Д.К.Мухамедиева
Центр разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий, г.Ташкент
УДК 519.71(575.1)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПОПУЛЯЦИИ ТИПА КОЛМОГОРОВА-ФИШЕРА

Аннотация. Рассматриваются популяционные модели двух конкурирующих популяций с двойной нелинейной диффузией и с переменной плотностью, которые описываются нелинейной системой конкурирующих особей. Выявлены новые свойства, такие как конечная скорость распространения, локализация вспышек в определенном ареале.

Ключевые слова: Нелинейные задачи, биологическая популяция, диффузия, локализация, переменная плотность.

1. Введение

Популяционные модели изучаются давно [1-8]. Первая такая работа была выполнена, Фишером, Гаузе, а математическое обоснование было выполнено Колмогоровым, Петровским (КПП) и Пискуновым (1937) в известной работе (см.[8] и литературу там). Их интересовала поведение скорости волновых решений и получена оценка скорости распространение волны. Затем появились другие модели популяции. В последние годы интенсивно стали изучаться нелинейные модели с учетом диффузии и выявлены новые свойства конечной скорости распространения диффузионных волн (см. [3] и приведенную там литературу). Нами предложены популяционные модели двух конкурирующих популяций с двойной нелинейной диффузией и с переменной плотностью, которые описываются нелинейной системой конкурирующих особей [9-14]. Выявлены новые свойства, такие как конечная скорость распространения, локализация вспышек в определенном ареале. В частности, в критическом случае получена оценка скорости типа КПП обобщаюший их результат.

2. Постановка задачи. В данной работе исследуется свойства решений задачи биологической популяции типа Фишера-Колмогорова в случае переменной плотности. Основным методом исследования является автомодельный подход. Рассмотрим в области Q={(t,x): 0< t < ∞, x∈R} параболическую систему двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\rho(x)u_1)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 |x|^n u_2^{m_1-1} \left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \rho(x) k_1 u_1 \left(1 - u_1^{\beta_1}\right), \\ \dfrac{\partial(\rho(x)u_2)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 |x|^n u_1^{m_2-1} \left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \rho(x) k_2 u_2 \left(1 - u_2^{\beta_2}\right), \end{cases} \quad (1)$$

$$u_1\big|_{t=0} = u_{10}(x), \quad u_2\big|_{t=0} = u_{20}(x), \quad (2)$$

которое описывает процесс биологической популяции типа Колмогорова-Фишера в нелинейной двухкомпонентной среде, коэффициенты взаимной диффузии которых соответственно равны $D_1 |x|^n u_2^{m_1-1} \left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}, D_2 |x|^n u_1^{m_2-1} \left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}$. Числовые параметры $m_1, m_2, n, p, \beta_1, \beta_2, D_1, D_2$ - положительные вещественные числа, $\beta_1, \beta_2 \geq 1$, $\rho(x) = |x|^{-l}$, $l > 0$; $u_1 = u_1(t,x) \geq 0$, $u_2 = u_2(t,x) \geq 0$ - искомые решения.

Будем изучать свойства решений задачи (1), (2) на основе автомодельного анализа решений системы уравнений построенного методом нелинейного расщепления и эталонных уравнений и приведением системы (1) к радиально симметрическому виду.

Тогда относительно $f_i(\xi)$ получим систему автомодельных уравнений

$$\begin{cases} \xi^{1-s} \dfrac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1} f_2^{m_1-1} \left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2} \dfrac{df_1}{d\xi}\right) + \dfrac{\xi}{p} \dfrac{df_1}{d\xi} + \mu_1 f_1 (1 - f_1^{\beta_1}) = 0, \\ \xi^{1-s} \dfrac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1} f_1^{m_2-1} \left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2} \dfrac{df_2}{d\xi}\right) + \dfrac{\xi}{p} \dfrac{df_2}{d\xi} + \mu_2 f_2 (1 - f_2^{\beta_2}) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

где $\mu_1 = \dfrac{1}{(1 - [\gamma_1 (p-2) + \gamma_2 (m_1 - 1)])}$ и $\mu_2 = \dfrac{1}{(1 - [\gamma_2 (p-2) + \gamma_1 (m_2 - 1)])}$.

Система (4) имеет приближенное решение вида

$$\overline{f_1} = A(a - \xi^{\gamma})^{n_1}, \ \gamma = p/(p-1), \ \overline{f_2} = B(a - \xi^{\gamma})^{n_2},$$

где *A и B* постоянные и

$$n_1 = \frac{(p-1)(p-(m_1+1))}{(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}, \ n_2 = \frac{(p-1)(p-(m_2+1))}{(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}.$$

В данной работе на основе выше изложенной методики исследованы качественные свойства решений системы (1), на его основе решена проблема выбора начального приближения для итерационного, приводящий к быстрой сходимости к решению задачи Коши (1), (2), в зависимости от значения числовых параметров и начальных данных. Для этой цели как начальное приближение использовались найденные нами асимптотические представление решения. Это позволило, выполнить численный эксперимент и визуализацию процесса, описываумый сиситемой (1), в зависимости от значений, входящих в систему числовых параметров.

3. Построение верхнего решения

Займемся построением верхнего решения для системы (4)

Тогда в области Q согласно принципу сравнения решений имеем

Теорема 1. Пусть $u_i(0,x) \le u_{i\pm}(0,x),\ x \in R.$ Тогда для решение задачи (1) в области Q имеет место оценка

$$\begin{aligned} u_1(t,x) &\le u_{1+}(t,x) = e^{k_1 t}\tau^{-\alpha_1}\overline{f}_1(\xi), \\ u_2(t,x) &\le u_{2+}(t,x) = e^{k_2 t}\tau^{-\alpha_2}\overline{f}_2(\xi), \end{aligned} \qquad \xi = \varphi(|x|)/[\tau(t)]^{1/p}$$

где $\overline{f}_1(\xi),\ \overline{f}_2(\xi)\ и\ \tau(t)$ -определенные выше функции.

Заметим что решение системы (1) при $\beta_i = \frac{(p-2)^2-(m_1-1)(m_2-1)}{(p-1)(p-(m_i+1))}$ имеет следующее представление при

$$a = \left(P_1\gamma / B(\frac{1}{\gamma}, 1+n_1)\right)^{\frac{\gamma}{n_1}} = \left(P_2\gamma / B(\frac{1}{\gamma}, 1+n_2)\right)^{\frac{\gamma}{n_2}}.$$

где B(a, б)- Бета функция Эйлера.

Доказано что это представление являеться асимптотикой автомодельных решений систем (1).

$$\begin{cases} \tau^{-\frac{1}{\mu_1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (a-\xi_1^{\gamma})_+^{n_1} dx = P_1 \\ \tau^{-\frac{1}{\mu_2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (a-\xi_2^{\gamma})_+^{n_2} dx = P_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau^{-\frac{1}{\mu_1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (a-\xi_1^{\gamma})_+^{n_1} dx = a^{\frac{n_1}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^1 \eta^{\frac{1}{\gamma}-1} (1-\eta)^{n_1} d\eta = a^{\frac{n_1}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} B(\frac{1}{\gamma}, 1+n_1) = P_1 \\ \tau^{-\frac{1}{\mu_2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (a-\xi_2^{\gamma})_+^{n_2} dx = a^{\frac{n_2}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^1 \eta^{\frac{1}{\gamma}-1} (1-\eta)^{n_2} d\eta = a^{\frac{n_2}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} B(\frac{1}{\gamma}, 1+n_2) = P_2 \end{cases}$$

Отсюда

$$a = [P_1\gamma / B(\frac{1}{\gamma}, 1+n_1)]^{\frac{\gamma}{n_1}} = [P_2\gamma / B(\frac{1}{\gamma}, 1+n_2)]^{\frac{\gamma}{n_2}}$$

4. Медленная диффузия

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0, n > 0$ (медленная диффузия). Применяя метод [1] для решения уравнения (11) получим следующие функции

$$\overline{\theta}_1(\xi) = (a-\xi)_+^{n_1}, \ \overline{\theta}_2(\xi) = (a-\xi\ )_+^{n_2},$$

где $a > 0$, $(y)_+ = \max(y, 0)$, $\xi < a$. Известно [1, 2], что для глобального существования решения задачи (1) функция $f(\xi)$ должна удовлетворят следующее неравенству:

$$\xi^{1-s} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1-} \overline{f}_2^{m_1-1} \left| \frac{d\overline{f}_1}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\overline{f}_1}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{d\overline{f}_1}{d\xi} + \mu_1 f_1 (1-f_1^{\beta_1}) \le 0,$$

$$\xi^{1-s} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1} \overline{f}_1^{m_1-1} \left| \frac{d\overline{f}_2}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\overline{f}_2}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{d\overline{f}_2}{d\xi} + \mu_1 f_1 (1-f_1^{\beta_1}) \le 0,$$

$$\xi \in (0, \infty).$$

а

$$\beta_1 = 1/n_2, \ \beta_2 = 1/n_1.$$

Возьмем функции $\overline{\theta}_1(\xi), \overline{\theta}_2(\xi)$, и покажем, что они будут асимптотикой финитных решений системы (4).

Теорема 2. Финитное решение системы (4) при $\xi \to a_-$ имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \vartheta_i(\xi)$.

Доказательство. Будем искать решение уравнения (4) в следующем виде

$$f_i = \bar{\vartheta}_i(\xi)\, y_i(\eta),\ \mathrm{i} = 1,2, \tag{5}$$

где $\eta = -\ln(a-\xi)$, причем $\eta \to +\infty$ при $\xi \to a_-$, что позволяет исследовать асимптотическую устойчивость решения задачи (4) при $\eta \to +\infty$. Подставляя (13) в (11) для $y_i(\eta)$ получим следующее уравнение

$$\frac{d}{d\eta}\left(y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i\right|^{p-2}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i\right)\right)+\left(\frac{s}{\gamma}\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}-n_i\right)\left(y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i\right|^{p-2}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i\right)\right)+ \tag{6}$$

$$+\frac{\xi}{p}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i\right)-\mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_{3-i}\beta_i\eta}y_{3-i}{}^{\beta_i})=0$$

где η определенная выше функция.

Отметим, что изучение решение последнего уравнения является равносильно изучение тех решение уравнения (4), каждое из которых в некотором промежутке $[\eta_0,+\infty)$ удовлетворяет неравенству:

$$y_i(\eta)>0,\ \frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i \neq 0\,.$$

Покажем, прежде всего, что решения $y_i(\eta)$ уравнения (5) имеют конечный предел y_{0i} при $\eta \to +\infty$. Введем обозначения

$$\omega_i(\eta)=y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i\right|^{p-2}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i\right).$$

Тогда для уравнения (6) имеем вид

$$\omega_i' = -\left(\frac{s}{\gamma}\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}-n_i\right)\omega_i-\frac{\xi}{p}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i\right)- \,.$$
$$\mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta}y_{3-i}{}^{\beta_i})$$

Для анализа последнего выражения введем новую вспомготельную функцию

$$\phi(\tau,\eta)=-\left(\frac{s}{\gamma}\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}-n_i\right)\tau-\frac{\xi}{p}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_i y_i\right)-,$$
$$\mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta}y_{3-i}{}^{\beta_i})$$

где τ - вещественное число. Отсюда нетрудно видеть, что при каждом значении τ функция $\phi(\tau,\eta)$ сохраняет знак на некотором промежутке

$[\eta_1,+\infty)\subset[\eta_0,+\infty)$ и при всех $\eta\in[\eta_1,+\infty)$ выполняется одно из неравенств

$$\omega_i'(\eta)>0,\ \omega_i'(\eta)<0.$$

И поэтому для функции $\omega_i(\eta)$ существует предел при $\eta\in[\eta_1,+\infty)$. Из выражения для $\omega_i(\eta)$ следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\omega_i'(\eta)=$$

$$=\lim_{\eta\to+\infty}\left\{-\left(\frac{s}{\gamma}\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}-n_i\right)\omega_i-\frac{\xi}{p}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i\right)-\mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta}y_{3-i}{}^{\beta_{3-i}})\right\}=0$$

Отсюда, учитывая, что

$$\xi\to a\ \lim_{\eta\to+\infty}e^{-\eta}\to 0,\ \lim_{\eta\to+\infty}a-e^{-\eta}\to a,\ \ \omega_i'=0$$

получим следующего алгебраического уравнения

$$n_1^{p-1}y_2^{m_1-1}|y_1|^{p-1}=\frac{1}{p\gamma^{p-1}}$$

$$n_2^{p-1}y_1^{m_2-1}|y_2|^{p-1}=\frac{1}{p\gamma^{p-1}}$$

Решение последней системы дает $y_i=1$ и в силу (6) $f_i(\xi)\sim\bar{\vartheta}_i(\xi)$.

Теорема 2 доказана.

5. Быстрая диффузия

Случай $n_1>0, n_2>0,\ n<0$ (быстрая диффузия). Для (4) имеем

$$\chi_1(\xi)=(a+\xi\ )^{n_1},\ \chi_2(\xi)=(a+\xi\ )^{n_2},$$

где $a>0$.

Теорема 3. При $\xi\to+\infty$ исчезающие на бесконечности решение задачи (11) имеет асимптотику $f_i(\xi)\sim\chi_i(\xi),\quad i=1,2$.

Доказательство. При доказательстве теоремы используется преобразование

$$f_i=\chi_i(\xi)y(\eta),\quad i=1,2, \tag{7}$$

где $\eta=\ln(a+\xi)$, которое приводит (11) к следующему виду

Подставляя (7) в (4) для $y_i(\eta)$ получим следующее уравнение

$$\frac{d}{d\eta}\left(y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i\right|^{p-2}(\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i)\right)+\left(\frac{s}{\gamma}\frac{e^{\eta}}{a+e^{\eta}}+n_i\right)\left(y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i\right|^{p-2}(\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i)\right)+$$

$$+\frac{\xi}{p}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+n_iy_i\right)-\mu_i\frac{e^{\eta}}{a+e^{\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta}{y_{3-i}}^{\beta_i})=0, \tag{8}$$

где η определенная выше функция.

Отметим, что изучение решение последнего уравнения является равносильно изучение тех решение уравнения (4), каждое из которых в некотором промежутке $[\eta_0,+\infty)$ удовлетворяет неравенству:

$$y_i(\eta)>0,\ \frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i\neq 0.$$

Покажем, прежде всего, что решения $y_i(\eta)$ уравнения (8) имеют конечный предел y_{0i} при $\eta\to+\infty$. Введем обозначения $\omega_i(\eta)=y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i\right|^{p-2}(\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i)$.

Тогда для уравнения (7) имеем вид

$$\omega_i'=-\left(\frac{s}{\gamma}\frac{e^{\eta}}{a+e^{\eta}}+n_i\right)\omega_i-\frac{\xi}{p}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+n_iy_i\right)-\mu_i\frac{e^{\eta}}{a+e^{\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta}{y_{3-i}}^{\beta_{3-i}}).$$

Для анализа последнего выражения введем новую вспомготельную функцию

$$\phi(\tau,\eta)=-\left(\frac{e^{\eta}}{a+e^{\eta}}+n_{3-i}\right)\tau-c\left(\frac{dy_i}{d\eta}+n_iy_i\right)-$$
$$\mu_i\frac{e^{\eta}}{a+e^{\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_{3-i}\beta_{3-i}\eta}{y_{3-i}}^{\beta_{3-i}}),$$

где τ - вещественное число. Отсюда нетрудно видеть, что при каждом значении τ функция $\phi(\tau,\eta)$ сохраняет знак на некотором промежутке $[\eta_1,+\infty)\subset[\eta_0,+\infty)$ и при всех $\eta\in[\eta_1,+\infty)$ выполняется одно из неравенств

$$\omega_i'(\eta)>0,\ \omega_i'(\eta)<0.$$

И поэтому для функции $\omega_i(\eta)$ существует предел при $\eta\in[\eta_1,+\infty)$. Из выражения для $\omega_i(\eta)$ следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\omega_i'(\eta)=\lim_{\eta\to+\infty}\left\{-\left(\frac{s}{\gamma}\frac{e^{\eta}}{a-e^{\eta}}-n_i\right)\omega_i-\frac{\xi}{p}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i\right)-\mu_i\frac{e^{\eta}}{a-e^{\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta}{y_{3-i}}^{\beta_i})\right\}=0.$$

Отсюда, при $\xi \to \infty, \beta_i > 1,\ i = 1,2$ получим следующего алгебраического уравнения

$$\left(-n_1\right)^{p-1} y_2^{m_1-1} y_1^{p-1} = \frac{1}{p\gamma^{p-1}},$$
$$\left(-n_2\right)^{p-1} y_1^{m_2-1} y_2^{p-1} = \frac{1}{p\gamma^{p-1}}.$$

Вычисление последнего уравнения дает $y_i = 1$ и в силу (7) $f(\xi) \sim \chi_i(\xi)$.

Теорема 3 доказана.

Заключение

Таким образом, предложенная нелинейная математическая модель биологической популяции с двойной нелинейностью и с переменной плотностью правильно отражает изучаемый процесс. а численное исследование нелинейных процессов, описываемых уравнениями с двойной нелинейностью и проведение анализа результатов на основе полученных оценок решений даёт исчерпывающую картину процесса в двухкомпонентных конкурирующих системах биологической популяции с сохранением свойств локализации в конечном ареале и размер вспышки. Даёт возможность оценить скорость распространения диффузионных волн.

Литература

1. Арипов М. Метод эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач Ташкент, Фан, 1988, 137 с.
2. Белотелов Н.В., Лобанов А.И.Популяционные модели с нелинейной диффузией. // Математическое моделирование. –М.; 1997, №12, стр. 43-56.
3. В. Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование -М.: Наука, 1976, 288 с.
4. Гаузе Г.Ф. О процессах уничтожения одного вида другим в популяциях инфузорий // Зоологический журнал,1934, т.13, №1.
5. Aripov M., Muhammadiev J. Asymptotic behaviour of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type. Buletin Stiintific-Universitatea din Pitesti, Seria Matematica si Informatica. N 3. 1999. pg. 19-40

6. Aripov M.M. Muhamediyeva D.K. To the numerical modeling of self-similar solutions of reaction-diffusion system of the one task of biological population of Kolmogorov-Fisher type. International Journal of Engineering and Technology. Vol-02, Iss-11, Nov-2013. 2013.

7. Арипов М.М. Мухамедиева Д.К. Подходы к решению одной задачи биологической популяции. Вопросы вычислительной и прикладной математики. -Ташкент. 2013. Вып.129. -С.22-31.

8. Мари Дж. Нелинейные диффузионн уравнения в биологии. М., Мир,1983, 397 стр.

9. Мухамедиева Д.К. Двумерная задача реакции с диффузией типа Колмогорова-Фишера с нелокальным взаимодействием // Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные исследования гуманитарных, естественных , точных и общественных наук. -Новосибирск. -2013. –С.147-150.

10. Арипов М.М., Мухамедиева Д.К. Кросс-диффузионные модели конвективного переноса с двойной нелинейностью. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент. 2015. №1(1). -С. 5-9.

11. Арипов М.М., Мухамедиева Д.К. Численное моделирование одной задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера с конвективным переносом // Естественные и технические науки. №3. -Москва. 2013. -С.299-302.

12. Арипов М.М., Мухамедиева Д.К. Численное моделирование популяционной динамики с нелокальным взаимодействием в двумерном случае // Технические науки - от теории к практике. -НП "СибАК" (Новосибирск). 2013. №25. -С. 21-26.

13. Aripov M.M., Mukhamediyeva D.K. Splitting algorithm in Kolmogorov-Fisher type reaction-diffusion task // International Journal of Mathematics and Computer Applications Research, Vol.3, № 4, 2013, p. 1-8.

14. Aripov M.M., Mukhamediyeva D.K. To the numerical modeling of self-similar solutions of reaction-diffusion system of the one task of biological population of Kolmogorov-Fisher type // International Journal of Research in Engineering and Technology, Vol.2, №11, 2013, p.281-286.