётр  
Алексеевич

Руководитель работы  
к.ф.-м.н.



Игошин  
Дмитрий  
Евгеньевич

Рецензент  
к. ф.-м.н.



Боталов  
Андрей  
Юрьевич

Тюмень 2017

## Оглавление

<b>Аннотация.....</b>	<b>3</b>
<b>Введение. ....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Литературный обзор.....</b>	<b>6</b>
<b>Глава 2. Структура и основные параметры идеального грунта.....</b>	<b>8</b>
§ 1. Гексагональная и кубическая структуры. ....	8
§ 2. Ромбоэдрическая структура.....	11
2.1. Условие замкнутости пор.....	11
2.2. Пористость.....	14
2.3. Просветность.....	18
<b>Глава 3. Проницаемость идеального грунта. ....</b>	<b>21</b>
§ 1. Опыты Дарси по фильтрации в пористых средах. ....	21
§ 2. Проницаемость идеального грунта. ....	23
2.1. Проницаемость по Слихтеру. ....	23
2.2. Проницаемость с учётом переменного сечения канала.....	27
2.3. Проницаемость по минимальной просветности.....	32
2.4. Проницаемость ромбоэдрической структуры с учётом переменного сечения канала.....	37
<b>Заключение.....</b>	<b>46</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>467</b>
<b>Приложение.....</b>	<b>50</b>

## Аннотация

Эта работа посвящена изучению фильтрации жидкости в идеальном грунте, составленном из регулярной упаковки сфер, расположенных в вершинах ромбоэдра. Целью работы является отыскание значений проницаемости идеального грунта с учётом переменного сечения канала вдоль траектории линии тока. Для достижения этой цели было модифицировано уравнение для проницаемости канала переменного сечения, применительно к ромбоэдрической структуре идеального грунта. Был написан программный код на языке Python, программирующий команды в среде компьютерной графики SALOME, реализующие необходимые действия со структурным элементом ромбоэдрической упаковки сфер. Также были произведены расчёты в среде компьютерной алгебры MAPLE, необходимые для вычисления значений проницаемости. В результате были получены значения, уточняющие известные ранее, полученные без учёта изменения площади сечения канала.

В первой главе дан краткий литературный обзор решаемой проблемы. Ведены понятия идеального и фиктивного грунта. Приведена актуальность работы, описаны существующие подходы к моделированию реального грунта путём введения регулярных, периодически повторяющихся в пространстве структур.

Во второй главе даны основные параметры упаковок сфер, моделирующих реальный грунт. Даны аналитические оценки пористости и просветности для кубической, гексагональной и ромбоэдрических структур.

В третьей главе приведён обзор методов вычисления проницаемости идеального грунта как с учётом переменного сечения канала, так и по минимальной просветности. Произведено распространение метода, учитывающего переменность сечения канала, на ромбоэдрическую структуру.

## **Введение.**

В настоящее время, в структуре разрабатываемых запасов углеводородного сырья (природные нефть, газ, газоконденсат), всё большую долю занимают трудноизвлекаемые запасы [1]. Этот факт делает актуальной проблему оптимизации добычи сырья, которая заключается в получении таких логических построений и технологий, которые позволят, затрачивая как можно меньше тех или иных ресурсов, добиться как можно большего коэффициента извлечения нефти (КИН). Одним из методов оптимизации процессов нефтегазодобычи, является описание, происходящих в нефтеносных горных породах, процессов путём математического моделирования течения жидкости в горной породе, которое называется фильтрацией [3].

Фильтрация представляет собой такой вид движения жидкости, при котором течение происходит внутри пористой структуры, состоящей из твёрдого слабосжимаемого «скелета» и сообщающихся друг с другом пустот, которые выступают в качестве каналов, пропускающих сквозь себя жидкость [2]. Изучением явления фильтрации занимался французский исследователь А. Дарси. В ходе ряда экспериментов, был установлен эмпирический закон фильтрации, связывающий перепад давления на участке пористой среды единичной длины со скоростью фильтрационного движения [4]. Для связи двух этих величин было введено понятие проницаемости – величины характеризующей, насколько хорошо горная порода способна осуществлять процесс фильтрации. Так как закон Дарси является эмпирическим, то, для отыскания значений проницаемости той или иной нефтеносной породы, прибегают к проведению достаточно трудоёмких и продолжительных во времени экспериментов [5]. Также, проницаемость природных горных пород имеет определённую анизотропию, степень которой может сильно отличаться в зависимости от самой горной породы. Математическое моделирование проницаемости позволит снизить

количество проводимых натуральных экспериментов, увеличив, таким образом, степень оптимизации процесса нефтедобычи, в данном случае на стадии исследования свойств нефтеносной породы.

Сама величина проницаемости определяется конфигурацией каналов, по которым происходит движение жидкости (однофазной, например только нефть, или двухфазной – смесь воды и нефти). Установление этой конфигурации является крайне труднореализуемой на практике задачей, вследствие чего, оказывается невозможным решить уравнения математической физики, которые бы напрямую, путём численного эксперимента, дали искомую величину проницаемости. Вследствие этих фактов актуально представление пористой среды в виде системы капилляров (фиктивный грунт), или некой регулярной, периодически повторяющейся структуры (идеальный грунт) [11]. Регулярность позволит, решив численно уравнения движения (уравнение импульсов, уравнение неразрывности), для одного структурного элемента периодической структуры, распространить результаты на любое множество этих элементов, которые и будут составлять фиктивную пористую среду.

## Глава 1. Литературный обзор.

В [6] рассмотрено построение фиктивной пористой среды, состоящей из регулярно расположенных соприкасающихся сфер одинакового диаметра. В этой же работе теоретически обосновывается, что пористость идеального грунта, смоделированного таким образом, будет лежать в пределах от приблизительно 26 до 47 процентов, в то время как характерное значение пористости реальных горных пород варьируется в пределах от 3 до 20 процентов. Таким образом, возникает явное несоответствие параметров фиктивной пористой среды с параметрами, имеющими место в реальности. С целью преодоления несоответствия, в работах [7,8] была предложена конфигурация фиктивной пористой среды, состоящей из регулярно упакованных пересекающихся сфер. При такой конфигурации, достигаются значения пористости, лежащие в диапазоне от 3,7 до 46,7 процентов. Также, такое расположение сфер, представляется возможным объяснить сцементированностью отдельных, составляющих горную породу, частиц среды. В этих работах расположение сфер осуществляется в вершинах куба, и шестиугольной призмы, структурными элементами упаковки являются куб и треугольная призма соответственно. В [12] рассмотрена ромбоэдрическая упаковка сфер в идеальном грунте. Её структурный элемент представляет собой ромбоэдр, характерными значениями для которого являются длина ребра и угол в основании.

Существуют и другие подходы к представлению идеального грунта. В данных методах грунт моделируется путём хаотичного, а не регулярного расположения пересекающихся сфер, что даёт возможность представить фильтрационные свойства и пористую среду в качестве случайных полей [9,10].

В данной работе исследована модель идеального грунта, сложенного из регулярной ромбоэдрической упаковки пересекающихся сфер. Целью исследования является получение значений проницаемости идеального

грунта для различных степеней пересечения сфер, а также для множества значений параметра угла в основании ромбоэдра.

## Глава 2. Структура и основные параметры идеального грунта.

Эта глава посвящена описанию основных типов идеального грунта, образованных регулярными упаковками пересекающихся сфер. Приведены конфигурации и основные численные характеристики геометрических структур такого рода. Рассмотрено строение структурных элементов для гексагональной, ромбоэдрической и, являющейся частным ромбоэдрической, кубической структуры идеального грунта.

### § 1. Гексагональная и кубическая структуры.

В [8] предложена кубическая и гексагональная упаковки пересекающихся сфер. Центры сфер расположены в вершинах куба и правильной шестиугольной призмы соответственно (рис 2.2). Введём понятие степени пересечения сфер (рис. 2.1):

$$\alpha = \frac{\Delta}{r} \quad (2.1)$$

$\Delta$  – Высота шарового сегмента, отсекаемого плоскостью симметрии.

$r$  – Радиус сферы.

Длина ребра ячейки  $L$  фиксирована и равна удвоенному радиусу касающихся сфер  $r_0$ .

$$L = 2r_0 \quad (2.2)$$

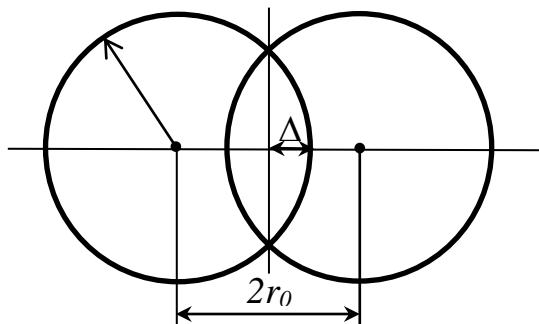


Рис.2.1. Перекрывтие

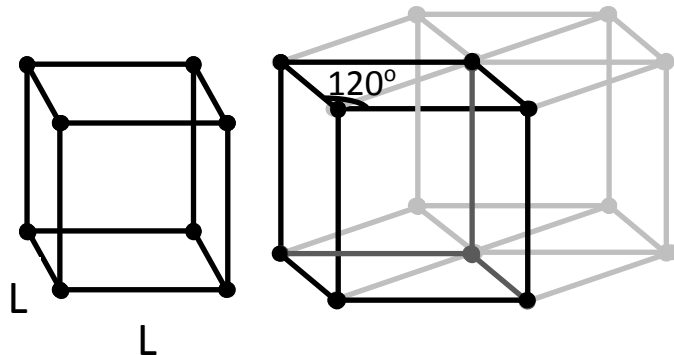


Рис.2.2. Типы ячеек



Параметры  $\alpha$ ,  $r_0$ ,  $r$  связаны между собой следующим соотношением:

$$\alpha = 1 - \frac{r_0}{r} \quad (2.3)$$

Ёмкостной характеристикой нефтеносных горных пород является пористость. Различают абсолютную и открытую пористость. Абсолютная пористость – это доля объёма всех пустот  $V_{\text{п}}$  в единице объёма  $V$  горной породы, а открытая пористость – доля сообщающихся друг с другом пустот в единице объёма горной породы. Очевидно, что фильтрация осуществляется только внутри сообщающихся друг с другом пор (пустот), поэтому необходимо рассмотреть условие замкнутости пор. На рис.2.3 представлено взаимное расположение сфер кубической и гексагональной структур, в случае, когда сферы перекрывают друг друга до такой степени, что не остаётся входного отверстия для фильтруемого флюида внутрь объёма ячейки.

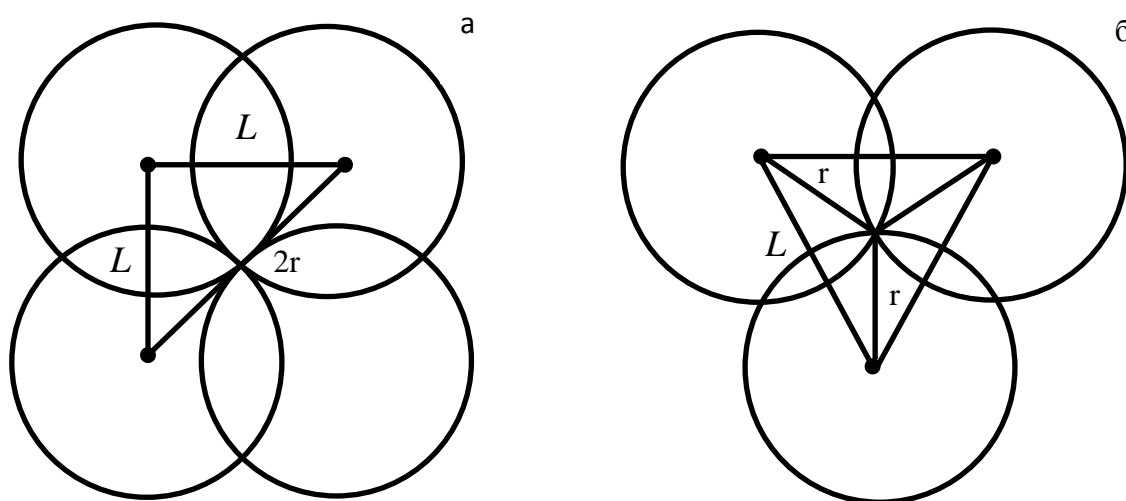


Рис. 2.3. Конфигурация расположения сфер в основании при смыкании канала для кубической (а) и гексагональной (б) упаковок.

Применяя теорему косинусов, а также соотношения 2.1 – 2.3, получим значения степени перекрытия сфер  $\alpha_*$ , при которой произойдёт смыкание входного фильтрующего отверстия:

$$L^2 + L^2 = (2r)^2; \quad L^2 = r^2 + r^2 + 2r^2 \cdot 0,5 \quad (2.4)$$

$$\alpha_* = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,2929 - \text{Кубическая упаковка.}$$

$$\alpha_* = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,134 - \text{Гексагональная упаковка.}$$

Минимальные значения пористости, достигаемые при  $\alpha = \alpha_*$ , для обоих типов упаковок принимают следующие значения:

$$m(\alpha_*) = 1 - \frac{\pi}{12} (15 - 8\sqrt{2}) \approx 0,0349 - \text{Кубическая упаковка.}$$

$$m(\alpha_*) = 1 - 2\pi \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{9} \right) \approx 0,1649 - \text{Гексагональная упаковка.}$$

Теперь, перейдём к вычислению самой пористости. На рисунке 2.4. показаны поровые объёмы ячейки кубической упаковки для различных значений  $\alpha$ . Прежде всего, нужно вычислить объём поры внутри структурного элемента. Для этого необходимо вычесть из всего внутреннего объёма ячейки объём, занимаемый сферами за вычетом объёма сегментов пересечений:

$$V_c = n_{сф} V_{сф} - n_{сг} V_{сг}; \quad V_{сф} = 4\pi r^3/3; \quad V_{сг} = \pi \Delta^2 (r - \Delta/3) \quad (2.5)$$

Здесь:  $V_c$  – объём скелета,  $V_{сф}$  – объём сфер,  $V_{сг}$  – объём сегментов сфер  $n_{сф}$  – количество сфер,  $n_{сг}$  – количество сегментов сфер.

Учитывая соотношения 2.1 – 2.3, а также математическую запись самого определения пористости:

$$m = \frac{V_{п}}{V} = \frac{V - V_c}{V} = 1 - \frac{V_c}{V} \quad (2.6)$$

можно получить аналитическое значение пористости как функцию степени пересечения  $\alpha$  для обоих типов структур.

В таблице 2.1 приведены значения пористости, зависящей от величины  $\alpha$ , минимальные значения открытой пористости при замыкании поперечного сечения канала ( $\alpha = \alpha_*$ ), и числа, определяющие количество сфер и

сегментов их пересечений, приходящихся на одну ячейку для обеих упаковок.

Таблица 2.1. Пористость.

Упаковка	Параметры			Пористость			
	$V$	$n_{сф}$	$n_{сг}$	$\alpha_*$	Аналитическое выражение	$m(0)$	$m(\alpha_*)$
Кубическая простая	$L^3$	1	6	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,2929$	$1 - \frac{\pi[2 - 3\alpha^2(3 - \alpha)]}{12(1 - \alpha)^3}$	$1 - \frac{\pi}{6} \approx 0,4764$	0,0349
Гексагональная простая	$\frac{\sqrt{3}}{4} L^3$	$\frac{1}{2}$	4	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,134$	$1 - \frac{\pi[1 - 2\alpha^2(3 - \alpha)]}{3\sqrt{3}(1 - \alpha)^3}$	$1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,3954$	0,1649

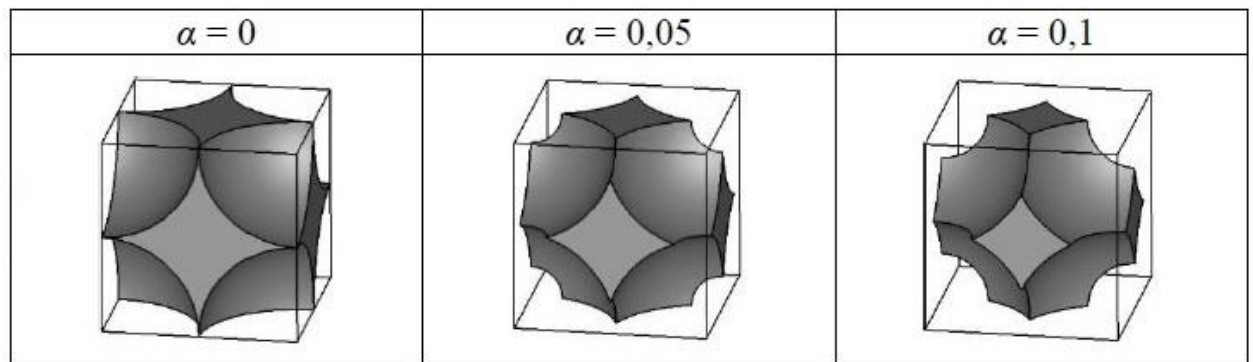


Рис 2.4. Порвый объём ячейки кубической структуры при различных степенях перекрытия сфер

## § 2. Ромбоэдрическая структура.

### 2.1. Условие замкнутости пор.

Перейдём к рассмотрению ромбоэдрической конфигурации ячейки. В данной структуре центры сфер расположены в вершинах ромбоэдра с рёбрами длиной  $L$  и углом при основании  $\theta$ . Таким образом, к параметрам  $L$  и  $\alpha$  добавляется третий параметр  $\theta$ . На рисунке 2.5 изображено строение ячейки при ромбоэдрической упаковке сфер. Характерной особенностью

ромбоэдрической структуры является то, что течение фильтруемой жидкости происходит по траектории имеющей определённую кривизну, в отличие от предыдущих двух структур, в которых течение проходит вдоль линии, соединяющей верхнюю и нижнюю горловину ячейки порового объёма (рис.2.9).

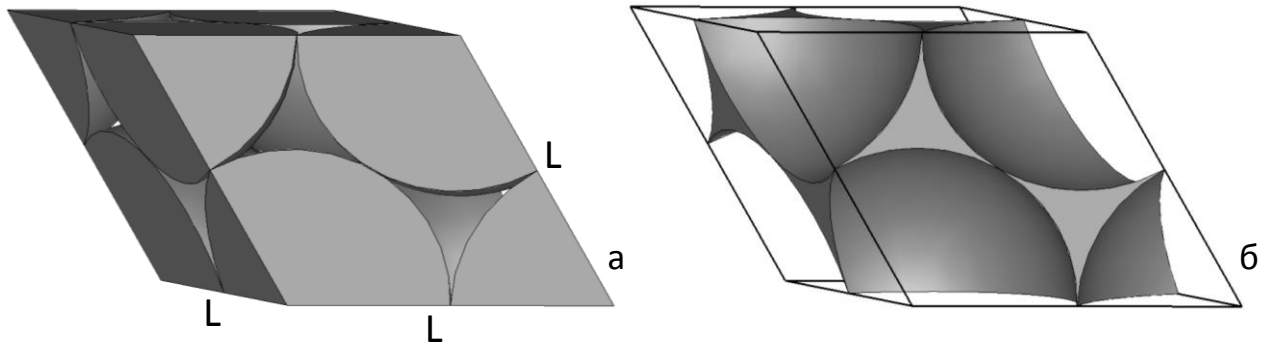


Рис. 2.5. Скелет (а) и поровый объём (б) ячейки в ромбоэдрической структуре.

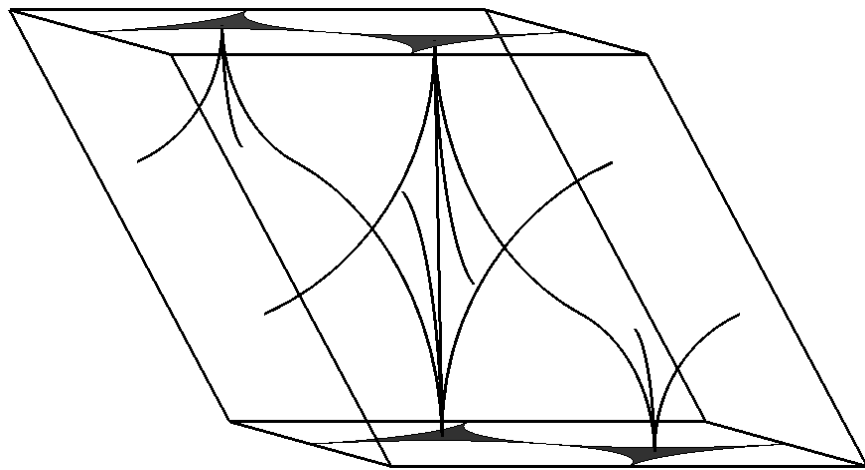


Рис. 2.6. Расположение линий тока в ромбоэдрической структуре.

Как и в предыдущем параграфе будет присутствовать критическое значение степени пересечения сфер  $\alpha_*$ , определяющего условие замкнутых несообщающихся пор. Рассмотрим ромб, лежащий в основании (Рис. 2.7(а)). Здесь  $d_1, d_2$  – диагонали,  $\theta$  – угол ромба ( $\theta = BAD$ ). Очевидно что:

$$d_1 = 2L\cos(\theta/2); d_2 = 2L\sin(\theta/2)$$

При определённом значении  $\alpha_k$  сферы, лежащие в вершинах малой диагонали, пересекутся, и образуют ещё один дополнительный сегмент пересечения. Отыщем это значение  $\alpha_k$ . Очевидно, что радиус касания диагональных сфер  $r_k$ , выражается следующей зависимостью:

$$r_k = 2r_0 \sin(\theta/2) \quad (2.7)$$

Следовательно, учитывая (2.3), значение степени пересечения диагональных сфер  $\alpha_k$  будет выражено так:

$$\alpha_k = 1 - \frac{1}{2\sin(\theta/2)} \quad (2.8)$$

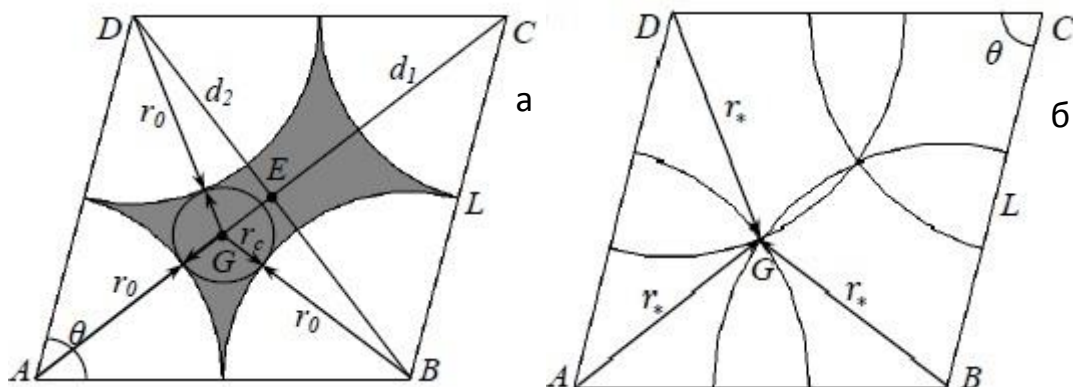


Рис. 2.7. Расположение сфер в основании ромбоэдра.

Введём величину  $\alpha_2$  – степень перекрытия диагональных сфер. Из геометрических соображений вытекает:

$$\Delta_2 = r - r_k = r - 2r_0 \sin(\theta/2)$$

$\Delta_2$  – высота шарового сегмента пересечения диагональных сфер.

Выражая  $r_0$  из 2.3:

$$\Delta_2 = r - 2r(1 - \alpha) \sin(\theta/2)$$

Таким образом, из определения степени пересечения 2.1:

$$\alpha_2 = 1 - 2(1 - \alpha) \sin(\theta/2) \quad (2.9)$$

На рис 2.7(б) показана взаимная конфигурация сфер, при которой происходит полное перекрытие входного фильтрующего канала. Три сферы пересекаются в точке G. Для отыскания значения  $\alpha_*$  необходима величина  $r_*$  – радиус сфер при замыкании входного канала. Из теоремы косинусов следует:

$$2r_0^2 = r_*^2(1 + \cos(\theta))$$

Таким образом:

$$r_* = \frac{r_0}{\cos(\theta/2)}$$

Следовательно:

$$\alpha_* = 1 - \cos(\theta/2) \quad (2.10)$$

## 2.2. Пористость.

Вычисление значений пористости производится аналогично, как это было для предыдущих двух структур. Очевидно, что аналитические выражения значительно усложнятся в силу увеличения числа параметров, характеризующих ромбоэдрическую упаковку. Найдём аналитическое значение для пористости как функцию параметров,  $\theta$  и  $\alpha$ .

В [6] проведено вычисление объёма ромбоэдра, кратко проследуем тем же путём. Объём ромбоэдра имеет величину (рис. 2.8):

$$V = hL^2 \sin(\theta) \quad (2.11)$$

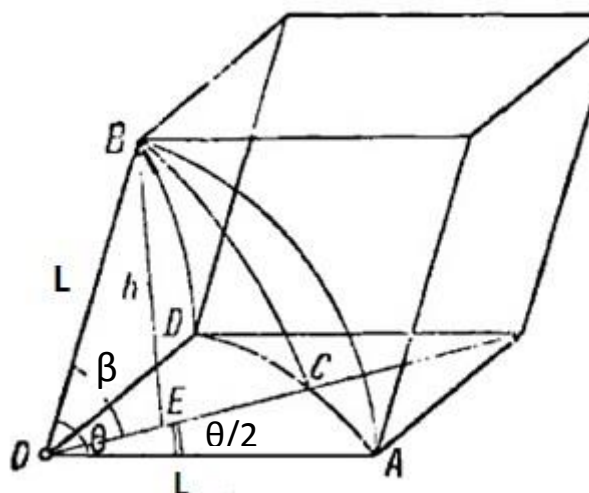
Высота ромбоэдра  $h$  из прямоугольного треугольника ВЕО:

$$h = L \sin(\beta) \quad (2.12)$$

В то же время из сферического прямоугольного треугольника АВС с прямым углом ВСА:

$$\cos(\beta) = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta/2)}$$

$$\sin(\beta) = \sqrt{1 - \cos(\beta)^2} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \sqrt{4\cos(\theta/2)^2 - 1} \quad (2.13)$$



**Рис. 2.8. К вычислению объёма ромбоэдра.**

В то же время:

$$4\cos(\theta/2)^2 - 1 = 1 + 2\cos(\theta) \quad (2.14)$$

Подставляя 2.14 в 2.13, 2.13 в 2.12, и 2.12 в 2.11 получаем конечное значение объёма ромбоэдра:

$$V = \frac{L^3 \sin(\theta)^2 \sqrt{1+2\cos(\theta)}}{1+\cos(\theta)} \quad (2.15)$$

Теперь необходимо вычислить объём скелета. Скелет составлен из больших шаровых сегментов, т. е. сфер за вычетом их пересечений в виде малых сегментов [12]:

$$V_c = NV_{\text{сф}} - N_1 V_{\text{сг}} - N_2 V_{\text{сг}2} \quad (2.16)$$

$$V_{\text{сф}} = 4\pi r^3/3; \quad V_{\text{сг}} = \frac{\pi r_0^3 \alpha^2 (3-\alpha)}{3(1-\alpha)^2}; \quad V_{\text{сг}2} = \frac{\pi r_0^3 \alpha_2^2 (3-\alpha_2)}{3(1-\alpha)^3} \quad (2.17)$$

Здесь:

$V_{сф}, V_{сг}, V_{сг2}$  – Объёмы сферы и сегментов в ячейке соответственно.

$N = 1$  – Количество больших шаровых сегментов на одну ячейку.

$N_1 = 6$  – Количество малых шаровых сегментов, образованных пересечением сфер при соседних вершинах, на одну ячейку.

$N_2 = 6$  – Количество малых шаровых сегментов, образованных пересечением сфер с центрами в противоположащих вершинах на каждой грани.

Подставляя (2.17) в (2.16) и с учётом определения пористости (2.6), получаем соотношение для пористости ячейки ромбоэдрической структуры как функцию параметров  $\alpha$  и  $\theta$ .

$$m = 1 - \frac{\pi(2-3\alpha^2(3-\alpha)-3\alpha_2^2(3-\alpha_2))}{12(1-\alpha)^3(1-\cos(\theta))\sqrt{1+2\cos(\theta)}} \quad (2.18)$$

В [6] представлена, впервые введённая Сликтером, фундаментальная формула для пористости идеального грунта, составленного из непересекающихся сфер в ромбоэдрической структуре:

$$m = 1 - \frac{\pi}{6(1-\cos \theta)\sqrt{1+2 \cos \theta}} \quad (2.19)$$

Полученное соотношение 2.18 является обобщением фундаментальной формулы Сликтера на случай структуры из пересекающихся друг с другом сфер. Очевидно, что при  $\alpha_2 = 0$  и  $\alpha_1 = 0$  формула 2.18 переходит в соотношение (2.19). Это подтверждает правильность применённого подхода и справедливость проделанных математических операций.

На рис. 2.9. представлена форма порового объёма ячейки ромбоэдрической структуры для различных значений  $\theta$  и  $\alpha$ . Как видно, при  $\theta = 90^\circ$  ромбоэдрическая структура переходит в кубическую, и, как форма, так и объём пор становятся такими же, как и на рис. 2.4.



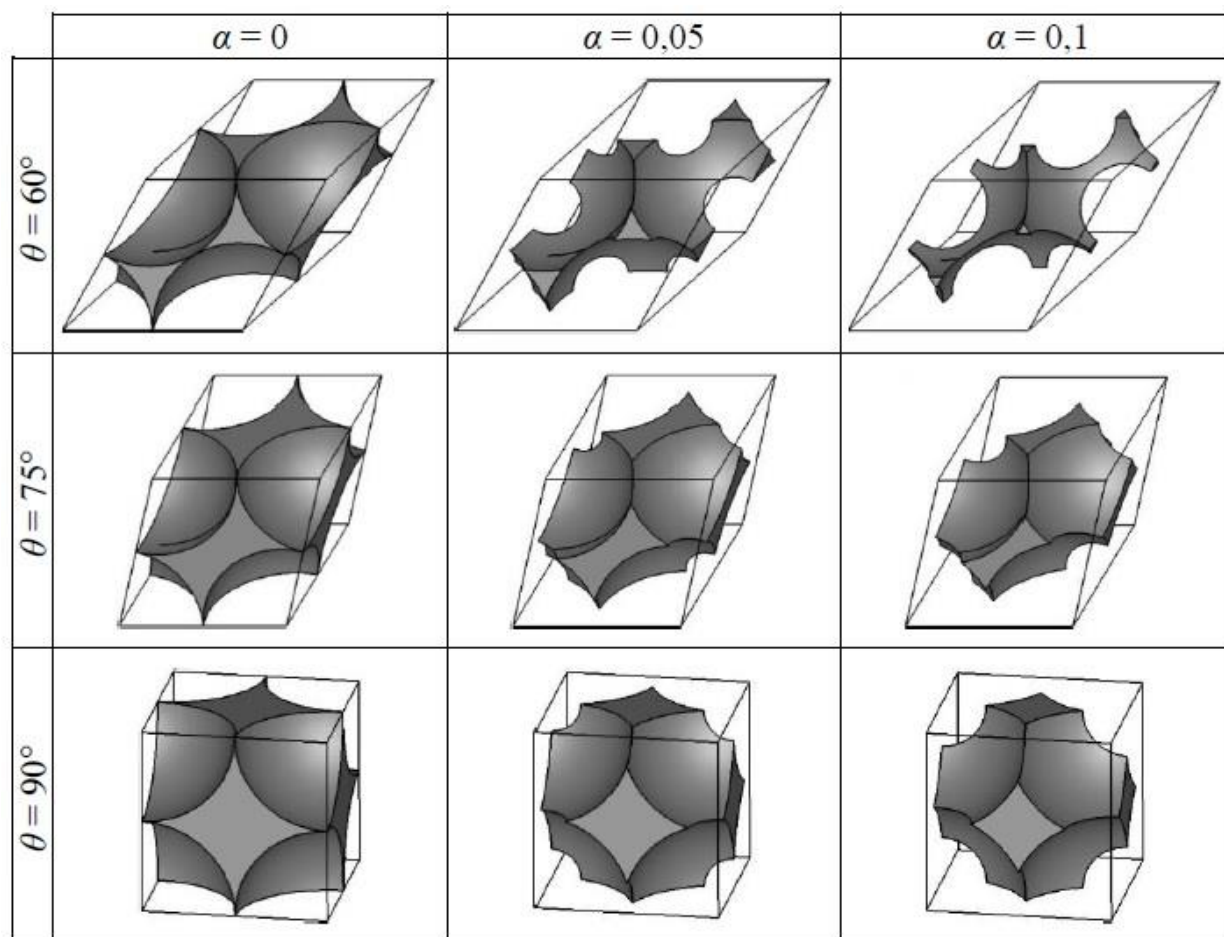


Рис. 2.9. Порový объем при различных параметрах  $\theta$  и  $\alpha$

На рис. 4 в виде изолиний показана зависимость пористости от угла  $\theta$  и степени пересечения сфер  $\alpha$ . Видно, что с уменьшением угла  $\theta$  пористость уменьшается, поскольку упаковка шаровых сегментов становится более плотной. С увеличением степени пересечения сфер  $\alpha$  пористость уменьшается. Линия MN описывается уравнением (2.10) и представляет собой границу для значений закрытой пористости. Пунктирной линией обозначена область появления дополнительных малых шаровых сегментов (Область MNP). Точка N, лежащая на оси  $\theta = 90^\circ$ , соответствует пористости для кубической структуры ( $m \approx 3,5\%$ ). Точка M соответствует случаю замкнутых пор в кубической гранецентрированной структуре ( $m \approx 3,6\%$ ).[8]

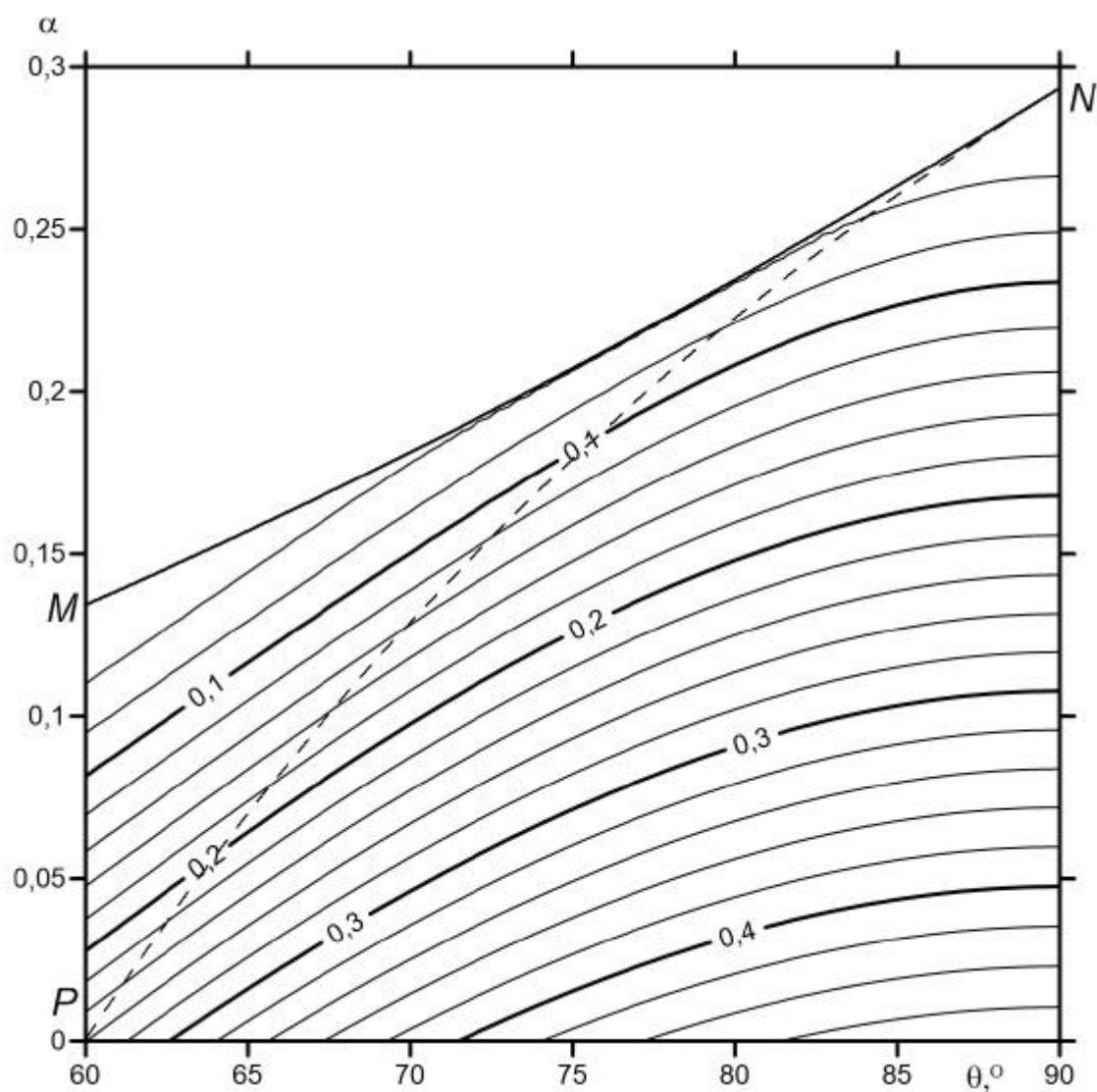


Рис. 2.10. Пористость в зависимости от угла  $\theta$  и степени пересечения сфер  $\alpha$  в виде изолиний.

### 2.3. Просветность.

Помимо проницаемости, одной из важных характеристик горной породы является просветность. Просветность – отношение площади пор в поперечном сечении к общей площади поперечного сечения. Из определения:

$$n = \frac{S_{\Pi}}{S} = 1 - \frac{S_{\Sigma}}{S} \quad (2.20)$$

Здесь:  $S$ ,  $S_c$ ,  $S_{\Pi}$  – площади поперечных сечений ячейки, скелета и пор соответственно.

Площадь поперечного сечения ячейки, очевидно, равна площади грани:

$$S = L^2 \sin(\theta) \quad (2.21)$$

Площадь скелета – это площади окружностей минус площадь их пересечения при перекрытии:

$$S_c = N' S_{\text{ок}} - N'_1 S_{\text{сг}} - N'_2 S_{\text{сг}2} \quad (2.22)$$

$N' = 1$  – Количество окружностей на одну ячейку.

$N'_1 = 4$  – Количество круговых сегментов, образованных пересечением окружностей при соседних вершинах на одну ячейку.

$N'_2 = 2$  – Количество круговых сегментов, образованных пересечением окружностей при противоположных вершинах на одну ячейку.

Величины площадей  $S_{\text{ок}}$ ,  $S_{\text{сг}}$ ,  $S_{\text{сг}2}$  вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{\text{ок}} &= \pi r^2 & S_{\text{сг}} &= r^2 f(\varphi) & S_{\text{сг}2} &= r^2 f(\varphi_2) \\ f(\varphi) &= \varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2} & f(\varphi_2) &= \varphi_2 - \frac{\sin(2\varphi_2)}{2} \\ \varphi &= \arccos(1 - \alpha) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \arccos\left(2(1 - \alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), & \alpha \geq 1 - \frac{1}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ 0, & \alpha < 1 - \frac{1}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{cases}$$

Объединяя 2.23, 2.22, 2.21 и 2.20, а также учитывая соотношения 2.2 и 2.3, вводится значение просветности как функция  $\theta$  и  $\alpha$ :

$$n = 1 - \frac{\pi - 4f(\varphi) - 2f(\varphi_2)}{4\sin(\theta)(1 - \alpha)^2} \quad (2.24)$$

На рис. 2.11 показан набор изолиний, иллюстрирующий поведение величины  $n$ , при изменении параметров  $\theta$  и  $\alpha$ . Из рисунка видно, что с увеличением угла  $\theta$ , значение просветности увеличивается, а с увеличением параметра  $\alpha$ , наоборот уменьшается. На линии MN просветность обращается в ноль. Пунктирная линия, как и в случае пористости, обозначает появление дополнительных сегментов пересечения окружностей, от противоположных вершин.

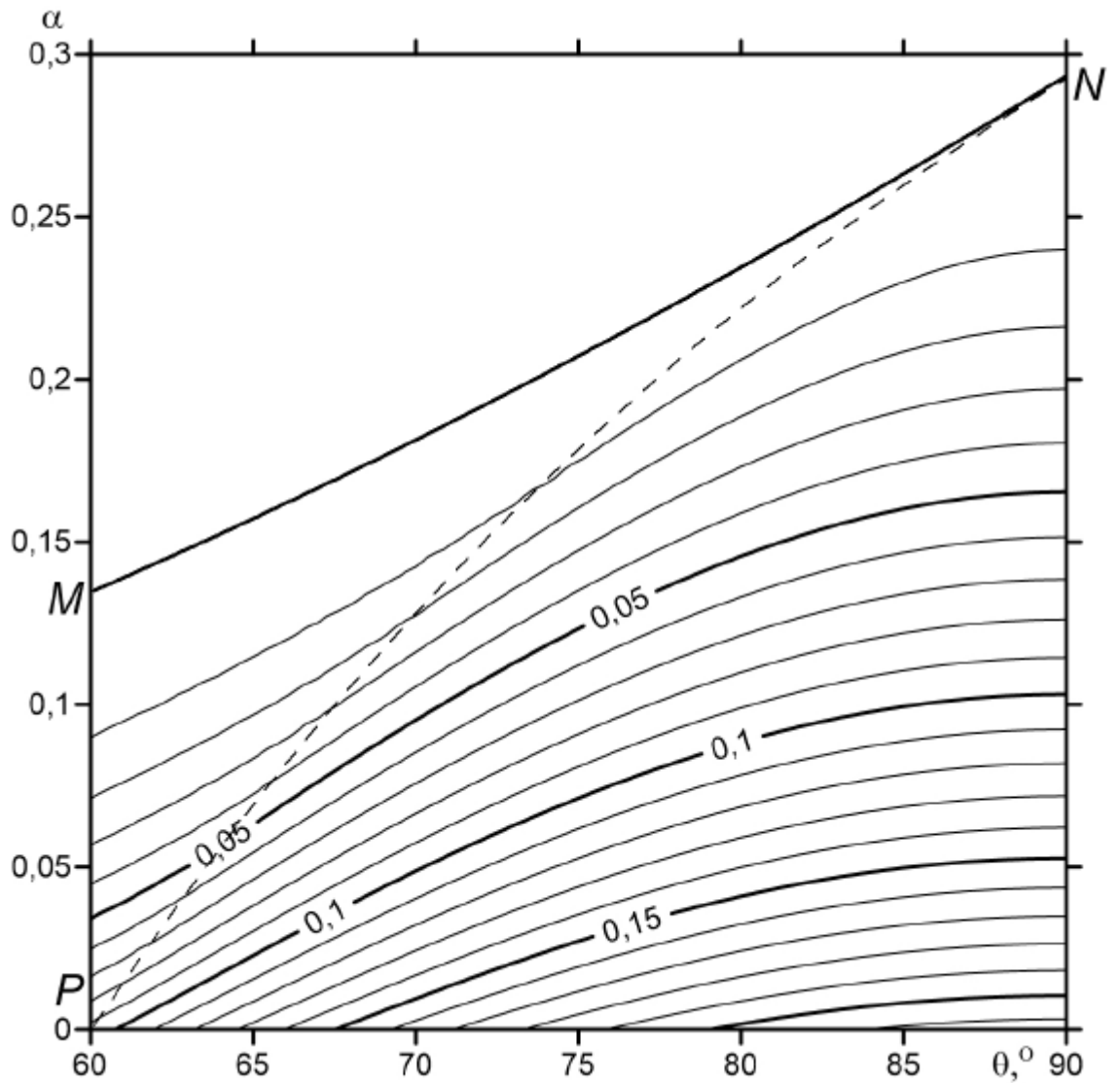


Рис. 2.11. Просветность в зависимости от угла  $\theta$  и степени пересечения сфер  $\alpha$  в виде изолиний.

## Глава 3. Проницаемость идеального грунта.

### § 1. Опыты Дарси по фильтрации в пористых средах.

В середине XIX в. выпускник французской политехнической школы, инженер-гидравлик Анри Дарси занимался обустройством водопровода французского города Дижон [13]. В частности, Дарси разрабатывал очистные сооружения для воды. В ходе этих работ, было проведено множество экспериментов, в которых осуществлялся макроскопический перенос жидкости сквозь пористую среду. В опытах Дарси (рис. 3.1) вода пропусклась сквозь набитые песком трубки под действием гидростатического напора, обеспечиваемого разностью уровней жидкости на входе в фильтрующую среду и на выходе из неё. По истечении определённого промежутка времени, производился замер количества воды, протекающего через трубку в единицу времени.

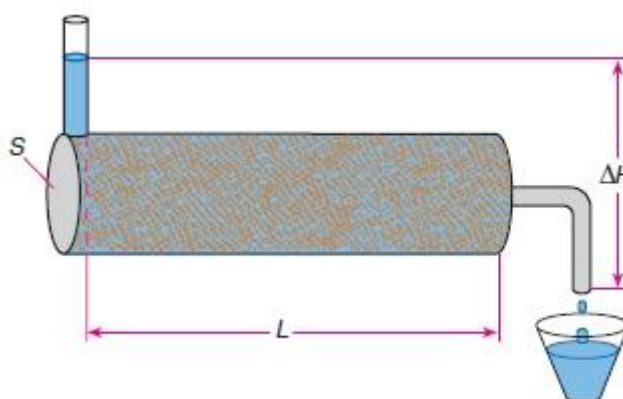


Рис. 3.1. Схема опыта Дарси

Результаты этих экспериментов были опубликованы в обширном отчёте, а спустя год, Дарси провёл анализ экспериментальных данных. В результате анализа, было установлено, что расход жидкости  $Q$  сквозь пористую среду прямо пропорционален перепаду давления на входе и на выходе из пористой среды, величине площади поперечного сечения канала  $S$ , и обратно пропорционален длине трубки  $L$  т.е. величине перемещения жидкости. Математическая запись закона движения жидкости выглядит так:

$$Q = k\rho g S \Delta H / L\mu \quad (3.1)$$

Здесь:

$g$  – Ускорение свободного падения.

$\mu$  – Динамическая вязкость жидкости.

$\rho$  – Плотность жидкости.

$k$  – Так называемая проницаемость пористой среды.

Это соотношение стало впоследствии известно как закон Дарси

В современной формулировке закон Дарси выглядит так:

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} (\text{grad}p + \rho g \Delta H) \quad (3.2)$$

$\vec{u}$  – Скорость фильтрации (скорость течения жидкости внутри пористой среды)

$$\vec{u} = \frac{Q}{s} \quad (3.3)$$

Явления фильтрации возникают не только в процессе движения воды в фильтрах очистных и прочих устройств, но и в процессах, происходящих в земных недрах при добыче нефти и/или газа. Пористая горная порода, способная удерживать и фильтровать сквозь себя жидкость (как правило, смесь воды и нефти), называются породами-коллекторами. Процессы фильтрации, возникающие в нефтяных коллекторах, описываются разделом механики сплошных сред, называемым подземной гидромеханикой. Так как современная нефтяная инженерия активно использует методы гидродинамического и геологического моделирования нефтяных коллекторов, то закон Дарси является одним из основных уравнений, используемых в современной вычислительной подземной гидромеханике.

Так как соотношение 3.2, очевидно является эмпирическим, то оно не может дать полной механики течения жидкости внутри грунта, а лишь является макроскопическим описанием процессов происходящих внутри пористой среды в гораздо меньших масштабах. Распределение скоростей фильтруемой жидкости возможно получить исходя из решения уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \bar{v} \quad (3.4)$$

Первое уравнение является эллиптическим, второе - параболическим. Неизвестными переменными являются параметры  $(p, \nu)$ . Моделирование вихревых течений на основе численного решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости сопровождается рядом трудностей математического характера [14].

## § 2. Проницаемость идеального грунта.

### 2.1. Проницаемость по Сликтеру.

Идея Сликтера состоит в том, чтобы представить идеальный грунт как совокупность непересекающихся сфер расположенных в вершинах ромбоэдра. Для этого осуществляется замена истинной поры структурного элемента на пору цилиндрической формы, длина которой равна длине ребра ромбоэдра, а площадь сечения равна площади поперечного сечения истинной поры на её грани, т.е. в самом узком месте.

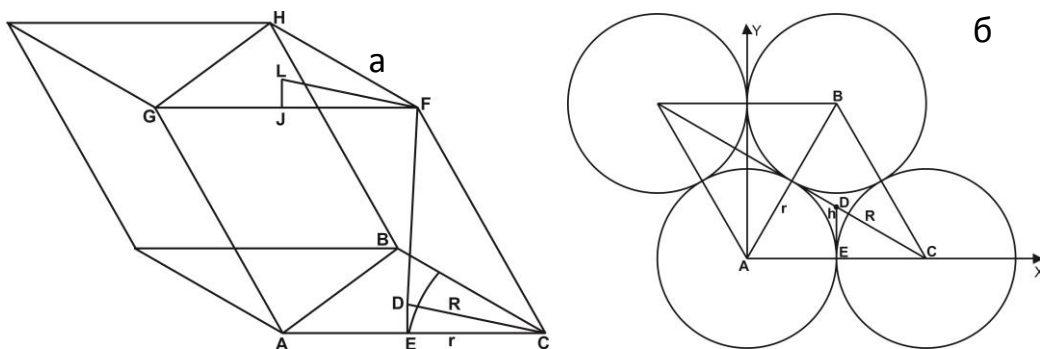


Рис. 3.2. Расположение каналов в идеальном грунте.

На рис. 3.2 (а) представлен каркас ромбоэдрической структуры. Рис. 3.2 (б) показывает вид сечения ячейки параллельно плоскости ABC.

Поток фильтруемой жидкости проникает в пору в точке D. Точка D является центром криволинейного равностороннего треугольника, сторонами которого являются дуги окружностей. Точка E, лежащая на соприкосновении окружностей, является основанием перпендикуляра, опущенного из точки D на ось x, следовательно, из прямоугольного треугольника CDE легко найти высоту h перпендикуляра:

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} \quad (3.5)$$

$R$  – Радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

$r$  – Радиус окружностей, образующих каркас структуры.

$$R = \frac{2r}{\sqrt{3}} \quad (3.6)$$

Следовательно:

$$h = r \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Таким образом координаты точки D:  $(r, \frac{r}{\sqrt{3}}, 0)$ .

Фильтруемая жидкость протекает внутри порового объёма от точки D к точке L. Слихтер показывает [6], что среднее значение  $A_m$  эффективной площади поперечного сечения канала при  $\theta = 60^\circ$  будет в 1,436 раза больше чем площадь канала  $A_e$  в самом узком месте, т.е. в точке D или в точке L:

$$A_m = 1,436A_e \quad (3.7)$$



Также, путём геометрических соображений, Сликтер приходит к выводу, что длина прямолинейного канала при том же значении угла  $\theta = 60^\circ$  в 1,065 раз больше длины ребра ромбоэдра  $L$ :

$$l = 1,065L \quad (3.8)$$

Для любого значения  $\theta$ :

$$l = L\left(1,195 - \frac{0,39\theta}{\pi}\right)$$

Из гидравлики известно соотношение для скорости фильтрации в канале, поперечным сечением которого является равносторонний треугольник:

$$u = \frac{\Delta P A_m}{20\sqrt{3}\mu l} \quad (3.9)$$

Учитывая (3.7) и (3.8), приближённо получаем:

$$u = \frac{P A_e}{8\pi\mu L} \quad (3.10)$$

Так как с высокой точностью можно считать:

$$1,065 * \frac{20\sqrt{3}}{1,436} = 25,691 \approx 8\pi$$

Формула (3.7) является ничем иным как уравнением для скорости течения жидкости в круглой цилиндрической трубке с площадью поперечного сечения  $A_e$ . Таким образом, Сликтер переходит от течения по каналу треугольного к течению по круглой цилиндрической трубке, если положить длину этой трубке равной длине ребра ромбоэдра  $L$ , а площадь поперечного сечения равной площади криволинейного равностороннего треугольника, лежащего в основании.

Сликтер проводит обобщение формулы (3.7) для  $\theta \geq 60^\circ$ . Значение площади  $A_e$  принимается равным половине, вычисленной из геометрических

соображений, площади фильтрующего канала на входе в ромбоэдр, объясняя это тем, что входное отверстие представляет собой два равносторонних треугольника:

$$A_e = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}L^2 \left( \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{nL^2}{2} \sin \theta \quad (3.11)$$

$n$  – Просветность

Также из геометрических соображений вводится следующее соотношение:

$$L = \frac{h(1+\cos \theta)}{\sin \theta \sqrt{1+2 \cos \theta}} \quad (3.12)$$

$h$  – Высота ромбоэдра.

Подставляя (3.11) в (3.12), приходим к следующему соотношению:

$$u = \frac{\Delta PL^2 n}{16\pi \mu h} B(\theta) \quad (3.13)$$

Где:

$$B(\theta) = (1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta} \quad (3.14)$$

Из фундаментальной формулы 2.19 выразим:

$$(1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta} = \frac{\pi}{6(1-m)} \quad (3.15)$$

Из (3.15) и (3.14) очевидно:

$$B(\theta) = \frac{\pi}{6(1-m)} \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в (3.13)

$$u = \frac{L^2 n \Delta P}{96(1-m) \mu h} \quad (3.14)$$

Скорость течения флюида в канале той или иной формы и поперечного размера  $u$  связана со скоростью фильтрации  $\vec{u}$  через просветность:

$$\vec{u} = nu \quad (3.15)$$

Внося 3.14 в 3.15 получаем:

$$\vec{u} = \frac{L^2 n^2 \Delta P}{96(1-m)\mu h} \quad (3.16)$$

Сравнивая соотношение (3.16) с законом Дарси (3.2), приходим к величине проницаемости:

$$k = \frac{L^2 n^2}{96(1-m)} \quad (3.17)$$

Выражение (3.17) называется теоретической проницаемостью Сликтера. Как видно из соотношения проницаемость является функцией пористости, а значит и угла  $\theta$ , и просветности  $n$ . Поскольку просветность также является функцией угла  $\theta$ , то существуют приближённые соотношения, связывающие просветность с пористостью. Применяя их, из фундаментальной формулы (3.17) можно получить приближённое соотношение Эльдифрави:

$$k = 0,01057m^{3.3}L^2$$

## 2.2. Проницаемость с учётом переменного сечения канала.

Формула (3.9) для вычисления расхода через канал, сечением которого является равносторонний треугольник, является частным случаем более обобщённой формулы, описывающей объёмный расход через канал, сечением которого является любой правильный многоугольник [16]:

$$Q = A \frac{a^4 \Delta P}{\mu h} \quad (3.18)$$

Здесь:

$A$  – Безразмерный коэффициент, зависящий от формы сечения. В случае круглого сечения  $A = \pi/8$ ; треугольного  $A = \sqrt{3}/320$ ; квадратного  $A = 9/256$ .

$a$  – Характерный поперечный размер (для окружности – радиус, для многоугольника – сторона).

$h$  – Длина канала.

Формула для вычисления проницаемости (3.17) была получена без учёта изменения площади поперечного сечения канала, фильтрующего сквозь себя жидкость. Соотношение (3.7) было получено путём простого геометрического осреднения площади поперечного сечения канала. Такой подход является не совсем точным т.к. наибольший вклад в скорость фильтрации будет вносить именно величина площади вблизи самого узкого места, т.е. вблизи грани ромбоэдра. Для того, чтобы учесть этот факт в [15] приведено соотношения для расчёта проницаемости вдоль канала, поперечный размер которого плавно меняется по мере течения жидкости внутри него.

$$Q = A \frac{a(z)^4}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (3.19)$$

В данном случае величина характерного размера  $a$  меняется вдоль координаты  $z$ . Формула (3.19) является записью закона 3.18 для бесконечно-малого канала  $dz$ , и справедлива для случая, когда поперечный размер канала слабо меняется вдоль его длины ( $da/dz \ll 1$ ). Таким образом, движение вдоль канала будет считаться квазиодномерным.

Приравнивая соотношения (3.19) и (3.18), разделяя переменные и интегрируя, отыщем эффективной значение  $a_*$  величины  $a$  для канала длиной  $h$ , сечение которого меняется вдоль него:

$$a_*^4 = h \left( \int_0^h \frac{dz}{a(z)^4} \right)^{-1} \quad (3.20)$$

Подставляя величину  $a_*^4$  в соотношение (3.18) как эффективное значение характерного размера, получим:

$$Q = A \frac{\Delta P}{\mu} \left( \int_0^h \frac{dz}{a(z)^4} \right)^{-1}$$

Сравнивая данное соотношение с законом Дарси (3.2), приходим к величине проницаемости:

$$k = A \frac{h}{S} \left( \int_0^h \frac{dz}{a(z)^4} \right)^{-1} \quad (3.21)$$

Соотношение (3.21) позволяет вычислить значение величины проницаемости для канала переменной площади сечения при условии постоянства формы течения по длине канала, т.е. при условии что  $A = const$ .

В [15] производилось исследование проницаемости для кубической и гексаэдрической структуры с учётом переменной площади сечения. На рис. 3.2 приведено строение пор для обеих структур.

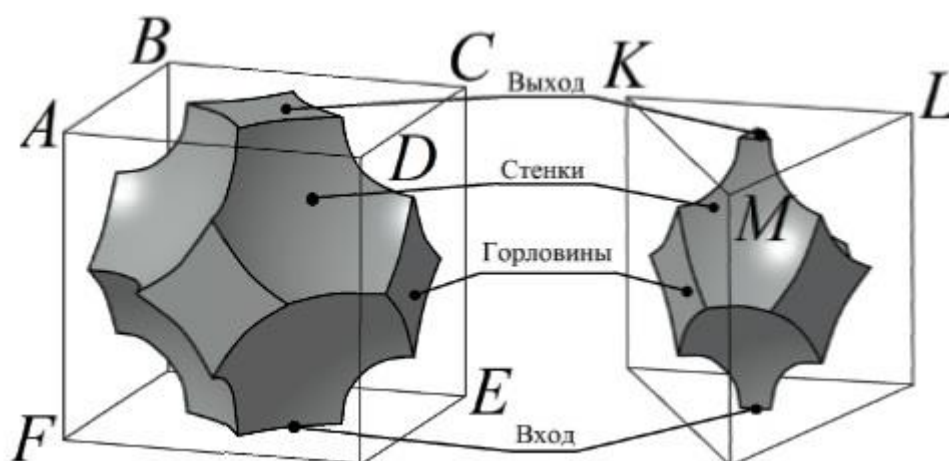


Рис. 3.3. Форма пор для кубической и гексагональной структуры.

В основании поры кубической структуры лежит квадрат со сторонами образованными дугами окружностей, в то время как в основании гексагональной структуры равносторонний треугольник, сторонами которого также являются дуги окружностей. (Рис. 3.3). С достаточно большой точностью можно принять, что обе фигуры являют собой обычные некриволинейные квадрат и равносторонний треугольник соответственно.

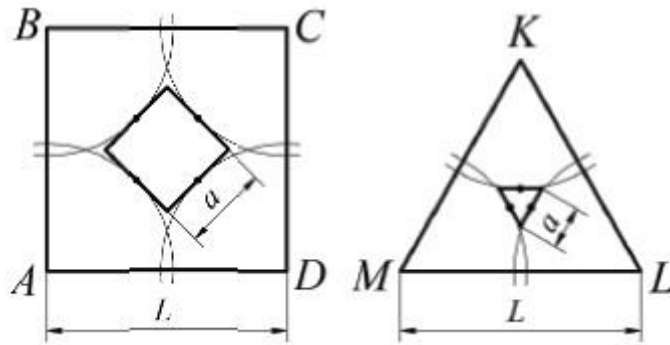


Рис. 3.4. Форма поперечного сечения для кубической и гексагональной структуры.

По мере движения вдоль вертикальной координаты, в определённый момент, форма сечения превратится из квадрата (треугольника) в некоторую другую, более сложную геометрическую фигуру. Поскольку для справедливости соотношения (3.21) необходимо постоянство величины  $A$ , то для достижения этой цели было применено сглаживание контура канала ячейки.

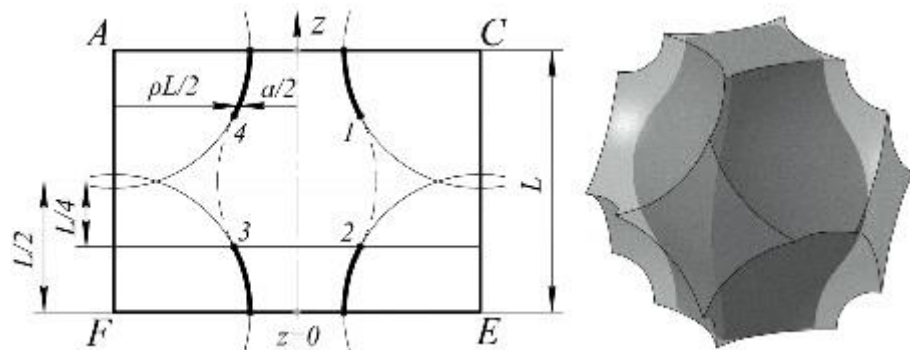


Рис. 3.5. Сглаживание канала кубической структуры.

На рис. 3.5. показано диагональное сечение ячейки кубической структуры ACEF. Очевидно, что фигура является симметричной относительно горизонтальной оси проведённой на высоте  $L/2$ , поэтому достаточно задать то, как будет меняться контур канала до достижения середины подъёма. Участок от  $Z=0$  до  $Z= L/4$  является дугой окружности. Для сглаживания участка от  $Z= L/4$  до  $L/2$  произведём операцию отражения дуги окружности относительно точки 3.

В результате отражения стороны соответствующих геометрических фигур будут определяться следующим образом:

$$a(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \left[0, \frac{L}{4}\right] \cup \left[\frac{3L}{4}, L\right] \\ 2f\left(\frac{L}{4}\right) - f\left(\frac{L}{2} - z\right), & z \in \left[\frac{L}{4}, \frac{3L}{4}\right] \end{cases} \quad (3.22)$$

Здесь функция  $f$  зависит от формы поперечного сечения (квадрат или треугольник) и определяется исходя из геометрических соображений. Помимо вертикальной координаты  $z$ , переменной для функции  $f$  будет являться и степень пересечения сфер  $\alpha$ . Соотношения для проницаемости этих структур исходя из (3.21) примут следующий вид:

$$k = \frac{9}{256} L \left( \int_0^h \frac{dz}{a(z)^4} \right)^{-1} \text{ – для кубической структуры}$$

$$k = \frac{1}{80} L \left( \int_0^h \frac{dz}{a(z)^4} \right)^{-1} \text{ – для гексагональной структуры}$$

Также в [15] был произведён численный расчёт течения по сглаженному каналу ячеек обеих структур. Расчёт осуществлялся в гидродинамическом симуляторе OPEN FOAM, позволяющий использовать метод конечных объёмов в декартовой системе координат для расчёта необходимых параметров течения. Результаты приведены на рис. 3.6

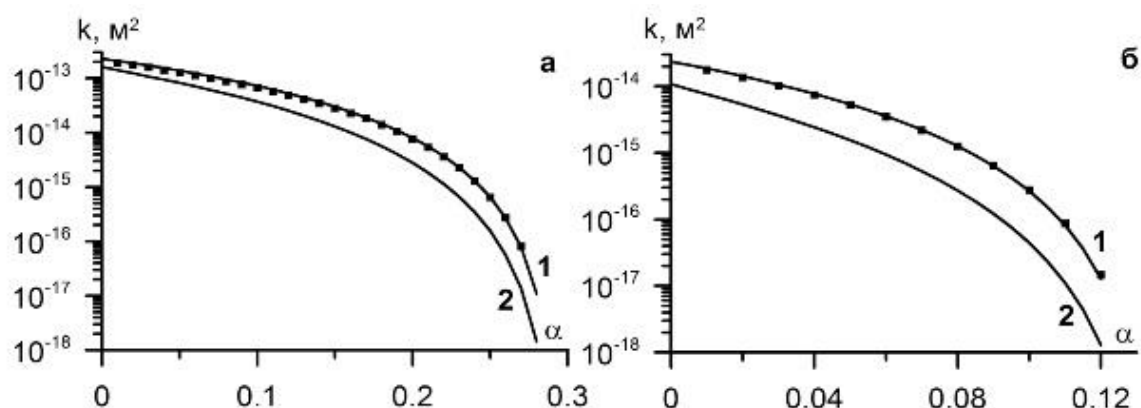


Рис. 3.5. Зависимость проницаемости для кубической (а) и гексагональной (б) структуры от параметра  $\alpha$ . Линия 1-аналитическая оценка. Линия 2 – оценка из [7].

### 2.3. Проницаемость по минимальной просветности.

Как уже было указано в предыдущем пункте, соотношение (3.21) справедливо для канала, форма которого не меняется по длине, а также применимо в том случае, когда известно аналитическое значение параметра  $A$ . Если имеется структура, поперечное сечение которого имеет сложную форму поперечного сечения, то необходимо искать другие подходы к отысканию величины проницаемости. В [12] проведено исследование проницаемости в ромбоэдрической структуре. Форма сечения канала на грани (в самом узком месте) ромбоэдрической структуры приведена на рис. 3.6.

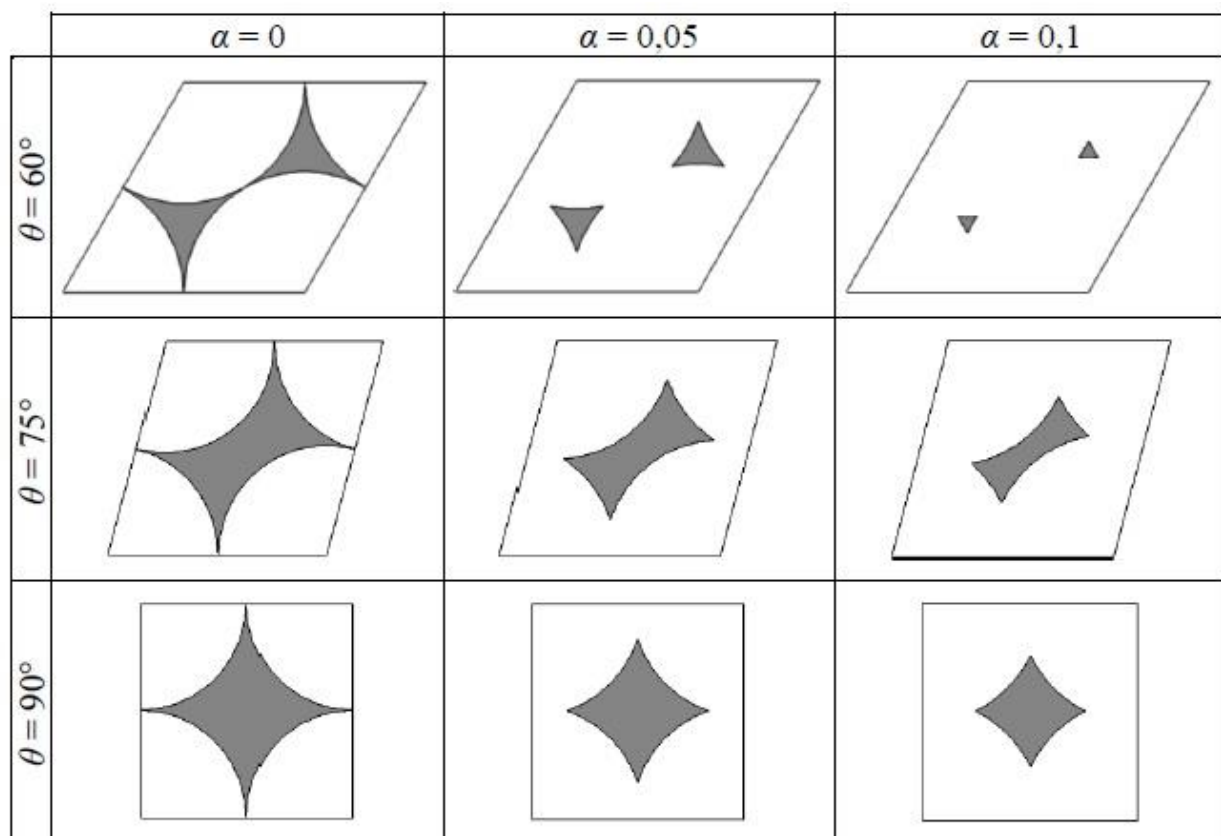


Рис. 3.6. Конфигурация канала (просвет) на гранях ромбоэдрической структуры.



Из рисунка видно, что форма канала при определённых параметрах  $\theta$  и является  $\alpha$ , представляет собой фигуру, в одних случаях более похожую на квадрат, в других – на треугольник, в третьих – на некую смесь между ними.

При значении угла  $\theta = 75^\circ$ , форма сечения канала является криволинейным прямоугольником. В [18] показано, что объемный расход через каналы, поперечное сечение которых представляет собой прямоугольник, находится по следующей формуле:

$$Q_{sq} = \chi h^4 f(\chi) \frac{\Delta p}{4\mu l} \quad (3.23)$$

$$f(\chi) = \frac{16}{3} - \frac{1024}{\pi^5 \chi} \left( th\left(\frac{\pi\chi}{2}\right) + \frac{1}{3^5} th\left(\frac{3\pi\chi}{2}\right) + \dots \right)$$

Где:

$h$  – Полувысота прямоугольного сечения.

$\chi$  – Отношение ширины прямоугольного сечения к его высоте.

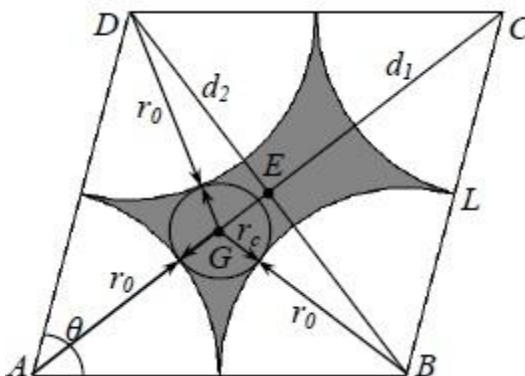


Рис. 3.7. К вычислению параметра  $\chi$ .

Для вычисления параметра  $\chi$  необходимо обратиться к рис. 3.7. Из рисунка видно, что:

$$d_1 = 2L \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad d_2 = 2L \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Таким образом, величина  $\chi$  определится следующим образом:

$$\chi = \frac{d_1 - 2r}{d_2 - 2r} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{1-\alpha}}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.24)$$

Из (3.18) объёмный расход для канала с сечением в виде равностороннего треугольника:

$$Q_{tr} = \frac{\sqrt{3}}{320} \frac{a^4 \Delta P}{\mu h} \quad (3.25)$$

Величины размеров  $a$  и  $h$ , вычисляются исходя из равенства площадей поперечного сечения и площади вычисленной для геометрической фигуры той или иной формы (треугольника или прямоугольника). Площадь канала ищется через просветность (2.24). Таким образом:

$$nL^2 \sin(\theta) = 4\chi h^2 \quad nL^2 \sin(\theta) = (\sqrt{3}/2)a^2$$

Следовательно:

$$h = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{n \sin(\theta)}{\chi}} \quad a = L \sqrt{\frac{2n \sin(\theta)}{\sqrt{3}}} \quad (3.26)$$

Так как сечение канала представляет собой сложную форму, то для вычисления величины расхода, необходимо учитывать, как формулу (3.25) и формулу (3.24). Это можно осуществить путём представления суммарного расхода в качестве функции от величин  $Q_{tr}$  и  $Q_{sq}$ . С этой целью вводится особая весовая функция

$$\omega_{sq} = \frac{\theta^\circ}{30} - 2 \quad (3.27)$$

Вид весовой функции определяется из следующих соображений: по мере нарастания величины угла  $\theta$  сечение становится всё больше приближенно к квадратной (прямоугольной) форме, и всё больше отдаляется от треугольной конфигурации. При  $\theta < 60^\circ$  структура порового объёма ромбоэдрической структуры не рассматривается. При  $\theta = 60^\circ$   $\omega_{sq} = 0$  т.к. в

сечении лежит 2 треугольника. При  $\theta = 90^\circ$   $\omega_{sq} = 1$  т.к. в сечении лежит треугольник. Величина суммарного расхода через канал с учётом величины  $\omega_{sq}$  будет выглядеть следующим образом:

$$Q = Q_{sq}\omega_{sq} + 2Q_{tr}(1 - \omega_{sq}) \quad (3.28)$$

Объединяя соотношения (3.28), (3.25), (3.26) и (3.23) найдена функция проницаемости по минимальной просветности:

$$k = \frac{1}{\tau \sin(\theta)} \left( \frac{f(\chi) \sin(\theta)^2}{\chi} \omega_{sq} + \frac{2\sqrt{3}}{5} (1 - \omega_{sq}) \right) \left( \frac{nL}{8} \right)^2 \quad (3.29)$$

Величина  $\tau$  в формуле (3.29), вычисляемая из геометрических соображений, называется извилистостью и характеризует отношение длины линии тока жидкости при течении внутри ромбоэдрической структуры к длине ребра ромбоэдра  $L$ .

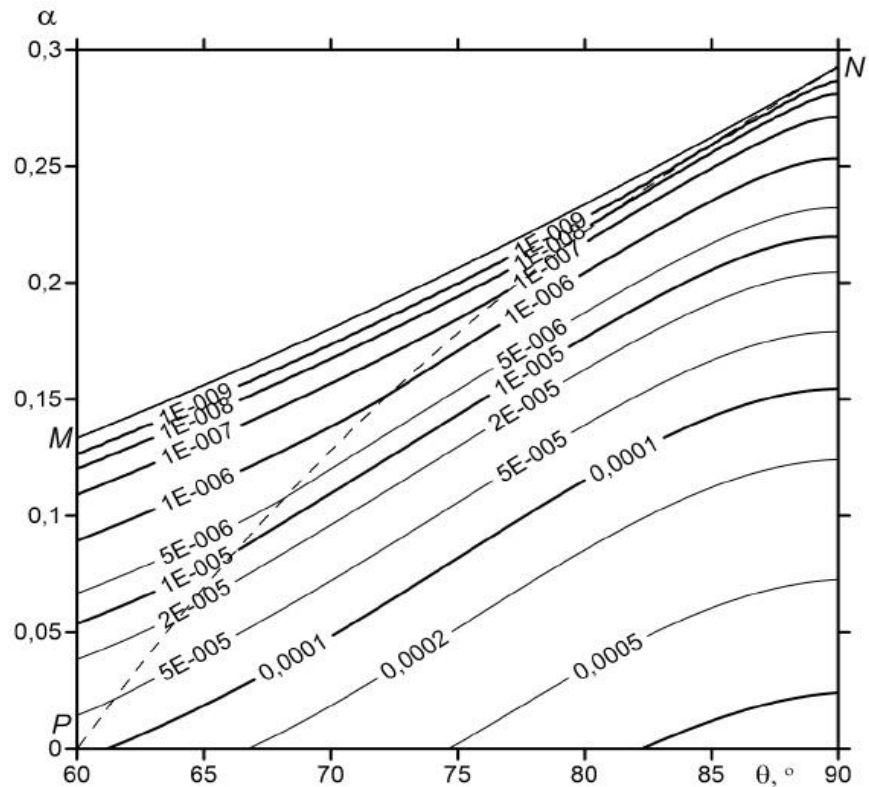


Рис.3.8. Поле приведённых проницаемостей  $\tilde{k}$  в виде изолиний на плоскости в координатах  $\theta$ ,  $\alpha$ .

Полученные на основе формулы (3.29) значения проницаемости были обезразмерены на величину квадрата ребра ромбоэдра:  $\tilde{k} = k/L^2$ . Величины приведённой проницаемости приведены на рис.3.8. Из рисунка видно, что с увеличением параметра  $\alpha$ , значения проницаемости падают, и растут с увеличением угла  $\theta$ .

Также, учитывая аналитическое значение для пористости (2.18), возможно получить графики приведённых проницаемостей зависящих от пористости. На рис. 3.9. и 3.10 показаны семейства кривых, описывающих поведение приведённой проницаемости, зависящей от пористости для различных параметров  $\alpha$  и  $\theta$ . Эти графики имеют значительный практический интерес, так как существует множество экспериментальных данных для реальных горных пород, описывающих поведение этих двух параметров. Семейства кривых ограничены диапазоном реальных лабораторных данных по однофазной фильтрации, которые позволят по этим графикам заменить реальный грунт, грунтом идеальным, после чего численно смоделировать двухфазное течение и получить величину ОФП.

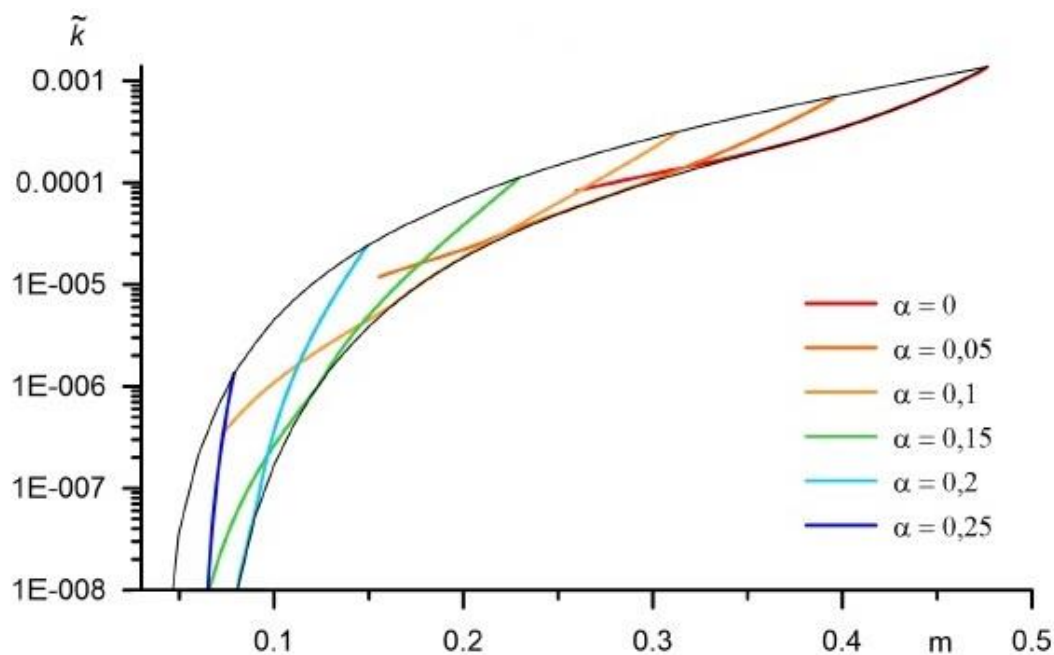


Рис. 3.9. Семейство кривых  $\tilde{k}(m)$  для различных  $\alpha$

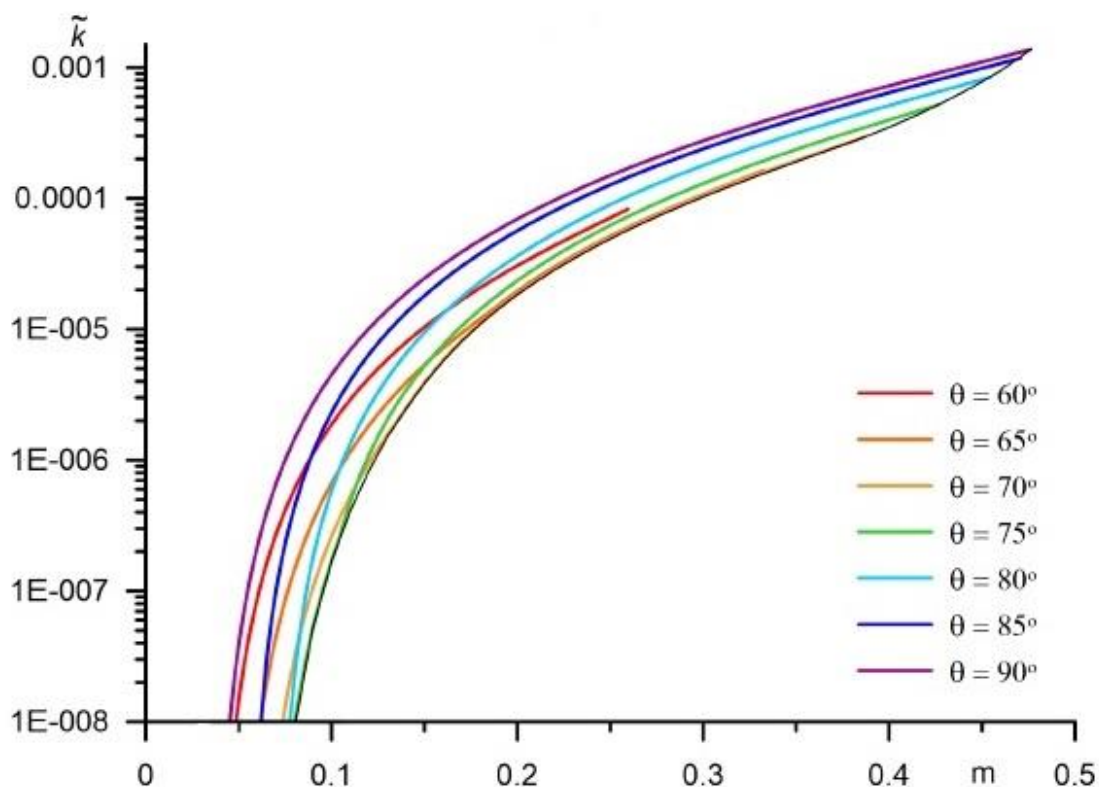


Рис. 3.10. Семейство кривых  $\tilde{k}(m)$  для различных  $\theta$

#### 2.4. Проницаемость ромбоэдрической структуры с учётом переменного сечения канала.

Подход к вычислению проницаемости, описанный в предыдущем пункте решает проблему учёта сложной формы поперечного сечения канала, однако никак не учитывает изменение площади сечения внутри него. В то же время, метод, изложенный в пункте 2.2, учитывает изменение площади поперечного сечения, но применим только для простых геометрических фигур, лежащих в сечении. В данном пункте описан метод отыскания проницаемости для канала переменного сечения, имеющего сложную форму.

Конфигурации порового объёма элемента ромбоэдрической структуры приведены на рис.2.9. Для любого из значений параметров  $\alpha$  и  $\theta$  в поровом объёме присутствуют основные фильтрующие отверстия и боковые горловины (рис. 3.11).

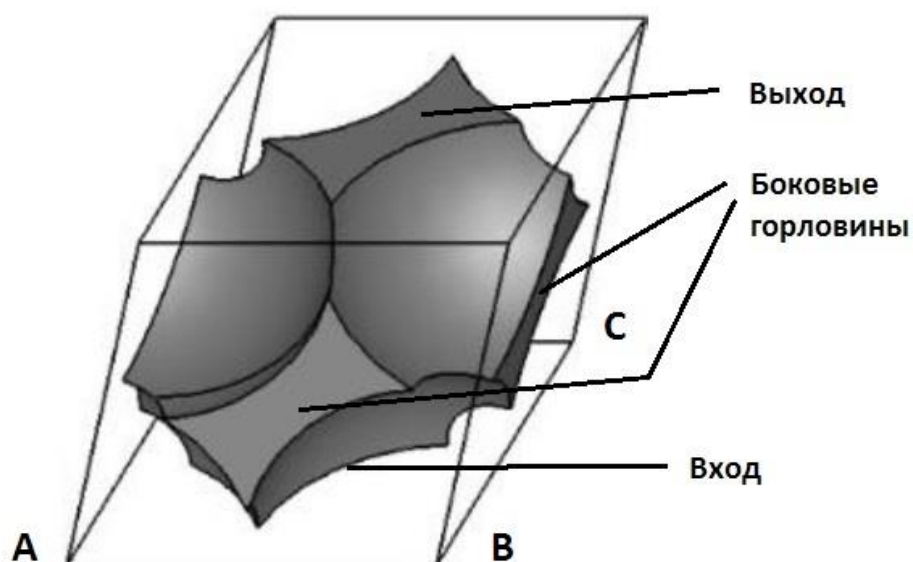


Рис. 3.11. Положение фильтрующих каналов в ячейке ромбоэдрической структуры.

Градиент давления идёт снизу вверх, от нижней горловины к верхней. Как и в пункте 3.2, предполагается, что боковые горловины не участвуют в процессе фильтрации.

Соотношение (3.21) позволяет вычислить величину проницаемости при условии, когда известна зависимость величины характерного размера сечения канала от вертикальной координаты  $z$ . Также соотношение (3.21) требует соблюдения условия ортогональности поперечного сечения канала к вертикальной координате  $z$ . Ни одно из этих двух условий не выполняется в канале поры ромбоэдрической структуры.

Несоблюдение второго условия объясняется скошенностью ромбоэдра вдоль диагонали AC. Это приводит к тому, что линии тока изгибаются по мере течения фильтруемой жидкости внутри канала, таким образом появляется извилистость  $\tau$ . Вследствие этого, исследовать течение следует путём введения семейства плоскостей, которые будут рассекать поровый объём таким образом, чтобы соблюдалось условие ортогональности линий тока и секущих плоскостей.

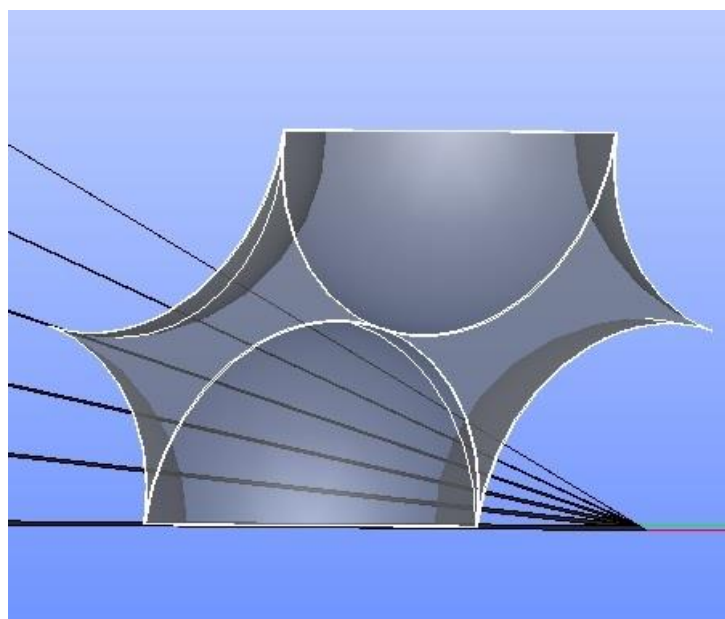


Рис. 3.12. Положение секущих плоскостей для поры при  $\theta = 75^\circ$ ,  $\alpha = 0$

На рис. 3.12 приведён набор секущих плоскостей для порового объёма. Для соблюдения условия ортогональности необходимо, чтобы ось вращения была параллельна малой диагонали ромба лежащего в основании, так как из-за скошенности течение отклоняется в сторону вертикального ребра ромбоэдра  $Ah'$ . На рис.3.13 представлен вид на поровый объём ячейки ромбоэдра при  $\theta = 60^\circ$  и  $\alpha = 0,1$ , в диагональном сечении, линия  $BB'$  – линия тока. Как уже было отмечено в пункте 2.2, в центре ромба в основании происходит перекрытие противоположных диагональных сфер, что даёт круговой сегмент с центром в точке  $O$ . Именно поэтому ось вращения секущих плоскостей будет совпадать с малой диагональю ромба в основании

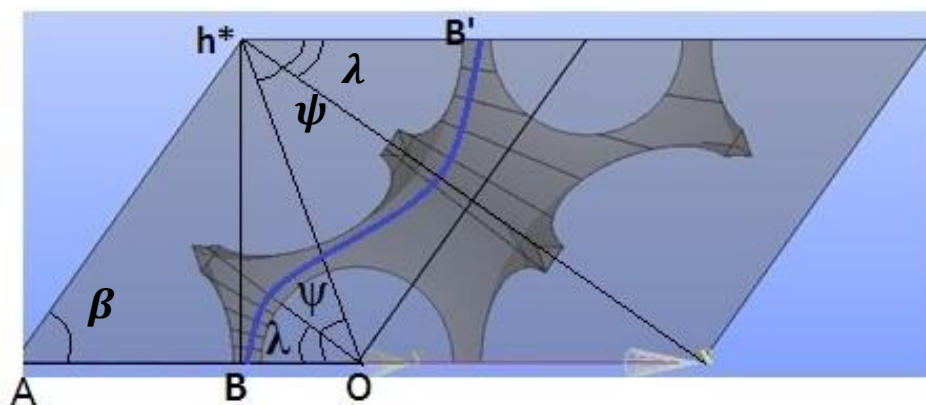


Рис. 3.13. Положение линии тока при  $\theta = 60^\circ$  и  $\alpha = 0,1$

Из этих соображений следует, что в соотношении (3.21) следует перейти от вертикальной координаты  $z$  к угловой координате  $\lambda$ . На рис. 3.13 отрезок  $OB$  соединяет точку пересечения диагоналей с самой линией тока. Из простых геометрических соображений:  $Z=OB\sin(\lambda)$ . Следовательно

$$dZ = OB\cos(\lambda)d\lambda \quad (3.30)$$

Подставляя (3.30) в (3.21) получим искомое соотношение:

$$k = A \frac{L}{S} \left( \int_0^\psi \frac{OB\cos(\lambda)d\lambda}{a(\lambda)^4} \right)^{-1} \quad (3.31)$$

Где верхний предел интегрирования  $\psi$  определяется исходя из прямоугольного треугольника  $OBh^*$ :

$$\psi = \operatorname{arctg} \left( \frac{L\sin(\beta)}{L(\cos(\frac{\theta}{2}) - \cos(\beta))} \right) \quad (3.32)$$

Где величина угла  $\beta$  выражается из формулы (2.13)

Достижение угла  $\psi$  является моментом, когда линия переходит от течения вдоль малой нижней окружности с центром  $O$  к течению вдоль верхней большой окружности с центром  $h^*$ . Таким образом, получаем два семейства кривых: одно образующее нижний «проход» с центром  $O$ , и одно образующее верхний «проход» с центром  $h^*$ . Сама линия тока представляет собой две дуги окружности.

Величина  $OB$  является расстоянием от точки пересечения диагоналей до центра равностороннего треугольника, лежащего на грани. Выражается следующим образом:

$$OB = L \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{L}{2(1-\alpha)} (\alpha\sqrt{2-\alpha} + 1) \right) \quad (3.33)$$

Рассмотрим случай, когда в центре отсутствует перекрытие противоположных сфер. Ось вращения секущих плоскостей будет, как и в предыдущем случае параллельна нижней диагонали ромбоэдра. Однако



проходить она будет уже не через нижнюю короткую диагональ, а через точку, лежащую на продолжении нижней длинной диагонали. Это обусловлено тем, что по мере увеличения угла  $\theta$ , угол  $\beta$  становится прямым, сводя тем самым извилистость течения к нулю. Для описания этого процесса необходимо ввести функцию угла  $\theta$ , которая бы задавала перемещение точки  $O^*$  Рис. 3.13, через которую проходит ось вращения секущих плоскостей, по оси, совпадающей с нижней длинной диагональю.

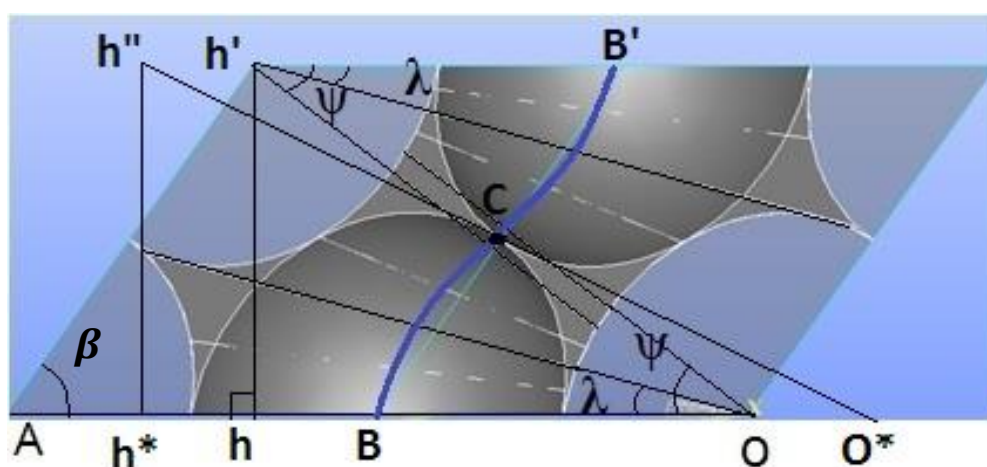


Рис. 3.13. Положение линии тока при  $\theta = 60^\circ$  и  $\alpha = 0$

На рисунке 3.13 линия  $BB'$  также является линией тока. Отрезок  $BO^*$  - радиус вращения секущих плоскостей. Он будет меняться по следующему закону:

$$BO^* = L \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\left(\frac{30}{90-\theta}\right) - 1\right)$$

При  $\theta = 75^\circ$   $O^*$  совпадает с  $O$  и лежит в центре сферы. При  $\theta = 90^\circ$  точка  $O^*$  уходит на бесконечность, что говорит о том, что секущие плоскости будут параллельны горизонтальной оси, т.е. переход к применяющейся для кубической и гексагональной структур вертикальной координаты  $z$ . На рис. 3.13:  $OO^* = hh^*$ ,  $C$ -центр ромбоэдра, значит:  $BO^* = O^*C = h''C$ , следовательно:

$$\frac{h^* h''}{2BO^*} = \sin(\psi)$$

Исходя из этого соотношения, получим соотношение для предельного угла  $\psi$ :

$$\psi = \arcsin\left(\frac{L \sin(\beta)}{2BO^*}\right) \quad (3.34)$$

Значение угла  $\theta = 60^\circ$  является исключением из выражения для  $BO^*$ , так как в этом случае не происходит перекрытия сфер в центре нижнего ромба. Для этого случая необходимо принять положение оси вращения в точке  $O$ .

Таким образом, проблема извилистости неортогональности линий тока к поперечному сечению канала решена. Теперь необходимо найти решение проблемы характерного размера поперечного сечения.

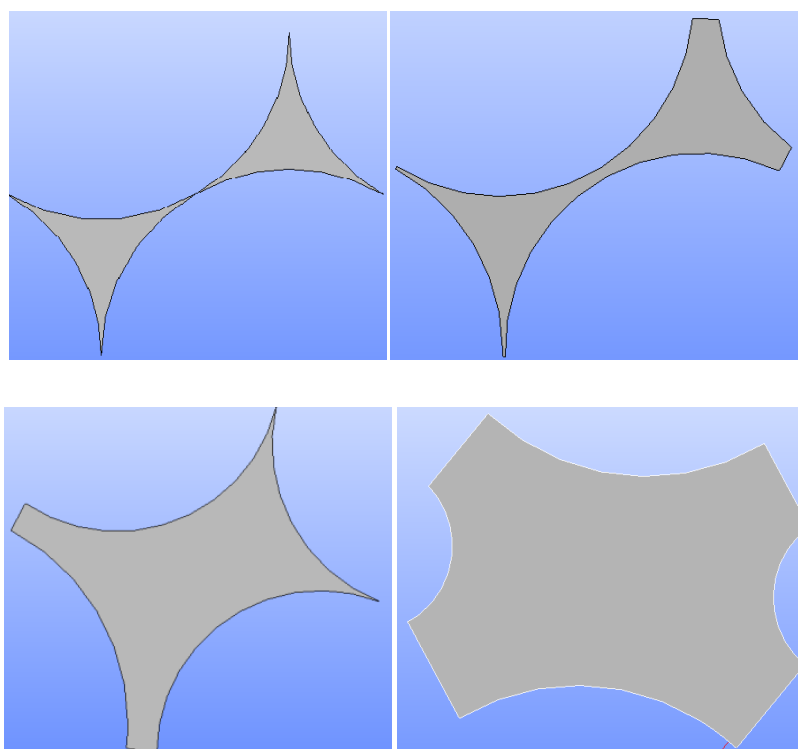


Рис. 3.14. Конфигурация поперечного сечения каналов в ромбоэдрической структуре.

На рис. 3.14 приведены формы поперечных сечений для различных углов поворота секущих плоскостей. Очевидно, что форма и площадь существенно меняются вдоль канала.

В соотношении (3.31) фигурирует четвёртая степень характерного размера. Это эквивалентно квадрату площади:

$$k = A \frac{L}{S} \left( \int_0^{\psi} \frac{0B \cos(\lambda) d\lambda}{s(\lambda)^2} \right)^{-1} \quad (3.35)$$

В ходе построений ячеек ромбоэдрических структур для различных значений параметров  $\theta$  и  $\alpha$  в геометрическом конструкторе SALOME, были получены площади сечений как функции угла поворота  $\lambda$  для трёх различных значений угла  $\theta$  (см. приложение). Построения были аппроксимированы и сглажены, с целью выполнения условия работы соотношения (3.35). Соответственно, вид функций  $s(\lambda)$  был установлен.

Для вычисления параметра  $A$  применяется подход, аналогичный подходу, описанному в пункте 2.3 для вычисления объёмного расхода. Поскольку работа идёт в предположении, что форма канала не меняется по его длине, то справедливо записать соотношение для параметра  $A$  аналогичное соотношению (3.28):

$$A = A_{sq} \omega_{sq} + 2A_{tr}(1 - \omega_{sq}) \quad (3.36)$$

Значение для параметров:

$$A_{tr} = \frac{\sqrt{3}}{320}; \quad A_{sq} = \frac{f(\chi)}{64\chi}$$

Величина  $\omega_{sq}$  будет модифицирована следующим образом. При перекрытии сфер в центре ромба в основании  $\omega_{sq} = 0$ , а далее  $\omega_{sq}$  будет линейно возрастать от нуля до единицы при  $\theta \in (\theta_k; 90)$ :

$$\omega_{sq} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta < \theta_k \\ \frac{\theta - \theta_k}{90 - \theta_k} & \theta_k \leq \theta < 90 \end{cases} \quad (3.37)$$

Здесь  $\theta_k$  – угол касания сфер в центре ромба в основании.

Из соотношений (2.23) величина  $\theta_k$  вычисляется следующим образом:

$$\theta_k = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2(1 - \alpha)}\right)$$

В результате расчёта, произведённого в среде компьютерной алгебры MAPLE было получено семь значений проницаемости для значений  $\theta = 60, 75, 82.5^\circ$ . Результаты приведены в таблице 3.1

Таблица 3.1.

$\theta$	$\alpha$	k	$\tilde{k}$	$\tilde{k} \min n$	$\frac{\tilde{k}}{\tilde{k} \min n}$
60	0	6,6E-04	1,6E-04	8,3E-05	1,982
60	0,1	2,3E-06	5,6E-07	3,4E-07	1,669
75	0	5,9E-03	1,5E-03	5,2E-04	2,848
75	0,1	8,3E-04	2,1E-04	6,0E-05	3,477
82,5	0	1,2E-02	3,0E-03	9,8E-04	3,026
82,5	0,1	2,4E-03	5,9E-04	1,9E-04	3,123
82,5	0,2	5,9E-05	1,5E-05	4,9E-06	3,027

$\tilde{k} \min n$  - проницаемость, полученная из формулы (3.29),

$\tilde{k}$  – проницаемость полученная с учётом переменного сечения.

Величина  $\tilde{k}$  больше чем  $\tilde{k} \min n$  в среднем в 2,7 раза, что подтверждает верность проведённых рассуждений.

## **Заключение**

Исследование, обобщает описанные в литературе подходы к определению проницаемости. В изученной литературе не учитывалось изменение площади сечения канала при течении жидкости внутри структурного элемента ромбоэдрической структуры. В результате проведённого в работе перехода от вертикальной координаты к угловой, была учтена извилистость канала переменного сечения и изменение его площади по длине канала. Таким образом, были уточнены значения проницаемости для некоторых значений параметров ромбоэдрической структуры. Уточнённые значения в 2-3 раза больше оценок на основе по минимальной просветности, что вполне ожидаемо.

## Список литературы

1. Энергетическая стратегия России до 2035 года. / Минэнерго России, 2015.
2. Шишняя А.В., Афонин А.А., Сухилов А.И. Построение трёхмерной модели геофильтрации флюида в многослойных пористых средах // Изв. ЮФУ. Технич. науки. 2009. Т. 97. № 8. С. 52-62.
3. Купавых К. С. Обоснование и разработка комплексной технологии освоения и ремонта скважин в карбонатных низкопроницаемых коллекторах. дисс. канд. техн. наук 25.00.15 / Купавых Кирилл Сергеевич – Национальный минерально-сырьевой университет "Горный". 2015. С. 105
4. Пономарева И. Н., Мордвинов В. А. Подземная гидромеханика: Учебное пособие / Пономарева И. Н., Мордвинов В. А. // Перм. гос. техн. ун-т, Пермь, 2009. С. 103
5. Саваторова В. Л. Математическое моделирование процессов теплопроводности и фильтрации в неоднородных средах со структурой, близкой к периодической. дисс. док. физ.-мат. наук 05.13.18 / Саваторова Виктория Леонидовна – Московский государственный горный университет. 2010. С. 304.
6. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М. Государственное издательство технико-технической литературы, 1947. с.11-24.
7. Игошин Д.Е., Никонова О.А., Мостовой П.Я. Моделирование пористой среды регулярными упаковками пересекающихся сфер. // Вестник Тюменского государственного университета. 2014. №.7. С.34-42.
8. Игошин Д. Е., Никонова О.А. Проницаемость пористой среды периодической структуры с разветвляющимися каналами // Вестник Тюменского государственного университета. Физико–математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Том 1. № 2 (2). – С. 131 – 141.

9. Швидлер. М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. — М.: Недра, 1985. 288 с.
10. Slichter C. S., Geol. U.S., Survey 19th. Ann. Report, Part. II, 295, 1897-98.
11. Москалев П.В., Шитов В.В. Математическое моделирование пористых структур. // Монография. Издательство: ФИЗМАЛИТ. 2007. С. 120.
12. Игошин Д. Е., Хромова Н. А. Фильтрационно-ёмкостные свойства периодической пористой среды ромбоэдрической структуры со скелетом из шаровых сегментов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. — 2016. — Том 2. № 3. — С. 107 – 127.
13. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Пер. с англ. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 640 с.
14. Durmagambetov A.A. Navier-Stokes Equations—Millennium Prize Problems // Asset A. Durmagambetov, Leyla S. Fazilova Natural Science. Scientific Research an Academic Publisher : pdf. — 2015. — № Vol.7 No.2. — С. 88-99.
15. Д. Е. Игошин, А. Ю. Максимов Численные и аналитические оценки проницаемости пористой среды, образованной каналами, имеющими вращательную симметрию. // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. № 3. С. 112-121.
16. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов / Л. Г. Лойцянский; 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
17. Игошин Д. Е. Численное исследование зависимости проницаемости от пористости среды, образованной каналами регулярной структуры / Д. Е. Игошин, Р. С. Сабуров // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 1(1). С. 84–90.
18. Игошин Д. Е. Численное определение проницаемости в среде периодической структуры, образованной разветвляющимися каналами / Д.

- Е. Игошин // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2015. № 12. С. 30–33.
19. Шабаров А. Б. Потери давления при течении водонефтяной смеси в поровых каналах / А. Б. Шабаров, А. В. Шаталов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 2. С. 50–72. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-50-72
20. Губайдуллин А. А. Моделирование динамики капли нефти в капилляре с сужением / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. 2013. № 7. С. 71–77.
21. Губайдуллин А. А. Обобщение подхода Козени к определению проницаемости модельных пористых сред из твердых шаровых сегментов / А. А. Губайдуллин, Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 2. С. 105–120. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-105-120
22. Wong P. Z., Koplik J., Tomanic J. P. Phys. Rev. Ser. B. 1984. Vol. 30. P. 6606.
23. Guoyn E., Oger L, Fiona T. J. J. Phys. Ser. D. 1987. Vol. 20. P. 1637.
24. Дмитриев М. Н. К определению фильтрационного числа Рейнольдса и характерного линейного размера для идеальных и фиктивных пористых сред / М. Н. Дмитриев, Н. М. Дмитриев // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2005. № 4. С. 97–104
25. Должик К. Расчетная оценка фильтрации несвязных грунтов / К. Должик, И. Хмелевска // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2014. № 5. С. 2–5.



26. Атюцкая Л. Ю. Контроль удельной поверхности цеолита методом Кармана-Козени в процессе механической активации / Л. Ю. Атюцкая, А. Г. Бебия, И. В. Милюкова // Ползуновский альманах. 2013. № 1. С. 95–97.
27. Василевский М. В. Характеристики состояния дисперсной среды на фильтрующей подложке обеспыливающего устройства / М. В. Василевский, В. И. Романдин, Е. Г. Зыков // Известия высших учебных заведений. Физика. 2013. Т. 56. № 9-3. С. 40–42.
28. Евсеев Ф. А. Экспериментальная проверка точности метода Кармана-Козени для измерения удельной поверхности частиц / Ф. А. Евсеев, А. Э. Алиев, Е. В. Богданова // Новый университет. Серия: Технические науки. 2015. № 9–10 (43–44). С. 53–58.
29. Ren X. A Relation of Hydraulic Conductivity — Void Ratio for Soils Based on Kozeny- Carman Equation / X. Ren, Y. Zhao, Q. Deng, J. Kang, D. Li, D. Wang // Engineering Geology. 2016. Vol. 213. Pp. 89–97.
30. Губкин А. С., Игошин Д. Е., Трапезников Д. В. Численный расчет проницаемости в двумерной пористой среде со скелетом из случайно расположенных пересекающихся дисков // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 4. С. 54–68
31. Игошин Д. Е., Хромова Н. А. Гидравлическое сопротивление извилистых каналов // Вестник кибернетики. 2016. № 3 (23). С. 8–17.

## Приложение.

Аппроксимации площади поперечного сечения для углов  $\theta = 60, 75, 82.5^\circ$

