В.Е. Мосягин, Н.А. Швемлер
Тюменский государственный университет, г.Тюмень
УДК 519.213

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА МОМЕНТА ДОСТИЖЕНИЯ МАКСИМУМА ПРОЦЕССОМ ИБРАГИМОВА-ХАСЬМИНСКОГО

Аннотация. Найдено преобразование Лапласа для функции распределения момента достижения максимума процессом Ибрагимова-Хасьминского на отрицательной полуоси.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, пуассоновский процесс с линейным сносом, распределение функционалов от процесса Пуассона с линейным сносом.

Пусть $\nu_-(t)$ и $\nu_+(t)$ — независимые стандартные пуассоновские процессы определенные при $t \geqslant 0$ и доопределенные нулем на отрицательной оси. Назовем случайные процессы:

$$Y(t) = at - \nu_+(pt) + \nu_-(-qt), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

процессами Ибрагимова-Хасьминского, где константы $p > a > q > 0$ обеспечивают процессу (1) отрицательный средний снос. Впервые процессы (1) появились в статье [1] И. А. Ибрагимова, Р. З. Хасьминского в 1972г., как предельные (в некотором смысле) для процессов логарифмического отношения правдоподобия от нормированного аргумента в задачах об оценке неизвестной точки $x = x(\theta)$ разрыва плотности распределения $f(x, \theta)$ по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Процессы вида (1) также возникают при решении задач управления, в технической и медицинской диагностике, страховой математике [2], математической статистике [3–5].

Определим функцию распределения момента t^* достижения максимума процессом (1):

$$G(x) = \mathbf{P}\left(t^* < x\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t<x} Y(t) > \sup_{t \geqslant x} Y(t)\right). \tag{2}$$

Несмотря на то, что случайная величина t^* определена равенством (2) в неявном виде, в работе [6] найдены явные выражения для функции распределения (2) на положительной и отрицательной полуосях.

Основная цель работы – нахождение преобразования Лапласа величины t^*. Трудность этой задачи обусловлена сложным аналитическим видом функции распределения (2). Так, например, при $x \geqslant 0$ функция распределения $G(x)$ имеет вид:

$$G(x) = \frac{(p-a)q}{(p-q)a} + \beta \int\limits_0^{ax} e^{-pt/a} \sum_{k=0}^{[t]} \psi(t-k) \left(\frac{p}{a}\right)^k \left(\frac{t^k}{k!} - \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right) dt,$$

где $\psi(\cdot)$ – функция распределения определенная в [7]:

$$\psi(z) = (1 - q/a) \sum_{k=0}^{[z]} (-1)^k \left(\frac{q}{a}\right)^k \frac{(z-k)^k}{k!} e^{q(z-k)/a},$$

а константа $\beta > 0$ является единственным положительным корнем уравнения

$$\left(1 - e^{-\beta}\right)/\beta = a/p. \tag{3}$$

При $x \leqslant 0$, $G(x)$ имеет не менее сложный вид:

$$G(x) = \frac{(p-a)q}{(p-q)a} - \frac{(a-q)q}{a} \int\limits_x^0 \varphi^-(t,1)\,dt,$$

с подынтегральной функцией

$$\varphi^-(t,1) = 1 - e^{\beta(1-q/p)a|t|-\beta} + \sum_{k=0}^{[a|t|-1]} \pi_k(a,q) \left(e^{\beta(1-q/p)(a|t|-k-1)} - 1\right),$$

где

$$\pi_k = \pi_k(a,q) = \frac{(q(k+1)/a)^k \, e^{-q(k+1)/a}}{(k+1)!}. \tag{4}$$

В настоящей работе найдено преобразование Лапласа на отрицательной полуоси. Основной результат работы сформулирован в следующем утверждении.

Теорема. Преобразование Лапласа $\widehat{G}(s)$ соответствующее функции распределения $G(x)$ при $x \leqslant 0$ имеет вид:

$$\widehat{G}(s) = q\left(1 - \frac{q}{a}\right)\left(\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-\beta}}{s-b}\right) - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-b}\right)\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k e^{-s(k+1)}\right),$$

где $b = \beta(1 - q/p)$, константа β определена в (3), а π_k в (4).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З., Асимптотическое поведение статистических оценок для выборок с разрывной плотностью, Матем. сб. Т.87(129) № 4, 1972. С. 554-–586

[2] Ротарь В.И., Бенинг В.Е., Введение в математическую теорию страхования. Обозрение прикладной и промышленной математики. Т.1, вып. 5, 1994. С. 698–779

[3] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З., Ассимптотическая теория оценивания. Наука, Москва 1979.

[4] Мосягин В.Е., Асимптотическое представление для процесса отношения правдоподобия в случае разрывной плотности, Сибирский математический журнал. Т. 35, вып. 2, 1994. С. 416-–423

[5] Мосягин В.Е., Оценка скорости сходимости распределений нормированных оценок максимального правдоподобия в случае разрывной плотности, Сибирский математический журнал. Т. 37, вып. 4, 1996. С. 895—903

[6] Мосягин В.Е., Швемлер Н.А. Распределение момента максимума разности двух пуассоновских процессов с отрицательным линейным сносом, Сибирские электронные математические известия. Т. 13, 2016. С. 1229–1248.

[7] Скороход А.В, Случайные процессы с независимыми приращениями, Наука, Москва, 1964.