

**Снежинский физико-технический институт –  
филиал федерального государственного автономного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
(СФТИ НИЯУ МИФИ)**

на правах рукописи

**КРУТОВА ИРИНА ЮРЬЕВНА**

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕЧЕНИЙ ГАЗА  
В ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ**

Специальность 05.13.18. — математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
д. ф.-м. н., профессор Баутин С. П.

Снежинск — 2018

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>Глава I. ОПИСАНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ</b> .....	14
§ 1. Схема Баутина С.П. возникновения и функционирования природных восходящих закрученных потоков.....	14
§ 2. Разработанность направления исследований.....	24
§ 3. Математическая модель.....	36
<b>Глава II. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПИРАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА</b> .....	55
§ 4. Трехмерная нестационарная задача о плавном радиальном стоке.....	55
§ 5. Трехмерная задача о заданном радиальном притоке в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости .....	69
§ 6. Построение решений задачи о притоке в виде бесконечного ряда по степеням $z$ .....	78
§ 7. Влияние вращения Земли на исследуемые потоки.....	98
§ 8. Задача о трехмерном нестационарном движении газа возле нагревающегося цилиндра.....	107
<b>Глава III. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРИДОННЫХ ЧАСТЯХ ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ</b> .....	128
§ 9. Расчет кинетической энергии трехмерного стационарного потока.....	128
§ 10. Расчеты течений для различных классов торнадо.....	136
§ 11. Расчеты течений для тропического циклона.....	161
§ 12. Таблицы геометрических, скоростных и энергетических	

характеристик придонных частей восходящих закрученных потоков.....	176
§ 13. Возможность предсказания, обнаружения и уничтожения торнадо.....	184
§ 14. Описание численных методик.....	188
§ 15. Описание программного комплекса.....	191
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>194</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>195</b>
<b>СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ КРУТОВОЙ И.Ю.....</b>	<b>222</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена разработке теоретических положений, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное научное достижение.

Благодаря доказанным в работе теоремам и проведенным расчетам впервые для восходящих закрученных потоков, встречающихся в природе в виде торнадо, тропических циклонов и огненных вихрей, даны научно обоснованные ответы на вопросы о причинах возникновения и направлениях закрутки в рассматриваемых потоках, имеющих спиральный характер, а также о значениях газодинамических параметров исследуемых течений и, главное, об источнике энергии для их продолжительного функционирования.

В основу теоретического исследования положена предложенная Баутиным С.П. [1] и в последующем развитая [2–97, 206–215] схема возникновения и устойчивого функционирования разрушительных атмосферных вихрей.

Исследование поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 08-01-00052, 11-01-00198) и Министерством образования и науки РФ (проект 1.8490.2013.3023).

### **Актуальность темы исследования**

В природе довольно часто встречается интересное явление – восходящий закрученный поток воздуха. В качестве примеров таких потоков можно привести многочисленные смерчи и торнадо, регулярно наблюдаемые на юге США и в других достаточно теплых и ровных местностях. К подобным явлениям относятся и периодически возникающие тропические циклоны, а также огненные вихри, часто наблюдаемые в сезон сельскохозяйственных палов. В книгах Наливкина Д. В. [115, 116], Вараксина А. Ю. и других [108] приведены многочисленные примеры реальных торнадо и тропических циклонов, наблюдаемых на протяжении большого промежутка времени и приносящих многочисленные разрушения и человеческие жертвы.

Актуальность исследования обусловлена тем, что изучение восходящих закрученных потоков не только позволяет раскрыть механизм возникновения

и функционирования этих потоков, а также приводит:

- 1) к прогнозу возникновения торнадо и циклонов;
- 2) к рекомендациям по способам уничтожения подобных природных потоков;
- 3) к рекомендациям по практическому использованию энергии природных восходящих закрученных потоков.

### **Степень разработанности темы исследования**

Несмотря на то, что много других исследователей на протяжении десятилетий активно занимаются проблемой природных восходящих закрученных потоков [115–176, 195, 216–231], к настоящему времени у них у всех отсутствует убедительная теория, объясняющая причины возникновения, функционирования и естественного исчезновения таких течений, подтвержденная как экспериментально, так и адекватным математическим моделированием. Заметим, что отсутствует достаточно обоснованное объяснение даже того, откуда берется энергия на начальную закрутку потока.

Математическое исследование течений газа в восходящих закрученных потоках ведется как с помощью достаточно простых моделей, например модели «вихревых нитей» [166], так и с привлечением очень сложных математических моделей, например турбулентных течений [175]. Однако, для представленных в работах предшественников математических решений заведомо не выполняются либо фундаментальные законы физики для сплошной среды – законы сохранения массы, импульса и энергии, либо законы термодинамики. Также в работах, объясняющих динамику природных восходящих закрученных потоков с помощью привлечения идеи о выделении большой энергии при конденсировании влажного воздуха, отсутствует надежное математическое моделирование перехода выделившейся тепловой энергии в кинетическую энергию вращающейся части потока (см., например, [117]). В диссертации приведен подробный библиографический обзор работ предшественников [115–176, 181–184, 196, 216–231, 235–239], включающий 88 источников.

В научной школе С.П. Баутина исследования восходящих закрученных потоков ведутся по трем направлениям: аналитическое, численное и экспери-

ментальное. Аналитическими исследованиями занимаются Баутин С.П., Дерябин С.Л., автор и их ученики. Расчеты, в том числе нестационарных трехмерных потоков, моделирующих течения в восходящих закрученных потоках, проводятся А.Г. Обуховым, автором и их учениками. В Екатеринбурге группой С.П. Баутина проводились эксперименты по созданию и исследованию восходящих закрученных потоков без принудительной закрутки потока в нужную сторону. В диссертации приведен библиографический обзор этих работ [1–97, 206–215], включающий 108 источников.

И как следствие всех указанных обстоятельств, в настоящее время не имеется реальных и воспроизводимых в натурных испытаниях рекомендаций по раннему обнаружению торнадо и по уничтожению природных восходящих закрученных потоков с разумными затратами энергии. Исключения составляют работы научной школы С. П. Баутина (см. в том числе работу автора [88]) и работы группы А. Ю. Вараксина [109–110].

### **Цели и задачи исследования.**

Целью диссертационного исследования являются аналитическое и численное моделирование течений идеального газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса с целью установления общих закономерностей и конкретных свойств течений в восходящих закрученных потоках.

Для достижения данной цели в диссертации сформулированы следующие задачи:

1. Постановка начально-краевых задач для системы уравнений газовой динамики (квазилинейной системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными) при учете действия сил тяжести и Кориолиса, соответствующих конфигурациям конкретных газовых течений.

2. Доказательство теорем о существовании и единственности решений рассматриваемых начально-краевых задач и аналитическое исследование свойств этих решений.

3. Численное построение приближенных решений системы уравнений газовой динамики, описывающих трехмерные течения идеального газа в услови-

ях действия сил тяжести и Кориолиса и анализ по результатам расчетов геометрических, скоростных и энергетических характеристик восходящих закрученных потоков.

4. Создание программного пакета, позволяющего определять газодинамические параметры трехмерных стационарных течений газа и проведение с его использованием массовых расчетов.

### **Объекты и методы исследования**

Объектом исследования являются трехмерные нестационарные и стационарные течения идеального газа, описываемые решениями системы уравнений газовой динамики при учете действия сил тяжести и Кориолиса.

Предметом исследования является установление закономерностей и свойств течений в восходящих закрученных потоках.

Для формализации и решения поставленных задач использовались современные методы аналитического и численного моделирования:

1. В процессе исследования используется адекватная математическая модель — система уравнений газовой динамики, являющаяся квазилинейной системой уравнений с частными производными.

2. Для этой модели ставятся конкретные начально-краевые задачи, для которых устанавливаются факты существования и единственности решения.

3. Приближенные решения этих задач строятся с использованием аналитических и численных методов при определении значений начальных коэффициентов сходящихся рядов.

4. Для построения этих коэффициентов, в частности, применяются известные эффективные вычислительные алгоритмы для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

### **Положения, выносимые на защиту**

На защиту выносятся результаты, соответствующие четырем пунктам паспорта специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам.

*Пункт 2: Развитие качественных и приближенных аналитических*

*методов исследования математических моделей.*

1. Для системы уравнений газовой динамики с учетом действия сил тяжести и Кориолиса обосновано существование и единственность решения конкретных характеристических задач Коши стандартного вида, моделирующих неоднородные течения со стоком, притоком и возле нагревающегося цилиндра.

*Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.*

2. Создан и оттестирован комплекс программ для проведения вычислительного эксперимента.

*Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.*

3. Для моделирования течений, имеющих место в восходящих закрученных потоках, аналитическими и численными методами исследованы свойства первых коэффициентов бесконечных сходящихся рядов и установлены факты возникновения закрутки и ее направления, разные в случае торнадо и огненного вихря, в исследуемых течениях газа.

4. Установлен факт отсутствия закрутки, если в исходной начально-краевой задаче не учитывается вращение Земли вокруг своей оси.

5. Численными методами приближенно построены трехмерные стационарные течения идеального газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости в условиях действия сил тяжести и Кориолиса и определены их геометрические, скоростные и энергетические характеристики.

6. Установлено, что с ростом интенсивности торнадо кинетическая энергия вращательной части потока принципиально растет и становится преобладающей в общем размере кинетической энергии потока.

7. Показано, что в восходящем закрученном потоке, моделирующем течение в торнадо минимальной интенсивности (при котором начинаются разру-



шения), кинетическая энергия вращательной части потока составляет половину от кинетической энергии всего потока.

*Пункт 6: Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента.*

8. На основе данных натуральных наблюдений за природными торнадо шести различных классов и за циклоном средней интенсивности с использованием конкретных вычислительных алгоритмов смоделированы течения газа в придонных частях всех перечисленных природных восходящих закрученных потоков. Основные газодинамические характеристики построенных течений совпадают с данными натуральных наблюдений.

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

### **Научная новизна результатов исследования**

Все полученные в диссертации научные результаты на момент опубликования являлись новыми.

Научная новизна результатов проведенных исследований по трем областям специальности 05.13.18 заключается в следующих положениях:

#### *Математическое моделирование:*

1. Постановка новых начально-краевых задач для системы уравнений газовой динамики, соответствующих газодинамическим конфигурациям рассматриваемых течений и доказательство теорем о существовании и единственности решения в классе аналитических функций. Доказательства трех новых теорем:
  - 1.1) о трехмерном нестационарном плавном радиальном стоке;
  - 1.2) о нестационарных трехмерных течениях в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости, возникающих при радиальном притоке;
  - 1.3) о трехмерном нестационарном движении газа возле вертикального нагревающегося цилиндра.

2. Установление новых свойств решений с использованием начальных отрезков сходящихся рядов:

2.1) возникновение закрутки потока и направление закрутки, разное в случае торнадо и огненного вихря;

2.2) отсутствие закрутки, если в исходной начально-краевой задаче константа  $\Omega$  положена равной нулю, то есть в случае, когда вращение Земли вокруг своей оси в рассматриваемой задаче не учитывается.

3. Впервые проведены численные расчеты газодинамических локальных и интегральных характеристик стационарных течений в придонных частях восходящих закрученных потоков, соответствующие данным натурных наблюдений за природными торнадо и тропическими циклонами.

4. На основе анализа численно полученных результатов по геометрическим, скоростным и энергетическим характеристикам течений впервые установлено:

4.1) с ростом интенсивности торнадо вклад кинетической энергии во вращательную часть потока от кинетической энергии вращения Земли вокруг своей оси принципиально растет;

4.2) в восходящем закрученном потоке, моделирующем течение в торнадо минимальной интенсивности (при котором начинаются разрушения), кинетическая энергия вращательной части потока составляет половину от кинетической энергии всего потока;

4.3) разрушительными торнадо могут быть при существенно меньшей скорости ветра на границе стока, чем это указано в шкале Фудзиты.

*Численные методы:*

5. На основе использования аналитических свойств решений и частичного разделения независимых переменных численное построение трехмерных стационарных течений сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Эти СОДУ решаются традиционными численными методами большого порядка точности.

*Комплексы программ:*

6. Разработанный в рамках настоящего исследования комплекс программ характеризуется тем, что он представляет собой взаимосвязанный набор модулей, объединённых общими исходными данными и общим интерфейсом взаимодействия. Все составляющие модули комплекса зарегистрированы в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (Роспатент).

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Теоретическая значимость полученных результатов состоит в следующем: впервые в модели движения сплошной среды математически строго обоснован факт возникновения закрутки газа в восходящих закрученных потоках и направление этой закрутки под действием силы Кориолиса в различных газодинамических конфигурациях. Теоретически обоснована причина постоянного притока внешней энергии для продолжительного и устойчивого функционирования восходящих закрученных потоков. Предложенный теоретический подход к математическому моделированию этих течений позволил численно рассчитать течения газа, согласующиеся с данными натурных наблюдений за торнадо и тропическими циклонами.

Практическая значимость полученных результатов состоит в следующем: предложена и реализована методика расчета течений газа в восходящих закрученных потоках. На основе полученных подробных расчетов геометрических, скоростных и энергетических характеристик высказаны рекомендации по прогнозированию возникновения торнадо. Дано теоретическое обоснование результатов соответствующих экспериментальных исследований группы А.Ю. Вараксина [98–114] и группы С.П. Баутина [54, 97].

### **Достоверность результатов исследований**

Достоверность результатов исследований обеспечивается использованием адекватной природным течениям математической модели — системы уравнений газовой динамики — и применением классических математических методов для построения решений и исследования их свойств:

1) установление фактов существования и единственности решений соответствующих начально-краевых задач;

2) представление решения в виде сходящихся рядов и использование начальных отрезков рядов для построения приближенных решений;

3) использование надежных и эффективных численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Достоверность результатов численного моделирования подтверждается успешным тестированием программного инструментария, а также удовлетворительными результатами сопоставления с расчетами других авторов [4, 6, 14-16, 23, 26, 28] и с результатами натурных наблюдений за природными торнадо и тропическим циклоном.

### **Апробация работы**

Результаты диссертационной работы обсуждались на более чем 40 ведущих международных и российских конференциях. Основные:

– Международная конференция «Забабахинские научные чтения», Снежинск, РФЯЦ – ВНИИТФ, 2010, 2012, 2014, 2017.

– Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», Новосибирск, 2010, 2015.

– Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», Новосибирск, 2011.

– Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Нижний Новгород, 2011; Казань, 2015.

– Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 2013, 2017.

– Международная конференция по методам аэрофизических исследований, Пермь, 2016; Новосибирск, 2018.

– International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter. Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, 2015, 2018.

– International Conference «Advanced Problems in Mechanics». St. Petersburg, Russia, 2016, 2017.

– Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных

сред», Москва, 2015, 2016, 2017.

– Всероссийская научно-практическая конференция «Зимняя школа по механике сплошных сред», Пермь, 2015, 2017.

– Всероссийская конференция с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва», Новосибирск, 2017.

### **Публикации по теме диссертации**

По теме диссертации соискателем лично и в соавторстве опубликовано более 70 печатных работ, в том числе 2 монографии, 2 препринта, 25 статей, из которых 15 из списка ВАК, 2 индексируются в базе данных Web of Science и Scopus.

## Глава I

### ОПИСАНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

#### § 1. Схема Баутина С. П. возникновения и функционирования природных восходящих закрученных потоков

Основная идея [1], определившая направление исследований, приведенных в данной монографии, заключается в следующем: должна в природе существовать внешняя сила, которая не дает диссипативным процессам (трению, теплопроводности и т. п.) и малым внешним возмущениям разрушить смерч, торнадо, тропический циклон и другие естественные восходящие закрученные потоки, т. е. для достаточно продолжительного существования разрушительного атмосферного вихря обязательно должен иметь место приток внешней энергии, причем в такие два конкретных элемента движения, как в разгон газа и в осевую закрутку газа.

Естественно, что на Земле ни сила гравитации, ни энергия Солнца не могут поддерживать закрутку газа. Единственное значительное движение, которое обладает вращательным моментом, постоянно присутствует и имеет большой запас энергии — собственное вращение планеты и сопутствующая ему сила Кориолиса.

По данным натурных наблюдений выдвинута основная гипотеза, на основе которой предложена конкретная структура разрушительного атмосферного вихря. Указаны источники внешней энергии, обеспечивающие как возникновение, так и продолжительное существование разрушительных атмосферных вихрей. В том числе указан переходный момент от начальной стадии возникновения и формирования природного восходящего закрученного потока ко второй — устойчивой и продолжительной стадии функционирования разрушительного атмосферного вихря.

#### **Структура разрушительного атмосферного вихря и источники внешней энергии на его возникновение и функционирование**

Многочисленные визуальные данные о природных восходящих закручен-

ных потоках позволили высказать гипотезу, что в средней по высоте части восходящего закрученного потока существует граница, отделяющая внешний покоящийся воздух от воздуха, движущегося в восходящем закрученном потоке. В газовой динамике такая граница называется контактной поверхностью и далее обозначается буквой  $\Gamma$ .

Эта гипотеза о наличии подобной границы в виде контактной поверхности и лежит в основе предложенной [1] схемы возникновения и функционирования разрушительного атмосферного вихря.

Из данной гипотезы следует, что воздух попадает в восходящий закрученный поток снизу и покидает его сверху. Поэтому восходящий закрученный поток имеет структуру, изображенную на рис. 4.1, где цифрами помечены следующие элементы:

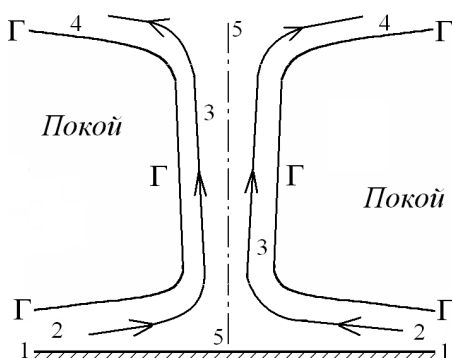


Рис. 1.1

1 — поверхность Земли; 2 — область, из которой снизу в восходящий закрученный поток поступает воздух и которая далее называется придонной частью восходящего закрученного потока; 3 — область восходящего потока, называемая вертикальной частью восходящего закрученного потока; 4 — верхний край восходящего закрученного потока, через который из восходящего закрученного потока выбрасывается воздух; 5 — ось симметрии восходящего закрученного потока.

На рис. 1.2, а стрелками показан восходящий поток, а теплая часть поверхности Земли выделена жирно. Как показывают наблюдения, зарождение тропических циклонов и торнадо на Земле происходит там, где имеется сильный прогрев поверхности и прилегающих воздушных масс.

Начальным движением при возникновении разрушительного атмосферного вихря является вертикальное движение вверх теплого воздуха, вызванное локальным прогревом солнечной энергией участков суши или водной поверхности и прилегающих к ним воздушных масс. На смену восходящим объемам воздуха поступают новые. Эти новые объемы воздуха приходят в область восходящего потока снизу (см. рис. 4.2, б). Так начинает образовываться придонная часть восходящего потока.

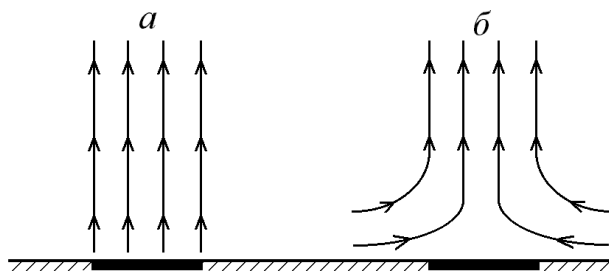


Рис. 1.2

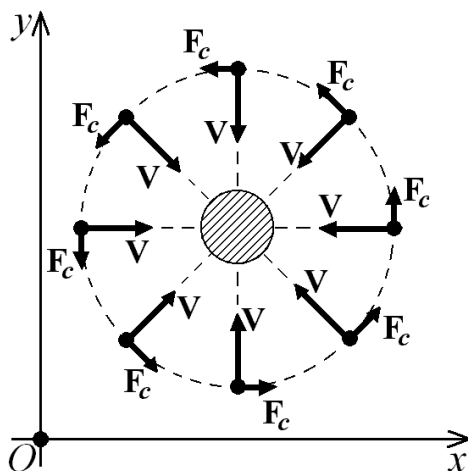


Рис. 1.3

Начальное придонное движение вдоль поверхности Земли имеет радиальный характер: от периферийных областей к основанию восходящего теплового потока со всех сторон. На рис. 1.3 начальное радиальное движение в плоскости  $xOy$  изображено векторами скорости  $V$  отдельных частиц газа, а заштрихованный круг обозначает область восходящего теплового потока.

Но сразу из-за горизонтального движения воздуха в формирующейся придонной части, благодаря действию силы Кориолиса, возникает также и окружное движение. Будем это называть закруткой газа. В Северном полушарии



закрутка газа идет в положительном направлении, т. е. против хода часовой стрелки, и в отрицательном направлении в Южном полушарии. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 4.3, на котором  $\mathbf{F}_c$  — векторы силы Кориолиса, действующие на материальные частицы, движутся со скоростями  $\mathbf{V}$  к общему центру. Под действием силы Кориолиса каждая частица в Северном полушарии отклоняется вправо от направления своего движения [177]. В результате этого в сплошной среде, движущейся к основанию восходящего потока, и возникает закрутка в соответствующем направлении.

Ниже в диссертации факт возникновения закрутки в придонной части и ее направление обоснованы с помощью доказательства теорем о существовании соответствующих решений системы уравнений газовой динамики при учете действия силы Кориолиса и следуют из строго установленных свойств этих решений. Начальная стадия формирования восходящего закрученного потока и его закрутка в соответствующем направлении подтверждены также экспериментами [54, 97, 98–114].

Если восходящий поток и, следовательно, движение воздуха к его основанию будут сохраняться долго, то вращение Земли через действие силы Кориолиса закрутит воздух в придонной части рассматриваемого потока до большой скорости, что и придаст такому потоку разрушительную силу.

Поступление энергии на такое самоподдерживающееся движение воздушных масс происходит следующим образом:

- 1) вращение Земли закручивает газ в придонной части;
- 2) закрутка газа передается в вертикальную часть (рис. 1.4);

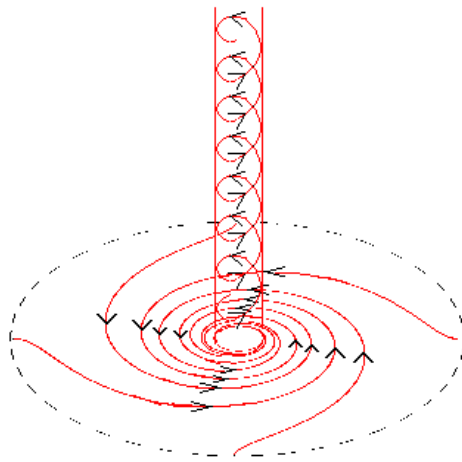


Рис. 1.4

3) центробежная сила создает в вертикальной части как бы «трубу с тягой» (рис. 1.5), т. е. создает пониженное давление в окрестности ее оси и создает эффект непроницаемых стенок, поскольку давление воздуха в вертикальной части восходящего закрученного потока на ее границе совпадает с давлением внешнего покоящегося воздуха;

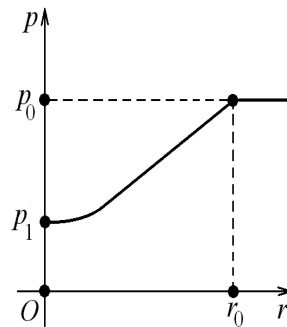


Рис. 1.5

4) снизу в «трубу с тягой», имеющей в центре пониженное давление (рис. 1.6), вдавливается под действием силы тяжести, внешней по отношению к восходящему закрученному потоку воздуха.

На рис. 1.6 буквой  $p$  обозначено давление; индексы 0 и 1 относятся соответственно к внешнему и внутреннему давлению; буквы  $h$ ,  $z$ ,  $H$  отмечают придонную, среднюю и верхнюю части восходящего закрученного потока соответственно, и при этом  $p_0(h) > p_1(h)$ .

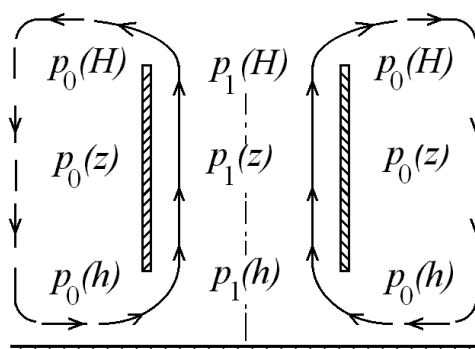


Рис. 1.6

Из приведенной схемы течения газа в восходящем закрученном потоке следует, что закрутка воздуха в придонной части восходящего закрученного потока имеет принципиальное значение для течения во всем восходящем закрученном потоке.

Отметим, что описанная схема согласуется со всеми наблюдаемыми газодинамическими эффектами у торнадо и тропических циклонов.

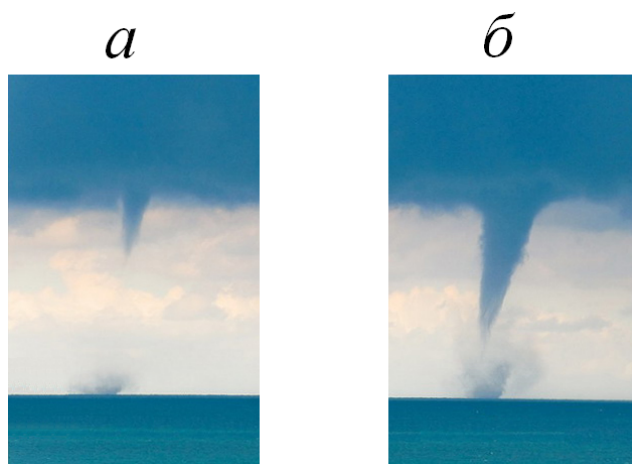
Еще раз подчеркнем, что в части возникновения восходящего закрученного потока и направления его закрутки предложенная в [1] схема также подтверждена экспериментами [54, 97, 98–114] и доказанными в диссертации теоремами.

### Об одном визуальном эффекте у торнадо

Процессу самоподдерживающегося устойчивого функционирования разрушительного атмосферного вихря предшествует одно принципиальное явление, наблюдающееся у торнадо и наверняка имеющее место при формировании всех природных восходящих закрученных потоков, существующих продолжительное время.

В самой верхней части восходящего потока — обычно почти на границе с облаком, в которое «упирается» восходящий поток, — возникает вращающаяся воронка. С течением времени она начинает расти вниз.

На рис. 1.7, приведены фотографии торнадо с такой возникающей (рис. 1.7, а) и начинающей расти вниз (рис. 1.7, б) воронкой.



*Рис. 1.7*

Видимые на обеих фотографиях (см. рис. 1.7) под воронками облака у горизонтальной подстилающей поверхности говорят о том, что здесь сформировалась уже вся вращающаяся вертикальная часть торнадо, хотя визуально она фиксируется пока не по всей своей высоте. Закрутка воздуха в торнадо выбрасывает из его нижней части попавшие туда примеси (пыль, влагу, предметы и т. п.), что и наблюдается как облака под воронками.



*Рис. 1.8*

На рис. 1.8 приведена фотография еще одного торнадо, у которого вертикальная часть еще закручена слабо и визуально фиксируется только благодаря сильной запыленности и боковой подсветке Солнцем. В верхней части торнадо под самым облаком уже начала формироваться опускающаяся вниз воронка.

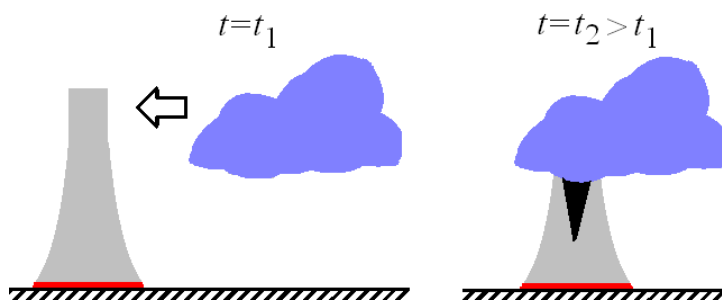


Рис. 1.9

В тот момент времени, когда воронка достигает поверхности Земли и вся вертикальная часть торнадо становится видимой, в нее начинает активно всасываться воздух. Именно в этот момент зарождается разрушительная сила смерчей и торнадо.

Дадим объяснение этому явлению на основе схемы возникновения восходящего потока и его перехода к устойчивому функционированию.

При этом обращаем внимание на тот факт, что возникновение опускающейся воронки наблюдается на краю облака, в которое упирается торнадо. Представляется, что это получается тогда, когда на восходящий закрученный поток надвигается облако. Схематично это изображено на рис. 1.9.

Пусть вертикальная часть восходящего закрученного потока пересекает облако, которое играет роль непроницаемой поверхности и вдоль которой растекается воздух, покидающий восходящий закрученный поток через его верхний край.

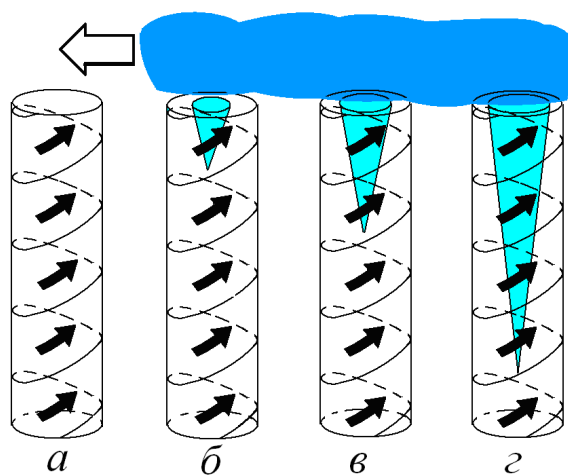


Рис. 1.10

Пусть также восходящий поток еще поддерживается за счет нагрева нижних объемов воздуха, но уже сформировалась придонная часть с большой закруткой. Эта закрутка в достаточных масштабах передается в вертикальную часть восходящего закрученного потока (см. рис. 1.10, *а*).

Спрашивается, в какой части восходящего потока в результате имеющейся закрутки газа начнет проявляться эффект «трубы с тягой, имеющей непроницаемые стенки»? Возможный ответ: скорее всего там, где в вертикальной части восходящего закрученного потока меньше всего значение  $h_s$  — шага винтового движения газа.

А значение  $h_s$  меньше всего там, где меньше всего  $w$  — вертикальная составляющая скорости газа, т. е. в самой верхней части восходящего закрученного потока, где восходящий поток тормозится больше всего: во-первых, в результате действия силы земного притяжения на частицы газа, прошедшие всю вертикальную часть восходящего закрученного потока, т. е. поднявшиеся выше всех. А во-вторых, именно здесь восходящий поток тормозится об облако, расположенное в верхней части восходящего закрученного потока.

К тому же в самой верхней части восходящего потока наименьшее значение по всей вертикальной части имеет  $p_0(z)$  — давление внешнего воздуха, что также способствует формированию «непроницаемых стенок», благодаря имеющейся закрутке в вертикальной части восходящего закрученного потока.

Итак, первое возникновение «трубы с тягой, имеющей непроницаемые стенки», происходит в самой высокой точке вертикальной части потока, несколько ниже края облака. Сопровождается оно одновременным понижением давления возле оси восходящего потока. Оба эти действия воспринимаются наблюдателем как возникновение под облаком в восходящем потоке вращающейся воронки (см. рис 1.10, *б*).

Благодаря приходу снизу новых объемов воздуха, имеющих еще большую закрутку, «непроницаемые стенки» начинают прирастать и, следовательно, увеличивать свои вертикальные размеры за счет удлинения нижней части. Визуально это воспринимается как движение воздуха в воронке вниз, а на самом

деле это просто добавление снизу новых участков «непроницаемых стенок». Такой рост вниз «непроницаемых стенок», естественно, сопровождается образованием на том же уровне (движущемся вниз) области пониженного давления в окрестности оси потока.

Вся эта динамика воспринимается как удлинение вниз вращающейся воронки (см. рис 1.10, *в, г*).

Наконец наступает момент, когда прирастающие снизу (за счет прихода новых объемов воздуха со все бóльшей закруткой) «непроницаемые стенки» достигают придонной части восходящего закрученного потока, т. е. вращающаяся воронка почти касается поверхности Земли.

Именно тогда область пониженного давления достигает придонной части и за счет большого перепада давления (разность  $[p_0(h) - p_1(h)]$  резко увеличивается) происходит активное поступление воздуха из придонной части в вертикальную. И именно тогда полностью проявляется эффект «трубы с тягой» и начинается разрушительное действие опустившейся вращающейся воронки.

Таким образом, образование вверху восходящего потока вращающейся воронки и ее последующее опускание вниз как раз и являются достаточно быстро протекающей стадией перехода от начального функционирования восходящего закрученного потока за счет тепловой энергии к функционированию этого потока за счет энергии вращения Земли, вкладываемой в закрутку придонной части через действие силы Кориолиса.

Представляется, что подобный переход от одной к другой стадии функционирования восходящего закрученного потока и близкие газодинамические процессы формирования «глаза циклона» имеют место и у восходящих закрученных потоков, линейные размеры которых больше, чем у типичных торнадо. И возникновение в верхней части таких потоков области пониженного давления связано не с наличием облака на пути восходящего закрученного потока, как это изображено на рис. 1.9, 1.10, а связано это с тем, что верхняя, уже достаточно закрученная часть восходящего потока просто достигла высот, где малы давление и температура воздуха, окружающего восходящий поток.

## § 2. Разработанность направления исследований

Несмотря на то, что большое число исследователей на протяжении десятилетий активно занимается проблемой разрушительных атмосферных вихрей [115–176, 195, 216–231], к настоящему времени отсутствует (кроме предложенной в [1]) достаточно убедительная теория, объясняющая причины возникновения, функционирования и естественного исчезновения таких течений и подтвержденная как экспериментально, так и адекватным математическим моделированием.

В указанных работах предшественников отсутствует обоснованный ответ на самый главный вопрос: откуда и в какой элемент течения идет постоянное внешнее вложение энергии, обеспечивающее продолжительное существование разрушительных атмосферных вихрей?

Математическая теорема (на которую достаточно часто ссылаются некоторые исследователи) о неисчезновении вихря в потоке справедлива лишь для идеальной жидкости и идеального газа. В реальных же течениях (например, для вращающейся воды в стакане или для вихревого следа за кораблем или самолетом) закрученные движения жидкости или газа исчезают с течением времени, если нет постоянного внешнего вложения энергии в них. Причем они исчезают за обозримое время. И поэтому реальные разрушительные атмосферные вихри не могут существовать без постоянного внешнего вложения энергии.

Заметим, что также отсутствует достаточно обоснованное объяснение даже того, откуда берется энергия на начальную закрутку потока.

Математическое исследование течений газа в восходящих закрученных потоках ведется как с помощью достаточно простых моделей, например, модели «вихревых нитей» [166], так и с привлечением очень сложных математических моделей, например, турбулентных течений [175]. Однако для представленных в работах предшественников математических решений заведомо не выполняются либо фундаментальные законы физики для сплошной среды — законы сохранения массы, импульса и энергии, либо законы термодинамики.



В качестве конкретного примера неправильного использования математических моделей, адекватно описывающих течения газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, далее приводится небольшой разбор работы [231].

В аннотации этой статьи сказано следующее.

«Рассмотрена система уравнений, описывающая движение воздуха внутри тропических циклонов, включая следствия конденсации водяного пара. Исследована система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на траектории ветра на плоскости радиальных и вертикальных переменных. Доказана однозначная разрешимость системы дифференциальных уравнений на удобном для моделирования тропических циклонов отрезке».

В пункте «1. Введение» и в начале следующего пункта «2. Система уравнений с частными производными» присутствует следующий текст.

«Хорошо известно, что главной причиной образования и развития тропических циклонов (ТЦ) является конденсация водяного пара, которая посредством скрытой теплоты нагревает воздух и вызывает его восходящее движение. Многие исследования посвящены моделированию ТЦ, основывающемуся на описании этого процесса. К сожалению, модель, описывающая в совершенстве внутреннюю структуру ТЦ с механическими и термодинамическими процессами, еще не построена. В данной работе предлагается система уравнений, описывающая движение воздуха внутри ТЦ, включая следствие конденсации водяного пара. В предположении осевой симметрии и отсутствия вязкости и теплопроводности записываются уравнения для радиальной, касательной и вертикальной компонент скорости ветра, температуры и плотности воздуха, в которых независимыми переменными служат расстояние  $r$  от центра ТЦ и высота  $z$ . Если считать радиальную и вертикальную компоненты компонентами скорости переноса на плоскости  $(r, z)$ , то можно рассмотреть систему уравнений переноса. Во второй части статьи будет рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений на траектории и доказана теорема о существовании и единственности решения на достаточно длинном отрезке, что позволит использовать решение для изучения явлений в тропо-

сфере как ТЦ.

## 2. Система уравнений с частными производными

Пусть  $(r, \vartheta, z)$  – цилиндрические координаты. Обозначаем через  $v_r$ ,  $v_\vartheta$  и  $v_z$  радиальную, касательную и вертикальную компоненты скорости, а через  $\rho$  и  $T$  – плотность и температуру. В предположении осевой симметрии и отсутствии вязкости и теплопроводности нетрудно вывести из основных уравнений гидродинамики (см. [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика/ Курс Теоретическая физика. Т. 6.– М.: Наука, 1986.) систему уравнений с частными производными для движения воздуха в ТЦ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -H_{tr}, \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} v_\vartheta^2 + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial(\rho T)}{\partial r} + \ell_0 \rho v_\vartheta - \varepsilon_1(z) v_r, \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\vartheta v_r + v_z \frac{\partial v_\vartheta}{\partial z} \right) = -\ell_0 \rho v_r - \varepsilon_1(z) v_\vartheta, \quad (2.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial(\rho T)}{\partial z} - g(\rho + \Sigma), \quad (2.4)$$

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -R_1 \rho T \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + L_{tr} H_{tr}, \quad (2.5)$$

где  $R_1$  – газовая постоянная,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $\ell_0 = 2|\omega| \sin \varphi_0$ ,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $\varphi_0$  – широта центра ТЦ,  $\varepsilon_1(z)$  – коэффициент трения с поверхностью моря,  $L_{tr}$  – скрытая теплота,  $H_{tr}$  – количество фазового перехода водяного пара,  $\Sigma$  – количество жидкой и твердой воды.

Предполагаем, что  $H_{tr}$  задается выражением

$$H_{tr} = \left( \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(t) \right) [v_z]^+ \quad (2.6)$$

(см. [7] Ghomrani S., Marŷn Antuna J., Fujita Yashima H. Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensacion del vapor y su calculo numerico // Rev. Cuba Fis.– 2015. – 32. – С. 3–8.), где  $\bar{\pi}_{vs}(T)$  – плотность насыщенного

водяного пара при температуре  $T$ . Поскольку нам будет нужно использовать свойства функции  $\bar{\pi}_{vs}(T)$ , фиксируем здесь ее вид:

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{1}{R_1 T} E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, \quad E_0 = 6,107 \text{ мбар} \quad (2.7)$$

(см. [3] Матвеев Л. Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. — СПб.: Гидрометеоздат, 2000.). Кроме того, для того, чтобы не усложнять рассуждение, в этой работе считаем  $L_{tr}$  положительной постоянной. Коэффициент трения  $\varepsilon_1(z)$  неотрицателен и при больших  $z$  близок к нулю. Напомним также, что газовая постоянная  $R_1$  и удельная теплоемкость  $c_v = \frac{5}{2}R_1$  достаточно велики (см. [1] Кикоин А. К., Кикоин И. К. Молекулярная физика. М.: Наука, 1976.).»

К рассматриваемой системе (2.1)–(2.5) имеются серьезные замечания.

1. У системы уравнений газовой динамики, правильно передающей движения газа в цилиндрической системе координат при учете действия сил тяжести и Кориолиса [1, 40, 60, 206], отсутствуют решения, не зависящие от независимой переменной  $\vartheta$  — полярного угла в плоскости  $xOy$  [1, 40, 60, 206], и поэтому введенное автором предположение, что такие решения есть, является ошибочным.

2. В том числе потому, что в правых частях уравнений (2.2)–(2.4) отсутствуют [с1, 40, 60, 206] соответственно слагаемые:

$$-bv_z \cos \vartheta; \quad bv_z \sin \vartheta; \quad bv_r \cos \vartheta - bv_\vartheta \cos \vartheta,$$

где

$$a = 2|\omega| \sin \varphi_0, \quad b = 2|\omega| \cos \varphi_0.$$

Эти слагаемые автор опустил, не предъявив никаких соображений.

3. Из сказанного следует, что для решений системы (2.1)–(2.5) не выполняется закон сохранения импульса.

4. Система (2.1)–(2.5) не записана в безразмерных переменных, что приводит к ошибкам и в ее записи, и в последующих рассуждениях автора:

4.1. В уравнении 2.4. в последнем слагаемом складываются величины  $\rho$  и

$\Sigma$ , имеющие разные размерности:

$$\left[ \frac{\text{КГ}}{\text{М}^3} \right]; [\text{КГ}]$$

соответственно.

4.2. Учет в последующих рассуждениях автора размерных значений величин  $R_1$  и  $c_v$  не является ни математически, ни физически обоснованным.

5. Автор в своей работе предполагает отсутствие вязкости, но вводит в систему слагаемые  $\varepsilon_1(z)v_r$  и  $\varepsilon_1(z)v_\vartheta$ , как бы учитывающие трение воздуха с поверхностью моря. Но введенные слагаемые не соответствуют никакому реальному физическому процессу и нарушают закон сохранения импульса.

Используемые в работе математические методы также содержат ошибки:

6. В работе исследуется не исходная система (2.1)–(2.5) из пяти уравнений для пяти искомых функций, а ее следствие из четырех уравнений для четырех искомых функций — не эквивалентная исходной системе. Известно, что решения, удовлетворяющие следствию исходной системы, могут не являться решениями исходной системы.

7. Сведение системы (2.1)–(2.5) в стационарном случае к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2)–(3.5) не является математически обоснованным. В частности потому, что не учитывает наличие у системы (2.1)–(2.5) контактных характеристик [188], а сама система (3.2)–(3.5) не представлена в работе ни в квазилинейном, ни в нормальном видах.

Кроме указанных ошибок в работах предшественников, некоторые исследователи приводят следующие рассуждения:

1) перепад температур или тепловая энергия, выделившаяся при конденсации водяного пара, приводят к увеличению  $w$  — вертикальной составляющей вектора скорости газа в восходящем потоке;

2) это, в свою очередь, приводит к увеличению  $v$  — скорости окружного движения;

3) следовательно, увеличение кинетической энергии окружного движения в разрушительных атмосферных вихрях обусловлено указанными физическими факторами и не связано с вращением Земли вокруг своей оси.

Именно подобные рассуждения приведены в работе [117], разобранный ниже и в которой, по мнению авторов (см. стр. 594 из работы [117]),

«тропический циклон рассматривается как атмосферное возмущение, которое организуется в условиях динамического взаимодействия потоков завихренности и всплывающих теплых ядер влажного воздуха, сбрасывающих энергию в окружающую среду. Спусковым механизмом преобразования относительно однородного атмосферного вихря в ураган является формирование Ганновской неустойчивости интенсивности потоков воздуха с изменением давления в среде с существенно перераспределенными кинематическими и динамическими характеристиками. В качестве иллюстрации представлена идентификация гидродинамического механизма генерации восходящих течений с процессами формирования интенсивных атмосферных вихревых образований.».

В качестве обоснования приведенных утверждений на странице 595 приводится следующее соображение:

«напор  $\Delta p$  радиусом  $L$ , приложенный к слою толщиной  $H$ , будет приводить к возникновению вихря с азимутальной  $V$ , радиальной  $U$  и  $W$  вертикальной скоростями».

Это соображение в части азимутальной  $V$  составляющей вектора скорости газа не соответствует законам механики, поскольку давление действует по нормали и не может вызвать перпендикулярного к нормали движения.

Кроме этого, к указанной работе еще имеются серьезные замечания:

1) уравнение (7) на странице 598 этой работы содержит слагаемые разной размерности —  $\partial T/\partial t$  и  $\lambda_{turb}\Delta T$ , где  $T$  — температура,  $t$  — время,  $\lambda_{turb}$  — "коэффициент турбулентной теплопроводности, зависящей от поля скоростей" (формулировка дословно взята из статьи),  $\Delta$  — оператор Лапласа;

2) в уравнение (7) авторами введен коэффициент  $\lambda_{turb}$ , не имеющий никакого физического смысла, в том числе и потому, что невозможно в физических экспериментах измерить его значение;

3) уравнение (8) на следующей странице 599 также содержит слагаемые разной размерности —  $\partial W/\partial t$  и  $(T_b - T)/T$ , а из вида правой части уравнения

(8) следует, что закон сохранения импульса заведомо нарушается.

Общие комментарии на рассуждения о влиянии «скрытой теплоты» из работы [117] и из других работ на эту тему — о влиянии тепловой энергии, выделяющейся при конденсации водяного пара, такие:

1) предположение об увеличении  $w$  за счет увеличения внутренней энергии потока необходимо либо зафиксировать натурными наблюдениями, либо подтвердить надежным физическим экспериментом или адекватным математическим моделированием, подтверждающим переход добавки внутренней энергии в соответствующее дополнительное движение воздушного потока;

2) если  $w$  увеличивается, то по законам механики это приводит к увеличению только  $u$  — радиальной составляющей вектора скорости газа;

3) если в рассматриваемых задачах полагать  $\Omega = 0$ , т. е. если не учитывать вращение Земли вокруг своей оси, то хоть при малых значениях  $w$ , хоть при больших, хоть при непрерывном переходе от малых значений  $w$  к большим закрутка воздуха в потоке не возникает;

4) если в рассматриваемых задачах полагать  $\Omega \neq 0$ , то, как показывают расчеты, приведенные как в работах научной группы Баутина С.П., так и в диссертации, общее увеличение скорости воздушного потока в месте перехода от придонного течения к вертикальному обязательно приводит к увеличению  $v$ , но определяемому только вращением Земли вокруг своей оси.

У предшествующих исследователей для ответа на вопрос о возникновении торнадо имеет место привлечение различных экзотических идей и гипотез. Например, в качестве причины возникновения такого восходящего закрученного потока, как торнадо, полагается [132], что вращающийся воздушный поток с осью вращения, параллельной поверхности Земли, с помощью восходящих потоков «ставится» в вертикальное положение.

Особо отметим, что на современном этапе изучения течений газа в восходящих закрученных потоках большие усилия прилагаются для определения значений газодинамических параметров конкретных торнадо и тропических циклонов.

И как следствие всех указанных обстоятельств, в настоящее время не имеется реальных и воспроизводимых в натуральных испытаниях рекомендаций по уничтожению природных восходящих закрученных потоков — торнадо и тропических циклонов — с разумными затратами энергии. Исключения составляют работы [1, 60, 88, 206] и работы группы А. Ю. Вараксина [109, 110].

### **Ложность одной гипотезы, связанной с числом Россби**

При описании движения как воздушных масс в атмосфере Земли, так и движения отдельных материальных тел относительно поверхности Земли всегда возникал вопрос о влиянии вращения Земли вокруг своей оси на эти движения.

Часть исследователей (см. об этом, например, в книге [108]) считают, что они дают ответ на этот вопрос с помощью следующих рассуждений.

Из векторного уравнения движения

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \quad (2.8)$$

системы уравнений газовой динамики берутся вторые слагаемые из левой и из правой частей этого уравнения

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix};$$

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} -2(\Omega \sin \psi)v + 2(\Omega \cos \psi)w \\ 2(\Omega \sin \psi)u \\ -2(\Omega \cos \psi)u \end{pmatrix},$$

и формально они заменяются на такие два выражения:

$$\frac{U^2}{L}; \quad 2\Omega U,$$

где: величина  $U$  характеризует скорость потока;  $L$  — линейный размер потока;  $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$  — модуль вектора угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси

$$\Omega = |\mathbf{\Omega}| \approx 7.2722 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}}.$$

Заметим, что при этом сделаны замены неизвестных величин

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}; \quad \mathbf{V}$$

(дифференциальное уравнение еще не решено) на выражения  $U^2/L$ ,  $2\Omega U$ , состоящие из известных величин.

После выписывания выражений  $U^2/L$ ,  $2\Omega U$  говорится, что на рассматриваемые движения не будет влиять вращение Земли, если будет выполняться неравенство

$$\frac{U^2}{L} \gg 2\Omega U,$$

т. е. если будет выполняться следующее неравенство

$$\frac{U}{2\Omega L} \gg 1, \tag{2.9}$$

где двойной знак неравенства имеет значение «много больше».

Заметим, что величина  $1/(2\Omega)$  имеет значение

$$\frac{1}{2\Omega} \approx 0.7 \cdot 10^4.$$

Иногда неравенство (2.9) переписывается в виде

$$\text{Ro} \gg 1, \tag{2.10}$$

где введенное число Россби:  $\text{Ro}$  — задается какой-либо одной из двух следующих формул:

$$\text{Ro} = \frac{U}{2\Omega L}; \quad \text{Ro} = \frac{U}{2\Omega L \sin \psi}. \tag{2.11}$$

Здесь  $\psi$  — широта точки на поверхности Земли, в окрестности которой рассматривается движение сплошной среды и, естественно, предполагается, что

$$\sin \psi \neq 0,$$

т. е. предполагается, что точка не лежит на экваторе.



Поскольку знаки неравенств в (2.9), (2.10) имеют смысл «много больше», то в качестве представления числа Россби можно использовать любое из двух представлений, указанных в (2.11).

На основании приведенных рассуждений упомянутые исследователи делают следующее

**Высказывание.** *Если  $Ro \gg 1$ , т. е. если выполняются неравенства (2.9), (2.8), то отсутствует влияние вращения Земли на поток. И тогда, в частности, в уравнении (2.8) слагаемое  $(-2\Omega \times \mathbf{V})$  нужно отбросить. В другом предельном случае  $Ro \ll 1$  вращение Земли оказывает существенное влияние на рассматриваемое явление, в том числе в уравнении (2.8) ничего отбрасывать не надо. Если  $Ro \approx 1$ , то влияние вращения Земли пренебрежимо мало.*

В качестве предварительного замечания о приведенном способе получения неравенства (2.9) напомним следующее. Со времен И. Ньютона известно, что если изучать движение более сложное, чем прямолинейное с постоянной скоростью, то тогда надо не « $x$ » делить на « $t$ », а « $dx$ » делить на « $dt$ », составлять дифференциальные уравнения и их решать. Здесь же не решают дифференциальные уравнения и предлагают обратное, т. е. производную  $du/dx$  заменить на дробь  $u/x$ , хотя из определения производной следует, что ее можно приближенно заменять только на дробь  $\Delta u/\Delta x$ .

Детальный же анализ действий, из которых следует указанное высказывание, приводит к таким выводам.

**1.** Данное **высказывание** не является обоснованным фактом, а является только **гипотезой**, поскольку дифференциальное уравнение еще не решено и поэтому выводы о свойствах решений этого уравнения можно считать только гипотезой. С точки зрения математической теории нелинейных дифференциальных уравнений подобная последовательность действий и рассуждения являются грубой математической ошибкой.

**2.** Приведенное **высказывание** не только является **гипотезой**, но еще и **гипотезой ложной**. Последнее следует как из результатов физических экс-

периментов, так и из строго доказанных математических фактов.

Первый эксперимент, доказывающий **ложность гипотезы**, был проведен Ж. Фуко со своим маятником в 1851 году. Характерные скорости и характерные расстояния при движении шара этого маятника были величины порядка  $U = 1 \text{ м/с}$ ;  $L = 10 \text{ м}$ , что дает следующее значение числа Россби:

$$Ro = \frac{1 \frac{\text{М}}{\text{с}}}{10 \text{ м}} \cdot 0.7 \cdot 10^4 \text{ с} = 700 \gg 1.$$

При этом вращение Земли вокруг своей оси проявляется в экспериментах с маятником Фуко существенным образом. А цель и результат этого эксперимента — подтвердить вращение Земли вокруг своей оси.

В качестве примеров других физических экспериментов, доказывающих **ложность** приведенной **гипотезы**, укажем на эксперименты, проведенные в Москве под руководством А. Ю. Вараксина (см. [98–112]), а также проведенные в Екатеринбурге под руководством С. П. Баутина (см. [54, 97]). В этих экспериментах восходящий поток был закручен без какой-либо принудительной закрутки, а только вращением Земли вокруг своей оси. Средние значения скорости вихревого движения и диаметра вихря в экспериментах [98–112] и в первых двух сериях экспериментов [54, 97] были соответственно такими:  $U = 0.5 \text{ м/с}$ ;  $L = 0.05 \text{ м}$ . Следовательно, для параметров этих экспериментов число Россби имеет следующее значение:

$$Ro = \frac{0.5 \frac{\text{М}}{\text{с}}}{0.05 \text{ м}} \cdot 0.7 \cdot 10^4 \text{ с} = 70000 \gg 1,$$

но в этих экспериментах присутствует влияние вращения Земли вокруг своей оси на потоки воздуха. В третьей серии экспериментов [54, 97]  $U = 2.0 \text{ м/с}$ ;  $L = 2.0 \text{ м}$  и, следовательно,  $Ro = 7000 \gg 1$ .

Заметим, что результаты этих экспериментов позволили также высказать конкретные рекомендации по уничтожению разрушительных атмосферных вихрей [1, 60, 108, 109, 206], и некоторые из этих рекомендаций запатентованы [22].

Математически строго установленные в данном параграфе факты о принципиальном влиянии вращения Земли вокруг своей оси на возникновение и

поддержание закрутки воздуха в разрушительных атмосферных вихрях также доказывают ложность приведенного выше высказывания, являющегося только гипотезой. В том числе и потому, что для функции  $v(r)$ , приведенной в параграфе 5 под номером (5.9), число Россби может принимать любые положительные значения.

Заметим, что число Россби никоим образом не фигурирует в доказанных в диссертации теоремах о возникновении в соответствующих течениях ненулевой окружной скорости газа, вызванное вращением Земли вокруг своей оси. И это тоже подтверждает ложность упомянутого высказывания.

Из свойств решений, приведенных в пятом параграфе диссертации, следует, что если убрать из уравнения (2.8), входящего в систему уравнений газовой динамики, слагаемое « $(-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})$ », то вообще не найти ответа на вопрос, откуда берется кинетическая энергия вращательного движения воздуха в торнадо и в тропических циклонах.

### § 3. Математическая модель

В параграфе приводится математическая модель, используемая для моделирования нужных течений газа — квазилинейная система уравнений с частными производными — система уравнений газовой динамики, а также ее некоторые математические свойства. Эта система уравнений передает в дифференциальной форме законы сохранения массы, импульса и энергии, а также учитывает законы термодинамики через использование конкретных уравнений состояния рассматриваемой сплошной среды. При выборе конкретных масштабных значений скорости и расстояния система уравнений газовой динамики записывается в безразмерных переменных.

Решения системы уравнений газовой динамики в достаточно большом диапазоне изменения газодинамических параметров: плотности, скорости, температуры, давления — адекватно описывают течения газа.

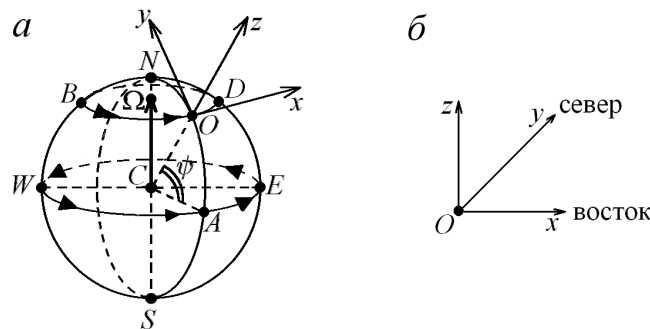


Рис. 3.1

Основное отличие традиционно используемой системы уравнений газовой динамики от рассматриваемой в данной монографии состоит в том, что здесь в системе присутствуют дополнительные слагаемые, с помощью которых учитывается вращение Земли и сопутствующее этому движению проявление силы инерции, называемой силой Кориолиса.

Также в рассматриваемой системе уравнений газовой динамики учитывается влияние силы тяжести.

## Система уравнений газовой динамики в безразмерных переменных

Для описания течения воздуха в восходящем закрученном потоке, вращающемся вместе с Землей, как и выше, вводится вращающаяся вместе с Землей прямоугольная система координат с осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , направленными соответственно на восток, север и вверх от поверхности Земли (рис. 3.1, б). При этом полагается, что точка  $O$  — начало вращающейся декартовой системы координат — лежит на поверхности Земли на параллели с широтой  $\psi$  (см. рис. 3.1, а). В прямоугольной системе координат постоянный вектор  $\Omega$  — вектор угловой скорости Земли — задается формулой

$$\Omega = (0; \Omega_2; \Omega_3); \quad \Omega_2 = \Omega \cos \psi; \quad \Omega_3 = \Omega \sin \psi, \quad (3.1)$$

где  $\Omega$  — модуль вектора  $\Omega$  — определяется по формуле

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \text{ ч}} \approx 0.26180 \frac{1}{\text{ч}}. \quad (3.2)$$

Если в системе координат  $xyzO$  рассматривать движение идеальной сплошной среды, то уравнения движения, называемые также уравнениями Эйлера и являющиеся дифференциальной формой закона сохранения импульса, имеют в векторной форме следующий вид, приведенный в [178]:

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{g} - 2\Omega \times \mathbf{V}. \quad (3.3)$$

В векторном уравнении (3.3):  $t$  — время;  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$  — вектор скорости газа в декартовой системе координат  $xyzO$ ;  $\rho$  — плотность газа;  $p$  — давление газа;  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения свободного падения

$$\mathbf{g} = (0; 0; -g), \quad g = \text{const} > 0;$$

$\nabla$  — оператор градиента по переменным  $x, y, z$ .

Наличие в уравнении (3.3) двух слагаемых в правой части говорит о том, что на движение газа оказывают влияние как земное притяжение, так и вращение Земли. Но при этом, как и в случае движения отдельной материальной точки, так и в случае движения сплошной среды сила Кориолиса работы не

совершает из-за взаимной перпендикулярности  $\mathbf{V}$  вектора скорости газа и вектора  $(-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})$ .

Благодаря наличию в правой части векторного уравнения (3.3) слагаемого  $(-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})$ , в поток газа вносится дополнительный внешний импульс в виде вращательного момента. Именно этот внешний импульс — это внешний вращательный момент — и приводит к закрутке газа в придонной части восходящего потока (см. § 4–8).

Особо обращаем внимание читателей на этот последний и очень принципиальный момент: *роль силы Кориолиса не в совершении работы (которую она и не совершает), а во внесении в поток внешнего дополнительного импульса.*

Как уже отмечалось выше, влиянием центробежного ускорения

$$-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

в уравнении (3.3) пренебрегается из-за его малости, но ускорение Кориолиса

$$\mathbf{a}_c = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 2(\Omega_3 v_2 - \Omega_2 v_3)\mathbf{i} - 2\Omega_3 v_1 \mathbf{j} + 2\Omega_2 v_1 \mathbf{k}$$

учитывается и при этом полагается, что в последнем равенстве и, следовательно, в векторном уравнении (3.3)  $\psi = \text{const}$ .

Векторное уравнение (3.3) содержит три скалярных уравнения для пяти искомых функций:  $\rho$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $p$ .

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, в которой число искомых функций равно числу скалярных уравнений, необходимо, во-первых, учесть закон сохранения массы, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (3.4)$$

и называется уравнением неразрывности,  $\operatorname{div}$  — оператор дивергенции по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Во-вторых, кроме закона сохранения массы, необходимо также учесть закон сохранения энергии. Однако дифференциальная форма этого закона зависит от того, в каком виде задана зависимость давления от двух других термодинамических параметров газа [179, 180].

В качестве сплошной среды рассматривается идеальный политропный газ, и за независимые термодинамические параметры взяты плотность  $\rho$  и энтропия  $S$ . Тогда давление газа задается соотношением

$$p = \frac{1}{\gamma} A^2(S) \rho^\gamma, \quad (3.5)$$

где  $A^2(S)$  – энтропийная функция;  $\gamma = \text{const} > 1$  – показатель политропы газа, а само уравнение (3.5) называется уравнением состояния.

В этом случае дифференциальная форма закона сохранения энергии имеет вид [179]

$$S_t + \mathbf{V} \cdot \nabla S = 0, \quad (3.6)$$

т. е. является уравнением, передающим постоянство энтропии вдоль траекторий движения частиц газа при условии, что траектории не пересекают поверхность сильного разрыва.

Итак, в случае уравнения состояния (3.5) для пяти искомым функций:  $\rho$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $S$  – имеется система из пяти скалярных уравнений (3.3), (3.4), (3.6), где в трех скалярных уравнениях из (3.3) необходимо учесть вид зависимости (3.5). Система (3.3), (3.4), (3.6) есть система уравнений газовой динамики, отличающаяся от системы традиционного вида [179] учетом действия силы Кориолиса.

При задании давления с помощью уравнения состояния (3.5) удобно в системе уравнений газовой динамики вместо искомым функций  $\rho$  и  $S$  ввести другие искомые функции [1, 185–188]:

$$\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}, \quad s = A(S). \quad (3.7)$$

Тогда система уравнений газовой динамики в условиях действия силы Корио-

лиса приобретает следующий вид [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \sigma + \frac{(\gamma - 1)}{2} \sigma \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{2}{(\gamma - 1)} s^2 \sigma \nabla \sigma + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s \nabla s = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}, \\ s_t + \mathbf{V} \cdot \nabla s = 0, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

в котором присутствуют только целые положительные степени искомых функций  $\sigma$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $s$ . При замене (3.7) скорость звука газа  $c = \sqrt{\partial p(\rho, S)/\partial \rho}$  задается равенством

$$c = s\sigma.$$

Систему уравнений газовой динамики в условиях действия силы Кориолиса – систему в виде (3.8) – удобно использовать при исследовании одного частного случая: изэнтропические течения газа, т. е. когда  $S = \text{const}$ . Тогда функция  $s = A(S)$  тоже является константой, и поэтому последнее уравнение в системе (3.8) выполняется тождественно. В изэнтропическом случае система уравнений газовой динамики в условиях действия силы Кориолиса становится системой из следующих четырех скалярных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_t + v_1 \sigma_x + v_2 \sigma_y + v_3 \sigma_z + \frac{(\gamma - 1)}{2} \sigma (v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}) = 0, \\ v_{1t} + v_1 v_{1x} + v_2 v_{1y} + v_3 v_{1z} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_x = 2\Omega_3 v_2 - 2\Omega_2 v_3, \\ v_{2t} + v_1 v_{2x} + v_2 v_{2y} + v_3 v_{2z} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_y = -2\Omega_3 v_1, \\ v_{3t} + v_1 v_{3x} + v_2 v_{3y} + v_3 v_{3z} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_z = 2\Omega_2 v_1 - g \end{array} \right. \quad (3.9)$$

для четырех искомых функций  $\sigma$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ .

Причем, если при введении безразмерных переменных будет выполняться равенство  $s = 1$ , то функция  $\sigma$  совпадает со скоростью звука  $c$ .

Иногда отдельные области восходящего закрученного потока, или даже



весь восходящий закрученный поток, обладают симметрией, присущей вращению. В таких случаях удобнее рассматривать течение газа в цилиндрических координатах:  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Здесь  $r$  и  $\varphi$  – полярные радиус и угол в плоскости  $xOy$ .

В цилиндрической системе координат система уравнений газовой динамики (3.9) в условиях действия силы Кориолиса для изэнтропических течений политропного газа имеет следующий вид [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left( u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ u_t + uw_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + ww_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Здесь  $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$  – скорость звука газа;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа соответственно;  $a = 2\Omega \sin \psi$ ;  $b = 2\Omega \cos \psi$ . Заметим, что в случае цилиндрической системы координат в систему уравнений газовой динамики в явном виде вошла независимая переменная  $\varphi$ .

В системах (3.9), (3.10) с помощью масштабных значений скорости звука, времени и расстояния –  $u_{00}$ ,  $c_{00}$ ,  $t_{00}$ ,  $r_{00}$  – стандартным образом введены безразмерные переменные:

$$f = \frac{f_*}{f_{00}},$$

где  $f_*$  и  $f_{00}$  – соответственно размерное и масштабное значения безразмерной величины  $f$ . При этом положено, что

$$u_{00} = c_{00}; \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}, \quad (3.11)$$

и тогда безразмерные значения констант  $\Omega$  и  $g$  задаются следующим образом:

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2 \text{с}} \cdot t_{00}; \quad g = g_* \cdot \frac{t_{00}}{c_{00}},$$

где  $g_* = 9.8\text{м/с}^2$ .

Если в качестве масштабов скорости и расстояния при введении безразмерных переменных взяты  $u_{00} = c_{00} = \frac{1}{3} \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ,  $r_{00} = 10^3 \text{ м}$ , то при этом масштабное значение времени  $t_{00}$  будет равно трем секундам, и получатся следующие безразмерные значения констант:  $\Omega = 0.000218$ ,  $g = 0.0882$ .

Если, не меняя масштаба скорости, увеличить (уменьшить) масштаб расстояния в заданное число раз, то значения констант  $t_{00}$ ,  $\Omega$  и  $g$  также увеличатся (уменьшатся) в такое же число раз.

Заметим, что при указанном выше способе введения безразмерных переменных в систему уравнений газовой динамики (см. системы (3.9) и (3.10)) вошло минимально возможное число безразмерных параметров:  $\gamma$ ,  $\Omega$ ,  $\psi$ ,  $g$ .

В качестве независимых термодинамических переменных для записи уравнений состояния можно брать не плотность  $\rho$  и энтропию  $S$ , а  $\rho$  и температуру  $T$ . В этом случае система уравнений газовой динамики при учете действия сил тяжести и Кориолиса имеет следующий вид [1, 188]:

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}, \\ T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1)T \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

в которых также стандартным образом введены безразмерные переменные, и тогда уравнение (3.5) для давления  $p$  и уравнение для внутренней энергии  $e$  идеального политропного газа в безразмерных переменных имеют вид

$$p = \rho T, \quad e = T \quad (3.13)$$

и называются уравнениями состояния.

### Характеристическая задача Коши стандартного вида

Рассмотренные в диссертации газодинамические задачи приводят к соответствующим начально—краевым задачам для системы уравнений газовой ди-

намики. И, несмотря на различие физического смысла исследуемых в диссертации задач, с точки зрения теории нелинейных дифференциальных уравнений эти начально–краевые задачи являются характеристическими задачами Коши стандартного вида [188].

Поэтому далее рассмотрена характеристическая задача Коши стандартного вида для квазилинейной аналитической системы уравнений с частными производными [188, 192] и ее некоторые свойства. Указано, как необходимо преобразовывать другие задачи при сведении их (если это возможно) к рассмотренной характеристической задаче Коши. Теорема о существовании и единственности аналитического решения характеристической задачи Коши стандартного вида для квазилинейной аналитической системы доказана ранее методом мажорант [188, 192] и в данной диссертации не приводится.

### **Постановка характеристической задачи Коши стандартного вида для квазилинейной аналитической системы уравнений**

Пусть для вектора  $\mathbf{U}$  из  $m$  искомым функций  $u_1, \dots, u_m$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix},$$

зависящих от  $(n + 1)$  одной независимой переменной  $\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n$ , задана квазилинейная система из  $m$  уравнений с частными производными

$$A_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vartheta} + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_i} = \mathbf{C}. \quad (3.14)$$

Для системы (3.14) на координатной плоскости  $\vartheta = 0$  для всех искомым функций заданы начальные условия

$$\mathbf{U}|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}^0(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{pmatrix} u_1^0(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ u_2^0(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ u_m^0(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

где компоненты вектора  $\mathbf{U}^0$  являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки

$$M_0(\vartheta = 0, \xi_1 = 0, \dots, \xi_n = 0).$$

Коэффициенты матриц  $A_0, A_1, \dots, A_n$  и компоненты вектора  $\mathbf{C}$  зависят от независимых переменных  $\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n$  и от искомым функций  $u_1, \dots, u_m$  и являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки

$$M_{00}(\vartheta = 0, \xi_1 = 0, \dots, \xi_n = 0, u_1 = u_1^0(0, \dots, 0), \dots, u_m = u_m^0(0, \dots, 0)).$$

Таким образом, задача (3.14), (3.15) является *задачей Коши с аналитическими начальными данными для квазилинейной аналитической системы уравнений с частными производными*.

Поскольку начальные данные поставлены на поверхности  $\vartheta = 0$ , то частные производные по переменной  $\vartheta$  называются *выводящими*, а производные по переменным  $\xi_i, i = 1, \dots, n$  — *внутренними*.

Задача Коши (3.14), (3.15) называется *характеристической*, если равен нулю определитель матрицы  $A_0$

$$\det A_0|_{\vartheta=0, \mathbf{U}=\mathbf{U}^0} = 0,$$

стоящей перед вектором выводящих производных

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vartheta},$$

когда в матрицу  $A_0$  подставлено значение  $\vartheta = 0$  и подставлены начальные данные (3.15).

Характеристическая задача Коши называется *стандартного вида*, если, во-первых, выполняется следующее условие: матрица  $A_0$  при подстановке в нее значения  $\vartheta = 0$  и начальных условий имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

где матрица  $A$  имеет размеры  $r \times r$  и ее определитель в точке  $M_{00}$  отличен от нуля

$$\det A|_{M_{00}} \neq 0, \quad (3.17)$$

а матрицы, обозначенные  $\mathcal{O}$ , имеют соответствующие размеры и состоят из нулей.

Во-вторых, должно выполняться следующее условие: в точке  $M_{00}$  в матрице  $A_1$  отличен от нуля минор, размеров  $(m - r) \times (m - r)$  и стоящий в правом нижнем углу этой матрицы  $A_1$ .

Для удобства дальнейшего изложения для искомым функций вводятся новые обозначения:

$$u_1 = H_1, \dots, u_r = H_r, \dots, u_{r+1} = S_{r+1}, \dots, u_m = S_m.$$

Это переобозначение вызвано тем, что выводящие производные для функций, обозначенных как  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , и для функций, обозначенных как  $S_j$ ,  $j = r + 1, \dots, m$ , определяются по-разному.

С учетом введенных обозначений подробная запись системы (3.14) имеет следующий вид:

$$\sum_{l=1}^r a_{il} \frac{\partial H_l}{\partial \vartheta} + \sum_{l=r+1}^m b_{il} \frac{\partial S_l}{\partial \vartheta} + \sum_{\nu=1}^n \left( \sum_{l=1}^r c_{il\nu} \frac{\partial H_l}{\partial \xi_\nu} + \sum_{l=r+1}^m d_{il\nu} \frac{\partial S_l}{\partial \xi_\nu} \right) = e_i, \quad (3.18)$$

$$\sum_{l=1}^r f_{jl} \frac{\partial H_l}{\partial \vartheta} + \sum_{l=r+1}^m g_{jl} \frac{\partial S_l}{\partial \vartheta} + \sum_{\nu=1}^n \left( \sum_{l=1}^r p_{jlv} \frac{\partial H_l}{\partial \xi_\nu} + \sum_{l=r+1}^m q_{jlv} \frac{\partial S_l}{\partial \xi_\nu} \right) = t_j, \quad (3.19)$$

а начальные данные (3.15) становятся такими:

$$H_i(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n)|_{\vartheta=0} = H_i^0(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (3.20)$$

$$S_j(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n)|_{\vartheta=0} = S_j^0(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (3.21)$$

$$1 \leq i \leq r, \quad r + 1 \leq j \leq m.$$

Первое из условий, делающее поставленную задачу характеристической задачей Коши стандартного вида и требующее выполнения условий (3.16), (3.17) принимает такую форму: при  $\vartheta = 0$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$  равны нулю функции  $b_{il}$ ,  $f_{jl}$ ,  $g_{jl}$ , т. е.

$$b_{il}|_{\vartheta=0, \mathbf{U}=\mathbf{U}^0} = f_{jl}|_{\vartheta=0, \mathbf{U}=\mathbf{U}^0} = g_{jl}|_{\vartheta=0, \mathbf{U}=\mathbf{U}^0} = 0, \quad (3.22)$$

и в рассматриваемой точке  $M_{00}$  отличен от нуля определитель матрицы  $A$ :

$$\det(a_{il})|_{M_{00}} \neq 0. \quad (3.23)$$

Второе условие, необходимое для того, чтобы задача называлась характеристической задачей Коши стандартного вида, становится таким: в точке  $M_{00}$  отличен от нуля определитель матрицы  $(q_{jl1})$ :

$$\det(q_{jl1})|_{M_{00}} \neq 0. \quad (3.24)$$

Процедура определения

$$\left. \frac{\partial H_i}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0}; \quad 1 \leq i \leq r$$

производных, выводящих с поверхности  $\vartheta = 0$ , следующая.

Если в системе (3.14) положить  $\vartheta = 0$  и подставить начальные условия, то из первых  $r$  уравнений системы (3.14), т. е. из уравнений (3.18) при  $\vartheta = 0$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ , как из системы линейных алгебраических уравнений однозначно определяются значения

$$\left. \frac{\partial H_i}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0}; \quad 1 \leq i \leq r.$$

Данный факт следует из того, что выполняется неравенство (3.17), и в эти первые  $r$  уравнений, помимо искомого  $\partial H_i / \partial \vartheta|_{\vartheta=0}$ , входят только известные из начальных данных значения как всех искомого функций, так и значения всех их внутренних производных. А неизвестные производные  $\partial S_j / \partial \vartheta|_{\vartheta=0}$ ,  $r + 1 \leq j \leq m$  в эти уравнения не входят, поскольку коэффициенты перед ними равны нулю.

Если в системе (3.14) положить  $\vartheta = 0$  и подставить начальные условия, то последние  $(m - r)$  уравнений системы (3.14) – т. е. уравнения (3.19) – принимают следующий вид:

$$\sum_{\nu=1}^n \left( \sum_{l=1}^r p_{jl\nu} \frac{\partial H_l}{\partial \xi_\nu} + \sum_{l=r+1}^m q_{jl\nu} \frac{\partial S_l}{\partial \xi_\nu} \right) \Big|_{\vartheta=0, \mathbf{U}=\mathbf{U}^0} \equiv t_j \Big|_{\vartheta=0, \mathbf{U}=\mathbf{U}^0}, \quad (3.25)$$

$$r + 1 \leq j \leq m.$$

Эти соотношения называются *необходимыми условиями разрешимости* рассматриваемой характеристической задачи Коши стандартного вида, поскольку если они не выполняются, то у поставленной задачи решения нет.

Заметим, что в соотношения (3.25) входят как функции из начальных данных, так и их внутренние производные. И необходимость выполнения этих соотношений накладывает соответствующие ограничения на начальные условия (3.15) — для функций из правых частей соотношений (3.15) должны выполняться равенства (3.25).

Нахождение выводящих производных

$$\left. \frac{\partial S_j}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0}; \quad r+1 \leq j \leq m$$

осуществляется следующим образом.

Уравнения (3.19) (последние  $(m-r)$  уравнений системы (3.14)) дифференцируются по  $\vartheta$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^r f_{jl} \frac{\partial^2 H_l}{\partial \vartheta^2} + \sum_{l=r+1}^m g_{jl} \frac{\partial^2 S_l}{\partial \vartheta^2} + \sum_{\nu=1}^n \left( \sum_{l=1}^r p_{j\nu l} \frac{\partial^2 H_l}{\partial \xi_\nu \partial \vartheta} + \sum_{l=r+1}^m q_{j\nu l} \frac{\partial^2 S_l}{\partial \xi_\nu \partial \vartheta} \right) + \\ & + \sum_{l=1}^r \frac{\partial P}{\partial H_l} \frac{\partial H_l}{\partial \vartheta} + \sum_{l=r+1}^m \frac{\partial P}{\partial S_l} \frac{\partial S_l}{\partial \vartheta} + \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = \\ & = \sum_{l=1}^r \frac{\partial t_j}{\partial H_l} \frac{\partial H_l}{\partial \vartheta} + \sum_{l=r+1}^m \frac{\partial t_j}{\partial S_l} \frac{\partial S_l}{\partial \vartheta} + \frac{\partial t_j}{\partial \vartheta}, \end{aligned}$$

где

$$P_j = \sum_{l=1}^r f_{jl} \frac{\partial H_l}{\partial \vartheta} + \sum_{l=r+1}^m g_{jl} \frac{\partial S_l}{\partial \vartheta} + \sum_{\nu=1}^n \left( \sum_{l=1}^r p_{j\nu l} \frac{\partial H_l}{\partial \xi_\nu} + \sum_{l=r+1}^m q_{j\nu l} \frac{\partial S_l}{\partial \xi_\nu} \right).$$

Причем под производными  $\partial P_j / \partial \vartheta$ ,  $\partial t_j / \partial \vartheta$  понимаются частные производные этих функций только по независимой переменной  $\vartheta$ :

$$\frac{\partial P_j(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n, H_1, \dots, S_m)}{\partial \vartheta}; \quad \frac{\partial t_j(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n, H_1, \dots, S_m)}{\partial \vartheta}.$$

В полученные уравнения подставляются  $\vartheta = 0$ , начальные данные (3.15) и уже найденные значения  $\partial H_i / \partial \vartheta|_{\vartheta=0}$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Тогда в них будут равны нулю коэффициенты перед вторыми выводящими производными для всех искомым функций

$$\left. \frac{\partial u_\nu^2}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta=0}, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

И поэтому получившиеся  $(m - r)$  соотношений

$$\begin{aligned}
& \left[ \sum_{\nu=1}^n \left( \sum_{l=1}^r p_{j\nu} \frac{\partial^2 H_l}{\partial \xi_\nu \partial \vartheta} + \sum_{l=r+1}^m q_{j\nu} \frac{\partial^2 S_l}{\partial \xi_\nu \partial \vartheta} \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^r \frac{\partial P}{\partial H_l} \frac{\partial H_l}{\partial \vartheta} + \sum_{l=r+1}^m \frac{\partial P}{\partial S_l} \frac{\partial S_l}{\partial \vartheta} + \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \right] \Big|_{\vartheta=0} = \\
& = \left[ \sum_{l=1}^r \frac{\partial t_j}{\partial H_l} \frac{\partial H_l}{\partial \vartheta} + \sum_{l=r+1}^m \frac{\partial t_j}{\partial S_l} \frac{\partial S_l}{\partial \vartheta} + \frac{\partial t_j}{\partial \vartheta} \right] \Big|_{\vartheta=0} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

являются квазилинейной системой уравнений с частными производными для неизвестных пока коэффициентов

$$\frac{\partial S_j}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0}; \quad r + 1 \leq j \leq m.$$

Поскольку выполняется условие (3.24), т. е. отличен от нуля определитель матрицы, стоящей перед вектором производных

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\partial S_j}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0} \right); \quad r + 1 \leq j \leq m,$$

то можно на поверхности  $\xi_1 = 0$  задать аналитические начальные данные для функций

$$\frac{\partial S_j}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0}; \quad r + 1 \leq j \leq m,$$

и тогда по теореме Ковалевской однозначно определяются эти функции из системы уравнений с частными производными (3.26).

Построение последующих выводящих производных

$$\frac{\partial^{k+1} H_i}{\partial \vartheta^{k+1}} \Big|_{\vartheta=0}; \quad \frac{\partial^{k+1} S_j}{\partial \vartheta^{k+1}} \Big|_{\vartheta=0}; \quad 1 \leq i \leq r; \quad r + 1 \leq i \leq m; \quad k = 1, \dots$$

производится аналогичным образом:

1) уравнения (3.18)  $k$  раз дифференцируются по  $\vartheta$ ; в получившиеся соотношения подставляются  $\vartheta = 0$  и уже найденные выводящие производные; значения

$$\frac{\partial^{k+1} H_i}{\partial \vartheta^{k+1}} \Big|_{\vartheta=0}$$



определяются из системы линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля определителем (3.23);

2) уравнения (3.19)  $(k + 1)$  раз дифференцируются по  $\vartheta$ ; в получившиеся соотношения подставляются  $\vartheta = 0$  и уже найденные выводящие производные, и тогда значения

$$\left. \frac{\partial^{k+1} S_j}{\partial \vartheta^{k+1}} \right|_{\vartheta=0}$$

определяются из системы уравнений с частными производными при задании начальных условий на координатной плоскости  $\xi_1 = 0$  для этих функций с учетом того, что отличен от нуля определитель (3.24).

При решении систем уравнений с частными производными для

$$\left. \frac{\partial^k S_j}{\partial \vartheta^k} \right|_{\vartheta=0}; \quad k = 1, 2, \dots$$

задание начальных условий при  $\xi_1 = 0$  для всех этих функций можно осуществить с помощью задания следующих соотношений:

$$S_j(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n)|_{\xi_1=0} = S_j^1(\vartheta, \xi_2, \dots, \xi_n); \quad r + 1 \leq j \leq m, \quad (3.27)$$

где  $S_j^1(\vartheta, \xi_2, \dots, \xi_n)$  — заданные произвольные аналитические в некоторой окрестности точки  $M_{00}$  функции, удовлетворяющие условию согласования с правыми частями условий (3.21):

$$S_j^1(\vartheta, \xi_2, \dots, \xi_n)|_{\vartheta=0} = S_j^0(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)|_{\xi_1=0}; \quad r + 1 \leq j \leq m. \quad (3.28)$$

**Теорема.** *Задача (3.14), (3.15), (3.27) при выполнении условий (3.22)–(3.25), (3.28) и в случае аналитичности входных данных имеет в некоторой окрестности точки  $M_0(\vartheta = 0, \xi_1 = 0, \dots, \xi_n = 0)$  единственное аналитическое решение.*

Под аналитичностью входных данных задачи понимается то, что все функции, входящие в постановку задачи, являются аналитическими в некоторых окрестностях рассматриваемой точки  $M_{00}$ .

Более детальное описание построения решения поставленной задачи, возможный другой вид краевых условий, заданных при  $\xi_1 = 0$ , а также доказа-

тельство теоремы приведены в работах [188, 192] и в данной диссертации не повторяются.

### **Сведение других задач к характеристической задаче Коши стандартного вида**

Часто исходная начально-краевая задача хоть и является характеристической задачей Коши стандартного вида, но явно не представлена в требуемом виде. В этом случае необходимы некоторые действия по сведению исходной задачи к нужному виду и последующая проверка выполнимости перечисленных в теореме условий.

В задачах, имеющих содержательный, например газодинамический, смысл, характеристическая поверхность, как правило, не является координатной плоскостью. В общем случае она задается в виде

$$\varphi(t, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где функция  $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$  является аналитической в окрестности (не нарушая общности рассмотрения) точки  $(t = 0, x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ .

Пусть для квазилинейной аналитической системы уравнений с частными производными

$$B_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{C} \quad (3.29)$$

на поверхности  $\varphi(t, x_1, \dots, x_n) = 0$  заданы все искомые функции

$$\mathbf{U}(t, x_1, \dots, x_n)|_{\varphi=0} = \mathbf{U}_0, \quad (3.30)$$

где компоненты вектора  $\mathbf{U}_0$  являются аналитическими в окрестности начала координат функциями.

С помощью подходящей аналитической невырожденной замены переменных

$$\vartheta = \varphi(t, x_1, \dots, x_n), \quad \xi_i = \varphi_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.31)$$

поверхность, несущая данные для всех искомым функций, становится координатной плоскостью  $\vartheta = 0$ .

При замене (3.31) исходная квазилинейная аналитическая система сохраняет и квазилинейность, и аналитичность. Начальные данные, также сохранившиеся при замене переменных аналитичность, теперь заданы на координатной плоскости. В результате получается следующая задача Коши:

$$D_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vartheta} + \sum_{i=1}^n D_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_i} = \mathbf{C}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{U}(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n)|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0(\xi_1, \dots, \xi_n). \quad (3.33)$$

Эта задача будет характеристической, если

$$\det D_0|_{\vartheta=0, \mathbf{U}=\mathbf{U}_0} = 0; \quad \text{rang} D_0 = r = \text{const} > 0.$$

Однако совсем необязательно, чтобы был отличен от нуля минор размеров  $r \times r$ , стоящий именно в левом верхнем углу матрицы  $D_0$ , как требуется в характеристической задаче Коши стандартного вида. Перевести в левый верхний угол матрицы  $D_0$  отличный от нуля минор возможно с помощью перестановки строк и столбцов матрицы  $D_0$ . Это, в свою очередь, соответствует тому, что проведено такое преобразование матрицы  $D_0$ :

$$T_1 D_0 T_2 \quad (3.34)$$

с помощью двух невырожденных матриц  $T_1, T_2$ , коэффициенты которых есть аналитические функции от  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Необходимость преобразования (3.34) требует введения вектора новых искомым функций по формуле

$$\mathbf{W} = T_2^{-1} \mathbf{U},$$

т. е.

$$\mathbf{U} = T_2 \mathbf{W},$$

а также умножения системы уравнений из задачи (3.23) слева на  $T_1$ . В результате задача (3.32), (3.33) переходит в задачу

$$T_1 D_0 T_2 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \vartheta} + \sum_{i=1}^n T_1 D_i T_2 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \xi_i} + T_1 \sum_{i=1}^n D_i \frac{\partial T_2}{\partial \xi_i} \mathbf{W} = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{W}(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n)|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Естественно, что в элементах матриц  $D_0, D_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) и в компонентах вектора  $\mathbf{C}$  необходимо элементы вектора  $\mathbf{U}$  заменить элементами вектора  $\mathbf{W}$ . При этом именно первые  $r$  компонент вектора  $\mathbf{W}$  обозначены через  $H_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , а последние  $(m - r)$  компонент — через  $S_j$ ,  $r + 1 \leq j \leq m$ .

При указанных переходах для выполнимости теоремы требуется, чтобы выполнялись следующие свойства.

В матрицах

$$T_1 D_0 T_2 \Big|_{\vartheta=0, \mathbf{w}=\mathbf{w}_0} = \begin{pmatrix} D & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad T_1 D_1 T_2 = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

размеры матрицы  $D$  есть  $r \times r$ ;  $\mathcal{O}$  являются нулевыми матрицами соответствующих размеров; размеры матрицы  $D_{22}$  есть  $(m - r) \times (m - r)$  и

$$\det D_{22} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, \mathbf{w}=\mathbf{w}_0(\mathbf{0})} \neq 0.$$

С помощью матрицы

$$T_3 = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & E \end{pmatrix},$$

где  $E$  — единичная матрица размеров  $(m - r) \times (m - r)$ , краевое условие (3.27) записывается в виде

$$E_3 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \vartheta} \Big|_{\xi_1=0} = \Psi \Big|_{\xi_1=0},$$

где  $\Psi$  — вектор, компонентами которого являются функции  $\psi_j$ ,  $m - r \leq j \leq m$ . Следовательно, для исходной функции  $\mathbf{U}$  краевое условие должно иметь

$$E_3 T_2^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vartheta} \Big|_{\xi_1=0} = \Psi \Big|_{\xi_1=0}, \quad (3.35)$$

и тогда задача (3.29), (3.30), (3.35) является характеристической задачей Коши стандартного вида, но, естественно, при выполнении перечисленных условий.

И, наконец, последнее важное обстоятельство, которое необходимо иметь в виду при рассмотрении характеристической задачи Коши стандартного вида. Число  $(m - r)$  называется *кратностью* характеристической поверхности, которая до замены независимых переменных (3.31) задавалась соотношением

$\varphi(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ . Таким образом, кратность характеристической поверхности, несущей начальные значения всех искомых функций, и определяет количество функций в краевых условиях —  $(m - r)$  штук, обеспечивающих единственность решения характеристической задачи Коши стандартного вида.

### Некоторые особенности характеристической задачи Коши стандартного вида и математические свойства ее решений

Принципиальная особенность рассмотренных в диссертации начально-краевых задач заключается в следующем: в пространстве независимых переменных данные для искомых функций задаются на двух поверхностях (на рис. 3.1 представлен случай с тремя независимыми переменными).

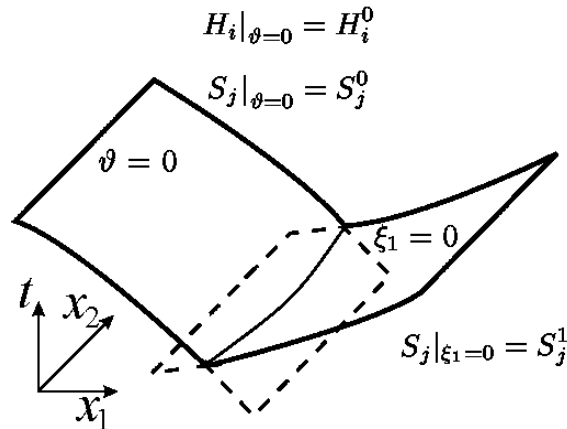


Рис. 3.1.

При этом на одной поверхности задаются значения всех искомых функций, а на второй — только для части искомых функций в количестве, равном кратности характеристики.

Особо отмечаем, что поскольку рассматриваются квазилинейные системы уравнений с частными производными, то без задания данных на первой поверхности для всех искомых функций заранее нельзя определить: будет ли эта поверхность характеристикой, какова ее кратность и для каких искомых функций надо, кроме данных на первой поверхности, задавать еще условия и на второй поверхности.

Как и в теореме Ковалевской, область сходимости бесконечных рядов, задающих решение, является локальной — некоторой окрестностью рассматри-

ваемой точки, лежащей на пересечении двух поверхностей, несущих данные для этой задачи. Как правило, радиус этой окрестности устанавливается с помощью стандартных (достаточно грубых) оценок. И, как правило, радиусы, оцениваемые таким образом, имеют маленькие значения. Оценить эти радиусы можно приближенно сравнением модулей предыдущего и последующего члена ряда, если есть возможность сосчитать их значения. В случае конкретных характеристических задач Коши стандартного вида, встречающихся в газовой динамике, область сходимости рядов бывает неограниченной по некоторым переменным [188]. Это можно установить в случаях, когда в явном виде определяется структура коэффициентов рядов, как, например, это сделано в § 6 для задачи о плавном притоке.

В подобных случаях факт корректности поставленной начально—краевой задачи устанавливается достаточно просто. В других случаях установление корректности различных начально—краевых задач для нелинейных систем уравнений с частными производными представляется очень трудной задачей, в том числе и потому, что во многих случаях нет даже теорем о существовании и единственности решения. А какие-либо «параллели» со случаями линейных задач для нелинейных задач, как правило, места не имеют.

**Глава II**  
**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ**  
**СПИРАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА**

**§ 4. Трехмерная нестационарная задача о плавном радиальном стоке**

**Теорема о возникновении положительно закрученного  
трехмерного нестационарного течения при начале  
плавного радиального стока**

В данном параграфе рассмотрена конкретная начально-краевая задача для системы уравнений газовой динамики. С точки зрения теории уравнений с частными производными эта задача является характеристической задачей Коши. С точки зрения газовой динамики решение рассматриваемой задачи описывает нестационарное трехмерное течение газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса. Это течение возникает в покоящемся в поле тяжести газе при начале радиального стока во внутрь цилиндра ненулевого радиуса.

С помощью соответствующих математических преобразований поставленная характеристическая задача Коши сведена к стандартному виду, для которого справедлив соответствующий аналог теоремы Ковалевской (см. § 3). Из этой теоремы следует, что рассматриваемая задача о плавном радиальном стоке имеет единственное локально аналитическое решение. Поэтому первые коэффициенты бесконечного ряда, задающего это решение, правильно передают качественное поведение всего течения в начальные моменты времени. В параграфе проанализированы свойства первых коэффициентов этих рядов. Это, в свою очередь, позволило доказать, что при начале заданного плавного радиального стока из покоящегося газа в течении сразу возникает закрутка газа в соответствующем направлении: в случае Северного полушария — в положительном направлении, т. е. против хода часовой стрелки, а в случае Южного полушария — в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки).

Из натуральных наблюдений (см. [108, 115, 116]) этот факт известен. Также имеются обоснования этого факта с помощью достаточно нестрогих рассуж-

дений или с использованием отдельных свойств течений газа (см. [148, 149, 157]).

Однако факт возникновения в сплошной среде закрутки течения под действием силы Кориолиса на строгом математическом уровне: постановка конкретной начально-краевой задачи, имеющей требуемый газодинамический смысл; доказательство существования и единственности ее решения; строгое установление нужных свойств решения — установлен впервые автором данной диссертации совместно с Баутиным С.П. Также в параграфе показано, что если в задаче о плавном радиальном стоке положить  $\Omega = 0$ , т. е. если не учитывать вращение Земли вокруг своей оси, то тогда единственное решение рассмотренной задачи описывает радиальное течение без всякой закрутки. Тем самым в параграфе математически строго доказано, что закрутка воздуха в торнадо и в тропических циклонах возникает только из-за вращения Земли вокруг своей оси. Это и составляет содержание данного параграфа.

Из приведенной в § 1 схемы течения газа в восходящем закрученном потоке, которая ранее была предложена в работе [1], следует, что закрутка воздуха в придонной части имеет принципиальное значение для течения во всем восходящем закрученном потоке.

Рассматриваемое отдельно течение в придонной части восходящего закрученного потока (см. рис. 4.1 и § 1) в предположении его симметричности относительно оси восходящего закрученного потока можно трактовать как течение, расположенное вдоль горизонтальной плоскости и имеющее сток на цилиндре ненулевого радиуса  $r = r_0$ .

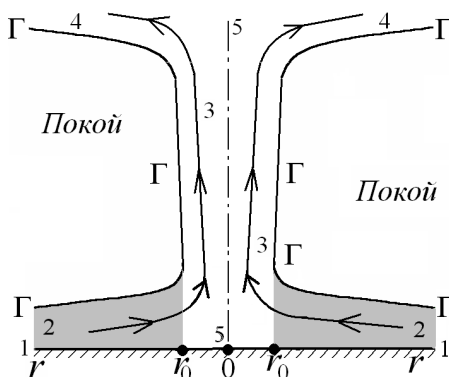


Рис. 4.1



На рис. 4.1 область этого течения затемнена, а значение  $r$  есть расстояние, отсчитываемое вдоль поверхности Земли от оси восходящего закрученного потока.

При построении этого отдельного течения со стоком не ставятся вопросы о том, как и в какую сторону пойдут воздушные массы, попавшие внутрь цилиндра радиуса  $r_0$ , т. е. течение при  $0 < r < r_0$  здесь не исследуется.

### Построение фонового течения и его звуковой характеристики

Набор функций

$$c = c_0(z) \equiv \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz}; \quad u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0 \quad (4.1)$$

является решением системы (3.10), он описывает состояние покоящегося в поле тяжести газа и далее называется фоновым течением. Здесь  $c_{00}$  — положительная константа, задающая значение скорости звука при  $z = 0$ .

Особо подчеркнем, что в фоновом течении закрутки газа нет:  $v = 0$ .

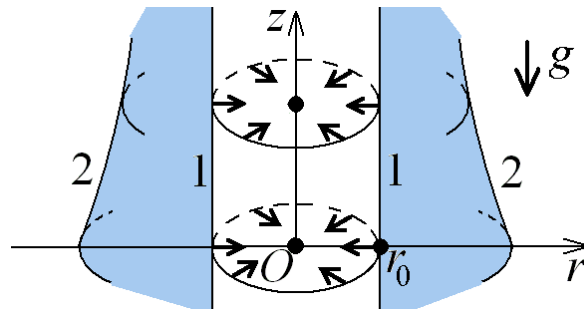


Рис. 4.2

Пусть при  $t = 0$  вне цилиндра радиуса  $r = r_0$ ,  $r_0 = \text{const} > 0$  (рис. 4.2, на котором поверхность цилиндра помечена цифрой 1) находится покоящийся в поле тяжести газ и с этого момента времени на поверхности цилиндра  $r = r_0$  начинается заданный с помощью аналитической в окрестности точки  $t = 0$  функции  $u = u^o(t)$  плавный радиальный сток газа внутрь цилиндра:

$$u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0} = u^o(t), \quad u^o(t)|_{t=0} = 0, \quad [u^o(t)]'|_{t=0} = u_* = \text{const} < 0. \quad (4.2)$$

Исходя из условий (4.2), функцию  $u^o(t)$  можно представить в виде

$$u^o(t) = u_*t + u^{01}(t)t^2$$

со своей заданной аналитической функцией  $u^{01}(t)$ .

Конфигурация возникшего течения со стоком следующая: по покоящемуся в поле тяжести газу в сторону возрастания значений  $r$  распространяется поверхность звуковой  $C^+$ -характеристики. На рис. 4.2 положение этой поверхности в некоторый момент времени  $t > 0$  помечено цифрой 2. Эта поверхность звуковой  $C^+$ -характеристики в каждый момент времени отделяет еще покоящийся при бóльших значениях  $r$  газ от области газа, начавшего при меньших значениях  $r$  движение к границе стока – цилиндру  $r = r_0$ . На рис.4.2 область движущегося газа затемнена. С увеличением значения  $z$  скорость звука убывает (см. первую формулу в (4.1)). Поэтому верхняя часть поверхности звуковой  $C^+$ -характеристики распространяется по покоящемуся в поле тяжести газу медленнее, чем ее нижняя часть.

Можно положить, что поверхность  $C^+$ -характеристики задается в виде

$$C^+ : r = r_0 + r_1(t, z), \quad (4.3)$$

где функция  $r_1(t, z)$  является решением следующей задачи Коши [179]:

$$r_{1t} = c_0(z) \sqrt{1 + r_{1z}^2}; \quad r_1(t, z)|_{t=0} = 0, \quad (4.4)$$

которая по теореме Ковалевской [188] имеет в некоторой окрестности точки  $(t = 0, r = r_0, z = z_0)$  ( $z_0 = \text{const}, 0 \leq z_0 < c_{00}^2/[(\gamma - 1)g]$ ) единственное аналитическое решение, не зависящее от  $\varphi$ .

Построение аналитического решения задачи (4.4) приводит к такому представлению

$$r_1(t, z) = \left[ \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz} \right] t + r_2(t, z)t^3 \quad (4.5)$$

с некоторой аналитической функцией  $r_2(t, z)$ .

### Характеристическая задача Коши о плавном стоке

Для системы уравнений (3.10) на поверхности звуковой  $C^+$ -характеристики

(4.3) ставятся условия

$$\begin{cases} c(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz}; \\ u(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = 0; \\ v(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = 0; \\ w(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

обеспечивающие непрерывное примыкание искомого течения к фоновому.

Кроме условий (4.6), также для системы (3.10) ставится условие (4.2).

Решение получившейся задачи (3.10), (4.6), (4.2) описывает течение газа, расположенное между поверхностью звуковой  $C^+$ -характеристикой (4.3) и поверхностью цилиндра  $r = r_0$ , на котором осуществляется сток газа (см. рис. 4.2).

**Замечание 4.1.** В искомом течении в начальные моменты времени заведомо не возникают ударные волны. Поэтому изэнтропичность искомого течения следует из изэнтропичности исходного фонового течения.

**Теорема 1.** *Задача (3.10), (4.6), (4.2) имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки  $M_0$  с координатами  $t = 0, r = r_0, \varphi = \varphi_0, z = z_0$ , где  $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ .*

### Доказательство теоремы

Доказательство теоремы состоит в сведении задачи (3.10), (4.6), (4.2) к характеристической задаче Коши стандартного вида (см. § 11), для которой справедлив соответствующий аналог теоремы Ковалевской [188, 192].

Для сведения к стандартному виду вначале делается следующая замена переменных

$$\begin{cases} \xi = r_0 + r_1(t, z) - r; \\ \zeta = r - r_0; \\ \varphi' = \varphi; \\ \chi = z, \end{cases} \quad (4.7)$$

т. е. поверхность звуковой  $C^+$ -характеристики (4.3) берется за новую координатную плоскость  $\xi = 0$ , а поверхность цилиндра  $r = r_0$  за другую новую

координатную плоскость  $\zeta = 0$ .

Замена переменных (4.7) является невырожденной в некоторой окрестности рассматриваемой точки  $M_0$ , поскольку при  $t = 0$ ,  $z = z_0$  якобиан этого преобразования равен  $c_0(z_0)$ , т. е. отличен от нуля.

Для обратного перехода от новых переменных к старым имеются такие равенства

$$\begin{cases} t = \frac{(\xi + \zeta)}{\sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)g\chi}} + t_2(\xi + \zeta, \chi)(\xi + \zeta)^2; \\ r = \zeta + r_0; \\ \varphi = \varphi'; \\ z = \chi; \end{cases} \quad (4.8)$$

где функция  $t_2(\xi + \zeta, \chi)$  является аналитической в некоторой окрестности точки  $(\xi = 0, \zeta = 0, \chi = 0)$ .

Первое из соотношений в (4.8) получается из представлений (4.3), (4.5):

$$F(t, z, r - r_0) \equiv \left[ \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz} \right] t + r_2(t, z)t^3 - (r - r_0) = 0$$

по теореме о существовании неявно заданной функции и с использованием остальных соотношений из (4.8), а также равенства:  $r_1(t, \chi) = \xi + \zeta$ .

Формулы для частных производных при замене (4.7) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = r_{1t} \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \chi} + r_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Естественно, что в этих формулах значения производных  $r_{1t}$  и  $r_{1z}$  надо записать через новые переменные:

$$r_{1t} = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)g\chi} + r_3(\xi + \zeta, \chi)(\xi + \zeta)^2, \quad (4.9)$$

$$r_{1z} = -\frac{(\gamma - 1)g}{2\sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)g\chi}}(\xi + \zeta) + r_4(\xi + \zeta, \chi)(\xi + \zeta)^2 \quad (4.10)$$

со своими аналитическими в некоторой окрестности точки  $(\xi = 0, \zeta = 0, \chi = 0)$  функциями  $r_3(\xi + \zeta, \chi)$ ,  $r_4(\xi + \zeta, \chi)$ . Заметим, что от переменной  $\varphi'$  выражения (4.9), (4.10) не зависят. Далее штрих у  $\varphi$  опускается.

Для удобства дальнейших преобразований третье и четвертое уравнения системы (3.10) записываются как первое и второе и в полученной системе делается замена переменных (4.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} (r_{1t} - u + r_{1z}w)v_\xi + uv_\zeta + \frac{uv}{(\zeta + r_0)} + \frac{v}{(\zeta + r_0)}v_\varphi + \\ + wv_\chi + \frac{2c}{(\gamma - 1)(\zeta + r_0)}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi; \\ (r_{1t} - u + r_{1z}w)w_\xi + uw_\zeta + \frac{v}{(\zeta + r_0)}w_\varphi + ww_\chi + \\ + \frac{2c}{(\gamma - 1)}c_\chi + \frac{2r_{1z}c}{(\gamma - 1)}c_\xi = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g; \\ (r_{1t} - u + r_{1z}w)c_\xi + uc_\zeta + \frac{v}{(\zeta + r_0)}c_\varphi + wc_\chi + \\ + \frac{(\gamma - 1)}{2}c \left[ u_\zeta - u_\xi + \frac{u}{(\zeta + r_0)} + \frac{v_\varphi}{(\zeta + r_0)} + w_\chi + r_{1z}w_\xi \right] = 0; \\ (r_{1t} - u + r_{1z}w)u_\xi + uu_\zeta + \frac{v}{(\zeta + r_0)}u_\varphi - \frac{v^2}{(\zeta + r_0)} + \\ + wu_\chi + \frac{2c}{(\gamma - 1)}c_\zeta - \frac{2c}{(\gamma - 1)}c_\xi = av - bw \cos \varphi. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Начальные условия (4.6), заданные на  $C^+$ -характеристике, становятся такими:

$$v|_{\xi=0} = 0; \quad w|_{\xi=0} = 0; \quad c|_{\xi=0} = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)g\chi}; \quad u|_{\xi=0} = 0, \quad (4.12)$$

а краевое условие (4.2) с учетом первого из соотношений (4.8) и представления:  $u^o(t) = u_*t + u^{o1}(t)t^2$  – переходит в такое:

$$u|_{\zeta=0} = \frac{u_*}{\sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)g\chi}}\xi + u_{01}(\xi, \chi)\xi^2, \quad (4.13)$$

где функция  $u_{01}(\xi, \chi)$  считается заданной и аналитической в некоторой окрестности точки  $(\xi = 0, \chi = z_0)$ .

Система (4.11) в векторно-матричном виде имеет следующее представление:

$$AU_\xi + BU_\zeta + CU_\chi + DU_\varphi = \mathbf{G},$$

где, в частности,

$$A = \begin{pmatrix} r_{1t} - u + r_{1z}w; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & r_{1t} - u + r_{1z}w; & \frac{2r_{1z}c}{(\gamma - 1)}; & 0 \\ 0; & \frac{(\gamma - 1)r_{1z}c}{2}; & r_{1t} - u + r_{1z}w; & -\frac{(\gamma - 1)c}{2} \\ 0; & 0; & -\frac{2c}{(\gamma - 1)}; & r_{1t} - u + r_{1z}w \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} u; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & u; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & u; & \frac{(\gamma - 1)c}{2} \\ 0; & 0; & \frac{2c}{(\gamma - 1)}; & u \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ c \\ u \end{pmatrix}.$$

Чтобы показать, что рассматриваемая характеристическая задача Коши (4.11)–(4.13) сводится к стандартному виду, достаточно подобрать невырожденные матрицы  $T_1$  и  $T_2$ , зависящие от  $\zeta$ ,  $\chi$ ,  $\varphi$  и такие, что произведения  $(T_1AT_2)|_{\xi=0}$  и  $(T_1BT_2)|_{\xi=0}$  имеют требуемый вид. А именно:

$$(T_1AT_2)|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (T_1BT_2)|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}$$

и при этом

$$\det Q = \left( \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} \right) \Big|_{\zeta=0, \chi=z_0, \varphi=\varphi_0} \neq 0; \quad s_{44}|_{\zeta=0, \chi=z_0, \varphi=\varphi_0} \neq 0.$$

Кроме того, требуется, чтобы задание условия (4.13) было эквивалентно заданию соответствующего условия при  $\zeta = 0$  для последней компоненты

вектора

$$T_2^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix}.$$

Требуемые матрицы  $T_1$  и  $T_2$  имеют следующий вид:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 1; & 0 \\ 0; & -(r_{1z}|_{\xi=0}); & \frac{2}{(\gamma-1)}\sqrt{1+(r_{1z}|_{\xi=0})^2}; & 1 \end{pmatrix}, \det T_1 = 1 \neq 0;$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 0; & -(r_{1z}|_{\xi=0}) \\ 0; & 0; & 1; & \frac{(\gamma-1)}{2}\sqrt{1+(r_{1z}|_{\xi=0})^2} \\ 0; & 0; & 0; & 1 \end{pmatrix}, \det T_2 = 1 \neq 0;$$

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 0; & (r_{1z}|_{\xi=0}) \\ 0; & 0; & 1; & -\frac{(\gamma-1)}{2}\sqrt{1+(r_{1z}|_{\xi=0})^2} \\ 0; & 0; & 0; & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица  $T_1 (A|_{\xi=0}) T_2$  имеет нужное представление:

$$T_1 (A|_{\xi=0}) T_2 = \begin{pmatrix} (r_{1t}|_{\xi=0}); & 0; & 0; & 0 \\ 0; & (r_{1t}|_{\xi=0}); & \frac{2(r_{1z}|_{\xi=0})c_0(\chi)}{(\gamma-1)}; & 0 \\ 0; & \frac{(\gamma-1)(r_{1z}|_{\xi=0})c_0(\chi)}{2}; & (r_{1t}|_{\xi=0}); & 0 \\ 0; & 0; & 0; & 0 \end{pmatrix}$$

и стоящий в ее левом верхнем углу минор, размеров  $3 \times 3$ ,

$$\begin{vmatrix} (r_{1t}|_{\xi=0}); & 0; & 0 \\ 0; & (r_{1t}|_{\xi=0}); & \frac{2(r_{1z}|_{\xi=0})c_0(\chi)}{(\gamma-1)} \\ 0; & \frac{(\gamma-1)(r_{1z}|_{\xi=0})c_0(\chi)}{2}; & (r_{1t}|_{\xi=0}) \end{vmatrix} =$$

$$= (r_{1t}|_{\xi=0}) \left[ (r_{1t}|_{\xi=0})^2 - (r_{1z}|_{\xi=0})^2 c_0^2(\chi) \right] = c_0^3(\chi) \sqrt{1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2}$$

при  $\xi = \zeta = 0$ ,  $\chi = z_0$  равен  $c_0^3(z_0)$  и, следовательно, отличен от нуля в некоторой окрестности точки  $M_0$ . Приведенное представление минора получено с учетом соотношения (4.4).

У матрицы

$$T_1 (B|_{\xi=0}) T_2 = \begin{pmatrix} 0; 0; 0; 0 \\ 0; 0; 0; 0 \\ 0; 0; 0; \frac{(\gamma-1)c_0(\chi)}{2} \\ 0; 0; \frac{2c_0(\chi)}{(\gamma-1)}; 2c_0(\chi) \sqrt{1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2} \end{pmatrix}$$

стоящий в правом нижнем углу элемент при  $\zeta = \xi = 0$ ,  $\chi = z_0$  имеет значение  $2c_0(z_0)$  и, следовательно, отличен от нуля в некоторой окрестности точки  $M_0$ .

Вид вектора  $\mathbf{W}$  такой

$$\mathbf{W} = T_2^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ w + (r_{1z}|_{\xi=0}) u \\ c - \frac{(\gamma-1)}{2} \sqrt{1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2} u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $W_4$  — последняя координата получившегося вектора  $\mathbf{W}$  — совпадает с функцией  $u$ , то краевое условие (4.13) переходит в краевое условие для функции  $W_4$ .

Таким образом, характеристическая задача Коши (4.11)–(4.13) приведена к стандартному виду [188, 192], и теорема доказана.

### Одно свойство решения рассматриваемой задачи

Для обоснования одного конкретного свойства решения характеристической задачи Коши (4.11)–(4.13) строятся и анализируются первые коэффициенты ряда

$$\mathbf{U}(\xi, \zeta, \varphi, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\zeta, \varphi, \chi) \frac{\xi^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(\zeta, \varphi, \chi) = \left. \left( \frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial \xi^k} \right) \right|_{\xi=0},$$



задающего решение рассматриваемой начально-краевой задачи. При этом коэффициент  $U_0$  определяется начальными условиями (4.12).

В системе (4.11) полагается  $\xi = 0$  и учитываются равенства (4.12):

$$\begin{cases} (r_{1t}|_{\xi=0}) v_1 = 0, \\ (r_{1t}|_{\xi=0}) w_1 + \frac{2c_0(\chi)}{(\gamma-1)} c'_0(\chi) + \frac{2(r_{1z}|_{\xi=0}) c_0(\chi)}{(\gamma-1)} c_1(\chi) = -g, \\ (r_{1t}|_{\xi=0}) c_1 - \frac{(\gamma-1)c_0(\chi)}{2} u_1 + \frac{(\gamma-1)c_0(\chi)(r_{1z}|_{\xi=0})}{2} w_1(\chi) = 0, \\ (r_{1t}|_{\xi=0}) u_1 - \frac{2c_0(\chi)}{(\gamma-1)} c_1 = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Поскольку фоновое течение является решением системы (3.10), то

$$\frac{2}{(\gamma-1)} c_0(\chi) c'_0(\chi) = -g,$$

и из (4.14) получаются следующие три соотношения:

$$\begin{cases} v_1 = 0, \\ w_1 = -\frac{2(r_{1z}|_{\xi=0}) c_0(\chi)}{(\gamma-1)(r_{1t}|_{\xi=0})} c_1, \\ c_1 = \frac{(\gamma-1)(r_{1t}|_{\xi=0})}{2c_0(\chi)} u_1, \end{cases}$$

так как после исключения из последних двух уравнений системы (4.14) величины  $w_1$  эти уравнения становятся пропорциональными и одно из них отбрасывается.

Таким образом, имеют место такие равенства

$$v_1 = 0; \quad w_1 = -(r_{1z}|_{\xi=0}) u_1; \quad c_1 = \frac{(\gamma-1)}{2} \sqrt{1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2} u_1. \quad (4.15)$$

Последнее равенство в (4.15) получено с учетом соотношения (4.4).

Чтобы узнать значение коэффициента  $u_1$  при  $\zeta = 0$ ,  $\chi = z_0$ , необходимо краевое условие (4.13) продифференцировать по  $\xi$  и положить в получившемся равенстве  $\xi = 0$ ,  $\chi = z_0$ :

$$u_1|_{\zeta=0, \chi=z_0} = \frac{u_*}{c_0(z_0)} < 0. \quad (4.16)$$

Отсюда, в частности, следует, что при всех значениях  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$u_{1\varphi}|_{\zeta=0, \chi=z_0} = 0. \quad (4.17)$$

Для получения коэффициента  $v_2$  первое уравнение системы (4.11) дифференцируется по  $\xi$ , полагается  $\xi = 0$  и учитываются компоненты вектора  $\mathbf{U}_0$ :

$$(r_{1t}|_{\xi=0}) v_2 + \frac{2c_0(\chi)}{(\gamma - 1)(\zeta + r_0)} c_{1\varphi} = -au_1 + bw_1 \sin \varphi.$$

С учетом соотношений (4.15) и независимости от  $\varphi$  функций  $c_0(\chi)$ ,  $r_{1t}|_{\xi=0}$  получается следующее равенство:

$$v_2 = \frac{(-1)}{(r_{1t}|_{\xi=0})} \left\{ \frac{(r_{1t}|_{\xi=0})}{(\zeta + r_0)} u_{1\varphi} + [a + b(r_{1z}|_{\xi=0}) \sin \varphi] u_1 \right\}. \quad (4.18)$$

Для установления одного конкретного свойства решения характеристической задачи Коши (4.11)–(4.13) явный вид коэффициентов  $w_1$ ,  $c_1$ ,  $u_1$  не нужен.

Если в представлении (4.18) для  $v_2$  полагается  $\zeta = 0$ ,  $\chi = z_0$ , учитываются соотношения (4.9), (4.10), (4.17), то при всех значениях  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  оно переходит в такое представление:

$$v_2|_{\zeta=\chi=0} = -\frac{2\Omega \sin \psi}{c_{00}} (u_1|_{\zeta=0, \chi=z_0}). \quad (4.19)$$

Из формулы (4.19) и с учетом неравенства (4.16) следует, что в Северном полушарии, где  $\sin \psi > 0$ ,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\zeta=0, \chi=z_0} = v_2|_{\zeta=0, \chi=z_0} > 0, \quad (4.20)$$

а в Южном полушарии, где  $\sin \psi < 0$ ,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\zeta=0, \chi=z_0} = v_2|_{\zeta=0, \chi=z_0} < 0 \quad (4.21)$$

при всех значениях  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

С учетом формул для преобразования производных, а также нулевых значений  $v_0$ ,  $v_1$  получаются следующие значения для первых двух производных функции  $v$ , выводящих со звуковой  $C^+$ -характеристики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{C^+} &= \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} = v_{0\zeta} - v_1 = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \Big|_{C^+} &= \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\xi=0} = v_{0\zeta\zeta} - 2v_{1\zeta} + v_2 = v_2. \end{aligned}$$

На рис. 4.3 с учетом установленных знаков выводятся с  $C^+$ -характеристики производных (для  $v$  взят случай Северного полушария) показано качественное поведение  $u, v$  в ее окрестности в некоторый момент времени  $t = t_1$ :  $t_1 > 0$ .

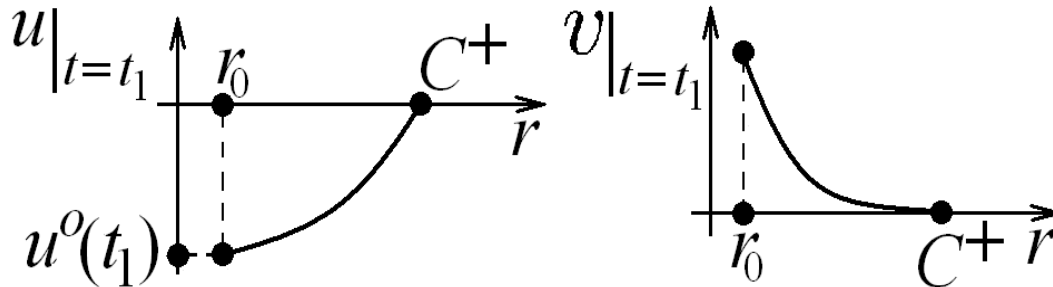


Рис. 4.3

Таким образом, с учетом неравенств (4.20), (4.21) доказано, что в задаче о стоке при всех  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  в некоторой окрестности звуковой  $C^+$ -характеристики, начиная с момента времени  $t = 0$ , возникает закрутка газа: в положительном направлении для течения в Северном полушарии и в отрицательном направлении в случае Южного полушария.

Последний установленный факт есть строгое математическое обоснование результатов соответствующих экспериментов в части возникновения закрутки газа и направления этой закрутки для модели идеального политропного газа.

В экспериментах, проводимых под руководством А. Ю. Вараксина в Объединенном институте высоких температур РАН, г. Москва (Северное полушарие), восходящий конвективный поток воздуха закручивается в положительном направлении [99–113].

В экспериментах, проведенных в Екатеринбурге [54, 97] (Северное полушарие), с помощью вентилятора вытяжного действия, помещенного на верхний край вертикально расположенной трубы, в ней был создан стабильный восходящий поток. Наличие восходящего потока привело к возникновению в придонной части как радиального, так и окружного движения воздуха, закрученного в положительном направлении.

В экспериментах по возникновению закрутки воды в ванной при ее сливе

через нижнее отверстие в случае Северного полушария (Бостон, штат Массачусетс, США) закрутка сливающейся воды происходит в положительном направлении [181] (см. также [182]). В случае Южного полушария (Сидней, Австралия) закрутка сливающейся воды происходит в отрицательном направлении [183].

Естественно, что построенный начальный отрезок ряда трудно использовать для детального сопоставления решения задачи о плавном стоке со значениями газодинамических параметров, полученных в экспериментах. Для подобного детального сопоставления задачу о стоке необходимо решать численно.

**Замечание 4.2.** Если в системе (3.10) не учитывать влияние силы Кориолиса, т. е. положить  $\Omega = 0$ , то тогда  $a = b = 0$  и в решении задачи (3.10), (4.6), (4.2) окружная скорость будет тождественным нулем:  $v \equiv 0$ . Как и в задаче о радиальном притоке, рассмотренной в § 5. Следовательно, в случае отсутствия действия силы Кориолиса, т. е. в случае неучета вращения Земли вокруг своей оси, никакой закрутки газа при радиальном стоке не возникает.

Поэтому *возникновение закрутки газа в задаче о плавном радиальном стоке есть следствие только вращения Земли вокруг своей оси.*

## § 5. Трехмерная задача о заданном радиальном притоке в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости

В данном параграфе для системы уравнений газовой динамики (3.10) рассмотрена одна конкретная характеристическая задача Коши с начальными данными на горизонтальной плоскости  $z = 0$ . При этом полагается равным нулю значение вертикальной составляющей  $w$  вектора скорости газа при  $z = 0$ . Это означает, что газ через плоскость  $z = 0$  не течет, т. е. эта плоскость является непроницаемой для газа. В газовой динамике такие поверхности называют контактными. Для системы уравнений газовой динамики контактная поверхность заведомо является характеристикой. В случае общих пространственных изэнтропических течений кратность контактной характеристики равна двум. Поэтому для того, чтобы рассматриваемая задача с начальными данными при  $z = 0$  имела единственное решение, необходимо на другой поверхности задавать два дополнительных условия.

Здесь это будут условия на радиальную  $u$  и на окружную  $v$  компоненты вектора скорости газа. Задаваться они будут на некотором цилиндре ненулевого радиуса  $r = r_{in}$ ,  $r_{in} = \text{const} > 0$ . Для большей простоты детальнее будет рассмотрен случай, когда радиальная составляющая  $u$  вектора скорости газа будет полагаться постоянным отрицательным числом, а окружная  $v$  — нулем. С точки зрения газовой динамики это означает, что через поверхность цилиндра в его внутреннюю область происходит заданный постоянный радиальный приток газа, не имеющего закрутку.

Показано, что при этих дополнительных условиях рассматриваемая характеристическая задача Коши имеет единственное локально-аналитическое решение и его можно представить в виде бесконечного сходящегося ряда по степеням  $z$ . Коэффициенты этого ряда зависят от остальных независимых переменных  $t, r, \varphi$ .

Как и для любой характеристической задачи Коши, функции, задающие начальные значения искомым функций на поверхности характеристики (в данном случае — на плоскости  $z = 0$ ) не могут быть взяты произвольными. Они

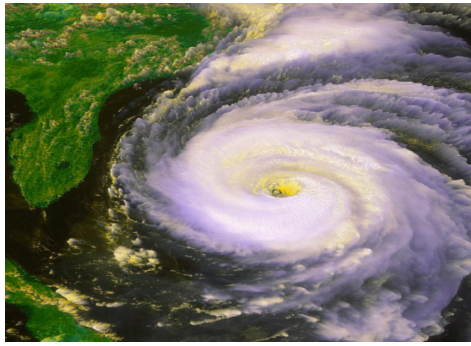
должны удовлетворять так называемым необходимым условиям разрешимости рассматриваемой характеристической задачи Коши. В случае контактной характеристики, имеющей кратность два, этих условий также два. Они имеют вид двух уравнений с частными производными, которым должны удовлетворять заданные при  $z = 0$  начальные данные для трех искомых функций: скорости звука  $c$  и компонент  $u$ ,  $v$  вектора скорости газа.

В параграфе эта система из двух уравнений для трех неизвестных функций дополняется третьим уравнением, имеющим конкретный газодинамический смысл. Это третье уравнение есть дифференциальная форма закона сохранения массы для плоских течений, т. е. для течений, расположенных в плоскости  $z = 0$ . Показано, что у получившейся системы из трех уравнений можно построить частное решение, зависящее только от  $r$  и передающее на поверхности цилиндра притока нужные значения для  $u$  и  $v$ . Полученная система трех уравнений также имеет решения, зависящие только от  $t$ ,  $r$  и не зависящие от  $\varphi$ , которые описывают уже нестационарные плоские течения.

### Газодинамическая задача

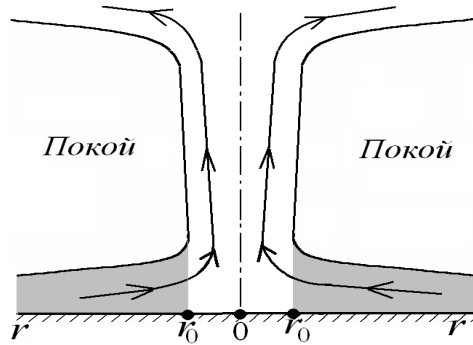
Исследование любого процесса начинается с постановки физической задачи, ее модели, или, выражаясь языком газовой динамики, с задания газодинамической конфигурации.

Глядя на фотографию тропического циклона, сделанного из космоса (см. рис. 5.1), можно сделать вывод об определенной симметричности потока относительно его центра. Кроме этого, достаточно определенно можно высказать предположение, что основное течение, имеющее конечный радиус  $r = r_{in}$ , вращается, а во внешней, по отношению ко вращающейся части, области большое движение не наблюдается. И, наконец, в центральной части потока, имеющей свой радиус  $r = r_0$ , серьезное движение воздуха не фиксируется. Также принципиальным является тот факт, что поток расположен над непроницаемой для воздуха подстилающей поверхностью воды или суши.



*Рис. 5.1*

Если предположить, что восходящий закрученный поток имеет структуру, изображенную на рис. 5.2, то наблюдаемое течение (см. рис. 5.1) является придонной частью восходящего закрученного потока, которая на рис. 5.2 затемнена.



*Рис. 5.2*

### **Постановка начально-краевой задачи**

Постановка математической начально-краевой задачи, решение которой моделирует описанное течение, следующая.

Рассматривается система уравнений газовой динамики при учете действия силы тяжести и Кориолиса, записанная в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  для изэнтропических течений политропного газа и имеющая следующий вид (см. § 3):

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left( u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Здесь  $t$  – время;  $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$  – скорость звука газа;  $\rho$  – плотность газа;  $\gamma = \text{const} > 1$  – показатель политропы газа;  $u, v, w$  – радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа соответственно;  $a = 2\Omega \sin \psi$ ;  $b = 2\Omega \cos \psi$ ;  $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$  – модуль вектора угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси;  $\psi$  – широта точки на поверхности Земли, в которой находится начало цилиндрической системы координат, вращающейся вместе с Землей. Предполагается, что  $\sin \psi \neq 0$ , т.е. начало координат не лежит на экваторе.

Для системы (5.1) на плоскости  $z = 0$  ставятся следующие начальные данные:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = c_0(t, r, \varphi), \\ u(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = u_0(t, r, \varphi), \\ v(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = v_0(t, r, \varphi), \\ w(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = 0, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

где функции  $c_0(t, r, \varphi)$ ,  $u_0(t, r, \varphi)$ ,  $v_0(t, r, \varphi)$  считаются аналитическими в области

$$\Theta : \left\{ t \geq 0; r_0 \leq r \leq r_{in}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}; 0 < r_0 < r_{in},$$

пока не определены, но с обязательным условием:  $c_0 \geq c_{00} = \text{const} > 0$  в области  $\Theta$ .

Последнее из начальных условий (5.2) обеспечивает условие непротекания газа через плоскость  $z = 0$ . В этом случае поверхность  $z = 0$  являет-



ся контактной поверхностью и, поскольку рассматриваются изэнтропические течения газа, то контактная поверхность для системы уравнений газовой динамики является характеристикой кратности два [188] и задача (5.1), (5.2) является характеристической задачей Коши [188].

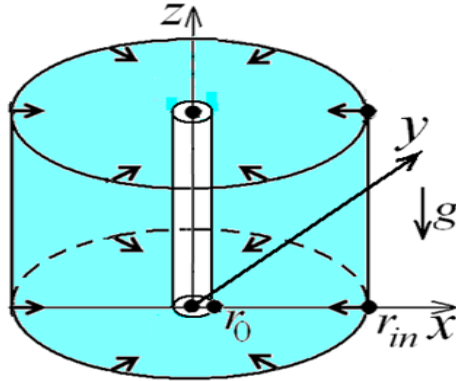


Рис. 5.3

Для обеспечения единственности решения характеристической задачи Коши (5.1), (5.2) необходимо задать два дополнительных условия [188], например, вида

$$\begin{cases} u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z); & u^o(0, \varphi_0, 0) = u_{in} = \text{const} < 0; \\ v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z); \end{cases} \quad (5.3)$$

с аналитическими функциями  $u^o(t, \varphi, z)$ ,  $v^o(t, \varphi, z)$ , согласованными с условиями (5.2) при  $z = 0$ ,  $r = r_{in}$ . Неравенство

$$u^o(0, \varphi_0, 0) = u_{in} = \text{const} < 0$$

обеспечивает приток газа снаружи в область  $\Theta$ . Область  $\Theta$ , в которой будет строиться решение поставленной задачи без учета изменения переменной  $t$ , схематично изображена на рис. 5.3.

Для того, чтобы поставленная задача (5.1)–(5.3) имела решение, требуется выполнение необходимых условий разрешимости характеристической задачи Коши [188], которые получаются следующим образом.

Если в системе (5.1) положить  $z = 0$  и учесть начальные условия (5.2), то

получаются такие четыре соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} + w_1 \right) = 0, \\ u_{0t} + u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = av_0, \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -au_0, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_1 = bu_0 \cos \varphi - bv_0 \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

где

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}|_{z=0}; \quad \mathbf{U}_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right|_{z=0}; \quad \mathbf{U} = (c, u, v, w)$$

Из первого и четвертого уравнения определяются  $w_1$  и  $c_1$ :

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left( c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} \right) - u_{0r} - \frac{u_0}{r} - \frac{v_{0\varphi}}{r}, \\ c_1 &= \frac{(\gamma - 1)}{2c_0} (bu_0 \cos \varphi - bv_0 \sin \varphi - g). \end{aligned} \quad (5.5)$$

А второе и третье соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{0t} + u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = av_0, \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -au_0 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

являются необходимыми условиями разрешимости рассматриваемой характеристической задачи Коши. Если предполагать существование решения у задачи (5.1)–(5.3), то эти два выписанных соотношения (5.6) должны выполняться. То есть эти два соотношения накладывают на первые три условия из начальных данных (5.2) при  $z = 0$  соответствующие ограничения:  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  не могут быть произвольными, а должны удовлетворять этим двум выписанным соотношениям (5.6).

**Теорема о существовании и единственности решения  
у поставленной начально-краевой задачи**

**Теорема 2.** *Задача (5.1)–(5.3) есть характеристическая задача Коши стандартного вида с данными на характеристике кратности два, имеющая в случае аналитичности всех входных данных единственное аналитическое решение при выполнении необходимых условий разрешимости характеристической задачи Коши (5.6) с аналитическими функциями  $u^o(t, \varphi, z)$ ,  $v^o(t, \varphi, z)$ , согласованными с условиями (5.2) при  $z = 0$ ,  $r = r_{in}$ :*

$$\begin{cases} u_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z)|_{z=0}, \\ v_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z)|_{z=0}. \end{cases} \quad (5.7)$$

*Аналитическое решение существует в некоторой окрестности точки  $M_0$  с координатами  $(t = 0, r = r_{in}, \varphi = \varphi_0, z = 0)$ , где  $\varphi_0$  – любое значение из отрезка  $[0, 2\pi]$ .*

Решение задачи (5.1)–(5.3) описывает течение газа в окрестности непроходимой плоскости  $z = 0$ , когда через поверхность вертикального цилиндра заданного ненулевого радиуса  $r = r_{in}$  осуществляется заданный приток газа (рис. 5.2). В частности, условия (5.3) можно брать такими:

$$u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u_{in} = \text{const} < 0; \quad v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = 0 \quad (5.8)$$

при соответствующих условиях согласования

$$u_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u_{in}, \quad v_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = 0. \quad (5.9)$$

Приведенные условия (5.8) передают заданный на поверхности цилиндра  $r = r_{in}$  постоянный приток газа во внутреннюю область, ограниченную этим цилиндром. При этом на поверхности цилиндра притока  $r = r_{in}$  газ закрутку не имеет.

Доказательство теоремы проводится сведением задачи (5.1)–(5.3) к характеристической задаче Коши стандартного вида [188]. Для этого четвертое уравнение в системе (5.1) переставляется на первое место; делается замена

переменных

$$t = t'; \quad \zeta = r - r_0; \quad \varphi = \varphi'; \quad z = z';$$

и переставляются слагаемые в уравнениях.

В результате вместо задачи (5.1)–(5.3) получается следующая, эквивалентная ей, задача (5.10)–(5.12):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z + ww_z + uw_\zeta + \frac{v}{\zeta+r_0}w_\varphi + w_t = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - \\ -g, \\ \\ wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}cw_z + uc_\zeta + \frac{(\gamma-1)}{2}cu_\zeta + \frac{v}{\zeta+r_0}c_\varphi + \\ + \frac{(\gamma-1)}{2}c\frac{v_\varphi}{\zeta+r_0} + c_t = -\frac{(\gamma-1)}{2}\frac{u}{\zeta+r_0}, \\ \\ wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_\zeta + uu_\zeta + \frac{v}{\zeta+r_0}u_\varphi + u_t = av - bw \cos \varphi + \\ + \frac{v^2}{\zeta+r_0}, \\ \\ wv_z + uv_\zeta + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{\zeta+r_0}c_\varphi + \frac{v}{\zeta+r_0}v_\varphi + v_t = -au + bw \sin \varphi - \\ -\frac{uv}{\zeta+r_0}, \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$\mathbf{W}|_{z=0} = \mathbf{W}_0; \quad (5.11)$$

$$u|_{\zeta=0} = u^0; \quad v|_{\zeta=0} = v^0; \quad (5.12)$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} c \\ w \\ u \\ v \end{pmatrix};$$

где штрихи у независимых переменных опущены для облегчения написания.

В векторно-матричной форме система (5.10) такая:

$$A \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z} + B \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \zeta} + C \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varphi} + D \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{F},$$

где матрицы  $A$ ,  $B$  имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma-1}c & w & 0 & 0 \\ w & \frac{\gamma-1}{2}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ u & 0 & \frac{\gamma-1}{2}c & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1}c & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

При  $z = 0$  и учете начальных условий, в том числе  $w_0 = 0$ , в матрице  $A|_{z=0}$  минор размеров  $2 \times 2$ , стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, поскольку  $c_0 \geq c_{00} > 0$ , а все остальные элементы в матрице  $A|_{z=0}$ , окаймляющие этот минор, тождественно равны нулю.

В матрице  $B|_{M_0}$  стоящий в правом нижнем углу минор размеров  $2 \times 2$  отличен от нуля, поскольку  $u|_{M_0} < 0$  (см. (5.3) и (5.8)).

Вид характеристической задачи Коши (5.1)–(5.3) оказался относительно простым, и поэтому искать матрицы  $T_1$ ,  $T_2$ , как того требует переход к характеристической задаче Коши стандартного вида [188], не надо. Роль этих матриц выполнили перестановка уравнений в системе и перестановки слагаемых в уравнениях.

Следовательно, для задачи (5.10)–(5.12) справедлив соответствующий аналог теоремы Ковалевской [188], и поэтому теорема доказана.

## § 6. Построение решений задачи о притоке в виде бесконечного ряда по степеням $z$

В параграфе описана процедура построения коэффициентов бесконечного ряда (5.13) с тем, чтобы в дальнейшем конечный отрезок этого ряда применить для приближенного описания течений газа в придонных частях торнадо и тропического циклона.

Благодаря тому, что системы, при решении которых однозначно определяются последующие за нулевыми коэффициенты ряда по степеням  $z$ , являются линейными, удалось применить процедуру разделения переменных и зависимость последующих коэффициентов от  $\varphi$  выразить в явном виде через гармоники от  $\varphi$ . В результате коэффициенты рядов для функций  $u$  и  $v$  в стационарном случае определяются из линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений или в нестационарном случае из линейных систем уравнений с частными производными по  $t$  и  $r$ . Единственность решений этих систем дифференциальных уравнений получается при удовлетворении на поверхности цилиндра заданному режиму притока газа. После этого коэффициенты рядов для  $s$  и для  $w$  находятся также единственным образом, но уже из явных алгебраических уравнений.

В параграфе приведены коэффициенты рядов для функций  $u$  и  $v$  при степенях по  $z^3$  включительно. А также коэффициенты при степенях по  $z^4$  включительно для функций  $s$ ,  $w$ .

### Построение коэффициентов $c_0$ , $u_0$ , $v_0$ ряда (5.13)

Для построения коэффициентов  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  необходимые условия разрешимости (5.6) задачи (5.1) – (5.3) дополняются конкретным уравнением. Это уравнение является дифференциальной формой закона сохранения массы у течения с параметрами  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ , расположенного в плоскости  $z = 0$ . Оно получается из соотношения (5.5), если в нем положить  $w_1 = 0$ .

В результате получается следующая система дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} \right) = 0, \\ u_{0t} + u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0, \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -a u_0, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Вначале рассматривается стационарный случай, когда решение системы (6.1) зависит только от переменной  $r$ :

$$c_0 = c_0(r); \quad u_0 = u_0(r); \quad v_0 = v_0(r),$$

Для этого в системе (6.1) полагается  $\partial/\partial t = \partial/\partial \varphi = 0$ , и она переходит в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(r) c_0'(r) + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0(r) \left[ u_0'(r) + \frac{u_0(r)}{r} \right] = 0; \\ u_0(r) u_0'(r) - \frac{v_0^2(r)}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0(r) c_0'(r) = a v_0(r); \\ u_0(r) v_0'(r) + \frac{u_0(r) v_0(r)}{r} = -a u_0(r). \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Начальные условия для нее можно положить такими:

$$c_0(r)|_{r=r_{in}} = 1; \quad u_0(r)|_{r=r_{in}} = u_{in} = \text{const} < 0; \quad v_0(r)|_{r=r_{in}} = 0. \quad (6.3)$$

т. е. рассмотреть (см. формулы (5.8) и (5.9)) случай заданного постоянного притока газа, не имеющего закрутку.

Стационарные решения системы (6.2), т. е. не зависящие от времени решения, имеют следующий вид:

$$c_0(r) = \left[ \frac{A}{ru_0(r)} \right]^{(\gamma-1)/2};$$

$$F(r, u_0) \equiv \frac{2}{(\gamma-1)} \left( \frac{A}{ru_0} \right)^{(\gamma-1)} + u_0^2 - B + \frac{a^2 r_{in}^4}{4r^2} + \frac{a^2}{4} r^2 = 0; \quad (6.4)$$

$$v_0(r) = \frac{a(r_{in}^2 - r^2)}{2r}, \quad v(r_{in}) = 0, \quad v_0(r) \neq 0 \text{ при } r \neq r_{in};$$

$A, B, r_{in} - \text{const.}$  Функция  $u_0(r)$  задается в неявном виде с помощью второго соотношения из (6.4). Достаточное условие существования функции, неявно заданной функциональным уравнением  $F(r, u) = 0$ , имеет вид:

$$r(u_0^2 - c_0^2) \neq 0.$$

Заметим, что эффективнее определять значения функций  $c_0(r)$ ,  $u_0(r)$  не из формул (6.4), а при численном построении решений соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающейся из системы (6.2) при записи ее в нормальной форме и при учете формулы для  $v_0(r)$ :

$$\begin{cases} c_0' = -\frac{(\gamma-1)}{2} c_0 \frac{\left[ u_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}, \\ u_0' = u_0 \frac{\left[ c_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Начальные данные для этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений задаются первыми двумя соотношениями из (6.3).

Численное построение функций  $c_0(r)$ ,  $u_0(r)$  приведено в § 10, 11.

Таким образом, коэффициенты  $\mathbf{U}_0$  и  $w_1, c_1$  определяются единственным образом и, в частности,

$$w_1 = 0;$$

$$c_1 = c_1(r, \varphi) \equiv c_{10}(r) + c_{11}(r) \cos \varphi + c_{12}(r) \sin \varphi, \quad (6.6)$$



где

$$c_{10} = -g \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{1}{c_0(r)}; \quad c_{11} = b \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{u_0(r)}{c_0(r)}; \quad c_{12} = -b \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{v_0(r)}{c_0(r)}.$$

При решении системы (6.1) в нестационарном случае можно предположить отсутствие зависимости от переменной  $\varphi$ :  $\partial/\partial\varphi = 0$  – и тогда получившаяся система допускает переход к эквивалентной ей системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

После определения в нестационарном случае коэффициентов  $c_0(t, r)$ ,  $u_0(t, r)$ ,  $v_0(t, r)$ , коэффициент  $c_1(t, r)$  имеет вид (6.6), в котором функции  $c_0$ ,  $c_{10}$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  уже зависят и от  $r$ , и от  $t$ . Коэффициент  $w_1$  и в нестационарном случае положен тождественно равным нулю.

### Построение коэффициентов $c_2$ , $u_1$ , $v_1$ , $w_2$ ряда (5.13)

Чтобы получить уравнения для коэффициентов  $c_2$ ,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_2$ , необходимо систему (5.1) продифференцировать по  $z$ , положить  $z = 0$  и учесть то, что значения  $\mathbf{U}_0$  и  $c_1$ ,  $w_1$  считаются известными:

$$\begin{aligned} & c_{1t} + u_0 c_{1r} + u_1 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{1\varphi} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_1 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) + \\ & + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left( u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} + w_2 \right) = 0; \\ u_{1t} + u_1 u_{0r} + u_0 u_{1r} + \frac{v_0}{r} u_{1\varphi} - \frac{2v_0 v_1}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_1 c_{0r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{1r} &= a v_1; \\ v_{1t} + u_1 v_{0r} + u_0 v_{1r} + \frac{u_1 v_0}{r} + \frac{u_0 v_1}{r} + \frac{v_0}{r} v_{1\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{1\varphi} &= -a u_1; \\ \frac{2}{(\gamma - 1)} c_1^2 + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_2 &= b u_1 \cos \varphi - b v_1 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Из первого и четвертого полученных уравнений коэффициенты  $w_2$  и  $c_2$  определяются в явном виде через  $u_1$ ,  $v_1$ :

$$\begin{aligned} w_2 = -\frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{1}{c_0} \left\{ c_{1t} + u_0 c_{1r} + u_1 c_0'(r) + \frac{v_0(r)}{r} c_{1\varphi} + \right. \\ \left. + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_1 \left[ u_0'(r) + \frac{u_0(r)}{r} \right] + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0(r) \left( u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} \right) \right\}; \quad (6.7) \end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{1}{c_0} \left[ bu_1 \cos \varphi - bv_1 \sin \varphi - \frac{2}{(\gamma - 1)} c_1^2 \right]. \quad (6.8)$$

Второе и третье уравнения, полученные выше после дифференцирования по  $z$  системы (5.1), являются для коэффициентов  $u_1, v_1$  линейной системой уравнений с частными производными. Линейность этих уравнений, а также вид коэффициента  $c_1$  позволяют разделить переменные и находить коэффициенты  $u_1, v_1$  в следующей форме:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}(t, r) + u_{11}(t, r) \cos \varphi + u_{12}(t, r) \sin \varphi, \\ v_1 &= v_{10}(t, r) + v_{11}(t, r) \cos \varphi + v_{12}(t, r) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6.9)$$

После подстановки соотношений (6.9) в уравнения для  $u_1, v_1$  и соответствующей группировки слагаемых приравняются нулю коэффициенты при  $\cos \varphi$ , при  $\sin \varphi$  и слагаемые, не зависящие от  $\varphi$ .

В результате получается следующая система уравнений для искомым  $u_{10}, u_{11}, u_{12}, v_{10}, v_{11}, v_{12}$ :

$$\begin{aligned} &u_{10t} + u_{0r}u_{10} + u_0u_{10r} - \frac{2v_0}{r}v_{10} + \\ &+ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0r}c_{10} + \frac{2}{(\gamma - 1)}c_0c_{10r} = av_{10}; \\ &u_{11t} + u_{0r}u_{11} + u_0u_{11r} + \frac{v_0}{r}u_{12} - \frac{2v_0}{r}v_{11} + \\ &+ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0r}c_{11} + \frac{2}{(\gamma - 1)}c_0c_{11r} = av_{11}; \\ &u_{12t} + u_{0r}u_{12} + u_0u_{12r} - \frac{v_0}{r}u_{11} - \frac{2v_0}{r}v_{12} + \\ &+ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0r}c_{12} + \frac{2}{(\gamma - 1)}c_0c_{12r} = av_{12}; \\ &v_{10t} + v_{0r}u_{10} + u_0v_{10r} + \frac{v_0}{r}u_{10} + \frac{u_0}{r}v_{10} = -au_{10}; \\ &v_{11t} + v_{0r}u_{11} + u_0v_{11r} + \frac{v_0}{r}u_{11} + \frac{u_0}{r}v_{11} + \frac{v_0}{r}v_{12} + \frac{2}{(\gamma - 1)}\frac{c_0}{r}c_{12} = -au_{11}; \\ &v_{12t} + v_{0r}u_{12} + u_0v_{12r} + \frac{v_0}{r}u_{12} + \frac{u_0}{r}v_{12} - \frac{v_0}{r}v_{11} - \frac{2}{(\gamma - 1)}\frac{c_0}{r}c_{11} = -au_{12}. \end{aligned}$$

В первых трех уравнениях последние пары слагаемых из левых частей можно сгруппировать, уравнения упрощаются, и из их вида следует, что выписанные уравнения имеют частные нулевые решения

$$u_{10} = v_{10} = 0,$$

и при этом первое и четвертое уравнения выполняются тождественно.

Оставшиеся четыре уравнения становятся такими:

$$u_{1it} + u_0 u_{1ir} = F_{u1i}; \quad v_{1it} + u_0 v_{1ir} = F_{v1i}; \quad i = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} F_{u11} &= - \left[ u_{0r} u_{11} + \frac{v_0}{r} u_{12} - \frac{2v_0}{r} v_{11} + b u_{0r} - a v_{11} \right]; \\ F_{u12} &= - \left[ u_{0r} u_{12} - \frac{v_0}{r} u_{11} - \frac{2v_0}{r} v_{12} - b v_{0r} - a v_{12} \right]; \\ F_{v11} &= - \left[ v_{0r} u_{11} + \frac{v_0}{r} u_{11} + \frac{u_0}{r} v_{11} + \frac{v_0}{r} v_{12} - b \frac{v_0}{r} + a u_{11} \right]; \\ F_{v12} &= - \left[ v_{0r} u_{12} + \frac{v_0}{r} u_{12} + \frac{u_0}{r} v_{12} - \frac{v_0}{r} v_{11} - b \frac{u_0}{r} + a u_{12} \right]. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений в нестационарном случае сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для искомым функций  $u_{1i}(t, r)$ ,  $v_{1i}(t, r)$ ;  $i = 1, 2$ :

$$\left. \frac{du_{1i}}{dt} \right|_{C^0} = F_{u1i}|_{C^0}; \quad \left. \frac{dv_{1i}}{dt} \right|_{C^0} = F_{v1i}|_{C^0}; \quad i = 1, 2,$$

где линия  $C^0$ , вдоль которой производится дифференцирование в этих уравнениях, определяется следующим уравнением:

$$C^0 : \frac{dr}{dt} = u_0.$$

В случае стационарных решений для искомым функций  $u_{1i}(r)$ ,  $v_{1i}(r)$ ,  $i = 1, 2$  имеет место следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_{1i}}{dr} = \frac{F_{u1i}}{u_0}; \quad \frac{dv_{1i}}{dr} = \frac{F_{v1i}}{u_0}; \quad i = 1, 2. \quad (6.10)$$

Начальные данные для этой системы можно задать при  $r = r_{in}$ :

$$u_{1i}(r_{in}) = u_{1i}^0; \quad v_{1i}(r_{in}) = v_{1i}^0; \quad i = 1, 2,$$

где  $u_{1i}^o, v_{1i}^o - \text{const}, i = 1, 2$ .

Это однозначно определит значения при  $z = 0$  первых производных по  $z$  функций  $u^o, v^o$  из условий (5.3) в виде

$$\left. \frac{\partial u^o(t, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = u_{11}^o \cos \varphi + u_{12}^o \sin \varphi;$$

$$\left. \frac{\partial v^o(t, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = v_{11}^o \cos \varphi + v_{12}^o \sin \varphi.$$

В частности, чтобы удовлетворить условиям (5.8), (5.9), необходимо положить:

$$u_{1i}^o = v_{1i}^o = 0; \quad i = 1, 2.$$

После определения функций  $u_{1i}, v_{1i}, i = 1, 2$  коэффициент  $w_2$  приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} w_2(t, r, \varphi) = & -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left\{ c_{10t} + c_{11t} \cos \varphi + c_{12t} \sin \varphi + \right. \\ & + c_{0r} (u_{11} \cos \varphi + u_{12} \sin \varphi) + u_0 (c_{10r} + c_{11r} \cos \varphi + c_{12r} \sin \varphi) + \\ & \left. + \frac{v_0(r)}{r} (-c_{11} \sin \varphi + c_{12} \cos \varphi) \right\} - \frac{1}{c_0} \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) (c_{10} + c_{11} \cos \varphi + c_{12} \sin \varphi) - \\ & - u_{11r} \cos \varphi - u_{12r} \sin \varphi - \frac{u_{11}}{r} \cos \varphi - \frac{u_{12}}{r} \sin \varphi + \frac{v_{11}}{r} \sin \varphi - \frac{v_{12}}{r} \cos \varphi. \end{aligned}$$

И, следовательно,  $w_2$  можно записать в виде

$$w_2 = w_{20} + w_{21} \cos \varphi + w_{22} \sin \varphi,$$

где

$$\begin{aligned} w_{20} = & -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} (c_{10t} + u_0 c_{10r}) - \frac{c_{10}}{c_0} \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right); \\ w_{21} = & -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left( c_{11t} + c_{0r} u_{11} + u_0 c_{11r} + \frac{v_0}{r} c_{12} \right) - \\ & - \frac{c_{11}}{c_0} \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) - u_{11r} - \frac{u_{11}}{r} - \frac{v_{12}}{r}; \\ w_{22} = & -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left( c_{12t} + c_{0r} u_{12} + u_0 c_{12r} - \frac{v_0}{r} c_{11} \right) - \\ & - \frac{c_{12}}{c_0} \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) - u_{12r} - \frac{u_{12}}{r} + \frac{v_{11}}{r}. \end{aligned}$$

Подробный вид  $c_2$  получается следующим:

$$c_2 = c_{20} + c_{21} \cos \varphi + c_{21} \sin \varphi + c_{23} \cos 2\varphi + c_{24} \sin 2\varphi,$$

где с учетом формул тригонометрии имеем следующие представления:

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{(\gamma - 1)}{4c_0} bu_{11} - \frac{(\gamma - 1)}{4c_0} bv_{12} - \frac{c_{10}^2}{c_0} - \frac{c_{11}^2 + c_{12}^2}{2c_0}; \\ c_{21} &= -\frac{2c_{10}c_{11}}{c_0}; \quad c_{22} = -\frac{2c_{10}c_{12}}{c_0}; \\ c_{23} &= \frac{(\gamma - 1)}{4c_0} bu_{11} + \frac{(\gamma - 1)}{4c_0} bv_{12} - \frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{2c_0}; \quad c_{24} = \frac{(\gamma - 1)b}{4c_0} (u_{12} - v_{11}) - \frac{c_{11}c_{12}}{c_0}. \end{aligned}$$

### Построение коэффициентов $c_3, u_2, v_2, w_3$ ряда (5.13)

Чтобы получить уравнения для коэффициентов  $u_2, v_2$ , необходимо систему (5.1) продифференцировать по  $z$  дважды, положить  $z = 0$  и учесть, что значения  $U_0, U_1$  и  $c_2, w_2$  считаются заданными и соответствующим образом зависят от  $\varphi$ .

Результат дифференцирования второго и третьего уравнений системы (5.1) такой:

$$\begin{aligned} u_{2t} + u_2 u_{0r} + 2u_1 u_{1r} + u_0 u_{2r} + \frac{v_2}{r} u_{0\varphi} + \frac{2v_1}{r} u_{1\varphi} + \frac{v_0}{r} u_{2\varphi} - \\ - \frac{2v_1^2}{r} - \frac{2v_0 v_2}{r} + w_2 u_1 + 2w_1 u_2 + w_0 u_3 + \\ + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_2 c_{0r} + \frac{4}{(\gamma - 1)} c_1 c_{1r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{2r} = av_2 - bw_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} v_{2t} + u_2 v_{0r} + 2u_1 v_{1r} + u_0 v_{2r} + \frac{u_2 v_0}{r} + 2\frac{u_1 v_1}{r} + \frac{u_0 v_2}{r} + \\ + \frac{v_2}{r} v_{0\varphi} + 2\frac{v_1}{r} v_{1\varphi} + \frac{v_0}{r} v_{2\varphi} + w_2 v_1 + 2w_1 v_2 + w_0 v_3 + \\ + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_2}{r} c_{0\varphi} + \frac{4}{(\gamma - 1)} \frac{c_1}{r} c_{1\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{2\varphi} = \\ = -au_2 + bw_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6.12)$$

С учетом уже найденных коэффициентов искомые функции  $u_2$  и  $v_2$  представляются в виде:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{20} + u_{21} \cos \varphi + u_{22} \sin \varphi + u_{23} \cos 2\varphi + u_{24} \sin 2\varphi, \\ v_2 &= v_{20} + v_{21} \cos \varphi + v_{21} \sin \varphi + v_{23} \cos 2\varphi + v_{24} \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где

$$u_{2j}; v_{2j}; j = 0, 1, 2, 3, 4$$

являются искомыми функциями, зависящими от  $t$  и от  $r$  в нестационарном случае, и зависящие только от  $r$  в стационарном случае.

Далее в уравнениях (6.11), (6.12) учитывается вид (6.13), раскрываются скобки, квадраты синусов и косинусов, а также произведения косинусов и синусов заменяются по соответствующим тригонометрическим формулам.

В каждом из полученных таким образом уравнений делается соответствующая группировка слагаемых и приравниваются нулю коэффициенты при  $\cos \varphi$ , при  $\sin \varphi$ , при  $\cos 2\varphi$ , при  $\sin 2\varphi$  и слагаемые, не содержащие сомножителей, зависящих от  $\varphi$ .

В результате получается следующая система уравнений для искомым  $u_{2j}$ ,  $v_{2j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, 4$ :

$$\begin{aligned} & u_{20t} + u_{0r}u_{20} + u_{11}u_{11r} + u_{12}u_{12r} + u_0u_{20r} + \frac{1}{r}v_{11}u_{12} - \\ & \quad - \frac{1}{r}v_{12}u_{11} - \frac{1}{r}v_{11}^2 - \frac{1}{r}v_{12}^2 - \frac{2}{r}v_0v_{20} + \\ & + \frac{1}{2}w_{21}u_{11} + \frac{1}{2}w_{22}u_{12} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{0r}c_{20} + \frac{4}{(\gamma-1)}c_{10}c_{10r} + \\ & + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{11}c_{11r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{12}c_{12r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{20r} = av_{20} - \frac{1}{2}bw_{21}; \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} & u_{21t} + u_{0r}u_{21} + u_0u_{21r} + \frac{1}{r}v_0u_{22} - \frac{2}{r}v_0v_{21} + w_{20}u_{11} + \\ & + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{0r}c_{21} + \frac{4}{(\gamma-1)}c_{10}c_{11r} + \frac{4}{(\gamma-1)}c_{11}c_{10r} + \\ & + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{21r} = av_{21} - bw_{20}; \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} & u_{22t} + u_{0r}u_{22} + u_0u_{22r} - \frac{1}{r}v_0u_{21} - \frac{2}{r}v_0v_{22} + w_{20}u_{12} + \\ & + \frac{2}{(\gamma-1)}(c_{0r}c_{22} + c_0c_{22r}) + \frac{4}{(\gamma-1)}(c_{10}c_{12r} + c_{12}c_{10r}) = av_{22}; \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$u_{23t} + u_{0r}u_{23} + u_{11}u_{11r} - u_{12}u_{12r} + u_0u_{23r} + \frac{1}{r}v_{11}u_{12} + \frac{1}{r}v_{12}u_{11} + \frac{2}{r}v_0u_{24} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r}v_{11}^2 + \frac{1}{2}v_{12}^2 - \frac{2}{r}v_0v_{23} + \frac{1}{2}w_{21}u_{11} - \frac{1}{2}w_{22}u_{12} + \\
& + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{0r}c_{23} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{11}c_{11r} - \frac{2}{(\gamma-1)}c_{12}c_{12r} + \\
& + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{23r} = av_{23} - \frac{1}{2}bw_{21}; \tag{6.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_{24t} + u_{0r}u_{24} + u_{11}u_{12r} + u_{12}u_{11r} + u_0u_{24r} - \frac{1}{r}v_{11}u_{11} + \\
& + \frac{1}{r}v_{12}u_{12} - \frac{2}{r}v_0u_{23} - \frac{2}{r}v_{11}v_{12} - \frac{2}{r}v_0v_{24} + \\
& + \frac{1}{2}w_{21}u_{12} + \frac{1}{2}w_{22}u_{11} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{0r}c_{24} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{11}c_{12r} + \\
& + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{12}c_{11r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{24r} = av_{24} - \frac{1}{2}bw_{22}; \tag{6.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{20t} + v_{0r}u_{20} + u_{11}v_{11r} + u_{12}v_{12r} + u_0v_{20r} + \frac{1}{r}v_0u_{20} + \\
& + \frac{1}{r}u_{11}v_{11} + \frac{1}{r}u_{12}v_{12} + \frac{1}{r}u_0v_{20} + \frac{1}{r}v_{11}v_{12} - \frac{1}{r}v_{12}v_{11} + \\
& + \frac{1}{2}(w_{21}v_{11} + w_{22}v_{12}) + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}(c_{11}c_{12} - c_{12}c_{11}) = -au_{20} + \frac{1}{2}bw_{22}; \tag{6.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{21t} + v_{0r}u_{21} + u_0v_{21r} + \frac{1}{r}v_0u_{21} + \frac{1}{r}u_0v_{21} + \\
& + \frac{1}{r}v_0v_{22} + w_{20}v_{11} + \frac{4}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}c_{10}c_{12} + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}c_0c_{22} = -au_{21}; \tag{6.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{22t} + v_{0r}u_{22} + u_0v_{22r} + \frac{1}{r}v_0u_{22} + \frac{1}{r}u_0v_{22} - \frac{1}{r}v_0v_{21} + \\
& + w_{20}v_{12} - \frac{4}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}c_{10}c_{11} - \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}c_0c_{21} = -au_{22} + bw_{20}; \tag{6.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{23t} + v_{0r}u_{23} + u_{11}v_{11r} - u_{12}v_{12r} + u_0v_{23r} + \\
& + \frac{1}{r}v_0u_{23} + \frac{1}{r}u_{11}v_{11} - \frac{1}{r}u_{12}v_{12} + \frac{1}{r}u_0v_{23} + \frac{1}{r}v_{11}v_{12} + \\
& + \frac{1}{r}v_{12}v_{11} + \frac{2}{r}v_0v_{24} + \frac{1}{2}w_{21}v_{11} - \frac{1}{2}w_{22}v_{12} + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}c_{11}c_{12} + \\
& + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}c_{12}c_{11} + \frac{4}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}c_0c_{24} = -au_{23} - \frac{1}{2}bw_{22}; \tag{6.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{24t} + v_{0r}u_{24} + u_{11}v_{12r} + u_{12}v_{11r} + \\
& + u_0v_{24r} + \frac{1}{r}v_0u_{24} + \frac{1}{r}u_{11}v_{12} + \frac{1}{r}u_{12}v_{11} + \frac{1}{r}u_0v_{24} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r}v_{11}^2 + \frac{1}{r}v_{12}^2 - \frac{2}{r}v_0v_{23} + \frac{1}{2}w_{21}v_{12} + \frac{1}{2}w_{22}v_{11} - \\
& -\frac{2}{(\gamma-1)r}c_{11}^2 + \frac{2}{(\gamma-1)r}c_{12}^2 - \frac{4}{(\gamma-1)r}c_0c_{23} = -au_{24} + \frac{1}{2}bw_{21}. \quad (6.23)
\end{aligned}$$

Уравнения (6.14)–(6.23) можно записать в таком виде:

$$u_{2jt} + u_0u_{2jr} = F_{u2j}; \quad v_{2jt} + u_0v_{2jr} = F_{v2j}; \quad j = 0, 1, \dots, 4 \quad (6.24)$$

с соответствующими правыми частями.

Полученная система уравнений в нестационарном случае сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для искомых функций  $u_{2j}(t, r)$ ,  $v_{2j}(t, r)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 4$ :

$$\left. \frac{du_{2j}}{dt} \right|_{C^0} = F_{u2j}|_{C^0}; \quad \left. \frac{dv_{2j}}{dt} \right|_{C^0} = F_{v2j}|_{C^0}; \quad j = 0, 1, \dots, 4.$$

Численное построение решений этих уравнений модифицированным методом характеристик описано в [40].

В случае стационарных решений для искомых функций  $u_{2j}(r)$ ,  $v_{2j}(r)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 4$  имеет место следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_{2j}}{dr} = \frac{F_{u2j}}{u_0}; \quad \frac{dv_{2j}}{dr} = \frac{F_{v2j}}{u_0}; \quad j = 0, 1, \dots, 4. \quad (6.25)$$

Начальные данные для этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно задать при  $r = r_{in}$ :

$$u_{2j}(r_{in}) = u_{2j}^o; \quad v_{2j}(r_{in}) = v_{2j}^o; \quad v_{21}(r_{in}) = v_{21}^o; \quad j = 0, 1, \dots, 4,$$

где  $u_{2j}^o$ ,  $v_{2j}^o$  – const.

Это однозначно определит значения при  $z = 0$  вторых производных по  $z$  функций  $u^o$ ,  $v^o$  из условий (5.3) в виде:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 u^o(t, \varphi, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} &= u_{20}^o + u_{21}^o \cos \varphi + u_{22}^o \sin \varphi + u_{23}^o \cos 2\varphi + u_{24}^o \sin 2\varphi; \\
\left. \frac{\partial^2 v^o(t, \varphi, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} &= v_{20}^o + v_{21}^o \cos \varphi + v_{22}^o \sin \varphi + v_{23}^o \cos 2\varphi + v_{24}^o \sin 2\varphi.
\end{aligned}$$



В частности, в случае условий (5.8), (5.9) имеем:

$$u_{2j}^o = v_{2j}^o = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 4.$$

После нахождения коэффициентов  $u_2$ ,  $v_2$  из результатов двукратного дифференцирования первого и четвертого уравнений системы (5.1) по  $z$  и после подстановки  $z = 0$  и уже найденных коэффициентов однозначно определяются коэффициенты  $w_3$  и  $c_3$ .

В частности, в стационарном случае они определяются по нижеследующим формулам:

$$\begin{aligned} w_3(r, \varphi) = & -\frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{1}{c_0(r)} \times \\ & \times \left\{ u_2(r, \varphi) c_{0r}(r) + 2u_1(r, \varphi) c_{1r}(r, \varphi) + u_0(r) c_{2r}(r, \varphi) + \right. \\ & + \frac{1}{r} [2v_1(r, \varphi) c_{1\varphi}(r, \varphi) + v_0(r) c_{2\varphi}(r, \varphi)] + w_2(r, \varphi) c_1(r, \varphi) + \\ & + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_2(r, \varphi) \left[ u_{0r}(r) + \frac{u_0(r)}{r} \right] + \\ & + (\gamma - 1) c_1(r, \varphi) \left[ u_{1r}(r, \varphi) + \frac{u_1(r, \varphi) + v_{1\varphi}(r, \varphi)}{r} + w_2(r, \varphi) \right] + \\ & \left. + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0(r) \left[ u_{2r}(r, \varphi) + \frac{u_2(r, \varphi) + 2v_{2\varphi}(r, \varphi)}{r} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} c_3(r, \varphi) = & \frac{(\gamma - 1)}{2c_0(r)} \left[ bu_2(r, \varphi) \cos \varphi - bv_2(r, \varphi) \sin \varphi - u_0(r) w_{2r}(r, \varphi) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} v_0(r) w_{2\varphi}(r, \varphi) - \frac{6c_0(r) c_1(r, \varphi) c_2(r, \varphi)}{(\gamma - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Чтобы получить уравнения для коэффициентов  $c_4$ ,  $u_3$ ,  $v_3$ ,  $w_4$ , необходимо систему (5.1) продифференцировать по  $z$  трижды, положить  $z = 0$  и учесть, что значения  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$  и  $c_3$ ,  $w_3$  считаются заданными и соответствующим образом зависят от  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} c_{3t} + u_3 c_{0r} + 3u_2 c_{1r} + 3u_1 c_{2r} + u_0 c_{3r} + \frac{3v_2}{r} c_{1\varphi} + \frac{3v_1}{r} c_{2\varphi} + \frac{v_0}{r} c_{3\varphi} + w_3 c_1 + 3w_2 c_2 + \\ + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_3 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) + 3 \frac{(\gamma - 1)}{2} c_2 \left( u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} + w_2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3\frac{(\gamma-1)}{2}c_1\left(u_{2r} + \frac{u_{2r}}{r} + \frac{v_{2\varphi}}{r} + w_3\right) + \frac{(\gamma-1)}{2}c_0\left(u_{3r} + \frac{u_3}{r} + \frac{v_{3\varphi}}{r} + w_4\right) = 0; \\
& \quad u_{3t} + u_3u_{0r} + 3u_2u_{1r} + 3u_1u_{2r} + u_0u_{3r} + \\
& \quad + \frac{3v_2}{r}u_{1\varphi} + \frac{3v_1}{r}u_{2\varphi} + \frac{v_0}{r}u_{3\varphi} - \frac{6}{r}v_1v_2 - \frac{2}{r}v_0v_3 + w_3u_1 + 3w_2u_2 + \\
& \quad + \frac{2}{(\gamma-1)}(c_3c_{0r} + 3c_2c_{1r} + 3c_1c_{2r} + c_0c_{3r}) = av_3 - bw_3 \cos \varphi; \\
& \quad v_{3t} + u_3v_{0r} + 3u_2v_{1r} + 3u_1v_{2r} + u_0v_{3r} + \frac{u_3v_0}{r} + \frac{3u_2v_1}{r} + \frac{3u_1v_2}{r} + \frac{u_0v_3}{r} + \\
& \quad + \frac{3v_2}{r}v_{1\varphi} + \frac{3v_1}{r}v_{2\varphi} + \frac{v_0}{r}v_{3\varphi} + w_3v_1 + 3w_2v_2 + \frac{6}{(\gamma-1)}\frac{c_2}{r}c_{1\varphi} + \\
& \quad + \frac{6}{(\gamma-1)}\frac{c_1}{r}c_{2\varphi} + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c_0}{r}c_{3\varphi} = -au_3 + bw_3 \sin \varphi; \\
& \quad w_{3t} + 3u_1w_{2r} + u_0w_{3r} + \frac{3v_1}{r}w_{2\varphi} + \frac{v_0}{r}w_{3\varphi} + \\
& \quad + 3w_2w_2 + \frac{2c_3c_1}{\gamma-1} + \frac{6}{\gamma-1}c_2c_2 + \frac{6}{\gamma-1}c_1c_3 + \\
& \quad + \frac{2}{\gamma-1}c_0c_4 = bu_3 \cos \varphi - bv_3 \sin \varphi. \tag{6.28}
\end{aligned}$$

С учетом вида коэффициента  $c_3$

$$c_3 = c_{30} + c_{31} \cos \varphi + c_{32} \sin \varphi + c_{33} \cos 2\varphi + c_{34} \sin 2\varphi + c_{35} \cos 3\varphi + c_{36} \sin 3\varphi$$

искомые коэффициенты  $u_3$ ,  $v_3$  представляются в виде:

$$\begin{aligned}
u_3 &= u_{30} + u_{31} \cos \varphi + u_{32} \sin \varphi + u_{33} \cos 2\varphi + \\
& \quad + u_{34} \sin 2\varphi + u_{35} \cos 3\varphi + u_{36} \sin 3\varphi; \tag{6.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3 &= v_{30} + v_{31} \cos \varphi + v_{32} \sin \varphi + v_{33} \cos 2\varphi + \\
& \quad + v_{34} \sin 2\varphi + v_{35} \cos 3\varphi + v_{36} \sin 3\varphi. \tag{6.30}
\end{aligned}$$

И тогда уравнения для  $u_{3j}$ ,  $v_{3j}$ ,  $0 \leq j \leq 6$  записываются в следующем виде:

$$u_{3jt} + u_0u_{3jr} = F_{u3j}; \quad v_{3jt} + u_0v_{3jr} = F_{v3j}; \quad j = 0, 1, \dots, 6 \tag{6.31}$$

с соответствующими правыми частями:

$$F_{u30} = -\left[u_{0r}u_{30} + \frac{3}{2}u_{21}u_{11r} + \frac{3}{2}u_{22}u_{12r} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{3}{2}u_{11}u_{21r} + \frac{3}{2}u_{12}u_{22r} + \frac{3}{2r}v_{21}u_{12} - \frac{3}{2r}v_{22}u_{11} + \frac{3}{2r}v_{11}u_{22} - \frac{3}{2r}v_{12}u_{21} - \\
& \quad -\frac{3}{r}v_{11}v_{21} - \frac{3}{r}v_{12}v_{22} - \frac{2}{r}v_0v_{30} + \frac{1}{2}w_{31}u_{11} + \frac{1}{2}w_{32}u_{12} + \\
& \quad + 3w_{20}u_{20} + \frac{3}{2}w_{21}u_{21} + \frac{3}{2}w_{22}u_{22} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{30}c_{0r} + \\
& \quad + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{20}c_{10r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{21}c_{11r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{22}c_{12r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{10}c_{20r} + \\
& \quad + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{21r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{22r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{30r} \Big] + av_{30} - \frac{1}{2}bw_{31}; \quad (6.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{u_{31}} = & - \left[ u_{31}u_{0r} + 3u_{20}u_{11r} + \frac{3}{2}u_{23}u_{11r} + \frac{3}{2}u_{24}u_{12r} + \right. \\
& + 3u_{11}u_{20r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{23r} + \frac{3}{2}u_{12}u_{24r} + \frac{3}{r}v_{20}u_{12} + \frac{3}{2r}v_{23}u_{12} - \frac{3}{2r}v_{24}u_{11} + \\
& \quad + \frac{3}{r}v_{11}u_{24} - \frac{3}{r}v_{12}u_{23} + \frac{1}{r}v_0u_{32} - \frac{6}{r}v_{11}v_{20} - \frac{3}{r}v_{11}v_{23} - \\
& - \frac{3}{r}v_{12}v_{24} - \frac{2}{r}v_0u_{31} + w_{30}u_{11} + \frac{1}{2}w_{33}u_{11} + \frac{1}{2}w_{34}u_{12} + 3w_{20}u_{21} + 3w_{21}u_{20} + \\
& \quad + \frac{3}{2}w_{21}u_{23} + \frac{3}{2}w_{22}u_{24} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{31r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{31}c_{0r} + \\
& \quad + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{21}c_{10r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{20}c_{11r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{23}c_{11r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{24}c_{12r} + \\
& \quad + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{10}c_{21r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{11}c_{20r} + \\
& \quad \left. + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{23r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{24r} \right] + av_{31} - bw_{30} - \frac{1}{2}bw_{33}; \quad (6.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{u_{32}} = & - \left[ u_{32}u_{0r} + 3u_{20}u_{12r} - \frac{3}{2}u_{23}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{24}u_{11r} + \right. \\
& + 3u_{12}u_{20r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{24r} - \frac{3}{2}u_{12}u_{23r} - \frac{3}{r}v_{20}u_{11} + \frac{3}{2r}v_{23}u_{11} + \frac{3}{2r}v_{24}u_{12} - \\
& \quad - \frac{3}{r}v_{11}u_{23} - \frac{3}{r}v_{12}u_{24} - \frac{1}{r}v_0u_{31} - \frac{6}{r}v_{12}v_{20} - \frac{3}{r}v_{11}v_{24} + \frac{3}{r}v_{12}v_{23} - \\
& - \frac{2}{r}v_0v_{32} + w_{30}u_{12} - \frac{1}{2}w_{33}u_{12} + \frac{1}{2}w_{34}u_{11} + 3w_{20}u_{22} + 3w_{22}u_{20} + \frac{3}{2}w_{21}u_{24} - \\
& \quad - \frac{3}{2}w_{22}u_{23} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{32}c_{0r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{32r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{20}c_{12r} + \\
& \quad + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{22}c_{10r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{23}c_{12r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{24}c_{11r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{10}c_{22r} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{6}{(\gamma-1)}c_{12}c_{20r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{24r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{23r} \Big] + av_{32} - bw_{34}; \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} F_{u33} = & - \left[ u_{33}u_{0r} + \frac{3}{2}u_{21}u_{11r} - \frac{3}{2}u_{22}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{21r} - \right. \\ & - \frac{3}{2}u_{12}u_{22r} + \frac{3}{2r}v_{21}u_{12} + \frac{3}{2r}v_{22}u_{11} + \frac{3}{2r}v_{11}u_{22} + \frac{3}{2r}v_{12}u_{21} + \frac{2}{r}v_0u_{34} - \\ & - \frac{3}{r}v_{11}v_{21} + \frac{3}{r}v_{12}v_{22} - \frac{2}{r}v_0v_{33} + \frac{1}{2}w_{31}u_{11} - \frac{1}{2}w_{32}u_{12} + \\ & + 3w_{20}u_{23} + \frac{3}{2}w_{21}u_{21} - \frac{3}{2}w_{22}u_{22} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{33}c_{0r} + \\ & + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{33r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{23}c_{10r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{21}c_{11r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{22}c_{12r} + \\ & \left. + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{10}c_{23r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{21r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{22r} \right] + av_{33} - \frac{1}{2}bw_{31}; \quad (6.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{u34} = & - \left[ u_{34}u_{0r} + \frac{3}{2}u_{21}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{22}u_{11r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{22r} + \right. \\ & + \frac{3}{2}u_{12}u_{21r} - \frac{3}{2r}v_{21}u_{11} + \frac{3}{2r}v_{22}u_{11} - \frac{3}{2r}v_{11}u_{21} + \frac{3}{2r}v_{12}u_{22} - \frac{2}{r}v_0u_{33} - \\ & - \frac{3}{r}v_{11}v_{22} - \frac{3}{r}v_{12}v_{21} - \frac{2}{r}v_0v_{34} + \frac{1}{2}w_{31}u_{12} + \frac{1}{2}w_{32}u_{11} + \\ & + 3w_{20}u_{24} + \frac{3}{2}w_{21}u_{22} + \frac{3}{2}w_{22}u_{21} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{34}c_{0r} + \\ & + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{34r} + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{24}c_{10r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{21}c_{12r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{22}c_{11r} + \\ & \left. + \frac{6}{(\gamma-1)}c_{10}c_{24r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{22r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{21r} \right] + av_{34} - \frac{1}{2}bw_{32}; \quad (6.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{u35} = & - \left[ u_{35}u_{0r} + \frac{3}{2}u_{23}u_{11r} - \frac{3}{2}u_{24}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{23r} - \frac{3}{2}u_{12}u_{24r} + \frac{3}{2r}v_{23}u_{12} + \right. \\ & + \frac{3}{2r}v_{24}u_{11} + \frac{3}{r}v_{11}u_{24} + \frac{3}{r}v_{12}u_{23} + \frac{3}{r}v_0u_{36} - \frac{3}{r}v_{11}v_{23} + \frac{3}{r}v_{12}v_{24} - \frac{2}{r}v_0v_{35} + \\ & + \frac{1}{2}w_{33}u_{11} - \frac{1}{2}w_{34}u_{12} + \frac{3}{2}w_{21}u_{23} - \frac{3}{2}w_{22}u_{24} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{35}c_{0r} + \\ & + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{35r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{23}c_{11r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{24}c_{12r} + \\ & \left. + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{23r} - \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{24r} \right] + av_{35} - \frac{1}{2}bw_{33}; \quad (6.37) \end{aligned}$$

$$F_{u36} = - \left[ u_{36}u_{0r} + \frac{3}{2}u_{23}u_{12r} + \frac{3}{2}u_{24}u_{11r} + \frac{3}{2}u_{12}u_{24r} + \frac{3}{2}u_{11}u_{23r} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{r}v_0v_{36} - \frac{3}{2r}v_{23}u_{11} - \frac{3}{r}v_{12}v_{23} - \frac{3}{r}v_{24}v_{11} + \frac{3}{2r}v_{24}u_{12} - \\
& -\frac{3}{r}v_{11}u_{23} + \frac{3}{r}u_{24}v_{12} - \frac{3}{r}u_{35}v_0 + \frac{1}{2}w_{33}u_{12} + \frac{1}{2}w_{34}u_{11} + \\
& + \frac{3}{2}w_{21}u_{24} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_0c_{36r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{11}c_{24r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{12}c_{23r} + \\
& + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{23}c_{12r} + \frac{3}{(\gamma-1)}c_{24}c_{11r} + \frac{2}{(\gamma-1)}c_{36}c_{0r} \Big] + av_{36} - \frac{1}{2}bw_{34}; \quad (6.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{v30} = & - \left[ u_{30}v_{0r} + \frac{3}{2}u_{21}v_{11r} + \frac{3}{2}u_{22}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{21r} + \right. \\
& + \frac{3}{2}u_{12}v_{22r} + \frac{u_{30}v_0}{r} + \frac{3}{2r}u_{21}v_{11} + \frac{3}{2r}u_{22}v_{12} + \frac{3}{2r}v_{11}u_{21} + \\
& + \frac{3}{2r}u_{12}v_{22} + \frac{u_0v_{30}}{r} + \frac{3}{2r}v_{21}v_{12} - \frac{3}{2r}v_{22}v_{11} + \frac{3}{2r}v_{11}v_{22} - \frac{3}{2r}v_{12}v_{21} + \\
& + \frac{1}{2}w_{31}v_{11} + \frac{1}{2}w_{32}v_{12} + 3w_{20}v_{20} + \frac{3}{2}w_{21}v_{21} + \frac{3}{2}w_{22}v_{22} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{21}c_{12} - \\
& \left. - \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{22}c_{11} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{22} - \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{21} \right] - au_{30} + \frac{1}{2}bw_{32}; \quad (6.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{v31} = & - \left[ u_{31}v_{0r} + 3u_{20}v_{11r} + \frac{3}{2}u_{23}v_{11r} + \frac{3}{2}u_{24}v_{12r} + \right. \\
& + 3u_{11}v_{20r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{23r} + \frac{3}{2}u_{12}v_{24r} + u_0v_{31r} + \frac{u_{31}v_0}{r} + \frac{3}{r}u_{20}v_{11} + \frac{3}{2r}u_{23}v_{11} + \\
& + \frac{3}{2r}u_{24}v_{12} + \frac{3}{r}u_{11}v_{20} + \frac{3}{2r}u_{11}v_{23} + \frac{3}{2r}u_{12}v_{24} + \frac{u_0v_{31}}{r} + \frac{3}{r}v_{20}v_{12} + \\
& + \frac{3}{2r}v_{23}v_{12} + \frac{3}{2r}v_{24}v_{11} + \frac{1}{r}v_0v_{32} - \frac{3}{r}v_{12}v_{23} + w_{30}v_{11} + \\
& + \frac{1}{2}w_{33}v_{11} + \frac{1}{2}w_{34}v_{12} + 3w_{20}v_{21} + 3w_{21}v_{20} + \frac{3}{2}w_{21}v_{23} + \frac{3}{2}w_{22}v_{24} + \\
& + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{20}c_{12} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{23}c_{12} - \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{24}c_{11} + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{10}c_{22} + \\
& \left. + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{24} - \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{23} + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{32}c_0 \right] - au_{31} + \frac{1}{2}bw_{34}; \quad (6.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{v32} = & - \left[ u_{32}v_{0r} + 3u_{20}v_{12r} - \frac{3}{2}u_{23}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{24}v_{11r} + 3u_{12}v_{20r} + \right. \\
& + \frac{3}{2}u_{11}v_{24r} - \frac{3}{2}u_{12}v_{23r} + u_0v_{32r} + \frac{u_{32}v_0}{r} + \frac{3}{r}u_{20}v_{12} + \frac{3}{2r}u_{24}v_{11} - \\
& \left. - \frac{3}{2r}u_{23}v_{12} + \frac{3}{r}u_{12}v_{20} + \frac{3}{2r}u_{11}v_{24} - \frac{3}{2r}u_{12}v_{23} + \frac{u_0v_{32}}{r} - \frac{3}{r}v_{20}v_{11} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2r}v_{23}v_{11} + \frac{3}{2r}v_{24}v_{11} + \frac{3}{2r}v_{12}v_{24} - \frac{3}{r}v_{23}v_{11} - \frac{3}{r}v_{12}v_{24} - \frac{v_0v_{31}}{r} + w_{30}v_{12} + \\
& + \frac{1}{2}w_{34}v_{11} - \frac{1}{2}w_{33}v_{12} + 3w_{20}v_{22} + \frac{3}{2}w_{21}v_{24} + 3w_{22}v_{20} - \frac{3}{2}w_{22}v_{23} - \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{20}c_{11} + \\
& + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{23}c_{11} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{24}c_{12} - \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{10}c_{21} - \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{23} - \\
& - \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{24} - \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{31}c_0 \Big] - au_{32} + bw_{30} - \frac{1}{2}bw_{33}; \tag{6.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{v33} = & - \left[ u_{33}v_{0r} + \frac{3}{2}u_{21}v_{11r} - \frac{3}{2}u_{22}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{21r} - \right. \\
& - \frac{3}{2}u_{12}v_{22r} + \frac{3}{2r}u_{21}v_{11} + \frac{3}{2r}v_{21}v_{12} + \frac{1}{r}u_{33}v_0 + \frac{3}{2r}v_{11}v_{22} - \\
& - \frac{3}{2r}v_{12}u_{22} + \frac{1}{r}u_0v_{33} + \frac{3}{2r}v_{21}u_{11} - \frac{3}{2r}v_{22}u_{12} + \frac{3}{2r}v_{11}v_{22} + \frac{3}{2r}v_{12}v_{21} + \\
& + \frac{2v_{34}v_0}{r} + \frac{1}{2}w_{31}v_{11} - \frac{1}{2}w_{32}v_{12} + 3w_{20}v_{23} + \frac{3}{2}w_{21}v_{21} - \\
& - \frac{3}{2}w_{22}v_{22} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{21}c_{12} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{22}c_{11} + \frac{12}{(\gamma-1)r}c_{10}c_{24} + \\
& \left. + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{22} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{21} + \frac{12}{(\gamma-1)r}c_{34}c_0 \right] - au_{33} - \frac{1}{2}bw_{32}; \tag{6.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{v34} = & - \left[ u_{34}v_{0r} + \frac{3}{2}u_{21}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{22}v_{11r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{22r} + \right. \\
& + \frac{3}{2}u_{12}v_{21r} + \frac{u_{34}v_0}{r} + \frac{3}{2r}u_{21}v_{12} + \frac{3}{2r}u_{12}v_{21} + \frac{3}{2r}u_{11}v_{22} + \\
& + \frac{3}{2r}u_{12}v_{23} + \frac{u_0v_{34}}{r} - \frac{3}{2r}v_{21}v_{11} + \frac{3}{2r}v_{22}v_{12} - \frac{3}{2r}v_{11}v_{21} + \frac{3}{2r}v_{12}v_{22} - \\
& - \frac{2}{r}v_{33}v_0 + \frac{1}{2}w_{31}v_{12} + \frac{1}{2}w_{32}v_{11} + 3w_{20}v_{24} + \\
& + \frac{3}{2}w_{21}v_{22} + \frac{3}{2}w_{22}v_{21} - \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{21}c_{11} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{22}c_{12} - \\
& - \frac{12}{(\gamma-1)r}c_{10}c_{23} - \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{21} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{22} - \\
& \left. - \frac{12}{(\gamma-1)r}c_{33}c_0 \right] - au_{34} + \frac{1}{2}bw_{31}; \tag{6.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{v35} = & - \left[ u_{35}v_{0r} + \frac{3}{2}u_{23}v_{11r} - \frac{3}{2}u_{24}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{23r} - \right. \\
& - \frac{3}{2}u_{12}v_{24r} + u_0v_{35r} + \frac{3}{2r}v_{11}u_{23} - \frac{3}{2r}v_{12}u_{24} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2r}u_{11}v_{23} - \frac{3}{2r}u_{12}v_{24} + \frac{1}{r}v_0u_{35} + \frac{3}{2r}v_{12}v_{23} - \frac{3}{2r}v_{11}v_{24} + \frac{1}{r}u_0v_{35} + \\
& + \frac{3}{r}v_{11}v_{24} + \frac{3}{r}v_{12}v_{23} + \frac{3}{r}v_{36}v_0 + \frac{1}{2}w_{33}v_{11} - \frac{1}{2}w_{34}v_{12} + \frac{3}{2}w_{21}v_{23} - \\
& - \frac{3}{2}w_{22}v_{24} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{23}c_{12} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{24}c_{11} + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{11}c_{24} + \\
& + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{23} + \frac{18}{(\gamma-1)r}c_{36}c_0 \Big] - au_{35} - \frac{1}{2}bw_{34}; \tag{6.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{v36} = & - \left[ u_{36}v_{0r} + \frac{3}{2}u_{23}v_{12r} + \frac{3}{2}u_{24}v_{11r} + u_0v_{36r} + \frac{3}{2}u_{11}v_{24r} + \frac{3}{2}u_{12}u_{23r} + \right. \\
& + \frac{3}{2r}v_{11}u_{24} + \frac{3}{2r}v_{24}u_{11} + \frac{3}{2r}u_{23}v_{12} + \frac{1}{r}u_0v_{36} - \frac{3}{2r}v_{11}v_{23} \\
& + \frac{3}{2r}v_{12}v_{24} + \frac{1}{r}v_0u_{36} - \frac{3}{r}v_{11}v_{23} + \frac{3}{r}v_{12}v_{24} - \frac{3}{r}v_0v_{35} + \\
& + w_{36}u_{10} + \frac{1}{2}w_{33}v_{12} + \frac{1}{2}w_{34}v_{11} + \frac{3}{2}w_{21}v_{24} + \frac{3}{2}w_{22}v_{23} - \\
& - \frac{18}{(\gamma-1)}c_0c_{35} + \frac{3}{(\gamma-1)r}c_{24}c_{12} - \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{23}c_{11} + \\
& \left. + \frac{6}{(\gamma-1)r}c_{12}c_{24} \right] - au_{36} + \frac{1}{2}bw_{33}; \tag{6.45}
\end{aligned}$$

Полученная система уравнений в нестационарном случае сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для искомым функций  $u_{3j}(t, r)$ ,  $v_{3j}(t, r)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 6$ :

$$\left. \frac{du_{3j}}{dt} \right|_{C^0} = F_{u3j}|_{C^0}; \quad \left. \frac{dv_{3j}}{dt} \right|_{C^0} = F_{v3j}|_{C^0}; \quad j = 0, 1, \dots, 4. \tag{6.46}$$

Численное построение решений этих уравнений осуществляется модифицированным методом характеристик [39].

В случае стационарных решений для искомым функций  $u_{3j}(r)$ ,  $v_{3j}(r)$ ,  $0 \leq j \leq 6$ , имеет место следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_{3j}}{dr} = \frac{F_{u3j}}{u_0}; \quad \frac{dv_{3j}}{dr} = \frac{F_{v3j}}{u_0}; \quad j = 0, 1, \dots, 6. \tag{6.47}$$

Начальные данные для этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно задать при  $r = r_{in}$ :

$$u_{3j}(r_{in}) = u_{3j}^0; \quad v_{3j}(r_{in}) = v_{3j}^0; \quad j = 0, 1, \dots, 6,$$

где  $u_{2j}^o, v_{2j}^o - \text{const}$ .

В частности, в случае условий (5.8), (5.9) имеем:

$$u_{3j}^o = v_{3j}^o = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 6. \quad (6.48)$$

Коэффициенты  $w_4, c_4$  определяются из первого и четвертого уравнений системы (6.28) в явном виде:

$$\begin{aligned} c_4 = & \frac{(\gamma - 1)}{2c_0} \left[ bu_3 \cos \varphi - bv_3 \sin \varphi - w_{3t} - 3u_1 w_{2r} - u_0 w_{3r} - \frac{3v_1}{r} w_{2\varphi} - \right. \\ & \left. - \frac{v_0}{r} w_{3\varphi} - 3w_2 w_2 - \frac{2}{(\gamma - 1)} c_3 c_1 - \frac{6}{(\gamma - 1)} c_2 c_2 - \frac{6}{(\gamma - 1)} c_1 c_3 \right]; \\ w_4 = & -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left[ c_{3t} + u_3 c_{0r} + 3u_2 c_{1r} + 3u_1 c_{2r} + u_0 c_{3r} + \frac{3v_2}{r} c_{1\varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{3v_1}{r} c_{2\varphi} + \frac{v_0}{r} c_{3\varphi} + w_3 c_1 + 3w_2 c_2 + \right. \\ & \left. + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_3 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) + 3 \frac{(\gamma - 1)}{2} c_2 \left( u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} + w_2 \right) + \right. \\ & \left. + 3 \frac{(\gamma - 1)}{2} c_1 \left( u_{2r} + \frac{u_2}{r} + \frac{v_{2\varphi}}{r} + w_3 \right) \right] - u_{3r} - \frac{u_3}{r} - \frac{v_{3\varphi}}{r}. \end{aligned}$$

С учетом уже найденных коэффициентов, в том числе  $u_3, v_3$ , имеют место следующие представления коэффициентов  $c_4, w_4$ :

$$\begin{aligned} c_4(t, r, \varphi) = & c_{40}(t, r) + c_{41}(t, r) \cos \varphi + c_{42}(t, r) \sin \varphi + \\ & + c_{43}(t, r) \cos 2\varphi + c_{44}(t, r) \sin 2\varphi + c_{45}(t, r) \cos 3\varphi + \\ & + c_{46}(t, r) \sin 3\varphi + c_{47}(t, r) \cos 4\varphi + c_{48}(t, r) \sin 4\varphi, \\ w_4(t, r, \varphi) = & w_{40}(t, r) + w_{41}(t, r) \cos \varphi + w_{42}(t, r) \sin \varphi + \\ & + w_{43}(t, r) \cos 2\varphi + w_{44}(t, r) \sin 2\varphi + w_{45}(t, r) \cos 3\varphi + w_{46}(t, r) \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

Индукцией по  $k$  и методикой, представленной в [188], доказывается следующая

**Теорема 3.** Коэффициенты ряда (5.13) задаются следующими формулами:

$$w_k(t, r, \varphi) = w_{k,0}(t, r) + \sum_{i=1}^{k-1} [w_{k,2i-1} \cos(i\varphi) + w_{k,2i} \sin(i\varphi)]; \quad k = 2, 3, \dots$$



$$f_k(t, r, \varphi) = f_{k,0}(t, r) + \sum_{i=1}^k [f_{k,2i-1} \cos(i\varphi) + f_{k,2i} \sin(i\varphi)]; \quad k = 1, 2, \dots$$

где значок  $f$  принимает значения  $c, u, v$ .

Особо отмечаем, что построенные отрезки ряда (5.13)

$$c = c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 \frac{z^3}{6} + c_4 \frac{z^4}{24};$$

$$u = u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2} + u_3 \frac{z^3}{6};$$

$$v = v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2} + v_3 \frac{z^3}{6};$$

$$w = w_0 + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2} + w_3 \frac{z^3}{6} + w_4 \frac{z^4}{24}$$

(6.49)

в силу специфики характеристической задачи Коши обращают каждое уравнение системы (5.1) в справедливые равенства с точностью  $z^4$ . Это, в частности, следует из процедуры определения этих коэффициентов с помощью трехкратного дифференцирования системы (5.1) по  $z$  и последующей подстановки  $z = 0$ . При этом первая и последняя искомые функции приведенными отрезками ряда (6.49) определились с точностью  $z^5$ , а функции  $u$  и  $v$  — с точностью  $z^4$ .

Подробности построения начальных коэффициентов ряда (5.13) представлены в препринте [87].

## § 7. Влияние вращения Земли на исследуемые потоки

Многие исследователи высказывали гипотезу, что вращение Земли вокруг своей оси через действие силы Кориолиса способствует закрутке воздуха в этих потоках (см. об этом, например, в книгах [115, 116]). Однако надежного научного обоснования этой гипотезе они не давали. В то же время многие современные исследователи полагают, что вращение Земли при изучении течений типа торнадо вообще учитывать не надо (обзор таких работ имеется в книге [108]).

В книге [1] предложена и в § 1 приведена схема зарождения и устойчивого функционирования восходящего закрученного потока газа типа торнадо и тропического циклона. В этой схеме действию силы Кориолиса — силы инерции, связанной с вращением Земли вокруг своей оси, отводится принципиальная роль.

Далее в параграфе строго математически установлено, что причиной возникновения закрутки воздуха в торнадо и в тропических циклонах является только вращение Земли вокруг своей оси и что только это движение Земли является источником кинетической энергии вращающейся части этих потоков.

### Свойства решений и роль вращения Земли вокруг своей оси

Доказанный факт существования и единственности решения начально-краевой задачи (5.1)–(5.3) позволяет установить, что только из-за вращения Земли вокруг своей оси воздух закручивается в придонных частях восходящих потоков.

Это устанавливается при анализе единственного решения в двух случаях:  $\Omega = 0$  и  $\Omega \neq 0$ . Первый случай соответствует тому, что при построении решения задачи (5.1)–(5.3) не учитывается действие силы Кориолиса и, следовательно, не учитывается факт вращения Земли вокруг своей оси. А второй случай — когда учитывается.

Будем пользоваться фактом, что нужно единственное аналитическое ре-

шение задачи (5.1)–(5.3) представимо в виде сходящегося ряда

$$\mathbf{W}(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{W}_k(t, r, \varphi) \frac{z^k}{k!}. \quad (7.1)$$

Предположим, что начальные и краевые условия не зависят от переменной  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} = \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} = 0, \quad (7.2)$$

и закрутки воздуха на радиусе притока нет:

$$v^0|_{r=r_{in}} = 0. \quad (7.3)$$

Вначале рассматривается случай  $\Omega = 0$  и поэтому  $a = b = 0$ .

### Течение в случае $\Omega = 0$

При указанных в (7.2), (7.3) условиях и учете того, что  $\Omega = a = b = 0$ , задача (5.1)–(5.3) переходит в нижеследующую задачу (7.4)–(7.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left( u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = 0, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}cc_\varphi = 0, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = -g. \end{array} \right. \quad (7.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = c_0(t, r), \\ u(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = u_0(t, r), \\ v(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = 0, \\ w(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = 0; \end{array} \right. \quad (7.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u_{in} = \text{const} < 0, \\ v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = 0, \end{array} \right. \quad (7.6)$$

при условии согласования

$$u_0(t, r)|_{r=r_{in}} = u_{in}.$$

**Теорема 4.** У задачи (7.4–7.6) существует единственное аналитическое решение (см. **Теорему 2**), представимое в виде сходящегося ряда (7.1), коэффициенты которого удовлетворяют следующим соотношениям

$$\frac{\partial \mathbf{W}_k}{\partial \varphi} = 0; \quad v_k = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

и, следовательно, решение задачи (7.4)–(7.6) не зависит от  $\varphi$ , и у этого решения окружная скорость тождественно равна нулю.

Доказательство теоремы проводится методом математической индукции по номеру  $k$  коэффициентов  $\mathbf{W}_k, c_{k+1}, w_{k+1}$ .

При  $k = 0$  требуемые равенства для  $\mathbf{W}_0$  выполняются по свойствам (7.5), (7.6). Далее из формул (5.5) определяются

$$c_1 = c_{10}(t, r) = -\frac{(\gamma - 1)g}{2c_0(t, r)}; \quad w_1 = 0, \quad (7.8)$$

и указанные функции удовлетворяют соотношениям (7.7). База индукции для  $\mathbf{W}_0, c_1, w_1$  установлена.

Предположение индукции: при  $0 \leq \ell \leq k$  имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial \mathbf{W}_\ell}{\partial \varphi} = 0; \quad u_\ell = 0; \quad \frac{\partial c_{k+1}}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial w_{k+1}}{\partial \varphi} = 0.$$

Для выполнения шага индукции третье уравнение системы (7.4) дифференцируется  $(k + 1)$  раз по  $z$  и полагается  $z = 0$ . Тогда с учетом формулы Лейбница для производной нужного порядка от произведения двух функций

$$(P \cdot Q)^{(k+1)} = \sum_{\ell=0}^{k+1} C_{k+1}^\ell P^{(\ell)} \cdot Q^{(k+1-\ell)}$$

получается, что коэффициент  $v_{k+1}$  при нулевом его значении удовлетворяет полученному после дифференцирования соотношению и, следовательно,

$$v_{k+1} = 0$$

есть решение этого уравнения.

Затем второе уравнение системы (7.4) дифференцируется  $(k + 1)$  раз по  $z$  и полагается  $z = 0$ . В результате получается уравнение

$$\frac{\partial u_{k+1}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_{k+1}}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{\partial c_{k+1}}{\partial r} = F_{2,k}(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_k). \quad (7.9)$$

В этом уравнении

$$\frac{v_0}{r} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varphi} = 0$$

и слагаемые

$$\frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{\partial c_{k+1}}{\partial r}; \quad F_{2,k}(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_k)$$

по предположению индукции не зависят от  $\varphi$ .

С учетом ниже следующего начального условия для уравнения (7.9)

$$u_{k+1}|_{r=r_{in}} = 0, \quad (7.10)$$

которое получается после дифференцирования по  $z$  условия (7.6), устанавливается, что решение задачи (7.9), (7.10) не зависит от  $\varphi$ . Этот факт получается при представлении решения задачи (7.9), (7.10) в виде ряда по степеням  $(r - r_{in})$  и доказательство того, что коэффициенты этого ряда не зависят от  $\varphi$ .

После этого первое и четвертое уравнения системы (7.4) дифференцируются  $(k+1)$  раз по  $z$  и полагается  $z = 0$ . В результате получаются следующие два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{(\gamma-1)}{c_0} w_{k+2} = F_{1,k+1}(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_{k+1}), \\ \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{k+2} = F_{4,k+1}(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_{k+1}), \end{cases}$$

из которых однозначно определяются  $w_{k+2}$ ,  $c_{k+2}$  и которые не зависят от  $\varphi$ . Последнее верно, поскольку по предположению индукции и по доказанным свойствам коэффициентов  $u_{k+1}$ ,  $v_{k+1}$  правые части этих двух последних уравнений:  $F_{1,k+1}$ ,  $F_{4,k+1}$  — не зависят от  $\varphi$ .

Таким образом, шаг индукции от коэффициентов  $\mathbf{W}_k$ ,  $c_{k+1}$ ,  $w_{k+1}$  к коэффициентам  $\mathbf{W}_{k+1}$ ,  $c_{k+2}$ ,  $w_{k+2}$  сделан и теорема 4 доказана.

### Течение в случае $\Omega \neq 0$

Для задачи (5.1)–(5.3) — характеристической задачи Коши о заданном радиальном притоке — справедлива теорема 2 о существовании и единственности ее аналитического решения.

В данном параграфе эта задача рассматривается с уточненными начально-краевыми условиями:

$$\begin{cases} c(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = c_0(r), \\ u(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = u_0(r), \\ v(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = v_0(r), \\ w(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = 0; \end{cases} \quad (7.11)$$

$$\begin{cases} u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u_{in} = \text{const} < 0, \\ v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

где функции  $c_0(r)$ ,  $u_0(r)$ ,  $v_0(r)$  задаются формулами (6.4) или (что эквивалентно) при заданной  $v_0(r)$  функции  $c_0(r)$ ,  $u_0(r)$  определяются при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.5) при условиях (6.3).

Поскольку для этих начально-краевых условий (7.11), (7.12) теорема 2 справедлива, то, как уже отмечено выше, при  $\Omega = 0$  решение не будет зависеть от переменной  $\varphi$  и окружная скорость  $v(t, r, z)$  будет тождественным нулем.

В случае  $\Omega \neq 0$  имеет место формула (см. (6.4))

$$v_0(r) = \frac{a(r_{in}^2 - r^2)}{2r}. \quad (7.13)$$

Общий вид функции (7.13) приведен на рис. 7.1.

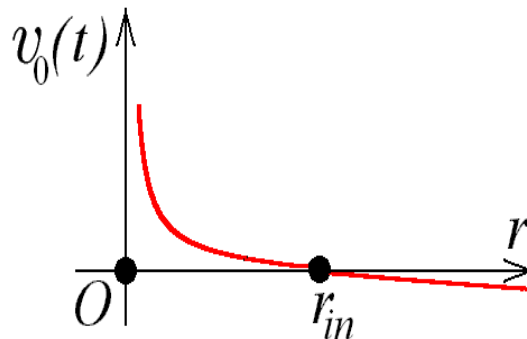


Рис. 7.1

Следовательно, в случае учета вращения Земли вокруг своей оси у единственного аналитического решения задачи обязательно будет иметь место закрутка газа при  $r_0 \leq r < r_{in}$ . Направление закрутки в случае Северного полушария, где  $a > 0$  и  $v_0(r) > 0$ , положительное, т. е. против хода часовой

стрелки. В случае Южного полушария, где  $a < 0$  и  $v_0(r) < 0$ , направление закрутки отрицательное — по ходу часовой стрелки.

Поскольку  $v_0(r)$  отлична от тождественного нуля, то у течения воздуха, задающегося этим решением, кинетическая энергия вращающейся части потока будет строго положительна. И, как показывают проведенные расчеты, значения этой кинетической энергии могут быть достаточно большими.

### Влияние вращения Земли вокруг своей оси на течение газа

Используя полученное конкретное решение (6.4) при условиях (7.11), (7.12), рассмотрим вопрос о влиянии силы Кориолиса, а точнее, о влиянии вращения Земли вокруг своей оси, на подобные потоки, поскольку сама сила Кориолиса работы не производит.

Задачу о радиальном притоке в плоскости  $z = 0$  рассмотрим в двух случаях:

1.  $\Omega = 0$  и тогда  $v_0(r) \equiv 0$ ;
2.  $\Omega \neq 0$  и тогда  $v_0(r) = a(r_{in}^2 - r^2)/(2r)$ .

Функции  $c_0(r)$ ,  $u_0(r)$  можно определить не только из неявно заданного вида (6.4), но и при решении следующей задачи Коши для системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_0 = -\frac{(\gamma - 1)}{2} c \frac{\left[ u_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}, \\ u'_0 = u_0 \frac{\left[ c_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}, \\ c_0(r)|_{r=r_{in}} = 1; \quad u_0(r)|_{r=r_{in}} = u_{in} = \text{const} < 0. \end{array} \right. \quad (7.14)$$

Решение задачи (7.14) и функция (7.13) описывают следующее течение: на окружности  $r = r_{in}$  задан радиальный приток газа:  $u_0 = u_{in} < 0$  — в кольцо  $r_0 \leq r \leq r_{in}$  (см. рис. 7.2). При  $r = r_{in}$  окружная скорость  $v_0$  равна нулю, а скорость звука равна единице.

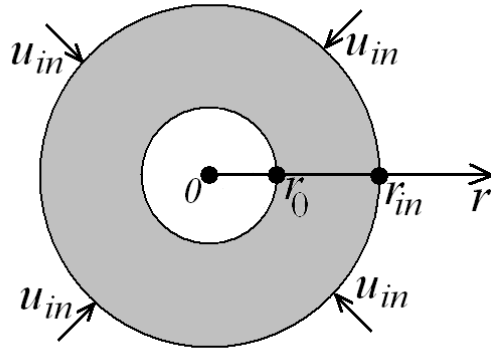


Рис. 7.2

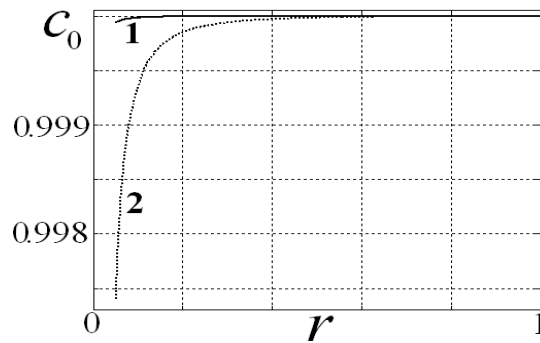


Рис. 7.3

В случае следующих размерных значений:  $r_{in} = 73000$  м;  $r_0 = 3650$  м;  $\sqrt{u_0^2(r_0) + v_0^2(r_0)} = 51.91$  м/с – графики полученного решения приведены на рис. 7.3–7.5, на которых кривые, соответствующие первому ( $\Omega = 0$ ) и второму ( $\Omega \neq 0$ ) случаям, помечены соответственно цифрами один и два.

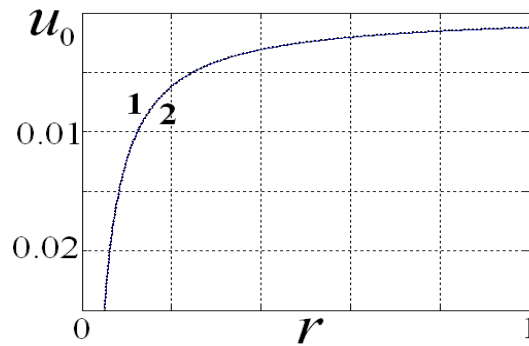


Рис. 7.4



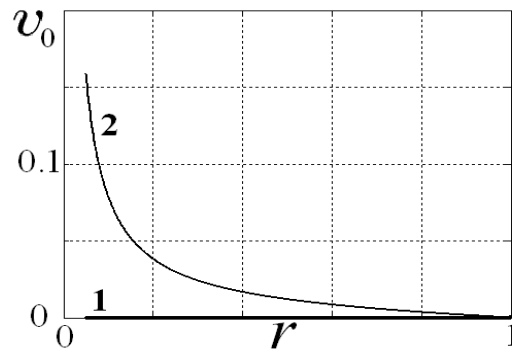


Рис. 7.5

Кривые скорости звука качественно ведут себя одинаково, только во втором случае изменение  $c(r)$  в окрестности точки  $r = r_0$  принципиально более резкое. Графики радиальной скорости практически совпадают. И поэтому очевидно, что во втором случае:  $\Omega \neq 0$  – кинетическая энергия потока больше, чем кинетическая энергия потока в первом случае  $\Omega = 0$ , поскольку во втором случае  $v_0(r) > 0$  при  $r_0 \leq r < r_{in}$ , а в первом – нуль.

Это увеличение кинетической энергии потока в случае, когда при построении решения учитывается вращение Земли, можно объяснить только следующим образом. Часть кинетической энергии вращения Земли, благодаря учету вращения Земли вокруг своей оси через учет действия силы инерции (силы Кориолиса), переходит в кинетическую энергию вращающейся части соответствующего течения, имеющего вертикальный сток и придонную часть. Этот вывод схематично изображен на рис. 7.6.

И нет других причин, кроме вращения Земли вокруг своей оси, для поступления энергии как на возникновение закрутки придонной части течения, так и на поддержание этой закрутки.

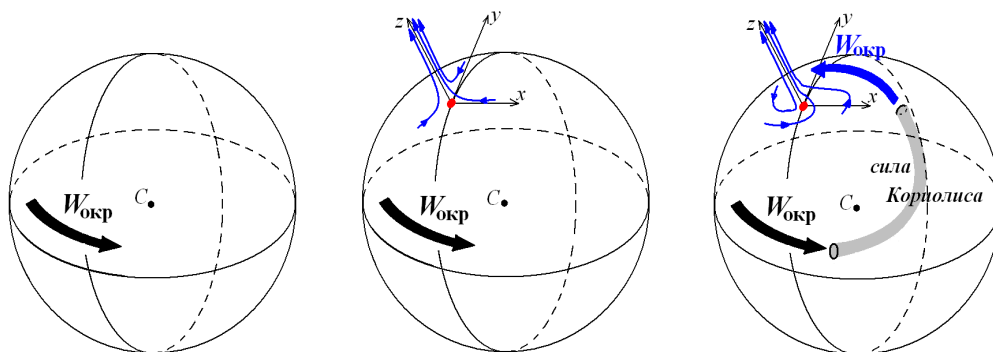


Рис. 7.6

**Замечание.** Для решений задач, рассмотренных в параграфах пять и семь, также справедлив факт, аналогичный теореме 4. А именно: если в начальных данных и в краевых условиях указанных задач нет зависимости от  $\varphi$ , то в случае  $\Omega = 0$  (при неучете вращения Земли вокруг своей оси) закрутки газа в решении этих задач нет. И, следовательно, установленная в этих задачах закрутка газа вызвана только вращением Земли вокруг своей оси.

## **§ 8. Задача о трехмерном нестационарном движении газа возле нагревающегося цилиндра**

### **Теорема о возникновении отрицательно закрученного трехмерного нестационарного течения при начале плавного нагрева вертикального цилиндра.**

#### **Влияние вращения Земли**

Для системы уравнений газовой динамики для идеального политропного газа в изэнтропическом случае в условиях действия сил тяжести и Кориолиса ставится специальная характеристическая задача Коши, решение которой описывает движение первоначально покоящегося в поле тяжести воздуха при плавном нагреве находящегося в нем вертикального цилиндра. Доказано, что при условии аналитичности входных данных поставленная задача в некоторой окрестности рассматриваемой точки имеет единственное аналитическое решение, представимое в виде сходящегося ряда. Анализ первых коэффициентов этого ряда показал, что при начале нагрева цилиндра в воздухе сразу возникает окружное движение газа, закрученное в Северном полушарии в отрицательном направлении и в положительном направлении в случае Южного полушария. Установленные факты являются математическим обоснованием направления закрутки огненных вихрей. Также показано, что при отсутствии действия силы Кориолиса, т. е. при неучете вращения Земли вокруг своей оси, построенное решение является радиальным и закрутка газа отсутствует.

#### **Система уравнений газовой динамики в условиях действия сил тяжести и Кориолиса**

Рассматривается система (3.10), т. е. система уравнений газовой динамики для нестационарных общих пространственных изэнтропических течений политропного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в безразмерных переменных, и которая здесь повторена:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left( u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (8.1)$$

Скорость звука  $c$  политропного газа связана с температурой  $T$  следующей формулой [188]:

$$c = \sqrt{T}.$$

В системе (8.1) вместо скорости звука в качестве искомой функции вводится температура

$$T = c^2, \quad T_\eta = 2cc_\eta,$$

где  $\eta$  принимает значения  $t, r, \varphi, z$  и для удобства последующих выкладок первое уравнение системы (8.1) ставится в конец новой системы

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{1}{(\gamma-1)}T_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}T_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{1}{(\gamma-1)}T_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g, \\ T_t + uT_r + \frac{v}{r}T_\varphi + wT_z + (\gamma-1)T \left( u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0. \end{array} \right. \quad (8.2)$$

### Закрутка газа в восходящих потоках

Выше с помощью построения решений системы уравнений (8.1) представлены результаты математического моделирования течений в разрушительных атмосферных вихрях типа торнадо и тропических циклонов. В частно-

сти, доказано (см. § 4), что при наличии стока газа на вертикальном цилиндре ненулевого радиуса в рассматриваемом течении, внешнем по отношению к цилиндру, возникает закрутка воздуха в соответствующем направлении: положительном и отрицательном в случаях соответственно Северного и Южного полушария. Эти направления соответствуют направлениям закрутки атмосферных восходящих потоков типа торнадо и тропического циклона.

Математически факт закрутки газа в соответствующем направлении установлен при доказательстве существования и единственности решений соответствующих характеристических задач Коши стандартного вида (см. § 3) и исследовании свойств этих решений.

Закрутка восходящего потока в указанном направлении подтверждена также результатами экспериментов [54, 97, 98–112].

В экспериментах [94–106] свободный восходящий вихрь создавался с помощью нагрева снизу металлического стола. В экспериментах [54, 97] восходящий поток создавался принудительным движением воздуха вверх по трубе за счет работы вентилятора, помещенного в верхней части трубы. При этом на подстилающей поверхности вокруг нижнего края трубы фиксировалось вращение воздуха. Поскольку эксперименты проводились в Северном полушарии, то в обеих схемах экспериментов закрутка воздуха была в положительном направлении.

Однако в природе также наблюдаются [108, 115, 116] и так называемые огненные вихри (огненные торнадо), закрутка которых имеет другое направление: отрицательное в случае Северного полушария и положительное в Южном полушарии. На рис. 8.1 приведена фотография одного огненного вихря, наблюдавшегося в Северном полушарии.



*Рис. 8.1*

В некоторых экспериментах удалось создать течения, близкие к наблюдаемым в природе огненным вихрям, причем без принудительной закрутки [114].

При численном моделировании нестационарных трехмерных закрученных потоков, возникающих при нагреве подстилающей поверхности, также наблюдается появление вихревых образований, закрученных в отрицательном направлении, хотя в расчетах значение  $\sin \psi$  полагалось положительным, что соответствует случаю Северного полушария [74].

Цель данного параграфа — построить решение конкретной начально-краевой задачи, которое моделирует движение воздуха вокруг плавно нагревающегося вертикального цилиндра, и установить факт возникновения закрутки воздуха, внешнего по отношению к цилиндру, в отрицательном или в положительном направлениях в случаях соответственно Северного или Южного полушария.

### **Фоновое течение и его звуковая характеристика**

Набор функций

$$u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad T = T_0(z) = 1 - kz; \quad k = (\gamma - 1)g = \text{const} > 0 \quad (8.3)$$

является решением системы (8.2). Он передает покоящийся в поле тяжести газ и далее называется фоновым течением. Скорость звука фонового течения задается формулой

$$c = c_0(z) = \sqrt{T_0(z)} = \sqrt{1 - kz}.$$

Особо подчеркнем, что в (8.3) вместе с  $u = w = 0$  и  $v = 0$ , т. е. в фоновом течении закрутки газа нет.

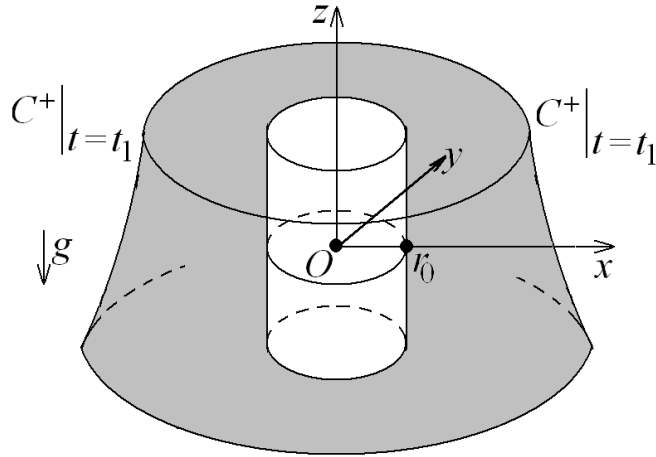


Рис. 8.2

Пусть при  $t = 0$  вне цилиндра радиуса  $r = r_0$ ,  $r_0 = \text{const} > 0$  (рис. 8.2) находится покоящийся в поле тяжести газ. С момента времени  $t = 0$  начинается плавный нагрев этого цилиндра, определяемый аналитической в окрестности точки  $(t = 0, z = 0)$  функцией  $T = T^o(t, z)$ :

$$T(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0} = T^o(t, z) = T_0(z) + T_1(t), \quad T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = T_* = \text{const} > 0.$$

Исходя из двух последних равенств, функцию  $T^o(t, z)$  можно представить в виде

$$T^o(t, z) = T_0(z) + T_*t + T^{01}(t)t^2$$

со своей заданной аналитической функцией  $T^{01}(t)$ , и тогда условие плавного нагрева цилиндра принимает вид:

$$T(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0} = T_0(z) + T_*t + T^{01}(t)t^2. \quad (8.4)$$

Конфигурация возникшего в результате нагрева цилиндра течения следующая: по покоящемуся в поле тяжести газу в сторону возрастания значений  $r$  распространяется поверхность звуковой  $C^+$ -характеристики (см. рис. 8.2). Эта поверхность в каждый момент времени отделяет еще покоящийся при больших значениях  $r$  газ от области газа, начавшего при меньших значениях  $r$  движение из-за его нагрева цилиндром. На рис. 8.2 область движущегося газа затемнена.

Поверхность  $C^+$ -характеристики задается в виде

$$C^+ : r = r_0 + r_1(t, z), \quad (8.5)$$

где функция  $r_1(t, z)$  является решением следующей задачи Коши [179]:

$$r_{1t} = c_0(z)\sqrt{1 + r_{1z}^2}; \quad r_1(t, z)|_{t=0} = 0, \quad (8.6)$$

которая по теореме Ковалевской [188] имеет в некоторой окрестности точки  $(t = 0, r = r_0, z = 0)$  единственное аналитическое решение, от  $\varphi$  не зависящее.

Построение решения задачи (8.6) в виде ряда по степеням  $t$

$$r_1(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{1k}(z) \frac{t^k}{k!}; \quad r_{1k}(z) = \left. \frac{\partial^k r_1}{\partial t^k} \right|_{t=0}$$

приводит к следующим первым коэффициентам:

$$r_{10}(z) = 0; \quad r_{11}(z) = c_0(z);$$

$$r_{12}(z) = \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \left[ c_0(z) \sqrt{1 + r_{1z}^2} \right] \right) \right|_{t=0} = \left[ \frac{c_0(z) r_{1z} r_{1zt}}{\sqrt{1 + r_{1z}^2}} \right] \Big|_{t=0} = 0,$$

поскольку

$$r_{1z}|_{t=0} = (r_1|_{t=0})_z = r'_{10}(z) = 0,$$

и, следовательно, к такому представлению:

$$r_1(t, z) = \sqrt{1 - kz}t + r_2(t, z)t^3 \quad (8.7)$$

с некоторой аналитической функцией  $r_2(t, z)$ . Еще раз отметим, что от переменной  $\varphi$  функция  $r_1$  не зависит.

### **Характеристическая задача Коши о движении газа возле нагревающегося цилиндра**

Для системы уравнений (8.2) на поверхности звуковой  $C^+$ -характеристики (8.5) ставятся условия

$$\begin{cases} u(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = 0; \\ v(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = 0; \\ w(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = 0; \\ T(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = T_0(z), \end{cases} \quad (8.8)$$



обеспечивающие непрерывное примыкание искомого течения к фоновому, задаваемому формулами (8.3).

Кроме условий (8.8), для системы (8.2) ставится также условие (8.4).

Решение получившейся задачи (8.2), (8.8), (8.4) описывает искомое течение газа, расположенное между поверхностью звуковой  $C^+$ -характеристики (8.5) и поверхностью нагревающегося цилиндра  $r = r_0$  (см. рис. 8.2).

**Теорема 5.** *Задача (8.2), (8.8), (8.4) имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки  $M_0$  с координатами  $t = 0, r = r_0, \varphi = \varphi_0, z = 0$ , где  $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ .*

### Доказательство теоремы

Доказательство теоремы состоит в сведении задачи (8.2), (8.8), (8.4) к характеристической задаче Коши стандартного вида [188], для которой справедлив соответствующий аналог теоремы Ковалевской [188, 192].

Для сведения к стандартному виду вначале делается следующая замена переменных:

$$\begin{cases} \xi = r_0 + r_1(t, z) - r; \\ \zeta = r - r_0; \\ \varphi' = \varphi; \\ \chi = z, \end{cases} \quad (8.9)$$

т. е. поверхность звуковой  $C^+$ -характеристики (8.5) берется за новую координатную плоскость  $\xi = 0$ , а поверхность цилиндра  $r = r_0$  — за другую новую координатную плоскость  $\zeta = 0$ .

Якобиан этого преобразования переменных:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_t & \xi_r & \xi_\varphi & \xi_z \\ \zeta_t & \zeta_r & \zeta_\varphi & \zeta_z \\ \varphi'_t & \varphi'_r & \varphi'_\varphi & \varphi'_z \\ \chi_t & \chi_r & \chi_\varphi & \chi_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{1t} & -1 & 0 & r_{1z} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r_{1t}.$$

С учетом представления (8.7) получается:

$$J|_{t=0, z=0} = r_{1t}|_{t=0, z=0} = 1,$$

т. е. замена переменных (8.9) является невырожденной в некоторой окрестности рассматриваемой точки  $M_0$ .

Для того, чтобы получить обратный переход от новых переменных к старым, имеем равенства:

$$\begin{cases} r_1(t, \chi) = \xi + \zeta; \\ r = \zeta + r_0; \\ \varphi = \varphi'; \\ z = \chi. \end{cases} \quad (8.10)$$

И чтобы из равенства

$$r_1(t, \chi) = \xi + \zeta$$

получить выражение старой переменной  $t$  через новые переменные, воспользуемся в равенстве

$$r_1(t, \chi) = r - r_0$$

представлением (8.7), т. е. представлением

$$F(t, \chi, r - r_0) \equiv \sqrt{1 - k\chi} t + r_2(t, \chi)t^3 - (r - r_0) = 0.$$

Поскольку

$$F_t|_{t=0, r=r_0} = \sqrt{1 - k\chi}, \quad F_r|_{t=0, r=r_0} = -1,$$

то

$$t_r|_{t=0, r=r_0} = - \frac{F_r}{F_t} \Big|_{t=0, r=r_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - k\chi}},$$

и по теореме о существовании неявно заданной функции равенство

$$F(t, \chi, r - r_0) = 0$$

эквивалентно равенству

$$t = \frac{(r - r_0)}{\sqrt{1 - k\chi}} + t_2(r - r_0, \chi)(r - r_0)^2$$

с некоторой аналитической в окрестности точки  $(r = r_0, \chi = 0)$  функцией  $t_2(r - r_0, \chi)$ .

С учетом последнего полученного соотношения равенство

$$r_1(t, \chi) = \xi + \zeta$$

переписывается в эквивалентном виде

$$t = \frac{(\xi + \zeta)}{\sqrt{1 - k\chi}} + t_2(\xi + \zeta, \chi)(\xi + \zeta)^2, \quad (8.11)$$

что и дает окончательный вид первого из соотношений (8.10) для перехода от новых переменных к старым или, что то же самое, для замены старых переменных через новые с помощью известных функций.

Формулы для частных производных при замене (8.9) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot r_{1t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial \varphi'} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial \chi} \cdot 0 = r_{1t} \frac{\partial}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot (-1) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot 1 = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi'} \cdot 1 = \frac{\partial}{\partial \varphi'};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot r_{1z} + \frac{\partial}{\partial \chi} \cdot 1 = \frac{\partial}{\partial \chi} + r_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Естественно, что в этих формулах значения производных  $r_{1t}$  и  $r_{1z}$  надо записать через новые переменные. Для этого можно воспользоваться следствиями формулы (8.7):

$$r_{1t} = \sqrt{1 - kz} + 3r_2(t, z)t^2 + r_{2t}(t, z)t^3,$$

$$r_{1z} = -\frac{k}{2\sqrt{1 - kz}}t + r_{2z}(t, \chi)t^2,$$

в которых надо учесть формулы перехода (8.10) и (8.11).

В результате получают такие представления:

$$r_{1t} = \sqrt{1 - k\chi} + r_3(\xi + \zeta, \chi)(\xi + \zeta)^2, \quad (8.12)$$

$$r_{1z} = -\frac{k}{2\sqrt{1 - k\chi}}(\xi + \zeta) + r_4(\xi + \zeta, \chi)(\xi + \zeta)^2 \quad (8.13)$$

со своими аналитическими в некоторой окрестности точки  $(\xi = 0, \zeta = 0, \chi = 0)$  функциями  $r_3(\xi + \zeta, \chi)$ ,  $r_4(\xi + \zeta, \chi)$ .

Далее используются краткие выражения  $r_{1t}$ ,  $r_{1z}$ , при этом подразумевается, что они имеют полученный вид (8.12), (8.13). Также отметим, что от переменной  $\varphi'$  функции  $r_{1t}$ ,  $r_{1z}$  не зависят.

Далее у переменной  $\varphi$  штрих опускается.

В системе (8.2) делается замена переменных (8.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} (r_{1t} - u + r_{1z}w)u_\xi + uu_\zeta + \frac{v}{(\zeta + r_0)}u_\varphi - \frac{v^2}{(\zeta + r_0)} + \\ \quad + wu_\chi + \frac{1}{(\gamma - 1)}T_\zeta - \frac{1}{(\gamma - 1)}T_\xi = av - bw \cos \varphi; \\ (r_{1t} - u + r_{1z}w)v_\xi + uv_\zeta + \frac{uv}{(\zeta + r_0)} + \frac{v}{(\zeta + r_0)}v_\varphi + \\ \quad + wv_\chi + \frac{1}{(\gamma - 1)(\zeta + r_0)}T_\varphi = -au + bw \sin \varphi; \\ (r_{1t} - u + r_{1z}w)w_\xi + uw_\zeta + \frac{v}{(\zeta + r_0)}w_\varphi + ww_\chi + \\ \quad + \frac{1}{(\gamma - 1)}T_\chi + \frac{r_{1z}}{(\gamma - 1)}T_\xi = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g; \\ (r_{1t} - u + r_{1z}w)T_\xi + uT_\zeta + \frac{v}{(\zeta + r_0)}T_\varphi + wT_\chi + \\ \quad + (\gamma - 1)T \left[ u_\zeta - u_\xi + \frac{u}{(\zeta + r_0)} + \frac{v_\varphi}{(\zeta + r_0)} + w_\chi + r_{1z}w_\xi \right] = 0. \end{array} \right. \quad (8.14)$$

Начальные условия (8.8), заданные на  $C^+$ -характеристике, переходят в условия:

$$u|_{\xi=0} = 0; \quad v|_{\xi=0} = 0; \quad w|_{\xi=0} = 0; \quad T|_{\xi=0} = 1 - k\chi = T_0(\chi), \quad (8.15)$$

а краевое условие (8.4) с учетом соотношения (8.11) переходит в

$$T|_{\zeta=0} = T_0(\chi) + \frac{T_*}{\sqrt{1 - k\chi}}\xi + T_{01}(\xi, \chi)\xi^2, \quad (8.16)$$

где функция  $T_{01}(\xi, \chi)$  считается заданной и аналитической в некоторой окрестности точки  $(\xi = 0, \chi = 0)$ .

Система (8.14) в векторно-матричном виде имеет следующее представление:

$$AU_{\xi} + BU_{\zeta} + CU_{\chi} + DU_{\varphi} = \mathbf{G},$$

где векторы искомым функций  $\mathbf{U}$  и правых частей  $\mathbf{G}$ , а также матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  таковы:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{v^2}{(\zeta + r_0)} + av - bw \cos \varphi \\ -au + bw \sin \varphi - \frac{uv}{(\zeta + r_0)} \\ bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g \\ -\frac{(\gamma - 1)Tu}{(\zeta + r_0)} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} R; & 0; & 0; & -\frac{1}{(\gamma - 1)} \\ 0; & R; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & R; & \frac{r_{1z}}{(\gamma - 1)} \\ -(\gamma - 1)T; & 0; & (\gamma - 1)r_{1z}T; & R \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее

$$R = r_{1t} - u + r_{1z}w.$$

$$B = \begin{pmatrix} u; & 0; & 0; & \frac{1}{(\gamma - 1)} \\ 0; & u; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & u; & 0 \\ (\gamma - 1)T; & 0; & 0; & u \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} w; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & w; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & w; & \frac{1}{(\gamma - 1)} \\ 0; & 0; & (\gamma - 1)T; & w \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{v}{(\zeta + r_0)}; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & \frac{v}{(\zeta + r_0)}; & 0; & \frac{1}{(\gamma - 1)(\zeta + r_0)} \\ 0; & 0; & \frac{v}{(\zeta + r_0)}; & 0 \\ 0; & \frac{(\gamma - 1)T}{(\zeta + r_0)}; & 0; & \frac{v}{(\zeta + r_0)} \end{pmatrix}.$$

Чтобы показать, что рассматриваемая ХЗК (8.14)–(8.16) сводится к стандартному виду, достаточно подобрать невырожденные матрицы  $M_1$  и  $M_2$ , за-

висящие от  $\zeta$ ,  $\chi$ ,  $\varphi$  и такие, что произведения  $(M_1AM_2)|_{\xi=0}$  и  $(M_1BM_2)|_{\xi=0}$  имеют требуемый вид (см. § 3). А именно:

$$(M_1AM_2)|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & 0 \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(M_1BM_2)|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{pmatrix}$$

и при этом

$$\det Q = \left( \begin{array}{cccc} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \end{array} \right) \Big|_{\zeta=\chi=0, \varphi=\varphi_0} \neq 0; \quad s_{55}|_{\zeta=\chi=0, \varphi=\varphi_0} \neq 0.$$

Кроме того, требуется, чтобы задание условия (8.16) было эквивалентно заданию соответствующего условия при  $\zeta = 0$  для последней компоненты вектора

$$M_2^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, после умножения системы (8.14) слева на  $M_1$  и внесения в соответствующие места произведения  $M_2M_2^{-1}$ , равного единичной матрице, получается эквивалентная системе (8.14) система уравнений:

$$M_1AM_2M_2^{-1}\mathbf{U}_\xi + M_1BM_2M_2^{-1}\mathbf{U}_\zeta + M_1CM_2M_2^{-1}\mathbf{U}_\chi + M_1DM_2M_2^{-1}\mathbf{U}_\varphi = M_1\mathbf{G}.$$

Если теперь заменить вектор  $M_2^{-1}\mathbf{U}$  на вектор  $\mathbf{W}$  и учесть вид производных вектора  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W}_\vartheta = (M_2^{-1}\mathbf{U})_\vartheta = M_2^{-1}\mathbf{U}_\vartheta + M_{2\vartheta}^{-1}\mathbf{U} = M_2^{-1}\mathbf{U}_\vartheta + M_{2\vartheta}^{-1}M_2\mathbf{W}$$

(здесь символ  $\vartheta$  принимает значения  $\xi, \zeta, \chi, \varphi$ ), то получается система

$$\begin{aligned} M_1AM_2\mathbf{W}_\xi + M_1BM_2\mathbf{W}_\zeta + M_1CM_2\mathbf{W}_\chi + M_1DM_2\mathbf{W}_\varphi &= \quad (8.17) \\ &= M_1\mathbf{G} + M_1BM_2M_{2\zeta}^{-1}M_2\mathbf{W} + M_1CM_2M_{2\chi}^{-1}M_2\mathbf{W} + M_1DM_2M_{2\varphi}^{-1}M_2\mathbf{W}. \end{aligned}$$

При вычислении нужных произведений  $(M_1AM_2)|_{\xi=0}$ ,  $(M_1BM_2)|_{\xi=0}$ , в матрицах  $A$  и  $B$  можно сразу положить  $\xi = 0$ :

$$A|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0; & -\frac{1}{(\gamma-1)} \\ 0; & r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & r_{1t}|_{\xi=0}; & \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)} \\ -(\gamma-1)T_0(\chi); & 0 & (\gamma-1)r_{1z}|_{\xi=0}T_0(\chi); & r_{1t}|_{\xi=0} \end{pmatrix};$$

$$B|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} 0; & 0; 0; & \frac{1}{(\gamma-1)} \\ 0; & 0; 0; & 0 \\ 0; & 0; 0; & 0 \\ (\gamma-1)T_0(\chi); & 0; 0; & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуемые матрицы  $M_1$  и  $M_2$  имеют следующий вид:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 1; & 0 \\ (\gamma-1)T_0(\chi); & 0; & -(\gamma-1)r_{1z}|_{\xi=0}T_0(\chi); & r_{1t}|_{\xi=0} \end{pmatrix},$$

$$\det M_1 = r_{1t}|_{\xi=0} \neq 0$$

в некоторой окрестности точки  $(\xi = 0, \zeta = 0, \chi = 0)$ , поскольку

$$r_{1t}|_{\xi=\zeta=\chi=0} = 1;$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1; 0; 0; \frac{1}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; 1; 0; -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; 0; 1; -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; 0; 0; 1 \end{pmatrix}, \quad \det M_2 = 1 \neq 0;$$

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1; 0; 0; -\frac{1}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; 1; 0; \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; 0; 1; \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; 0; 0; 1 \end{pmatrix}.$$

Вначале последовательно выписывается первое произведение  $M_1(A|_{\xi=0})M_2$ :

$$M_1(A|_{\xi=0}) = \begin{pmatrix} r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0; & -\frac{1}{(\gamma-1)} \\ 0; & r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)} \\ 0; & 0; & r_{1t}|_{\xi=0} & \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)} \\ 0; & 0; & 0; & 0 \end{pmatrix},$$

поскольку

$$q_{41} = r_{1t}|_{\xi=0}(\gamma-1)T_0(\chi) - (\gamma-1)T_0(\chi)r_{1t}|_{\xi=0} \equiv 0;$$

$$q_{42} = r_{1t}|_{\xi=0} \cdot 0 \equiv 0;$$

$$q_{43} = r_{1t}|_{\xi=0}(-1)(\gamma-1)r_{1z}|_{\xi=0}T_0(\chi) + (\gamma-1)r_{1z}|_{\xi=0}T_0(\chi)r_{1t}|_{\xi=0} \equiv 0;$$

$$\begin{aligned} q_{44} &= -\frac{1}{(\gamma-1)}(\gamma-1)T_0(\chi) + \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)}(-1)(\gamma-1)r_{1z}|_{\xi=0}T_0(\chi) + (r_{1t}|_{\xi=0})^2 = \\ &= (r_{1t}|_{\xi=0})^2 - T_0(\chi) \left[ 1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2 \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

Последнее тождество справедливо, поскольку из задачи (8.6) имеем

$$(r_{1t}|_{\xi=0})^2 = T_0(\chi) \left[ 1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2 \right]. \quad (8.18)$$

Далее вычисляется произведение

$$M_1(A|_{\xi=0})M_2 =$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0; & -\frac{1}{(\gamma-1)} \\ 0; & r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)} \\ 0; & 0; & r_{1t}|_{\xi=0} & \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)} \\ 0; & 0; & 0; & 0 \end{pmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0; & \frac{1}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; & 1; & 0; & -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; & 0; & 1; & -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; & 0; & 0; & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & r_{1t}|_{\xi=0}; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\begin{aligned}
q_{14} &= r_{1t}|_{\xi=0} \frac{1}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} - \frac{1}{(\gamma-1)} \equiv 0; \\
q_{24} &= r_{1t}|_{\xi=0} (-1) \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} + \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \equiv 0; \\
q_{34} &= r_{1t}|_{\xi=0} (-1) \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} + \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Итак, матрица  $M_1 (A|_{\xi=0}) M_2$  имеет нужный вид:

$$M_1 (A|_{\xi=0}) M_2 = \begin{pmatrix} r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & (r_{1t}|_{\xi=0}); & 0; & 0 \\ 0; & 0; & (r_{1t}|_{\xi=0}); & 0 \\ 0; & 0; & 0; & 0 \end{pmatrix},$$

а стоящий в ее левом верхнем углу минор размером  $3 \times 3$ , такой:

$$\begin{vmatrix} r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0 \\ 0; & r_{1t}|_{\xi=0}; & 0 \\ 0; & 0; & r_{1t}|_{\xi=0} \end{vmatrix} = (r_{1t}|_{\xi=0})^3 \neq 0$$

в некоторой окрестности рассматриваемой точки  $(\xi = 0, \zeta = 0, \chi = 0)$ , поскольку  $r_{1t}|_{\xi=0} = 1$  при  $\xi = \zeta = \chi = 0$ .

Далее последовательно вычисляется произведение  $M_1(B|_{\xi=0}) M_2$ :

$$\begin{aligned}
M_1(B|_{\xi=0}) &= \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 1; & 0 \\ (\gamma - 1)T_0(\chi); & 0; & -(\gamma - 1)r_{1z}|_{\xi=0}T_0(\chi); & r_{1t}|_{\xi=0} \end{pmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0; & 0; & 0; & \frac{1}{(\gamma - 1)} \\ 0; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & 0 \\ (\gamma - 1)T_0(\chi); & 0; & 0; & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0; & 0; & 0; & \frac{1}{(\gamma - 1)} \\ 0; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & 0 \\ (\gamma - 1)T_0(\chi)r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0; & T_0(\chi) \end{pmatrix}; \\
M_1(B|_{\xi=0}) M_2 &= \begin{pmatrix} 0; & 0; & 0; & \frac{1}{(\gamma - 1)} \\ 0; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & 0 \\ (\gamma - 1)T_0(\chi)r_{1t}|_{\xi=0}; & 0; & 0; & T_0(\chi) \end{pmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0; & \frac{1}{(\gamma - 1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; & 1; & 0; & -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma - 1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; & 0; & 1; & -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma - 1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; & 0; & 0; & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0; & 0; & 0; & \frac{1}{(\gamma - 1)} \\ 0; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & 0 \\ (\gamma - 1)T_0(\chi); & 0; & 0; & 2T_0(\chi) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Стоящий в правом нижнем углу элемент  $2T_0(\chi) > 0$  в некоторой окрестности точки  $(\xi = \zeta = \chi = 0)$ .

Осталось установить вид вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = M_2^{-1}\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 1; 0; 0; \frac{1}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; 1; 0; -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; 0; 1; -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0; 0; 0; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u + \frac{T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ v - \frac{r_{1z}|_{\xi=0}T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ w - \frac{r_{1z}|_{\xi=0}T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Начальные условия (8.14) переходят в начальные условия для  $\mathbf{W}$ :

$$\begin{aligned} W_1|_{\xi=0} &= \frac{T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}}; \\ W_2|_{\xi=0} &= -\frac{r_{1z}T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}}; \\ W_3|_{\xi=0} &= -\frac{r_{1z}T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}}; \\ W_4|_{\xi=0} &= T|_{\xi=0}. \end{aligned} \tag{8.19}$$

И поскольку  $W_4$  – последняя координата получившегося вектора  $\mathbf{W}$  – совпадает с функцией  $T$ , то краевое условие (8.16) переходит в условие

$$W_4|_{\zeta=0} = T_0(\chi) + \frac{T_*}{\sqrt{1-k\chi}}\xi + T_{01}(\xi, \chi)\xi^2 \tag{8.20}$$

и обеспечивает единственность решения у получившейся характеристической задачи Коши стандартного вида (8.16), (8.19), (8.20).

Поскольку характеристическая задача Коши (8.13)–(8.15) эквивалентна характеристической задаче Коши (8.16), (8.19), (8.20), то теорема доказана.

**Построение первых коэффициентов ряда,  
решающего рассматриваемую задачу**

Построим первые коэффициенты ряда

$$\mathbf{U}(\xi, \zeta, \varphi, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\zeta, \varphi, \chi) \frac{\xi^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(\zeta, \varphi, \chi) = \left( \frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial \xi^k} \right) \Big|_{\xi=0},$$

решающего характеристическую задачу Коши (8.14)–(8.16).

Для этого в системе (8.14) положим  $\xi = 0$  и учтем вид начальных условий (8.15):

$$\left\{ \begin{array}{l} (r_{1t}|_{\xi=0}) u_1 - \frac{1}{(\gamma - 1)} T_1 = 0, \\ (r_{1t}|_{\xi=0}) v_1 = 0, \\ (r_{1t}|_{\xi=0}) w_1 + \frac{1}{(\gamma - 1)} T_0' + \frac{(r_{1\chi}|_{\xi=0})}{(\gamma - 1)} T_1 = -g, \\ (r_{1t}|_{\xi=0}) T_1 - (\gamma - 1) T_0 u_1 + (\gamma - 1) T_0 [-u_1 + (r_{1z}|_{\xi=0}) w_1] = 0. \end{array} \right. \quad (8.21)$$

С учетом уравнения для функции  $T_0(\chi)$ , т. е. соотношения

$$(\gamma - 1) T_0'(\chi) = -g,$$

получаются следующие три соотношения:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{(\gamma - 1) (r_{1t}|_{\xi=0})} T_1, \\ v_1 &= 0, \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$w_1 = -\frac{(r_{1z}|_{\xi=0})}{(\gamma - 1) (r_{1t}|_{\xi=0})} T_1,$$

поскольку после исключения из последнего уравнения системы (8.21) величин  $u_1$ ,  $v_1$  и  $w_1$  оно становится тождеством, т. е. прямым следствием первых трех уравнений.

## Одно свойство решения рассматриваемой задачи

Для обоснования одного конкретного свойства решения рассматриваемой задачи определим в точке ( $\zeta = \chi = 0$ ) знаки первых коэффициентов ряда, решающего характеристическую задачу Коши (8.14)–(8.16). И для этого явные формулы, задающие коэффициенты  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ ,  $T_1$  и  $v_2$ , не нужны.

Чтобы узнать значение коэффициента  $T_1$  при  $\zeta = \chi = 0$ , необходимо краевое условие (8.16) продифференцировать по  $\xi$  и положить в получившемся равенстве  $\xi = \chi = 0$ :

$$T_1|_{\zeta=\chi=0} = T_* > 0. \quad (8.23)$$

Отсюда, в частности, следует, что при всех значениях  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$T_{1\varphi}|_{\zeta=\chi=0} = 0, \quad (8.24)$$

а также

$$u_1|_{\zeta=\chi=0} = \frac{1}{(\gamma - 1)} T_1|_{\zeta=\chi=0} = \frac{1}{(\gamma - 1)} T_* > 0. \quad (8.25)$$

Для получения коэффициента  $v_2$  второе уравнение системы (8.14) дифференцируется по  $\xi$ , полагается  $\xi = 0$  и учитываются компоненты вектора  $\mathbf{U}_0$ :

$$(r_{1t}|_{\xi=0}) v_2 = -a u_1 + b w_1 \sin \varphi.$$

В последнем равенстве полагается  $\zeta = \chi = 0$  и учитывается то,  $w_1|_{\zeta=\chi=0} = 0$  (поскольку  $(r_{1z}|_{\xi=\zeta=\chi=0}) = 0$ ):

$$v_2|_{\zeta=\chi=0} = -a u_1|_{\xi=\zeta=\chi=0}.$$

Последнее соотношение приводит к равенству

$$v_2|_{\zeta=\chi=0} = -\frac{2\Omega \sin \psi}{c_{00}} (u_1|_{\zeta=\chi=0}). \quad (8.26)$$

Из формулы (8.26) и с учетом неравенства (8.25) следует, что в Северном полушарии, где  $\sin \psi > 0$ ,

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\zeta=\chi=0} = v_2|_{\zeta=\chi=0} < 0, \quad (8.27)$$

а в Южном полушарии, где  $\sin \psi < 0$ ,

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\zeta=\chi=0} = v_2|_{\zeta=\chi=0} > 0 \quad (8.28)$$

при всех значениях  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

С учетом формул для преобразования производных, а также нулевых значений  $v_0, v_1$ , получаются следующие значения для первых двух производных функции  $v$ , выводящих со звуковой  $C^+$ -характеристики:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{C^+} = \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} = v_{0\zeta} - v_1 = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right|_{C^+} = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\xi=0} = v_{0\zeta\zeta} - 2v_{1\zeta} + v_2 = v_2.$$

Знак выводящей с  $C^+$ -характеристики производной функции  $u$  устанавливается следующим образом:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{C^+} = \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} = u_{0\zeta} - u_1 = -\frac{1}{(\gamma - 1)} T_* < 0. \quad (8.29)$$

На рис. 8.3 с учетом установленных знаков выводящих с  $C^+$ -характеристики производных (для  $v$  взят лучай Северного полушария) показано качественное поведение  $u, v$  в ее окрестности в некоторый момент времени  $t = t_1 > 0$ .

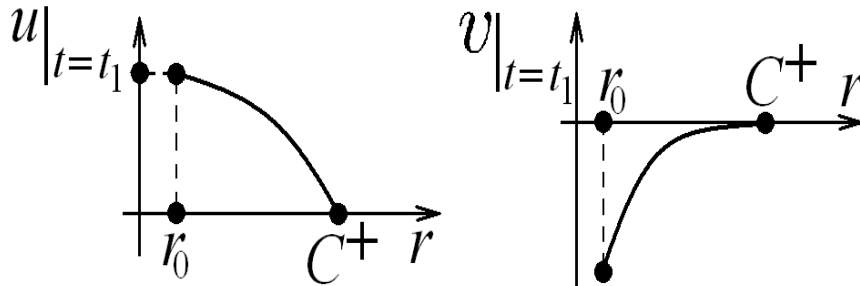


Рис. 8.3

Таким образом, с учетом неравенств (8.28), (8.29) доказано, что в задаче нагрева вертикального цилиндра при всех  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  в некоторой окрестности звуковой  $C^+$ -характеристики, начиная с момента времени  $t = 0$ , возникает закрутка газа: в отрицательном направлении для Северного полушария и в положительном направлении — для Южного полушария.

Установленный факт есть математическое обоснование направления закрутки огненных вихрей.

По аналогии с результатами из § 4, 5, 7, устанавливается, что единственное решение задачи (8.2), (8.8), (8.4) в случае  $\Omega = 0$  описывает только радиальное течение без какой-либо закрутки. Следовательно, причиной закрутки газа возле плавно нагревающегося цилиндра является только вращение Земли вокруг своей оси.

**Глава III**  
**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
**СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРИДОННЫХ ЧАСТЯХ**  
**ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ**

**§ 9. Расчет кинетической энергии трехмерного  
стационарного потока**

Кинетическая энергия газа, движущегося в области

$$(D) : \{r_0 \leq r \leq r_{in}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq h\},$$

задается тройным интегралом

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(x, y, z) \vec{V}^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^h \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_{r_0}^{r_{in}} \rho(r, \varphi) \vec{V}^2(r, \varphi) r dr \right] d\varphi \right\} dz, \quad (9.1)$$

где  $\vec{V}$  – вектор скорости газа.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(x, y, z) \vec{V}^2 dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_{r_0}^{r_{in}} c^5(r, \varphi, z) \left( u^2(r, \varphi, z) + v^2(r, \varphi, z) + w^2(r, \varphi, z) \right) r dr \right] d\varphi \right\} dz = \\ &= W_u + W_v + W_w. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Поскольку рассматриваются изэнтропические течения политропного газа, то

$$c^2(r) = \rho^{(\gamma-1)}, \quad \rho = c^{\frac{2}{(\gamma-1)}}, \quad (9.3)$$

и поэтому в случае воздуха с  $\gamma = 1.4$  имеем

$$\rho = c^5(r). \quad (9.4)$$

Рассматриваем стационарный случай, когда решение зависит только от переменных  $r$  и  $\varphi$ :

$$W_{ki} = W_{ki}(r, \varphi); \quad f_{ki} = f_{ki}(r, \varphi); \quad f = c, u, v. \quad (9.5)$$



Вид формулы скорости звука следующий:

$$c(r, \varphi) = c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 \frac{z^3}{6} + c_4 \frac{z^4}{24}. \quad (9.6)$$

Поэтому с учетом равенства (9.4) для вычисления интеграла (9.2) необходимо возвести  $c$  в пятую степень, то есть представить в виде:

$$c^5(r, \varphi) = \left( c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 \frac{z^3}{6} + c_4 \frac{z^4}{24} \right)^5. \quad (9.7)$$

Далее для простоты изложения используется представление:

$$c(r, \varphi) = c_0(r) + c_1(r, \varphi) z, \quad (9.8)$$

где

$$c_1(r, \varphi) = c_{10}(r) + c_{11}(r) \cos(\varphi) + c_{12}(r) \sin(\varphi), \quad (9.9)$$

которое и возведем в пятую степень. Тогда  $c^5(r, \varphi)$  примет следующий вид:

$$(c_0 + c_1 z)^5 = c_0^5 + 5 c_0^4 c_1 z + 10 c_0^3 c_1^2 z^2 + 10 c_0^2 c_1^3 z^3 + 5 c_0 c_1^4 z^4 + c_1^5 z^5 \quad (9.10)$$

Введем замены:  $a_{10} = c_0^5$ ;  $a_{11} = 5 c_0^4 c_1$ ;  $a_{12} = 10 c_0^3 c_1^2$ ;  
 $a_{13} = 10 c_0^2 c_1^3$ ;  $a_{14} = 5 c_0 c_1^4$ ;  $a_{15} = c_1^5$ , т.е.  $(c_0 + c_1 z)^5 = \sum_{i=0}^5 a_{1i} z^i$

Радиальная скорость закрученного потока будем определять следующей формулой:

$$u(r, \varphi) = u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2} + u_3 \frac{z^3}{6}. \quad (9.11)$$

где

$$u_1(r, \varphi) = u_{10}(r) + u_{11}(r) \cos(\varphi) + u_{12}(r) \sin(\varphi), u_{10}(r) = 0. \quad (9.12)$$

Если ограничиться представлением

$$u(r) = u_0 + u_1 z, \quad (9.13)$$

то для вычисления первого слагаемого интеграла (9.2) найдем  $u^2$ :

$$(u_0 + u_1 z)^2 = u_0^2 + 2 u_0 u_1 z + u_1^2 z^2. \quad (9.14)$$

Введем замены:

$$b_{10} = u_0^2; \quad b_{11} = 2 u_0 u_1; \quad b_{12} = u_1^2, \quad (9.15)$$

т.е.

$$(u_0 + u_1 z)^2 = \sum_{i=0}^2 b_{1i} z^i.$$

Перемножим  $c^5$  и  $u^2$  и затем выделим слагаемые при каждой степени  $z$ :

$$\begin{aligned} & (a_{10} + a_{11}z + a_{12}z^2 + a_{13}z^3 + a_{14}z^4 + a_{15}z^5) (b_{10} + b_{11}z + bz^2) = \\ & a_{10}b_{10} + a_{10}b_{11}z + a_{10}b_{12}z^2 + a_{11}zb_{10} + a_{11}b_{11}z^2 + a_{11}b_{12}z^3 + a_{12}b_{10}z^2 + \\ & + a_{12}b_{11}z^3 + a_{12}b_{12}z^4 + a_{13}b_{10}z^3 + a_{13}b_{11}z^4 + a_{13}b_{12}z^5 + a_{14}b_{10}z^4 + a_{14}b_{11}z^5 + \\ & + a_{14}b_{12}z^6 + a_{15}b_{10}z^5 + a_{15}b_{11}z^6 + a_{15}b_{12}z^7 = \\ & = a_{10}b_{10} + (a_{10}b_{11} + a_{11}b_{10})z + (a_{10}b_{12} + a_{11}b_{11} + a_{12}b_{10})z^2 + \\ & + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{13}b_{10})z^3 + (a_{12}b_{12} + a_{13}b_{11} + a_{14}b_{10})z^4 + \\ & + (a_{13}b_{12} + a_{14}b_{11} + a_{15}b_{10})z^5 + (a_{14}b_{12} + a_{15}b_{11})z^6 + (a_{15}b_{12})z^7. \end{aligned}$$

Введем новые замены:

$$d_0 = a_{10}b_{10}; \quad d_1 = a_{10}b_{11} + a_{11}b_{10}; \quad d_2 = a_{10}b_{12} + a_{11}b_{11} + a_{12}b_{10};$$

$$d_3 = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{13}b_{10}; \quad d_4 = a_{12}b_{12} + a_{13}b_{11} + a_{14}b_{10};$$

$$d_5 = a_{13}b_{12} + a_{14}b_{11} + a_{15}b_{10}; \quad d_6 = a_{14}b_{12} + a_{15}b_{11}; \quad d_7 = a_{15}b_{12}.$$

Теперь можно записать произведение

$$c^5(r, \varphi) u^2(r, \varphi)$$

в следующем виде:

$$c^5(r, \varphi) u^2(r, \varphi) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + d_5 z^5 + d_6 z^6 + d_7 z^7. \quad (9.16)$$

Проинтегрируем выражение (9.16) по  $z$  и в пределах от  $z = 0$  до  $z = h$ :

$$\begin{aligned} \int_0^h [c^5(r) u^2(r)] dz &= d_0 h + \frac{1}{2} d_1 h^2 + \frac{1}{3} d_2 h^3 + \frac{1}{4} d_3 h^4 + \frac{1}{5} d_4 h^5 + \\ &+ \frac{1}{6} d_5 h^6 + \frac{1}{7} d_6 h^7 + \frac{1}{8} d_7 h^8. \end{aligned}$$

Вернемся к заменам (9.15) и проинтегрируем отдельно по  $\varphi$  каждое выражение при степенях  $z$ :

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a_{10} b_{10} h] d\varphi = c_0^5 u_0^2 h \pi; \quad (9.17)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} (a_{10} b_{11} + a_{11} b_{10}) h^2 \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[ \left( 2 c_0^5 u_0 \left( u_{11} \cos(\varphi) + u_{12} \sin(\varphi) \right) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 5c_0^4 \left( c_{10} + c_{11} \cos(\varphi) + c_{12} \sin(\varphi) \right) u_0^2 \Big] h^2 \Big] d\varphi = \\
& = \frac{5}{2} c_0^4 u_0^2 h^2 c_{10} \pi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} (a_{10} b_{12} + a_{11} b_{11} + a_{12} b_{10}) h^3 \right] d\varphi = \frac{1}{6} h^3 c_0^5 u_{12}^2 \pi + \frac{1}{6} h^3 c_0^5 u_{11}^2 \pi + \\
& + \frac{5}{3} h^3 c_0^4 u_0 c_{11} u_{11} \pi + \frac{5}{3} h^3 c_0^3 u_0^2 c_{11}^2 \pi + \frac{5}{3} h^3 c_0^3 u_0^2 c_{12}^2 \pi + \frac{5}{3} h^3 c_0^4 u_0 u_{12} c_{12} \pi + \\
& + \frac{10}{3} h^3 c_0^3 u_0^2 c_{10}^2 \pi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{11} + a_{13} b_{10}) h^4 \right] d\varphi = \frac{15}{4} h^4 c_0^2 u_0^2 c_{10} c_{12}^2 \pi + \\
& + \frac{15}{4} h^4 c_0^2 u_0^2 c_{10} c_{11}^2 \pi + 5h^4 c_0^3 u_0 c_{10} c_{12} u_{12} \pi + 5h^4 c_0^3 u_0 c_{10} c_{11} u_{11} \pi + \\
& + \frac{5}{8} h^4 c_0^4 c_{10} u_{11}^2 \pi + \frac{5}{8} h^4 c_0^4 c_{10} u_{12}^2 \pi + \frac{5}{2} h^4 c_0^2 u_0^2 c_{10}^3 \pi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{5} (a_{12} b_{12} + a_{13} b_{11} + a_{14} b_{10}) h^5 \right] d\varphi = \frac{3}{2} h^5 c_0^2 u_0 c_{11}^3 u_{11} \pi + \\
& + \frac{3}{2} h^5 c_0^2 u_0 c_{12}^3 u_{12} \pi + \frac{3}{4} h^5 c_0 u_0^2 c_{11}^2 c_{12}^2 \pi + 3h^5 c_0 u_0^2 c_{10}^2 c_{11}^2 \pi + \\
& + 3h^5 c_0 u_0^2 c_{10}^2 c_{12}^2 \pi + h^5 c_0^3 c_{10}^2 u_{11}^2 \pi + h^5 c_0^3 c_{10}^2 u_{12}^2 \pi + \frac{3}{4} h^5 c_0^3 c_{11}^2 u_{11}^2 \pi + \\
& + \frac{1}{4} h^5 c_0^3 c_{11}^2 u_{12}^2 \pi + \frac{1}{4} h^5 c_0^3 c_{12}^2 u_{11}^2 \pi + \frac{3}{4} h^5 c_0^3 c_{12}^2 u_{12}^2 \pi + \frac{3}{8} h^5 c_0 u_0^2 c_{11}^4 \pi + \\
& + \frac{3}{8} h^5 c_0 u_0^2 c_{12}^4 \pi + h^5 c_0 u_0^2 c_{10}^4 \pi + h^5 c_0^3 c_{11} c_{12} u_{11} u_{12} \pi + 6h^5 c_0^2 u_0 c_{10}^2 c_{11} u_{11} \pi + \\
& + 6h^5 c_0^2 u_0 c_{10}^2 c_{12} u_{12} \pi + \frac{3}{2} h^5 c_0^2 u_0 c_{11}^2 c_{12} u_{12} \pi + \frac{3}{2} h^5 c_0^2 u_0 c_{11} c_{12}^2 u_{11} \pi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{6} (a_{13}b_{12} + a_{14}b_{11} + a_{15}b_{10}) h^6 \right] d\varphi = \frac{1}{6} h^6 u_0^2 c_{10}^5 \pi + \\
& + \frac{5}{2} h^6 c_0 u_0 c_{10} c_{11}^2 c_{12} u_{12} \pi + \frac{5}{2} h^6 c_0 u_0 c_{10} c_{11} c_{12}^2 u_{11} \pi + \frac{5}{2} h^6 c_0^2 c_{10} c_{11} c_{12} u_{11} u_{12} \pi + \\
& + \frac{5}{8} h^6 u_0^2 c_{10} c_{11}^2 c_{12}^2 \pi + \frac{15}{8} h^6 c_0^2 c_{10} c_{11}^2 u_{11}^2 \pi + \frac{15}{8} h^6 c_0^2 c_{10} c_{12}^2 u_{12}^2 \pi + \\
& + \frac{5}{8} h^6 c_0^2 c_{10} c_{11}^2 u_{12}^2 \pi + \frac{5}{8} h^6 c_0^2 c_{10} c_{12}^2 u_{11}^2 \pi + \frac{10}{3} h^6 c_0 u_0 c_{10}^3 c_{11} u_{11} \pi + \\
& + \frac{10}{3} h^6 c_0 u_0 c_{10}^3 c_{12} u_{12} \pi + \frac{5}{2} h^6 c_0 u_0 c_{10} c_{11}^3 u_{11} \pi + \frac{5}{2} h^6 c_0 u_0 c_{10} c_{12}^3 u_{12} \pi + \\
& + \frac{5}{6} h^6 c_0^2 c_{10}^3 u_{11}^2 \pi + \frac{5}{6} h^6 c_0^2 c_{10}^3 u_{12}^2 \pi + \frac{5}{6} h^6 u_0^2 c_{10}^3 c_{11}^2 \pi + \frac{5}{6} h^6 u_0^2 c_{10}^3 c_{12}^2 \pi + \\
& + \frac{5}{16} h^6 u_0^2 c_{10} c_{11}^4 \pi + \frac{5}{16} h^6 u_0^2 c_{10} c_{12}^4 \pi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{7} (a_{14}b_{12} + a_{15}b_{11}) h^7 \right] d\varphi = \frac{15}{7} h^7 c_{10}^2 c_{11} c_{12} u_{11} c_0 u_{12} \pi + \\
& + \frac{5}{14} h^7 c_{11} c_{12}^3 u_{11} c_0 u_{12} \pi + \frac{15}{14} h^7 c_{10}^2 c_{11} c_{12}^2 u_{11} u_0 \pi + \frac{15}{14} h^7 c_{10}^2 c_{11}^2 u_{12} u_0 c_{12} \pi + \\
& + \frac{5}{14} h^7 c_{11}^3 c_{12} u_{11} c_0 u_{12} \pi + \frac{5}{14} h^7 c_{10}^4 u_{11}^2 c_0 \pi + \frac{5}{14} h^7 c_{10}^4 u_{12}^2 c_0 \pi + \\
& + \frac{25}{112} h^7 c_{11}^4 u_{11}^2 c_0 \pi + \frac{5}{56} h^7 c_{11}^5 u_{11} u_0 \pi + \frac{25}{112} h^7 c_{12}^4 u_{12}^2 c_0 \pi + \\
& + \frac{5}{56} h^7 c_{12}^5 u_{12} u_0 \pi + \frac{5}{112} h^7 c_{11}^4 u_{12}^2 c_0 \pi + \frac{5}{112} h^7 c_{12}^4 u_{11}^2 c_0 \pi + \\
& + \frac{5}{7} h^7 c_{10}^4 u_{11} u_0 c_{11} \pi + \frac{5}{7} h^7 c_{10}^4 u_{12} u_0 c_{12} \pi + \frac{45}{28} h^7 c_{10}^2 c_{11}^2 u_{11}^2 c_0 \pi + \\
& + \frac{15}{14} h^7 c_{10}^2 c_{11}^3 u_{11} u_0 \pi + \frac{45}{28} h^7 c_{10}^2 c_{12}^2 u_{12}^2 c_0 \pi + \frac{15}{14} h^7 c_{10}^2 c_{12}^3 u_{12} u_0 \pi + \\
& + \frac{5}{56} h^7 c_{11}^4 u_{12} u_0 c_{12} \pi + \frac{5}{56} h^7 c_{11} c_{12}^4 u_{11} u_0 \pi + \frac{5}{28} h^7 c_{11}^3 c_{12}^2 u_{11} u_0 \pi + \\
& + \frac{15}{56} h^7 c_{11}^2 c_{12}^2 u_{11}^2 c_0 \pi + \frac{15}{56} h^7 c_{11}^2 c_{12}^2 u_{12}^2 c_0 \pi + \frac{5}{28} h^7 c_{11}^2 c_{12}^3 u_{12} u_0 \pi +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{15}{28} h^7 c_{10}^2 c_{11}^2 u_{12}^2 c_0 \pi + \frac{15}{28} h^7 c_{10}^2 c_{12}^2 u_{11}^2 c_0 \pi;$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{8} (a_{15} b_{12}) h^8 \right] d\varphi = \frac{1}{16} h^8 c_{10}^5 u_{11}^2 \pi + \frac{1}{16} h^8 c_{10}^5 u_{12}^2 \pi + \\ & + \frac{15}{64} h^8 c_{10} c_{11}^2 c_{12}^2 u_{11}^2 \pi + \frac{15}{64} h^8 c_{10} c_{11}^2 c_{12}^2 u_{12}^2 \pi + \frac{25}{128} h^8 c_{10} c_{12}^4 u_{12}^2 \pi + \\ & + \frac{5}{32} h^8 c_{10}^3 c_{11}^2 u_{12}^2 \pi + \frac{5}{32} h^8 c_{10}^3 c_{12}^2 u_{11}^2 \pi + \frac{5}{128} h^8 c_{10} c_{11}^4 u_{12}^2 \pi + \\ & + \frac{5}{128} h^8 c_{10} c_{12}^4 u_{11}^2 \pi + \frac{15}{32} h^8 c_{10}^3 c_{11}^2 u_{11}^2 \pi + \frac{15}{32} h^8 c_{10}^3 c_{12}^2 u_{12}^2 \pi + \\ & + \frac{25}{128} h^8 c_{10} c_{11}^4 u_{11}^2 \pi + \frac{5}{8} h^8 c_{10}^3 c_{11} c_{12} u_{11} u_{12} \pi + \frac{5}{16} h^8 c_{10} c_{11}^3 c_{12} u_{11} u_{12} \pi + \\ & + \frac{5}{16} h^8 c_{10} c_{11} c_{12}^3 u_{11} u_{12} \pi. \end{aligned}$$

Для нахождения аналитического вида интегралов по  $\varphi$  использовался пакет для решения математических программ Maple.

Естественно, что все вычисления проходят и в случае, когда за начальные отрезки ряда берутся представления (6.49), а не только по два первых слагаемых из них.

Для вычисления первого слагаемого из интеграла (9.2) остается найти следующий интеграл по переменной  $r$ :

$$\begin{aligned} W = & \int_{r_0}^{r_{in}} \left[ \left( \frac{1}{16} c_{10}^5 u_{11}^2 \pi + \frac{1}{16} c_{10}^5 u_{12}^2 \pi + \frac{15}{64} c_{10} c_{11}^2 c_{12}^2 u_{11}^2 \pi + \right. \right. \\ & + \frac{15}{64} c_{10} c_{11}^2 c_{12}^2 u_{12}^2 \pi + \frac{25}{128} c_{10} c_{12}^4 u_{12}^2 \pi + \frac{5}{32} c_{10}^3 c_{11}^2 u_{12}^2 \pi + \frac{5}{32} c_{10}^3 c_{12}^2 u_{11}^2 \pi + \\ & + \frac{5}{128} c_{10} c_{11}^4 u_{12}^2 \pi + \frac{5}{128} c_{10} c_{12}^4 u_{11}^2 \pi + \frac{15}{32} c_{10}^3 c_{11}^2 u_{11}^2 \pi + \\ & \left. \left. + \frac{15}{32} c_{10}^3 c_{12}^2 u_{12}^2 \pi + \frac{25}{128} c_{10} c_{11}^4 u_{11}^2 \pi + \frac{5}{8} c_{10}^3 c_{11} c_{12} u_{11} u_{12} \pi + \frac{5}{16} c_{10} c_{11}^3 c_{12} u_{11} u_{12} \pi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{5}{16} c_{10} c_{11} c_{12}^3 u_{11} u_{12} \pi \right) \right] dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{16}c_{10}c_{11}c_{12}^3u_{11}u_{12}\pi) h^8 + \left( \frac{15}{7}c_{10}^2c_{11}c_{12}u_{11}c_0u_{12}\pi + \frac{5}{14}c_{11}c_{12}^3u_{11}c_0u_{12}\pi + \right. \\
& \quad + \frac{15}{14}c_{10}^2c_{11}c_{12}^2u_{11}u_0\pi + \frac{15}{14}c_{10}^2c_{11}^2u_{12}u_0c_{12}\pi + \frac{5}{14}c_{11}^3c_{12}u_{11}c_0u_{12}\pi + \\
& \quad + \frac{5}{14}c_{10}^4u_{11}^2c_0\pi + \frac{5}{14}c_{10}^4u_{12}^2c_0\pi + \frac{25}{112}c_{11}^4u_{11}^2c_0\pi + \frac{5}{56}c_{11}^5u_{11}u_0\pi + \\
& \quad + \frac{25}{112}c_{12}^4u_{12}^2c_0\pi + \frac{5}{56}c_{12}^5u_{12}u_0\pi + \frac{5}{112}c_{11}^4u_{12}^2c_0\pi + \frac{5}{112}c_{12}^4u_{11}^2c_0\pi + \\
& \quad + \frac{5}{7}c_{10}^4u_{11}u_0c_{11}\pi + \frac{5}{7}c_{10}^4u_{12}u_0c_{12}\pi + \frac{45}{28}c_{10}^2c_{11}^2u_{11}^2c_0\pi + \frac{15}{14}c_{10}^2c_{11}^3u_{11}u_0\pi + \\
& \quad + \frac{45}{28}c_{10}^2c_{12}^2u_{12}^2c_0\pi + \frac{15}{14}c_{10}^2c_{12}^3u_{12}u_0\pi + \frac{5}{56}c_{11}^4u_{12}u_0c_{12}\pi + \\
& \quad + \frac{5}{56}c_{11}c_{12}^4u_{11}u_0\pi + \frac{5}{28}c_{11}^3c_{12}^2u_{11}u_0\pi + \frac{15}{56}c_{11}^2c_{12}^2u_{11}^2c_0\pi + \\
& \quad + \frac{15}{56}c_{11}^2c_{12}^2u_{12}^2c_0\pi + \frac{5}{28}c_{11}^2c_{12}^3u_{12}u_0\pi + \frac{15}{28}c_{10}^2c_{11}^2u_{12}^2c_0\pi + \\
& \quad \left. + \frac{15}{28}c_{10}^2c_{12}^2u_{11}^2c_0\pi \right) h^7 + \left( \frac{1}{6}u_0^2c_{10}^5\pi + \frac{5}{2}c_0u_0c_{10}c_{11}^2c_{12}u_{12}\pi + \right. \\
& \quad + \frac{5}{2}c_0u_0c_{10}c_{11}c_{12}^2u_{11}\pi + \frac{5}{2}c_0^2c_{10}c_{11}c_{12}u_{11}u_{12}\pi + \frac{5}{8}u_0^2c_{10}c_{11}^2c_{12}^2\pi + \\
& \quad + \frac{15}{8}c_0^2c_{10}c_{11}^2u_{11}^2\pi + \frac{15}{8}c_0^2c_{10}c_{12}^2u_{12}^2\pi + \frac{5}{8}c_0^2c_{10}c_{11}^2u_{12}^2\pi + \\
& \quad + \frac{5}{8}c_0^2c_{10}c_{12}^2u_{11}^2\pi + \frac{10}{3}c_0u_0c_{10}^3c_{11}u_{11}\pi + \frac{10}{3}c_0u_0c_{10}^3c_{12}u_{12}\pi + \frac{5}{2}c_0u_0c_{10}c_{11}^3u_{11}\pi + \\
& \quad + \frac{5}{2}c_0u_0c_{10}c_{12}^3u_{12}\pi + \frac{5}{6}c_0^2c_{10}^3u_{11}^2\pi + \frac{5}{6}c_0^2c_{10}^3u_{12}^2\pi + \frac{5}{6}u_0^2c_{10}^3c_{11}^2\pi + \\
& \quad + \frac{5}{6}u_0^2c_{10}^3c_{12}^2\pi + \frac{5}{16}u_0^2c_{10}c_{11}^4\pi + \frac{5}{16}u_0^2c_{10}c_{12}^4\pi) h^6 + \left( \frac{3}{2}c_0^2u_0c_{11}^3u_{11}\pi + \right. \\
& \quad + \frac{3}{2}c_0^2u_0c_{12}^3u_{12}\pi + \frac{3}{4}c_0u_0^2c_{11}^2c_{12}^2\pi + 3c_0u_0^2c_{10}^2c_{11}^2\pi + 3h^5c_0u_0^2c_{10}^2c_{12}^2\pi + \\
& \quad + c_0^3c_{10}^2u_{11}^2\pi + c_0^3c_{10}^2u_{12}^2\pi + \frac{3}{4}c_0^3c_{11}^2u_{11}^2\pi + \frac{1}{4}c_0^3c_{11}^2u_{12}^2\pi + \frac{1}{4}c_0^3c_{12}^2u_{11}^2\pi + \\
& \quad + \frac{3}{4}c_0^3c_{12}^2u_{12}^2\pi + \frac{3}{8}c_0u_0^2c_{11}^4\pi + \frac{3}{8}c_0u_0^2c_{12}^4\pi + c_0u_0^2c_{10}^4\pi + c_0^3c_{11}c_{12}u_{11}u_{12}\pi + \\
& \quad + 6c_0^2u_0c_{10}^2c_{11}u_{11}\pi + 6c_0^2u_0c_{10}^2c_{12}u_{12}\pi + \frac{3}{2}c_0^2u_0c_{11}^2c_{12}u_{12}\pi + \\
& \quad \left. + \frac{3}{2}c_0^2u_0c_{11}c_{12}^2u_{11}\pi \right) h^5 + \left( \frac{15}{4}c_0^2u_0^2c_{10}c_{12}^2\pi + \frac{15}{4}c_0^2u_0^2c_{10}c_{11}^2\pi + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 5c_0^3 u_0 c_{10} c_{12} u_{12} \pi + 5c_0^3 u_0 c_{10} c_{11} u_{11} \pi + \frac{5}{8} c_0^4 c_{10} u_{11}^2 \pi + \frac{5}{8} c_0^4 c_{10} u_{12}^2 \pi + \\
& + \frac{5}{2} c_0^2 u_0^2 c_{10}^3 \pi \Big) h^4 + \left( \frac{1}{6} c_0^5 u_{12}^2 \pi + \frac{1}{6} c_0^5 u_{11}^2 \pi + \frac{5}{3} c_0^4 u_0 c_{11} u_{11} \pi + \right. \\
& + \frac{5}{3} c_0^3 u_0^2 c_{11}^2 \pi + \frac{5}{3} c_0^3 u_0^2 c_{12}^2 \pi + \frac{5}{3} c_0^4 u_0 u_{12} c_{12} \pi + \frac{10}{3} c_0^3 u_0^2 c_{10}^2 \pi \Big) h^3 + \\
& \left. + \frac{5}{2} c_0^4 u_0^2 c_{10} \pi h^2 + c_0^5 u_0^2 \pi h \right] r dr
\end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты рядов находятся численно при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то приведенный интеграл по  $r$  тоже будет считаться численно.

Аналогичным образом вычисляют второе и третье слагаемое из интеграла (9.2). Из-за громоздкости эти формулы здесь не приводятся.

Таким образом, вычисление тройного интеграла от переменных  $r, \varphi, z$  сведено к вычислению обычных определенных интегралов от переменной  $r$ , поскольку вычисление определенных интегралов от  $\varphi$  и от  $z$  проведено в явном виде.

## § 10. Расчеты течений для различных классов торнадо

Для того, чтобы математически смоделировать течения газа в придонной части торнадо, будет использована так называемая шкала Фудзиты [164] в виде таблицы 10.1:

Таблица 10.1

Класс торнадо	Скорость ветра, м/с	Ширина следа, м	Средняя длина пути, км	Среднее время жизни, мин
<i>F0</i>	19 – 32	5 – 15	1.9	2.4
<i>F1</i>	33 – 50	16 – 50	4.2	5.2
<i>F2</i>	51 – 70	51 – 160	8.7	10.8
<i>F3</i>	71 – 92	161 – 508	16.1	20.0
<i>F4</i>	93 – 116	547 – 1448	43.8	54.4
<i>F5</i>	117 – 142	1609 – 4989	57.1	71.0

Анализ числовых данных, приведенных во втором столбце таблицы 10.1, говорит о том, что разделение торнадо на различные классы проведено по значениям скоростей движения воздуха в окрестности вертикальной части торнадо. При этом построение таблицы при разделении на классы проведено почти с постоянным шагом изменения этого параметра.

Из таблицы 10.1 видно, что составляющие третий столбец данные меняются непрерывно в зависимости от данных из второго столбца (исключение – данные в двух последних строках третьего столбца). Это может служить гипотезой о существовании функциональной зависимости между этими параметрами, причем нелинейной.

Если данные из четвертого столбца поделить на соответствующие данные из пятого столбца и умножить на  $50/3$  для перехода к другим единицам измерения, то получится нижеследующая таблица 10.2 – таблица скоростей, измеряемых в м/с, движения по поверхности Земли торнадо, принадлежащих разным классам.



Поскольку получились практически одинаковые значения скоростей для торнадо, принадлежащих разным классам, то можно сделать следующее предположение.

*Таблица 10.2*

$F0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$
13.19	16.46	16.42	13.42	13.42	13.40

Скорость движения вертикальной части торнадо по поверхности Земли и длина следа торнадо являются величинами, хорошо определяемыми по данным натурных наблюдений. Поэтому возможно, что данные из пятого столбца таблицы 10.1 определены не по данным натурных наблюдений, а определены простыми вычислениями с использованием скорости движения торнадо по поверхности Земли, практически одинаковой для торнадо разных классов, и длиной следа, оставляемого торнадо, принадлежащего разным классам.

Достаточно очевидно, что идущая на разрушения кинетическая энергия движущегося в торнадо воздуха не появилась вдруг и вся сразу — нет натурных наблюдений, говорящих об этом. Следовательно, эта энергия накопилась с течением времени в результате каких-то объективно существующих процессов. И вот эта стадия существования торнадо — стадия накопления кинетической энергии движущегося в торнадо воздуха — остается, как правило, вне исследований. Именно об этом и говорит исходное название пятого столбца в таблице 10.1.

С помощью численных расчетов смоделирован процесс нестационарной закрутки газа в придонной части восходящего закрученного потока [39], и тем самым определено время выхода на стационарный режим и характер нарастания скорости движения газа.

Для того, чтобы увязать расчеты трехмерных стационарных течений с данными натурных наблюдений различных торнадо, следующим образом будут использованы данные из таблицы 10.1.

Значения скорости ветра и ширины следа, половина которой взята за значение  $r_0$  (радиуса окружности стока), определяются как средние значения

данных, приведенных в отдельных строках второго и третьего столбцов таблицы 10.1, т.е. при данных расчетах, как и в работе [39], применяется таблица с такими данными:

Таблица 10.3

Класс торнадо	$F0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$
Скорость ветра, м/с	25.5	41.5	60.5	81.5	104.5	129.5
$r_0$ , м	5	16.5	52.75	167.25	498.75	1649.5
$r_{in}$ , м	1500	3700	8200	16000	32000	65000

Значения в последней строке таблицы 10.3 есть значения  $r_{in}$  — радиуса окружности, на которой осуществляется приток газа в придонную часть, — и они вычисляются по такому правилу.

Полагая, что значения из второй строки таблицы 10.3 дают значения  $v^o(r_0)$  окружной скорости на окружности стока в стационарном решении, по величинам  $v^o(r_0)$  и  $r_0$  вычисляется постоянная интегрирования  $C_1$  в этом стационарном решении. И по значению константы  $C_1$  определяется значение  $r = r_{in}$ , при котором равна нулю окружная скорость в стационарном решении. Такой выбор исходных параметров  $r_0$ ,  $r_{in}$ ,  $v^o(r_0)$  и  $v^o(r_{in}) = 0$  позволяет полностью учесть информацию о данных натуральных наблюдений торнадо разных классов, приведенную в таблице 10.1.

**Замечание 10.1.** Возможно, что именно функциональная зависимость  $v^o(r) = C_1/r - ar/2$  — указывает на предполагаемую функциональную зависимость между значениями из второго и третьего столбцов таблицы 10.1.

Далее в параграфе приведены результаты численного моделирования стационарного течения воздуха в придонной части торнадо, принадлежащие различным классам шкалы Фудзиты с использованием значений из таблицы 10.3. При этом подробные расчеты приведены для торнадо класса  $F3$ . Для торнадо остальных классов в данном параграфе приведены только некоторые общие результаты.

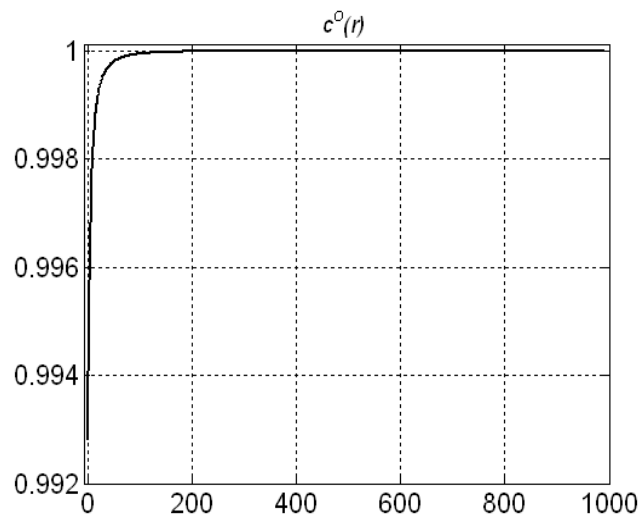
### Результаты расчетов торнадо класса F3

Итоговые результаты расчетов торнадо класса F3 приведены в нижеследующих таблицах 10.4 - 10.6, а также на рисунках 10.1 (a, b), 10.2.

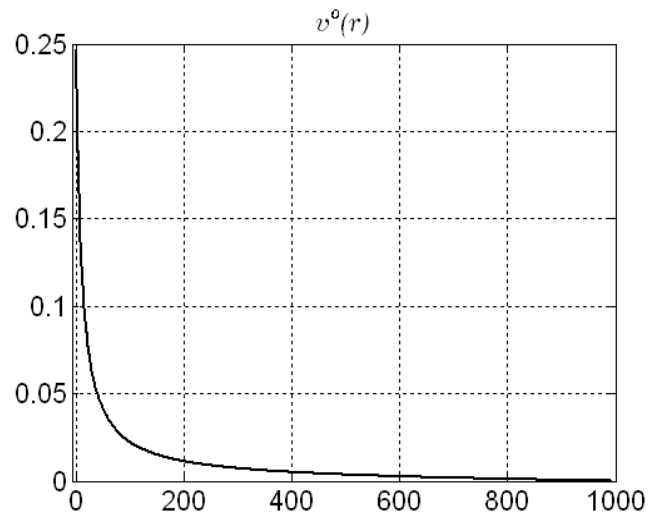
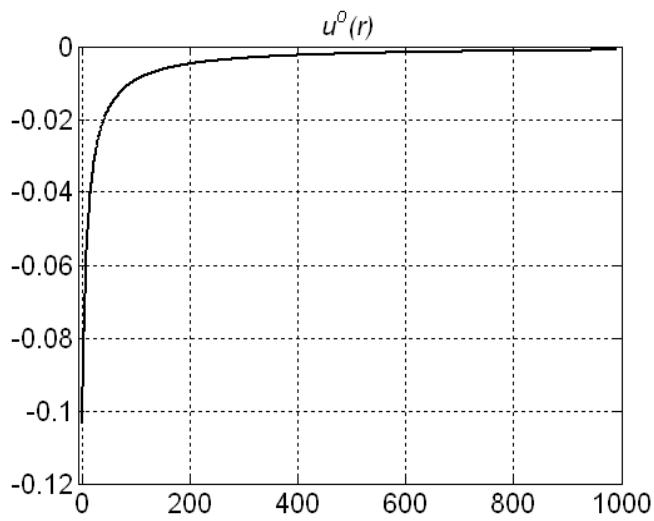
В таблице 10.4 приведены значения некоторых констант и параметры стационарного течения в самой нижней части придонной области торнадо (то есть при  $z = 0$ ) данного класса. На рисунках 10.1 (a, b) представлены графики  $c^o(r)$ ,  $u^o(r)$ ,  $v^o(r)$  стационарного течения при  $z = 0$ , на рис. 10.2 траектория движения одной частицы газа в плоскости  $XOY$  и зависимость  $\varphi_0(r)$  на этой линии тока.

Таблица 10.4

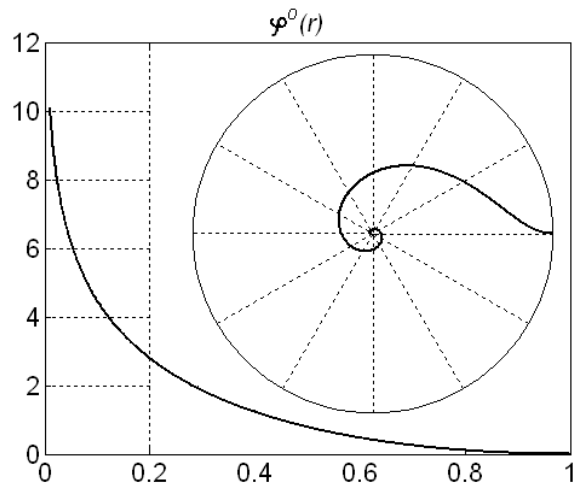
Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
$c_{00}$	333 м/с	1
$r_{00}$	16000 м	1
$t_{00} = r_{00}/c_{00}$	48.048 с	1
$\Omega$	$0.0000727 \text{ c}^{-1}$	0.003492
$\sin \psi$	0.7071	0.7071
$r_{in}$	16000 м	1
$r_0$	160.0 м	0.01
$z^0$	16.0 м	0.001
$c(r_{in})$	333 м/с	1
$c(r_0)$	330.6 м/с	0.9928
$u(r_{in})$	-0.333 м/с	-0.001
$u(r_0)$	-34.53 м/с	-0.10368
$v(r_{in})$	0 м/с	0
$v(r_0)$	82.21 м/с	0.24689



*Puc. 10.1 a*



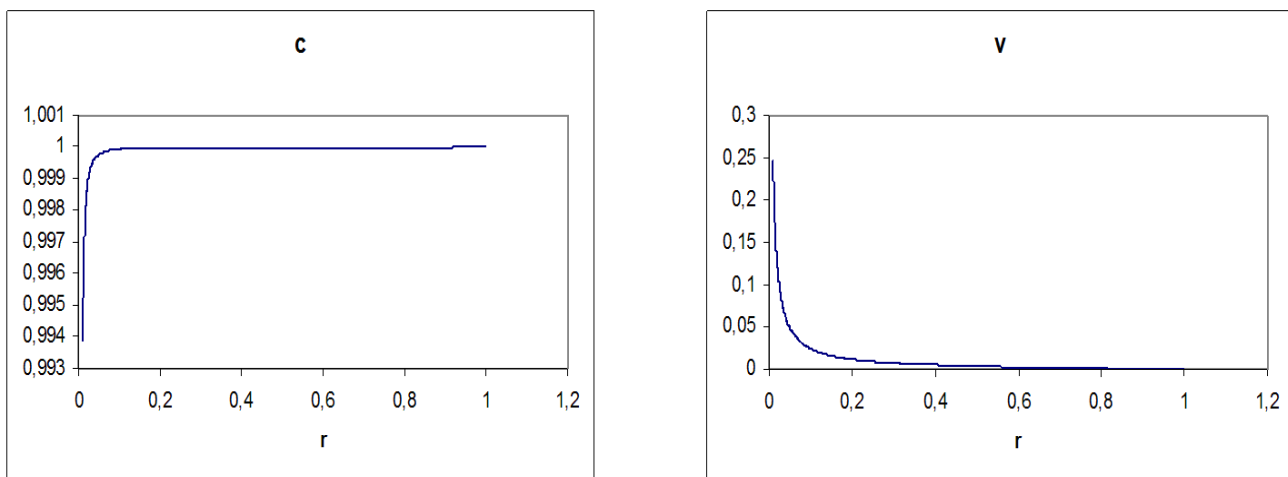
*Puc. 10.1 b*



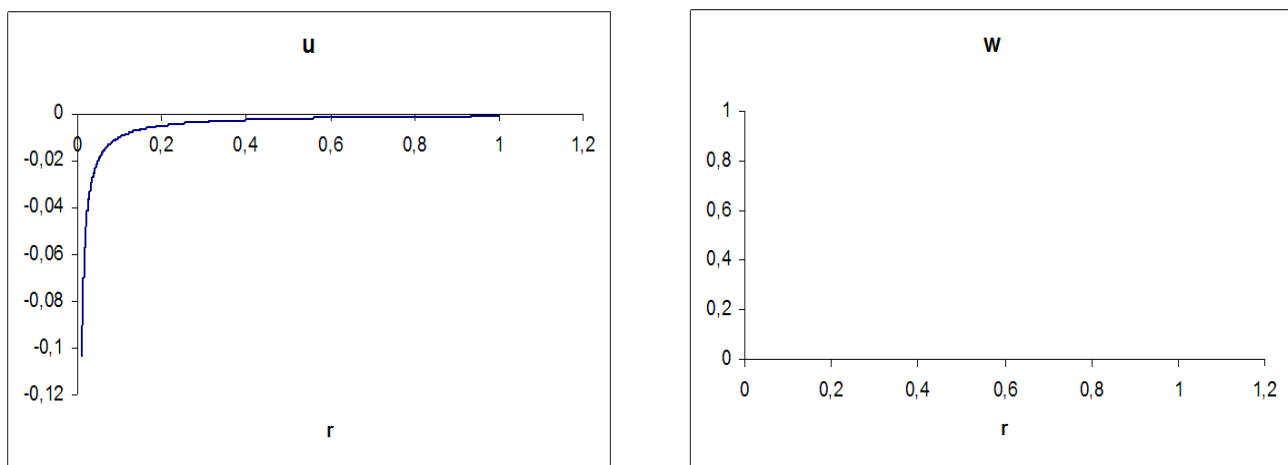
*Puc. 10.2*

Из рисунка 10.2 видно, что полный оборот траектория делает, только когда  $r$  приближается к нулю ( $r \approx 0$ ). На первых трех графиках рис. 10.1 также видно, что основные изменения газодинамических параметров происходят возле цилиндра стока при  $r : r_0 \leq r \leq 0.1$ .

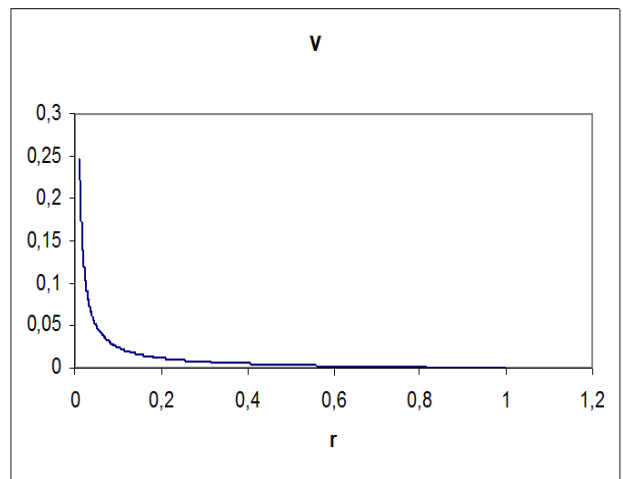
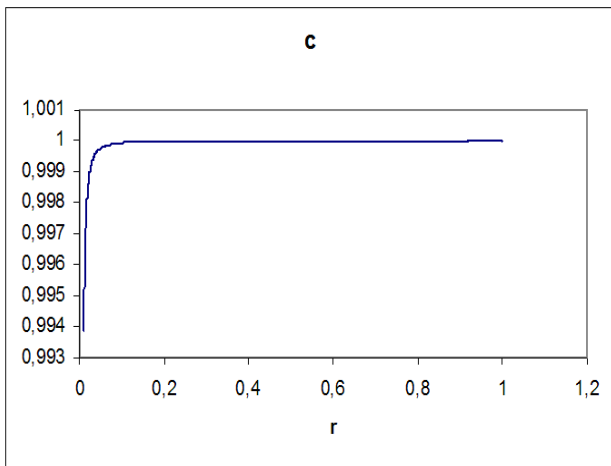
На рисунках 10.3-10.10 приведены графики газодинамических параметров на луче  $\varphi = 0$  при разных значениях  $z : 0; 0.0001; 0.0005; 0.001$ . Аналогичные графики на лучах  $\varphi = \pi/3, \varphi = 2\pi/3, \varphi = \pi, \varphi = 4\pi/3, \varphi = 5\pi/3$ .



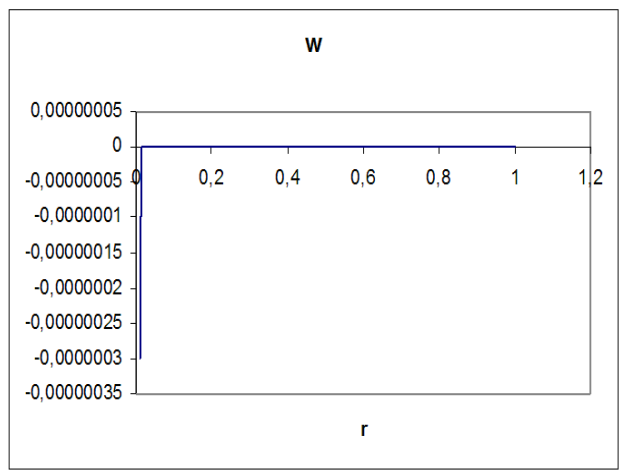
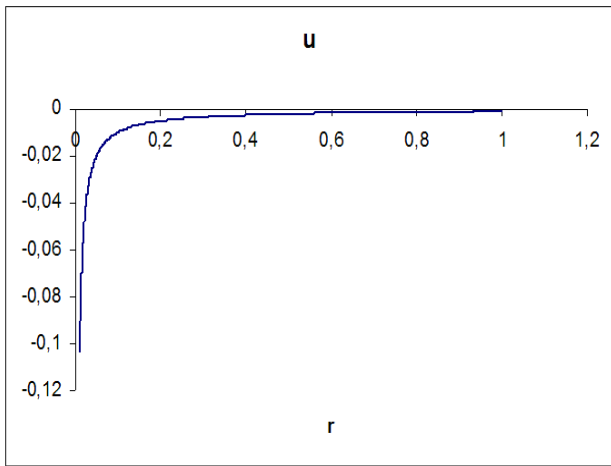
*Рис. 10.3*



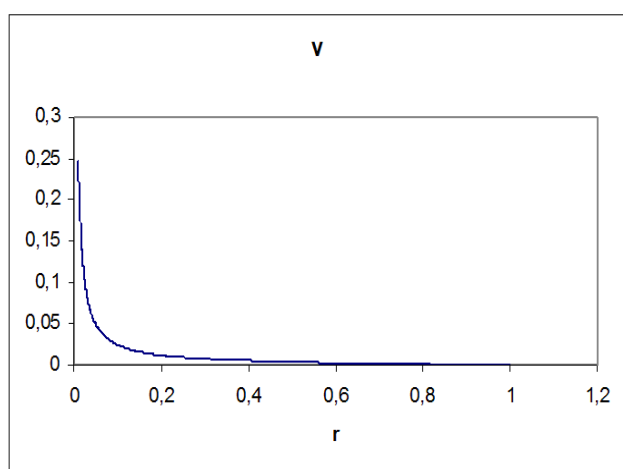
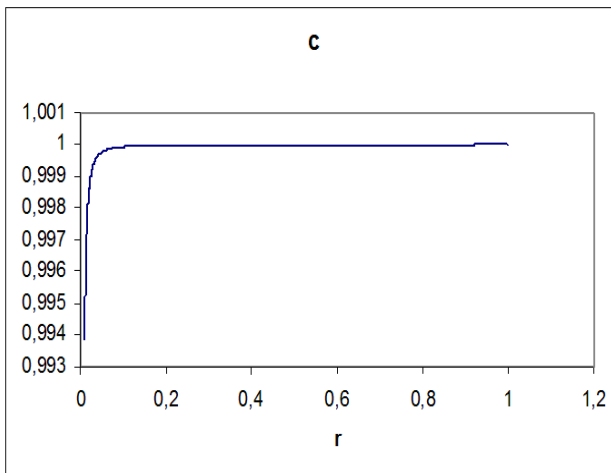
*Рис. 10.4*



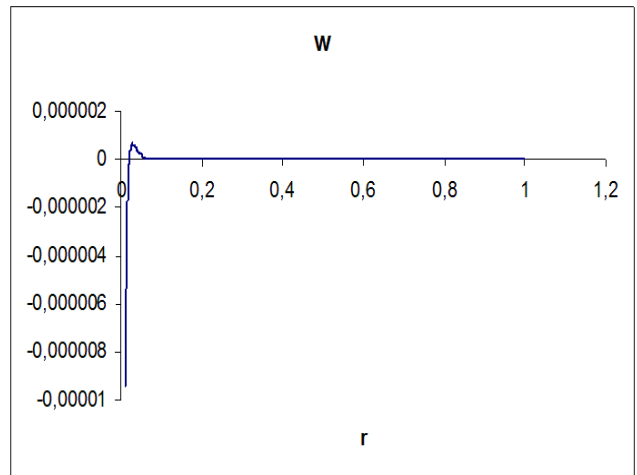
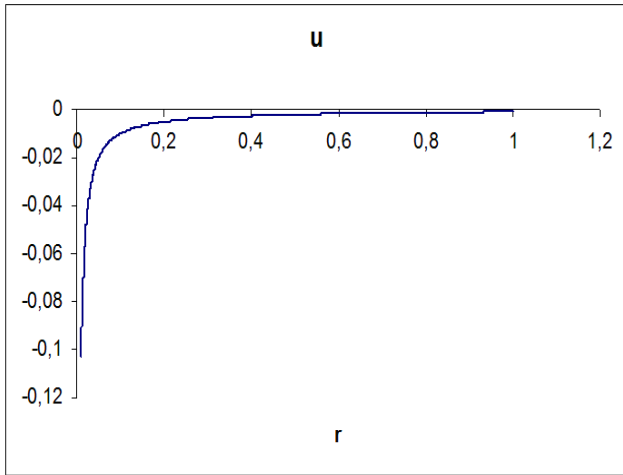
*Puc. 10.5*



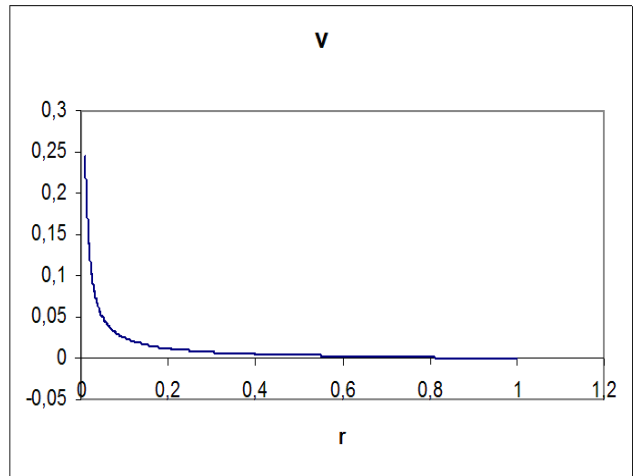
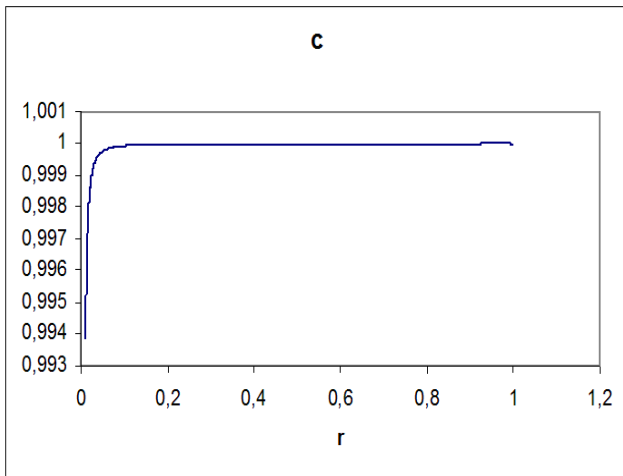
*Puc. 10.6*



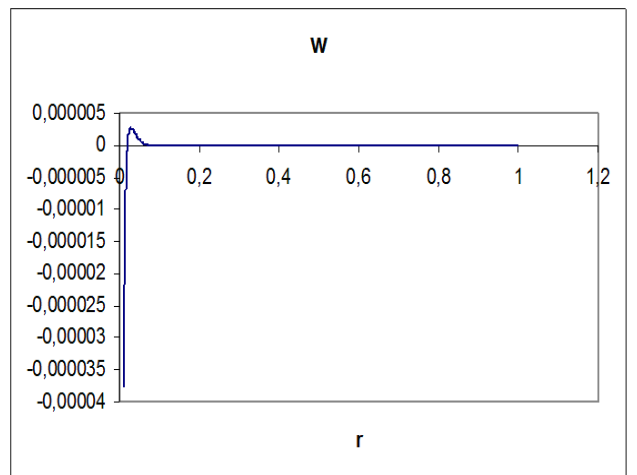
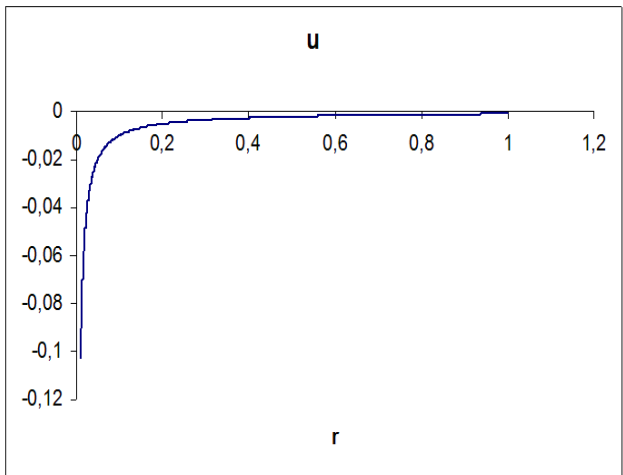
*Puc. 10.7*



*Puc. 10.8*

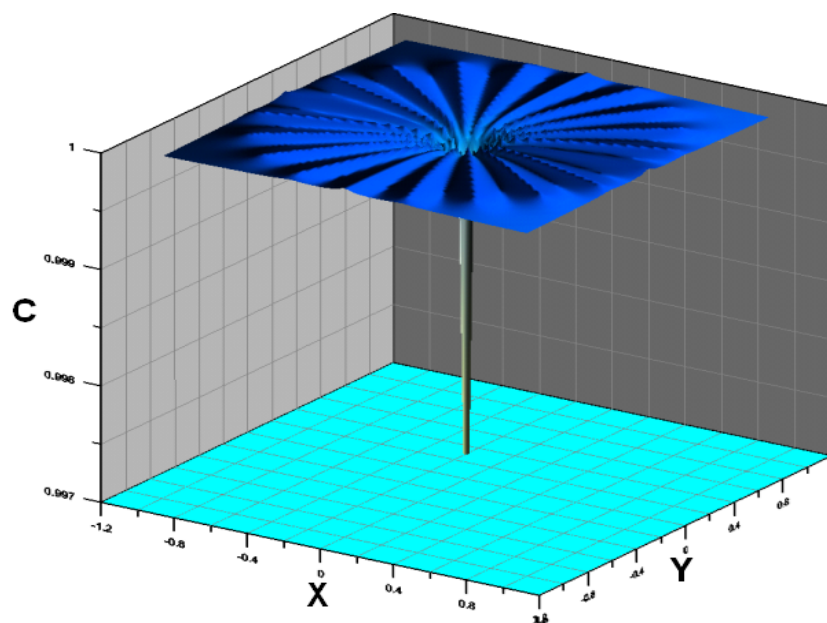


*Puc. 10.9*

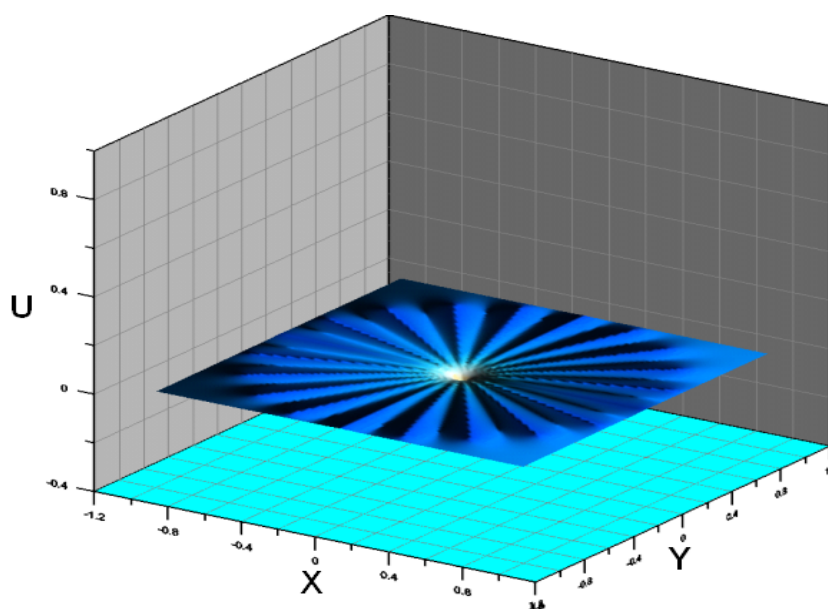


*Puc. 10.10*

На рис. 10.11-10.14 при  $z = 0.001$  представлены поверхности газодинамических распределений над плоскостью декартовых координат  $xOy$ . Аналогичные поверхности распределения газодинамических параметров при заданных высотах. Поверхность компоненты скорости  $w$  при  $z = 0$  не приведена, поскольку при  $z = 0$   $w$  тождественно равно нулю по условиям рассматриваемой задачи.

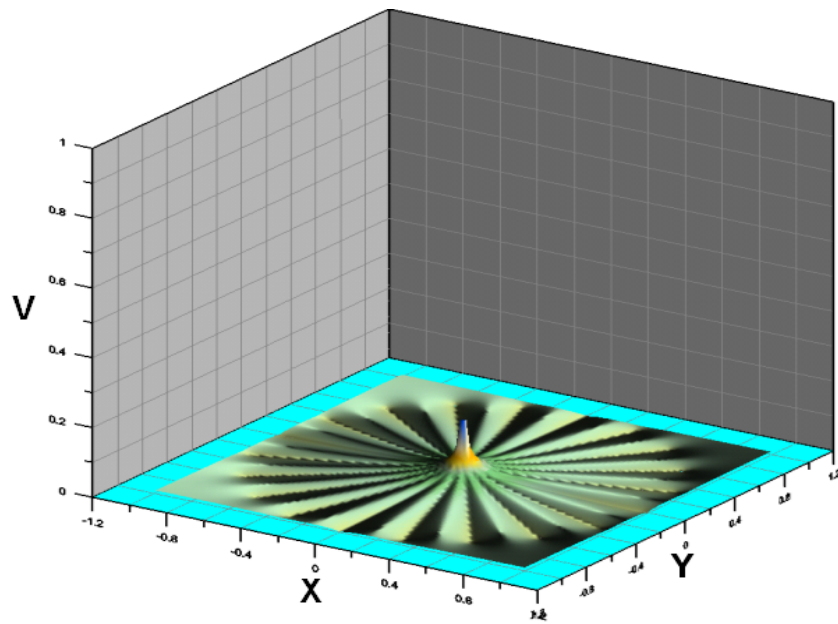


*Рис. 10.11*

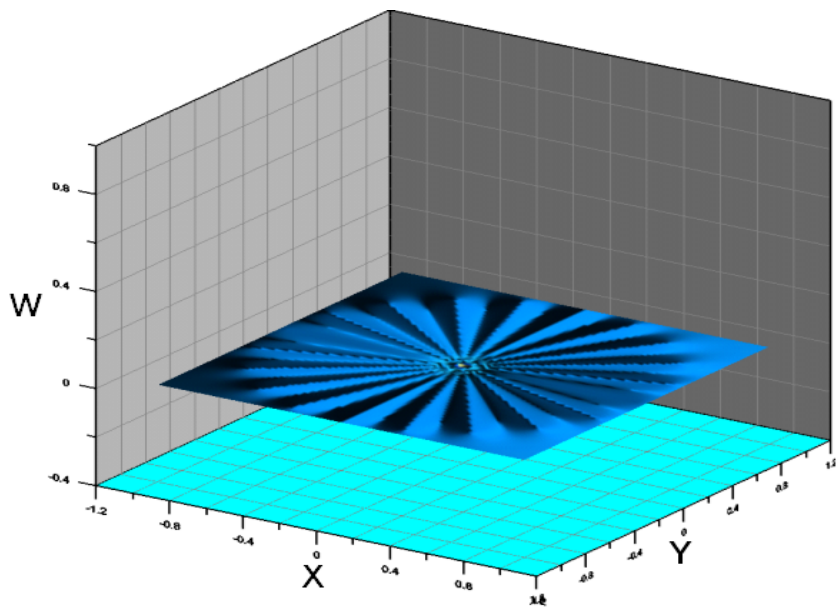


*Рис. 10.12*

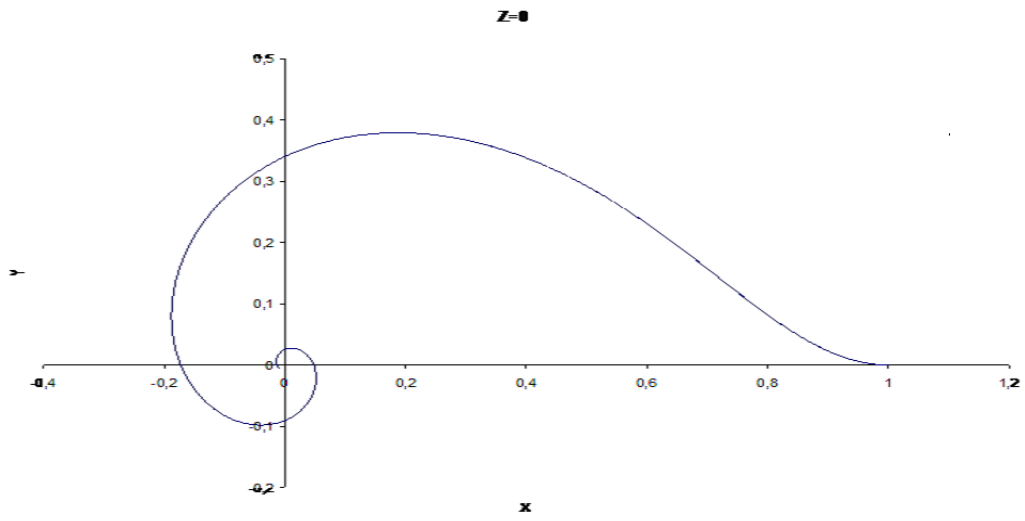




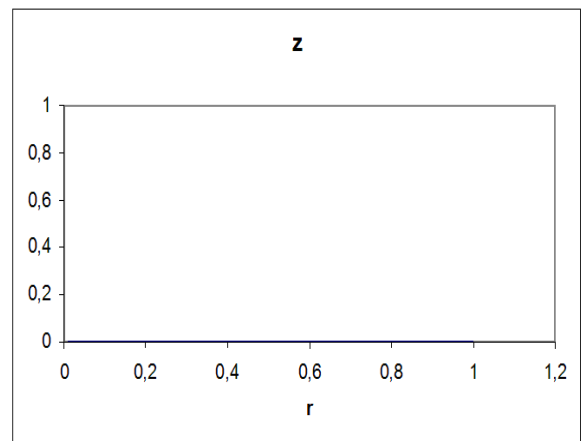
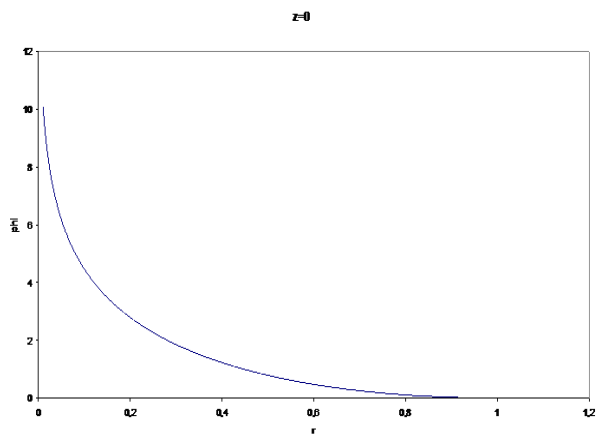
*Puc. 10.13*



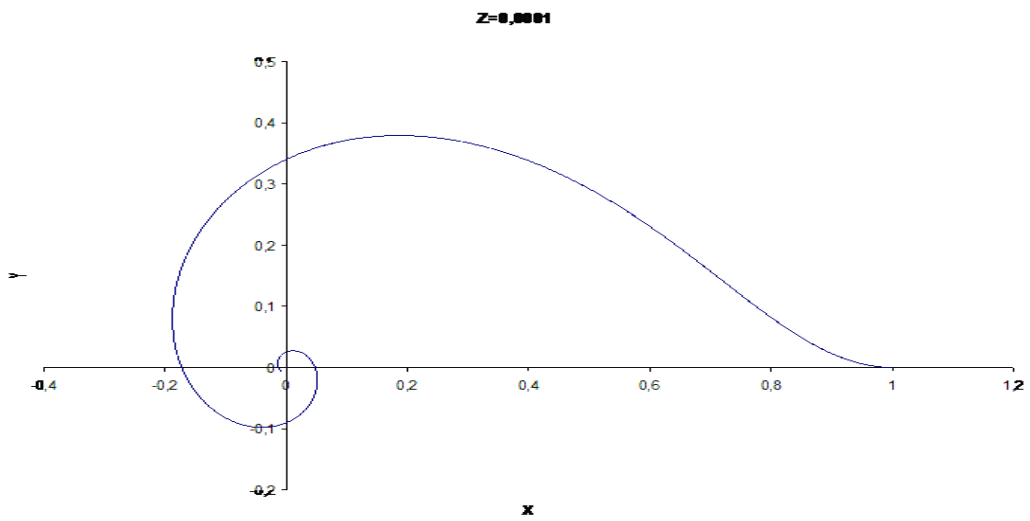
*Puc. 10.14*



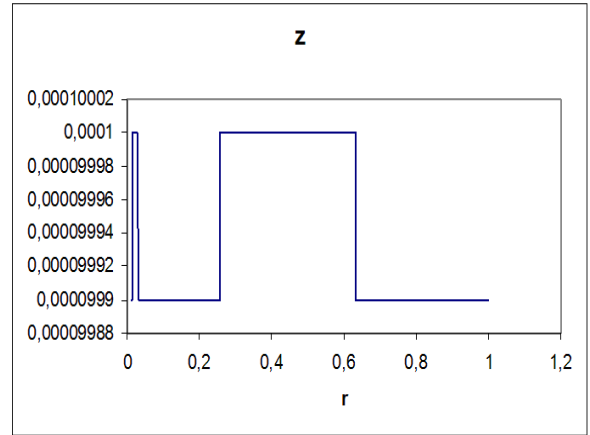
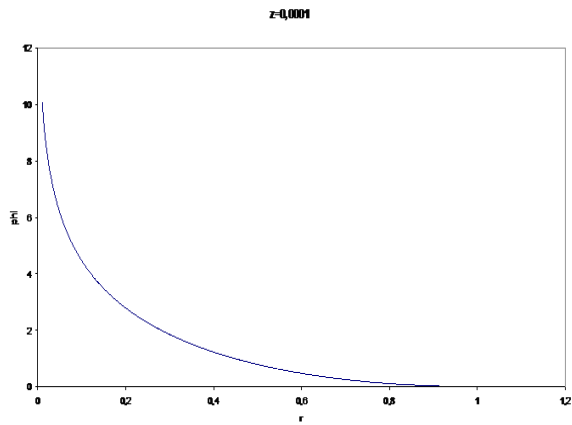
*Puc. 10.15*



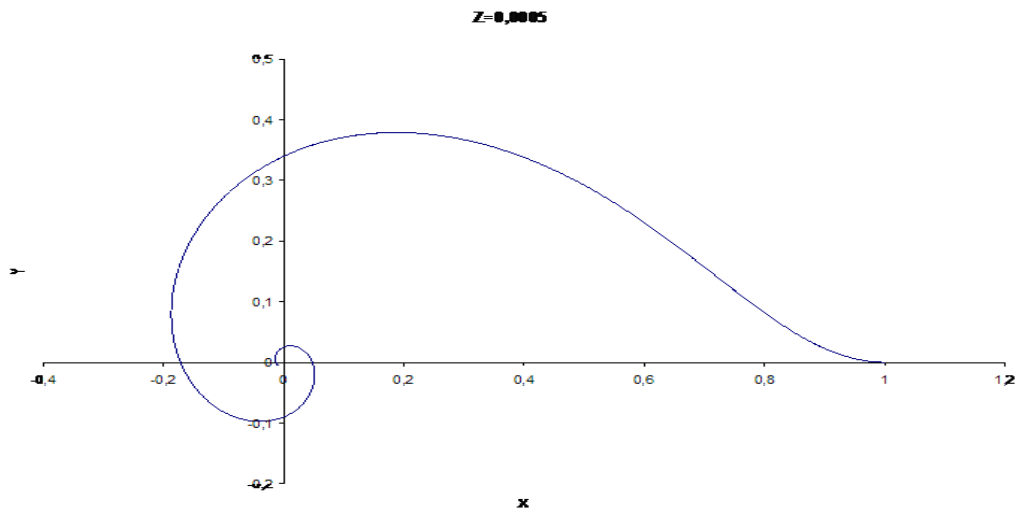
*Puc. 10.16*



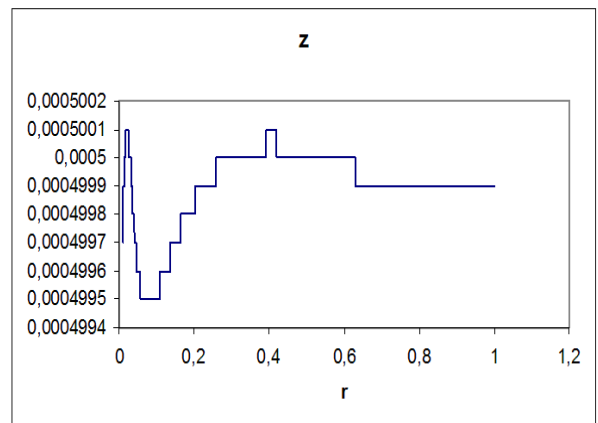
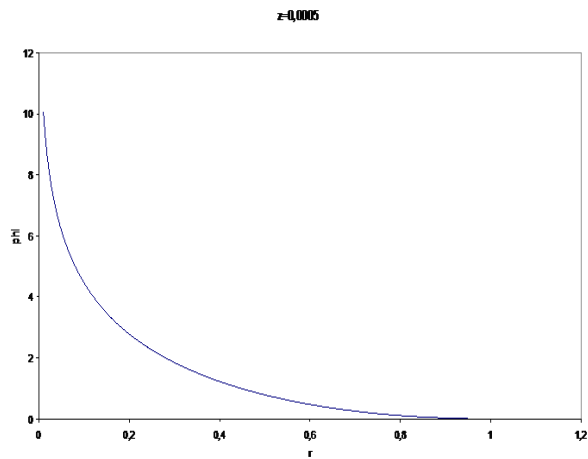
*Puc. 10.17*



*Puc. 10.18*



*Puc. 10.19*



*Puc. 10.20*

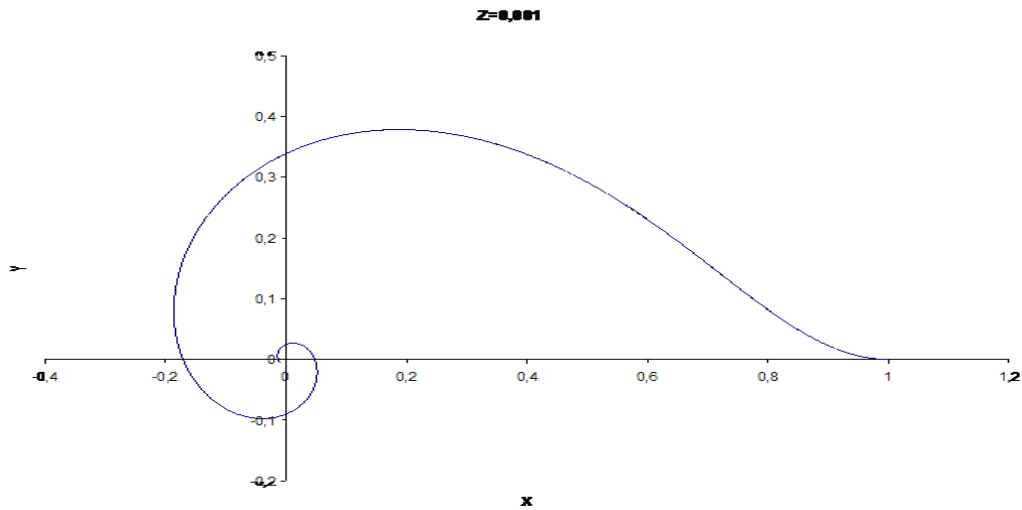


Рис. 10.21

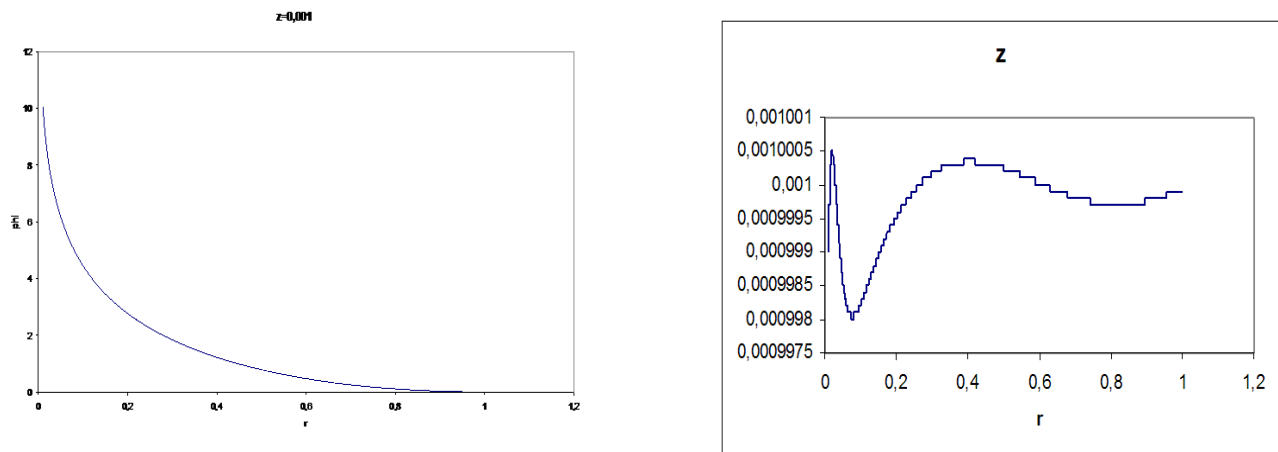


Рис. 10.22

На рисунках 10.15-10.22 при разных значениях  $z$  и при  $\varphi = 0$  приведены проекции траекторий линий тока на плоскости  $xOy$ ,  $rO\varphi$ ,  $rOz$  соответственно. Из представленных результатов следует:

- 1) частица делает больше полного оборота при движении от  $r_{in}$  к  $r_0$ ;
- 2) при увеличении высоты наблюдается изменение направления движения "вверх-вниз";
- 3) число локальных экстремумов на этих проекциях смотри в таблице 10.6.

Таблица 10.5

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
$r_{in}$	16000 м	1
$r_0$	160.0 м	0.01
$\max c(r_{in})$	333 м/с	1
$\min c(r_{in})$	333 м/с	1
$\max  u(r_{in}) $	-0.333 м/с	-0.001
$\min  u(r_{in}) $	-0.333 м/с	-0.001
$\max v(r_{in})$	0 м/с	0
$\min v(r_{in})$	0 м/с	0
$\max c(r_0)$	330.6 м/с	0.9928
$\min c(r_0)$	330.6 м/с	0.9928
$\max  u(r_0) $	-34.53 м/с	-0.10368
$\min  u(r_0) $	-34.53 м/с	-0.10368
$\max v(r_0)$	82.21 м/с	0.24689
$\min v(r_0)$	82.21 м/с	0.24689
$\max z(r)$	16.0008 м	0.0010005

Таблица 10.6

$\varphi$	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi$	$4\pi/3$	$5\pi/3$
$\max z(r)$	0,0010005 м	0,001 м	0,001 м	0,001018 м	0,0010065 м	0,0010055 м
$R$	4	2	2	4	2	2

где  $R$  – число локальных экстремумов на линии  $z(r)$ .

**Общие выводы** по расчетам течений торнадо класса  $F3$ :

Поток газа является трехмерным, в том числе с ростом  $z$  начинает принципиально зависеть от  $\varphi$ : при  $r \rightarrow r_0 + 0$  изменение газодинамических параметров при разных значениях  $\varphi$  проявляется сильнее, но тем не менее эти изменения в размерных значениях не очень велики, то есть при  $r \rightarrow r_0 + 0$  при изменении  $\varphi$  наблюдается небольшая "рябь" в потоке.

Из анализа представленного графического материала следует, что на рассматриваемых высотах  $z$  между  $z = 0$  и  $z = z^0 = 0.001$  (размерное значение  $z^0 = 0.001$  для торнадо класса  $F3$  равно 16 м) газодинамические параметры меняются незначительно при переходе на разные лучи  $\varphi = \text{const}$ . Но при приближении к цилиндру стока, то есть при  $r_0 \leq r \leq 0,1$ , каждый из газодинамических параметров претерпевает существенные для себя изменения:

1) значения  $c$  убывают при  $r \rightarrow r_0 + 0$ , следовательно, при  $r \rightarrow r_0 + 0$  убывают значения плотности и давления газа. Однако абсолютные изменения этих величин малы — во втором, третьем знаке после десятичной точки;

2)  $v$  окружная компонента вектора скорости газа при  $r \rightarrow r_0 + 0$  растет от значений 0.03 до 0.25, что соответствует размерным значениям скорости 1 м/с и 80 м/с соответственно. Положительные значения  $v$  говорят о том, что закрутка газа происходит в положительном направлении;

3) значение  $u$  радиальной составляющей вектора скорости газа при  $r \rightarrow r_0 + 0$  отрицательно (газ течет к цилиндру стока) и основные изменения также происходят на отрезке  $r_0 \leq r \leq 0,1$  от значения 0.001 до 0.1, что соответствует размерным значениям 3 м/с и 33 м/с соответственно.

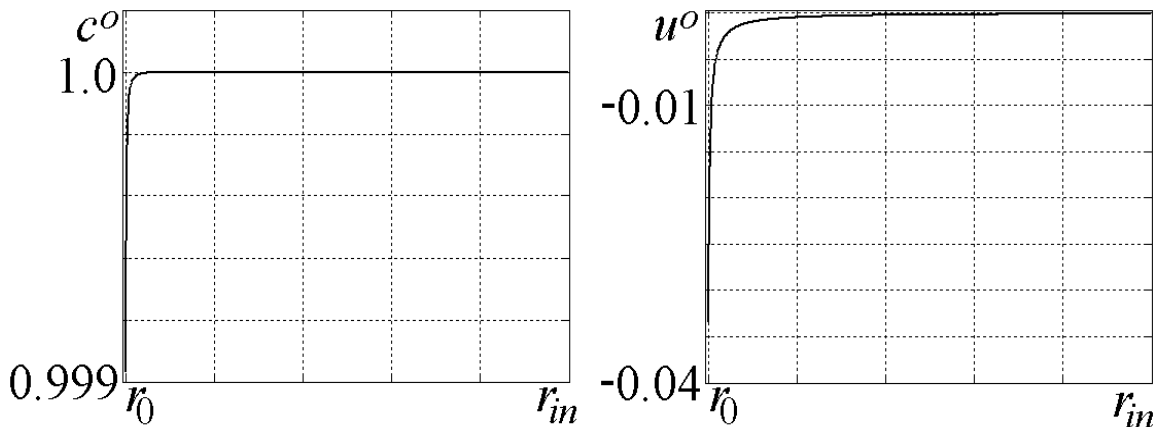
4)  $w$  вертикальная составляющая вектора скорости газа с ростом  $z$  и при  $r \rightarrow r_0 + 0$  мало по абсолютной величине, но меняет знак. Это говорит о том, что частицы газа при движении к  $r = r_0$  меняют направление своего движения "вверх-вниз". Но непосредственно в окрестности цилиндра стока движутся вниз. Об этом же говорят результаты расчетов, представленные в таблице 10.6 и на рисунках 10.11-10.22.

## Результаты расчетов торнадо класса $F0$

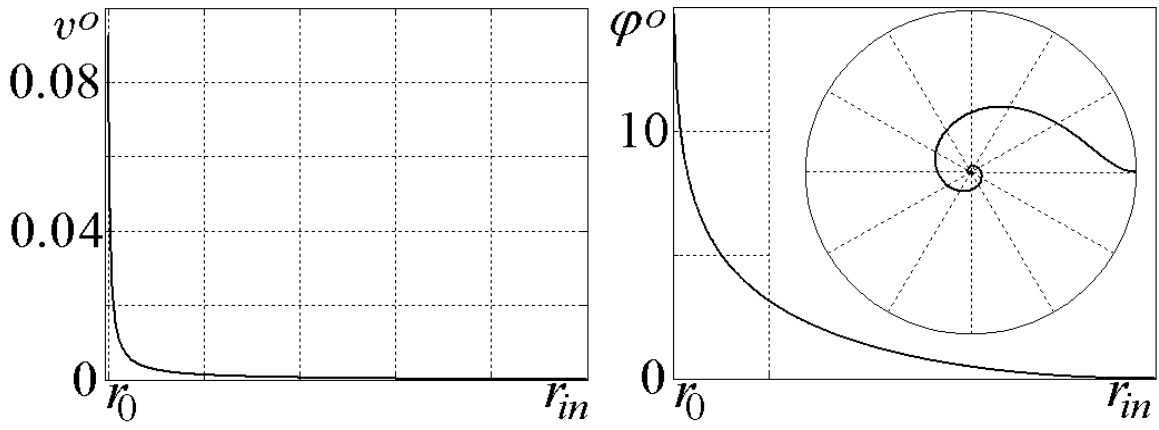
В таблице 10.7 приведены значения некоторых констант и параметры предельного стационарного течения в придонной части торнадо класса  $F0$ . На рис. 10.23, 10.24 представлены графики этого предельного стационарного течения, причем на правой части рис. 10.24 дана одна траектория движения частицы газа в этом стационарном придонном течении.

*Таблица 10.7*

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
$c_{00}$	333 м/с	1
$r_{00}$	1500 м	1
$t_{00} = r_{00}/c_{00}$	4.5 с	1
$\Omega$	$0,0000727 \text{ c}^{-1}$	0.000327
$\sin \psi$	0.7071	0.7071
$r_{in}$	1500 м	1
$r_0$	4.5 м	0.003
$c^o(r_{in})$	333 м/с	1
$c^o(r_0)$	332.76 м/с	0.99929
$u^o(r_{in})$	-0.0333 м/с	-0.0001
$u^o(r_0)$	-11.14 м/с	-0.03345
$v^o(r_{in})$	0 м/с	0
$v^o(r_0)$	25.67 м/с	0.077073

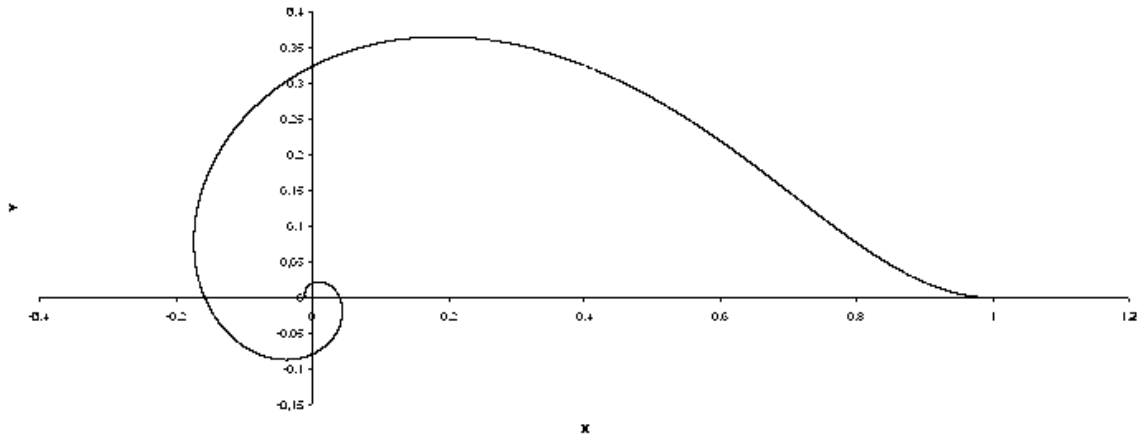


*Рис. 10.23*



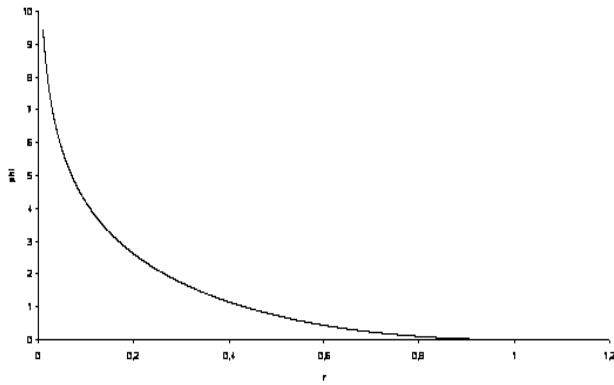
*Puc. 10.24*

**z=0**

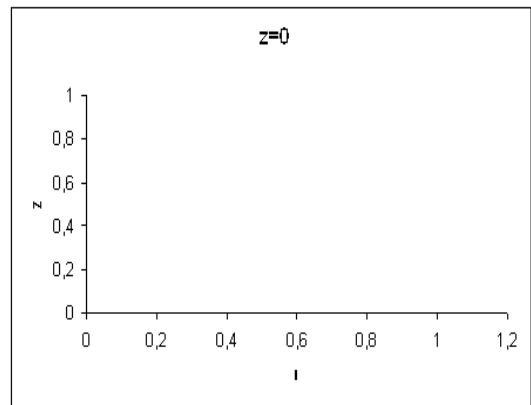


*Puc. 10.25*

**z=0**



**z=0**



*Puc. 10.26*



## Результаты расчетов торнадо класса F1

Значения некоторых констант и параметры предельного стационарного течения в придонной части торнадо данного класса F1 приведены в таблице 10.8.

Таблица 10.8

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
$c_{00}$	333 м/с	1
$r_{00}$	3700 м	1
$t_{00} = r_{00}/c_{00}$	11.11 с	1
$\Omega$	$0.0000727 \text{ c}^{-1}$	0.0008076
$\sin \psi$	0.7071	0.7071
$r_{in}$	3700 м	1
$r_0$	16.28 м	0.0044
$c(r_{in})$	333 м/с	1
$c(r_0)$	332.48 м/с	0.99844
$u(r_{in})$	-0.08325 м/с	-0.00025
$u(r_0)$	-16.78 м/с	-0.05039
$v(r_{in})$	0 м/с	0
$v(r_0)$	38.03 м/с	0.11421

На рис. 10.25, 10.26 представлены графики этого предельного стационарного течения, причем на правой части рис. 10.26 дана одна траектория движения частицы газа в этом стационарном придонном течении.

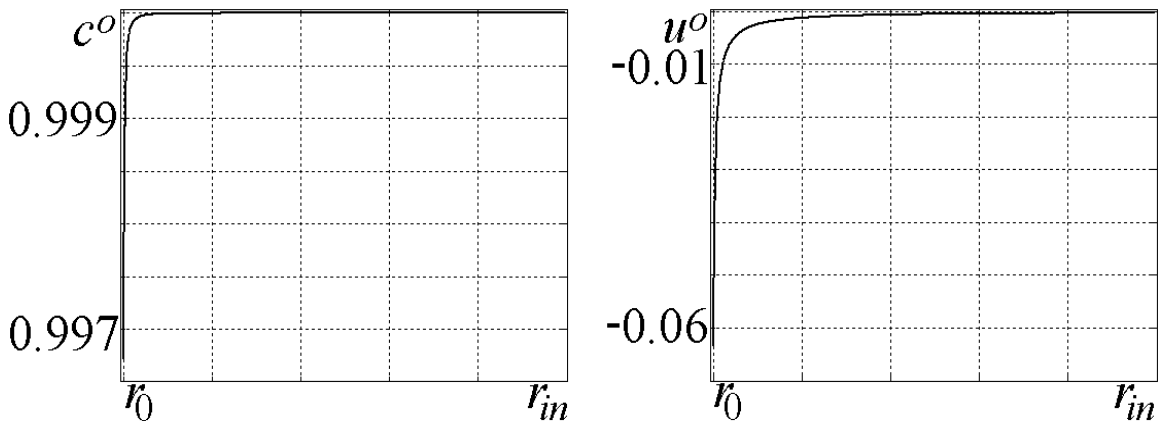
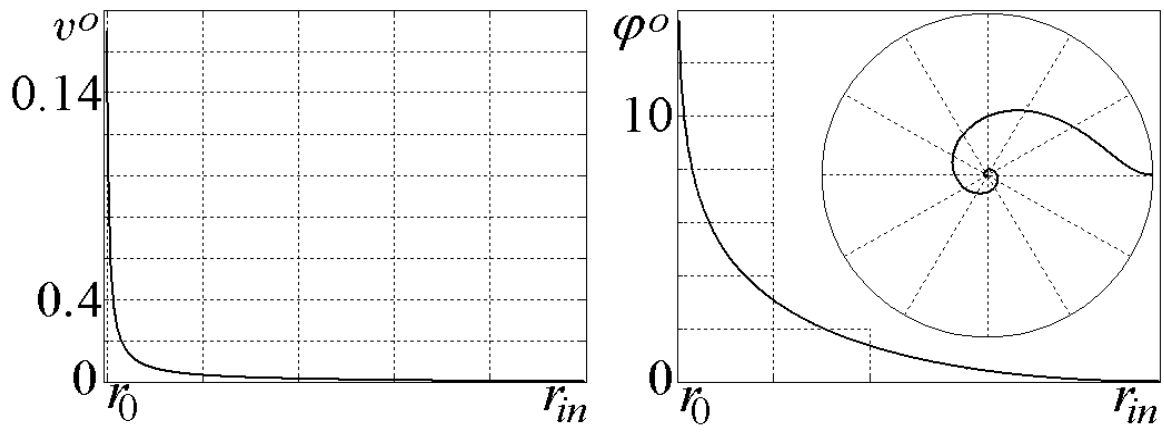
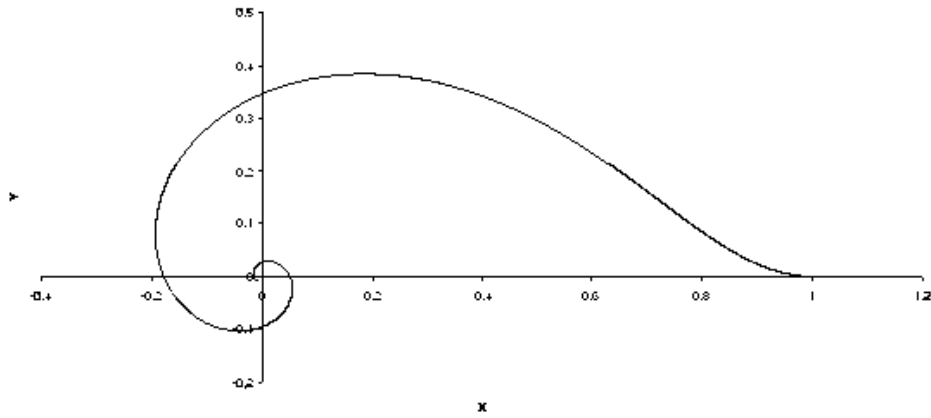


Рис. 10.27



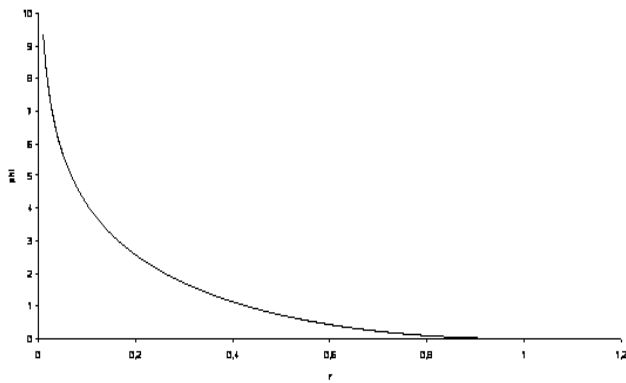
*Puc. 10.28*

**z=0**

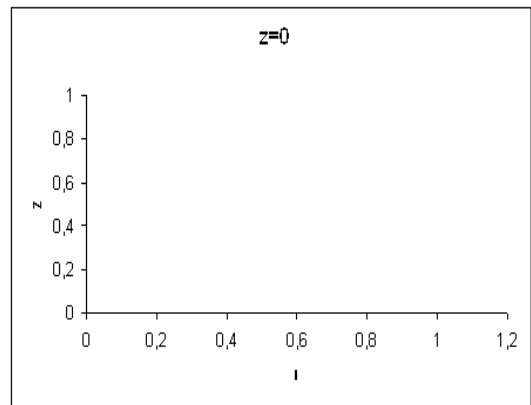


*Puc. 10.29*

**z=0**



**z=0**



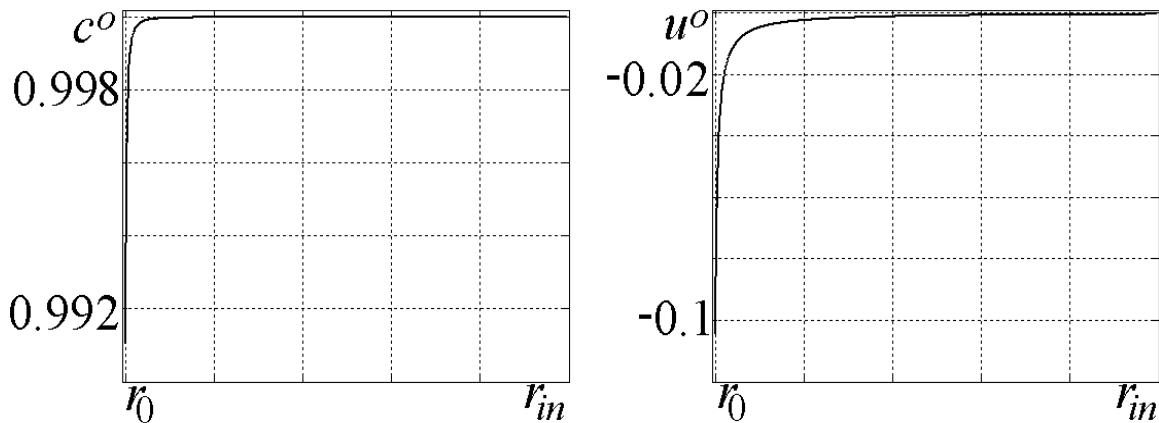
*Puc. 10.30*

## Результаты расчетов торнадо класса $F2$

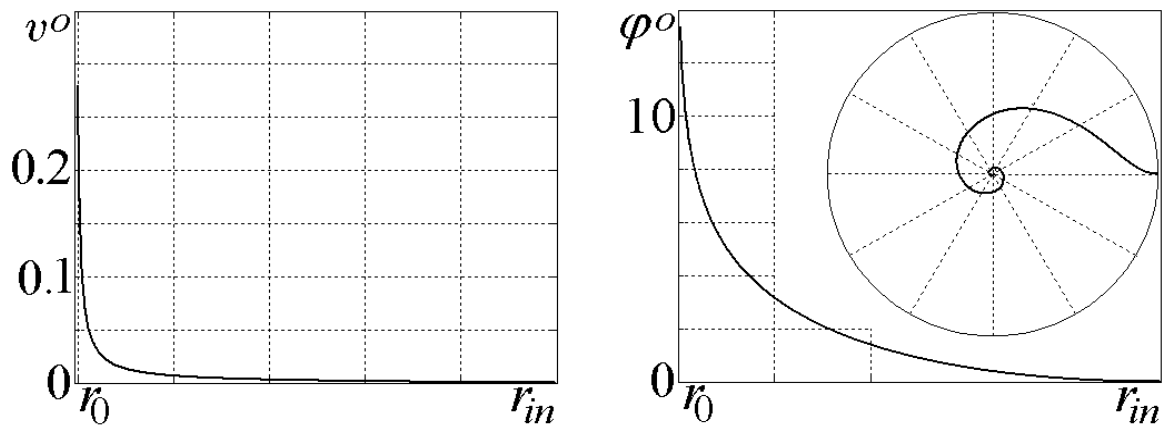
Значения некоторых констант и параметры предельного стационарного течения в придонной части торнадо данного класса  $F2$  приведены в таблице 10.9. На рис. 10.27, 10.28 представлены графики этого предельного стационарного течения, причем на правой части рис. 10.28 дана одна траектория движения частицы газа в этом стационарном придонном течении.

*Таблица 10.9*

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
$c_{00}$	333 м/с	1
$r_{00}$	8200 м	1
$t_{00} = r_{00}/c_{00}$	24.62 с	1
$\Omega$	$0.0000727 \text{ c}^{-1}$	0.0017898
$\sin \psi$	0.7071	0.7071
$r_{in}$	8200 м	1
$r_0$	53.3 м	0.0065
$c(r_{in})$	333 м/с	1
$c(r_0)$	331.73 м/с	0.99619
$u(r_{in})$	-0.1665 м/с	-0.0005
$u(r_0)$	-24.24 м/с	-0.072803
$v(r_{in})$	0 м/с	0
$v(r_0)$	93.24 м/с	0.18079

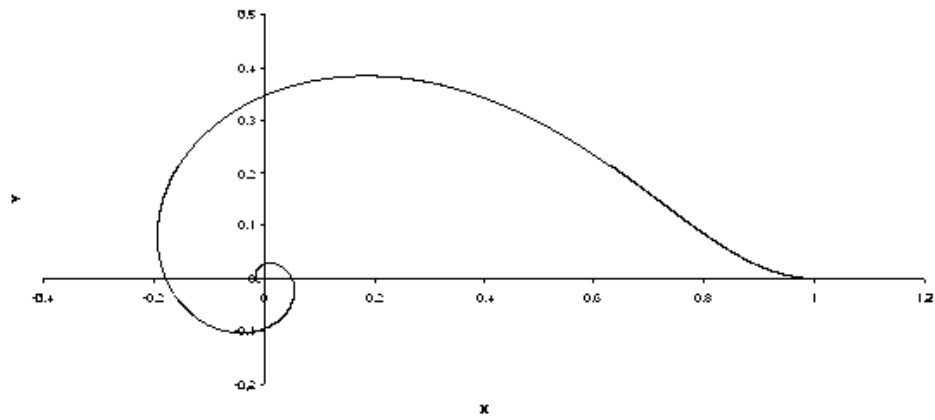


*Рис. 10.31*



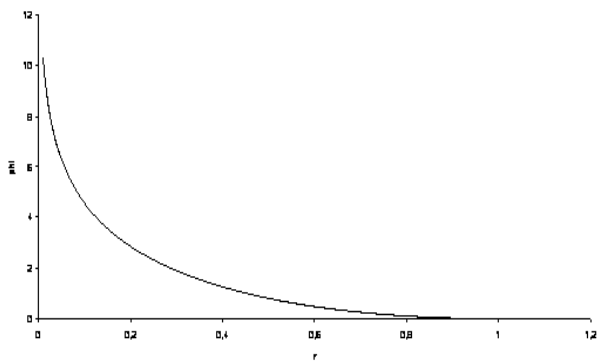
*Puc. 10.32*

**z=0**

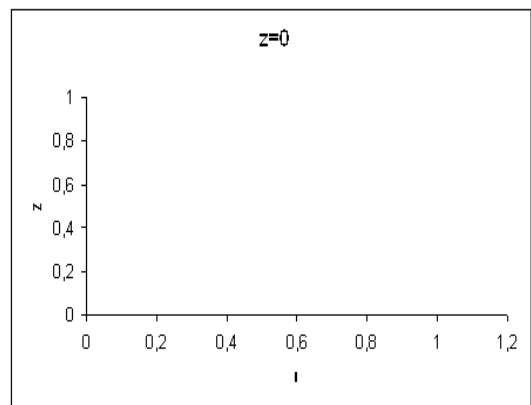


*Puc. 10.33*

**z=0**



**z=0**



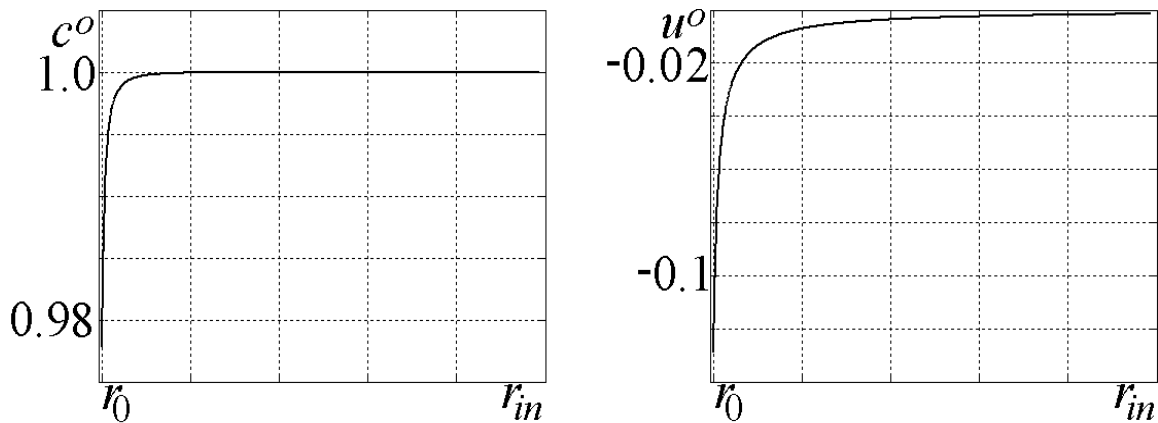
*Puc. 10.34*

## Результаты расчетов торнадо класса $F4$

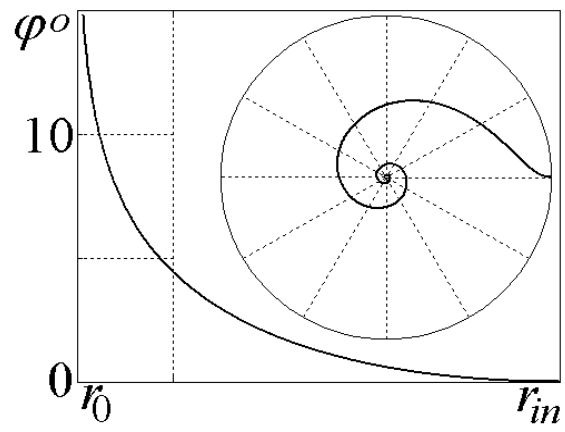
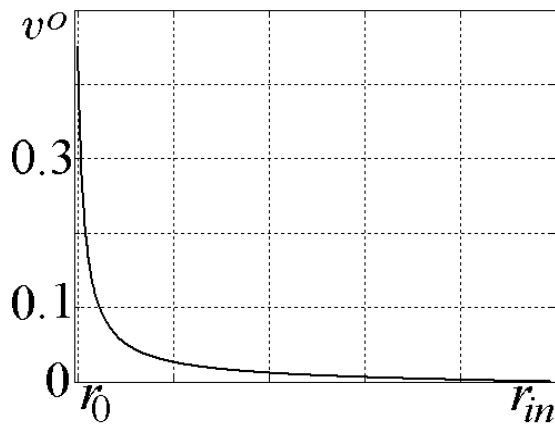
Значения некоторых констант и параметры предельного стационарного течения в придонной части торнадо данного класса  $F4$  приведены в таблице 10.10. На рис. 10.29, 10.30 представлены графики этого предельного стационарного течения, причем на правой части рис. 10.30 дана одна траектория движения частицы газа в этом стационарном придонном течении.

*Таблица 10.10*

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
$c_{00}$	333 м/с	1
$r_{00}$	32000 м	1
$t_{00} = r_{00}/c_{00}$	96.096 с	1
$\Omega$	$0.0000727 \text{ c}^{-1}$	0.006985
$\sin \psi$	0.7071	0.7071
$r_{in}$	32000 м	1
$r_0$	499.2 м	0.0156
$c(r_{in})$	333 м/с	1
$c(r_0)$	329.48 м/с	0.98943
$u(r_{in})$	-0.4995 м/с	-0.0015
$u(r_0)$	-32.92 м/с	-0.09886
$v(r_{in})$	0 м/с	0
$v(r_0)$	102.77 м/с	0.30861

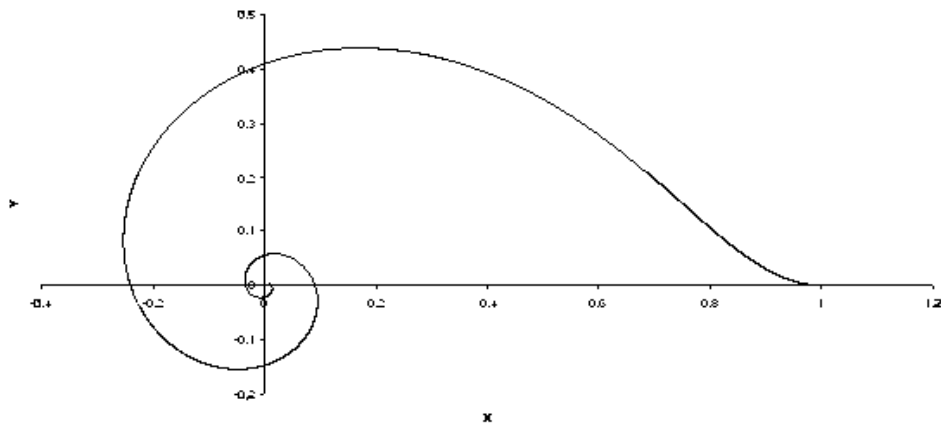


*Рис. 10.35*



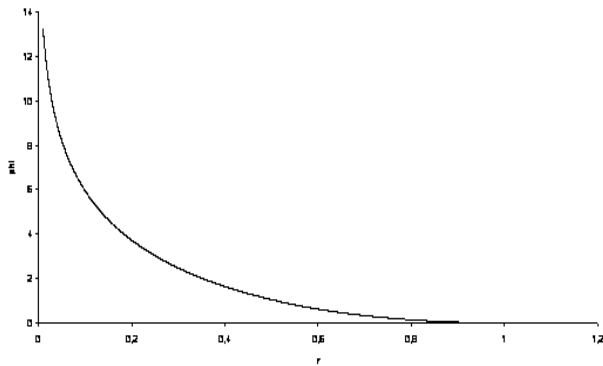
*Puc. 10.36*

$z=0$

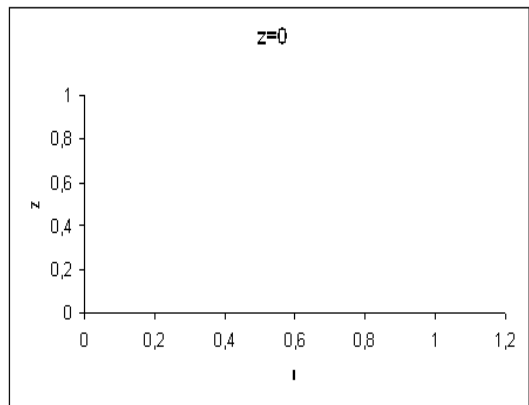


*Puc. 10.37*

$z=0$



$z=0$



*Puc. 10.38*

## Результаты расчетов торнадо класса F5

Значения некоторых констант и параметры предельного стационарного течения в придонной части торнадо данного класса F5 приведены в таблице 10.11. На рис. 10.31, 10.32 представлены графики этого предельного стационарного течения, причем на правой части рис. 10.32 дана одна траектория движения частицы газа в этом стационарном придонном течении.

Таблица 10.11

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
$c_{00}$	333 м/с	1
$r_{00}$	65000 м	1
$t_{00} = r_{00}/c_{00}$	195.195 с	1
$\Omega$	$0.0000727 \text{ c}^{-1}$	0.014188
$\sin \psi$	0.7071	0.7071
$r_{in}$	65000 м	1
$r_0$	1638 м	0.0252
$c(r_{in})$	333 м/с	1
$c(r_0)$	327.47 м/с	0.98339
$u(r_{in})$	-0.999 м/с	-0.003
$u(r_0)$	-41.77 м/с	-0.12544
$v(r_{in})$	0 м/с	0
$v(r_0)$	128.4 м/с	0.3856

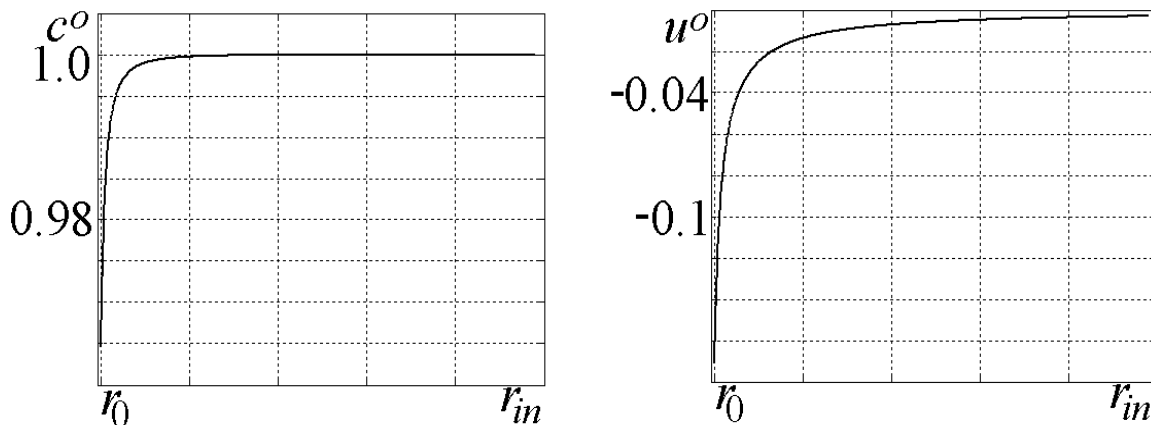
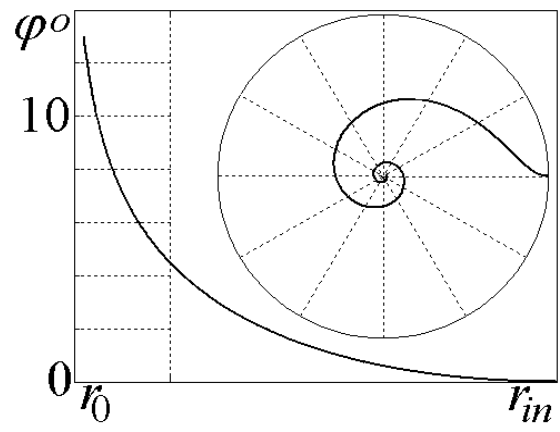
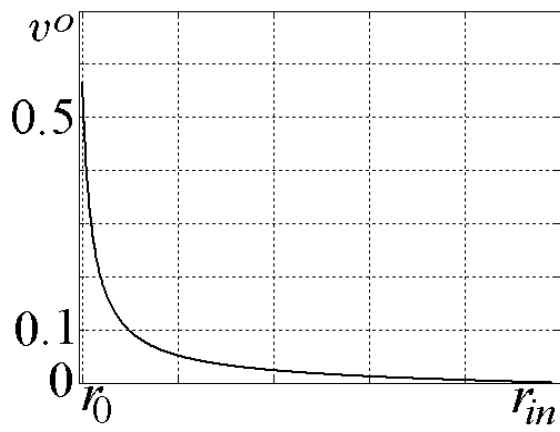
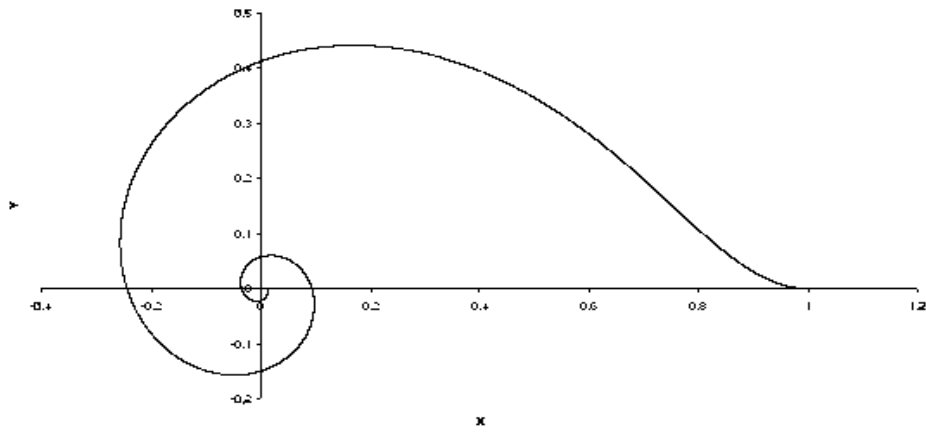


Рис. 10.39



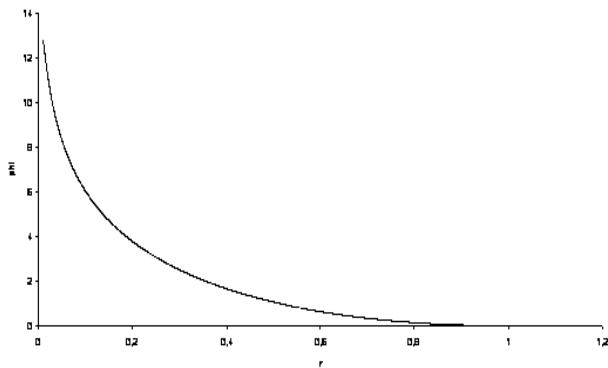
*Puc. 10.40*

$z=0$

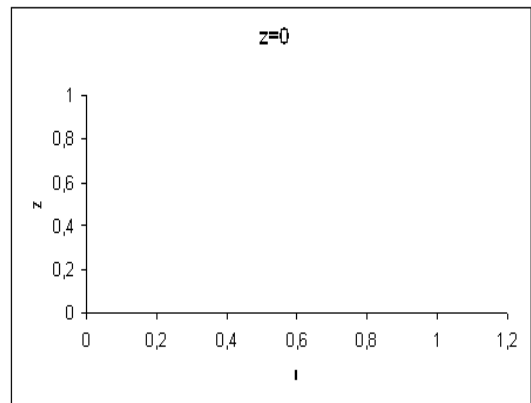


*Puc. 10.41*

$z=0$



$z=0$



*Puc. 10.42*



## §11. Расчеты течений для тропического циклона

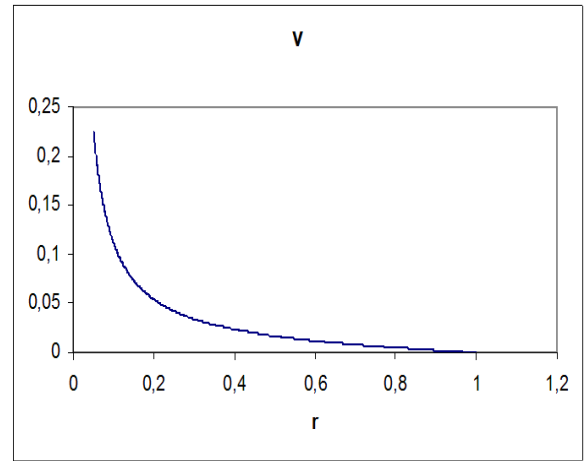
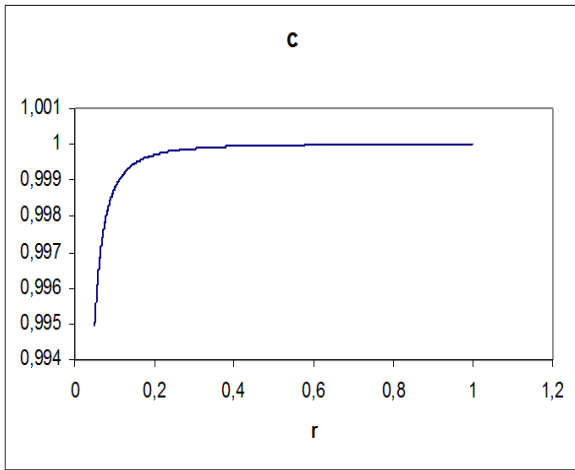
Для исследования взяты параметры среднего по своим характеристикам тропического циклона и проведен расчет газодинамических параметров в его придонной части.

Некоторые необходимые для расчетов параметры тропического циклона приведены в таблице 11.1 [161].

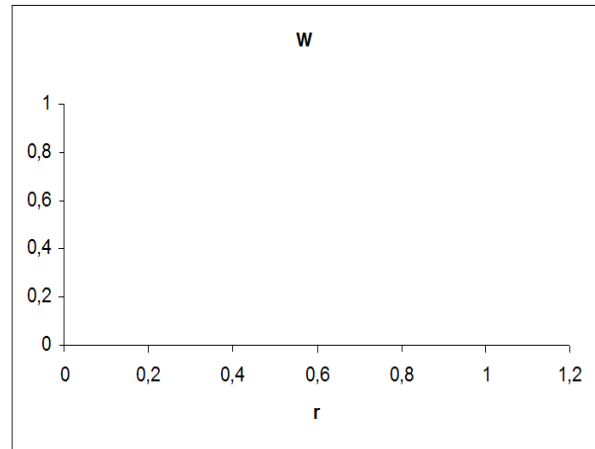
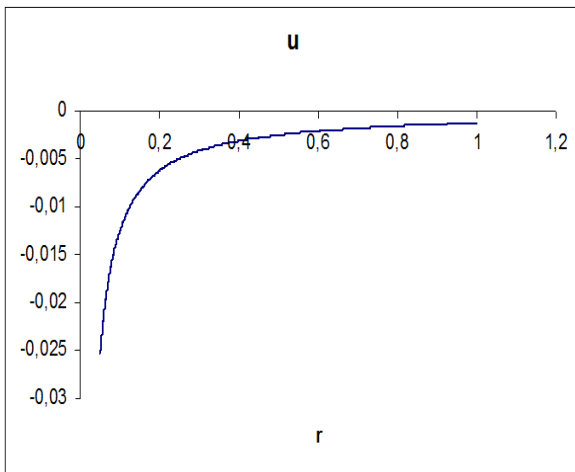
Таблица 11.1

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
$c_{00}$	333 м/с	1
$r_{00}$	73000 м	1
$\Omega$	$0.0000727 \text{ с}^{-1}$	0.01593
$\sin \psi$	0.5	0.5
$r_{in}$	73000 м	1
$r_0$	3650 м	0.05
$c(r_{in})$	333 м/с	1
$c(r_0)$	332.1 м/с	0.9974
$u(r_{in})$	-0.41292 м/с	-0.00124
$u(r_0)$	-8.366 м/с	-0.025124
$v(r_{in})$	0 м/с	0
$v(r_0)$	52.9 м/с	0.1589
$h$	73 м	0.001

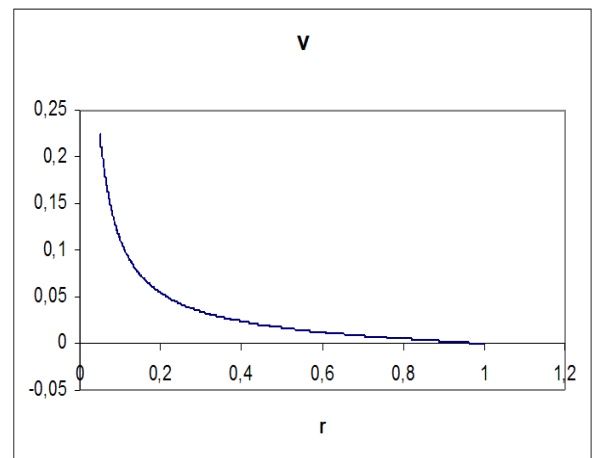
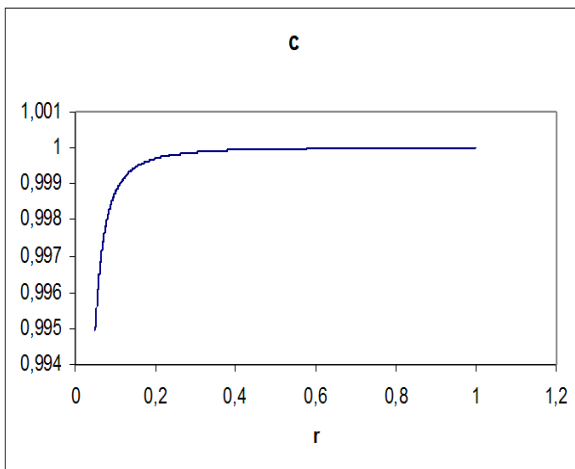
На рисунках 11.1-11.8 приведены графики газодинамических параметров на луче  $\varphi = 0$  при разных значениях  $z$  : 0; 0.0001; 0.0005; 0.001. Аналогичные графики на лучах  $\varphi = \pi/3$ ,  $\varphi = 2\pi/3$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $\varphi = 4\pi/3$ ,  $\varphi = 5\pi/3$ .



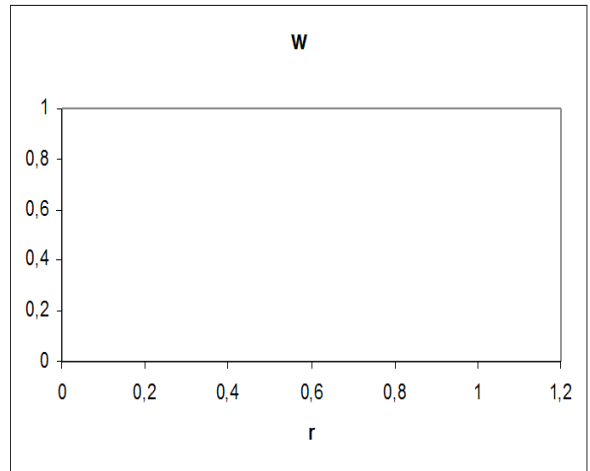
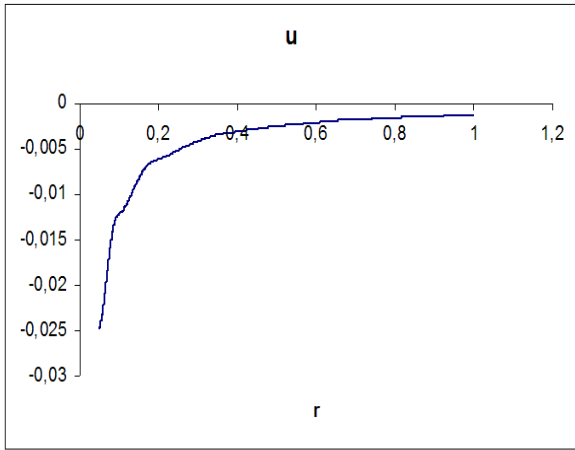
*Puc. 11.1*



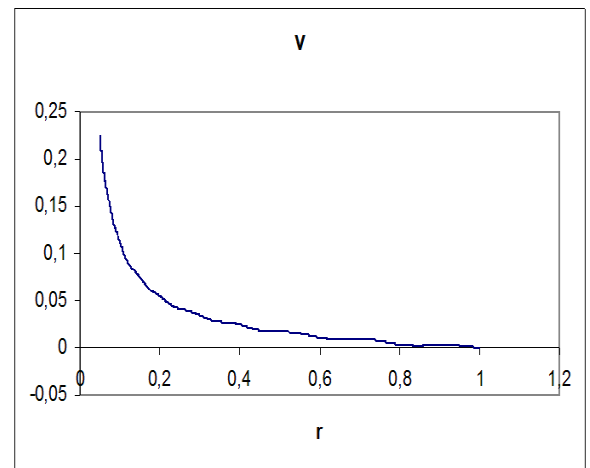
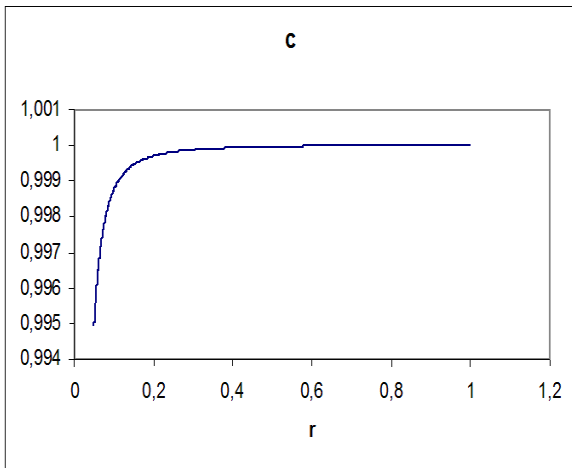
*Puc. 11.2*



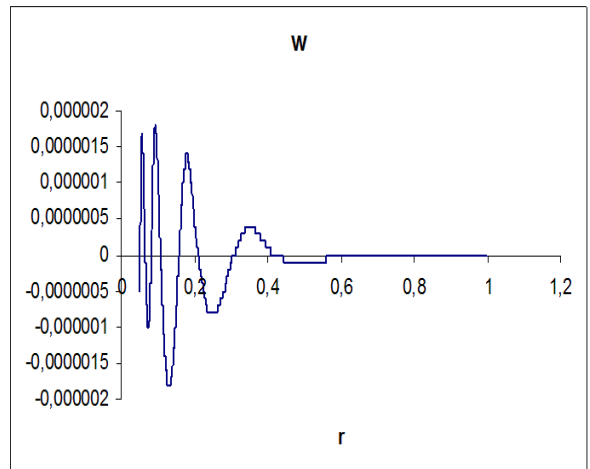
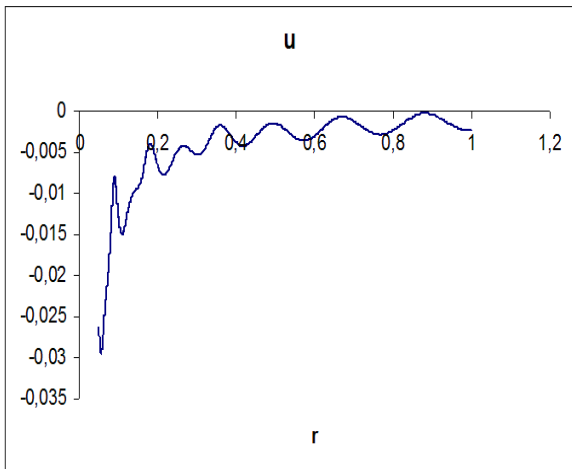
*Puc. 11.3*



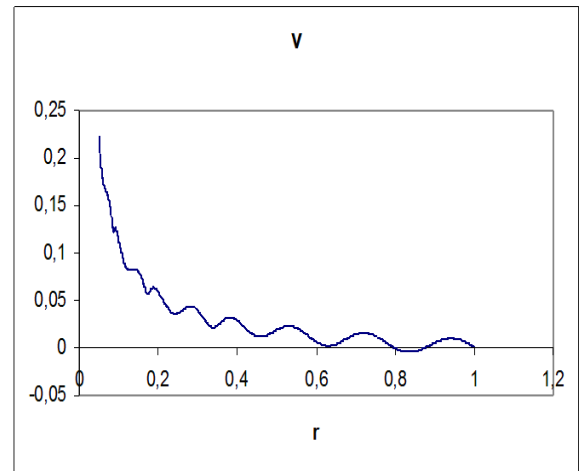
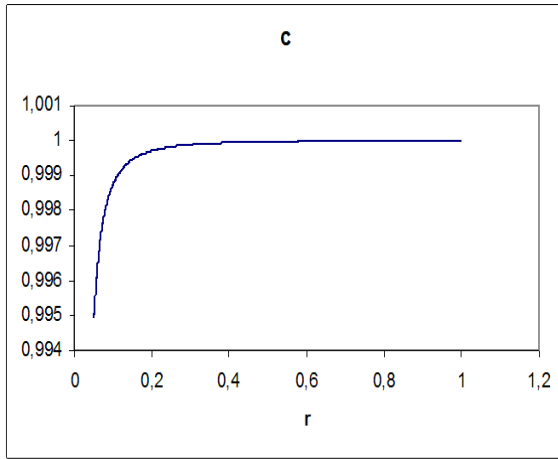
*Puc. 11.4*



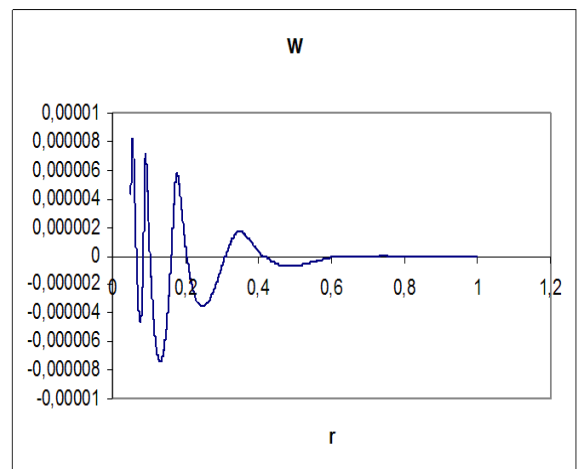
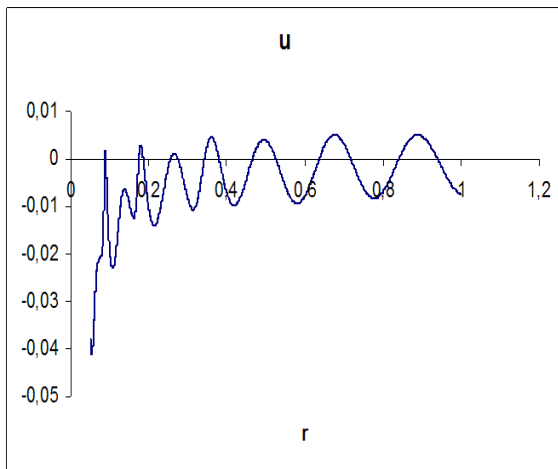
*Puc. 11.5*



*Puc. 11.6*

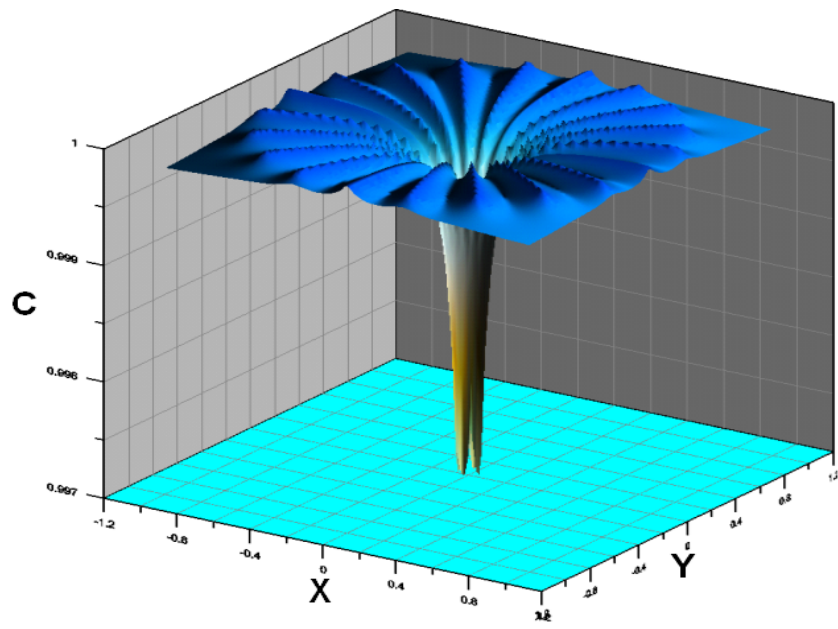


*Рис. 11.7*

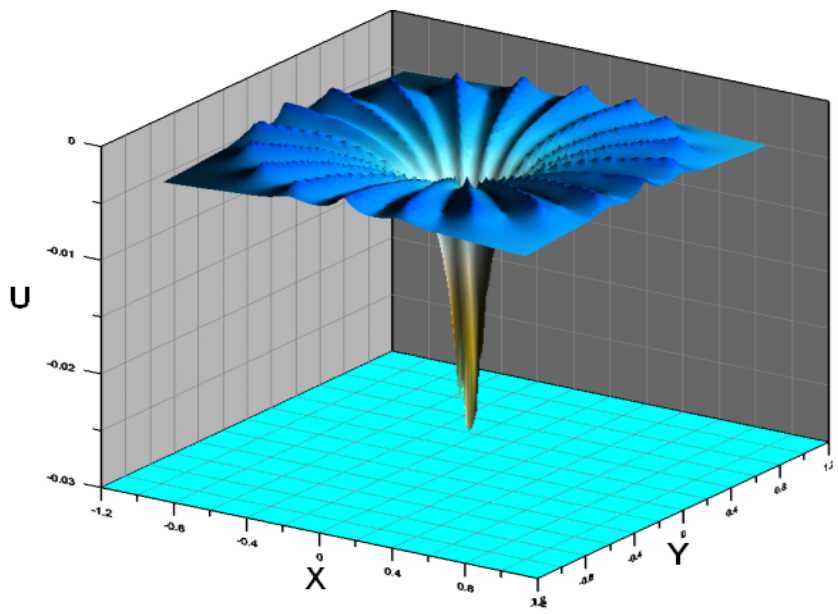


*Рис. 11.8*

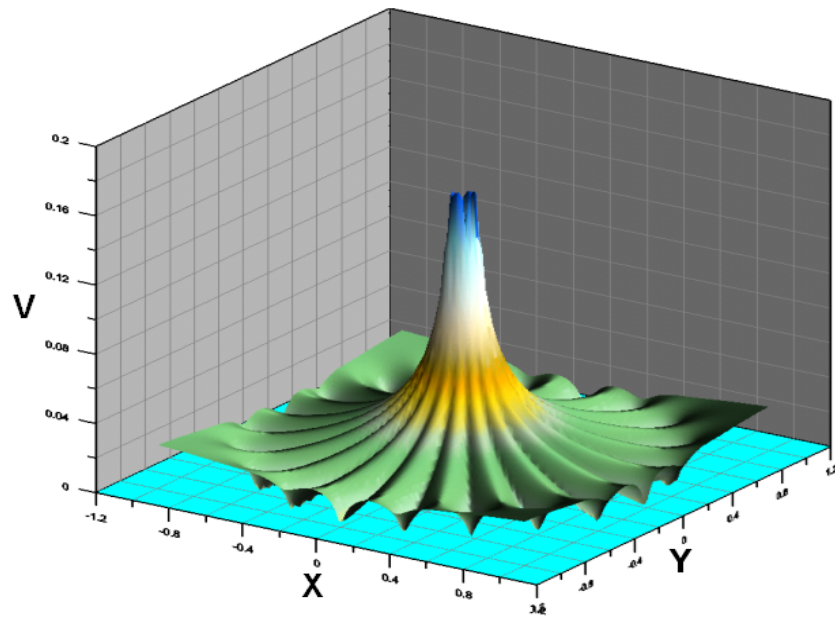
На рис. 11.9-11.12 при  $z = 0.001$  представлены поверхности газодинамических распределений над плоскостью декартовых координат  $xOy$ . Аналогичные поверхности распределения газодинамических параметров при заданных высотах. Поверхность компоненты скорости  $w$  при  $z = 0$  не приведена, поскольку при  $z = 0$   $w$  тождественно равна нулю по условиям рассматриваемой задачи.



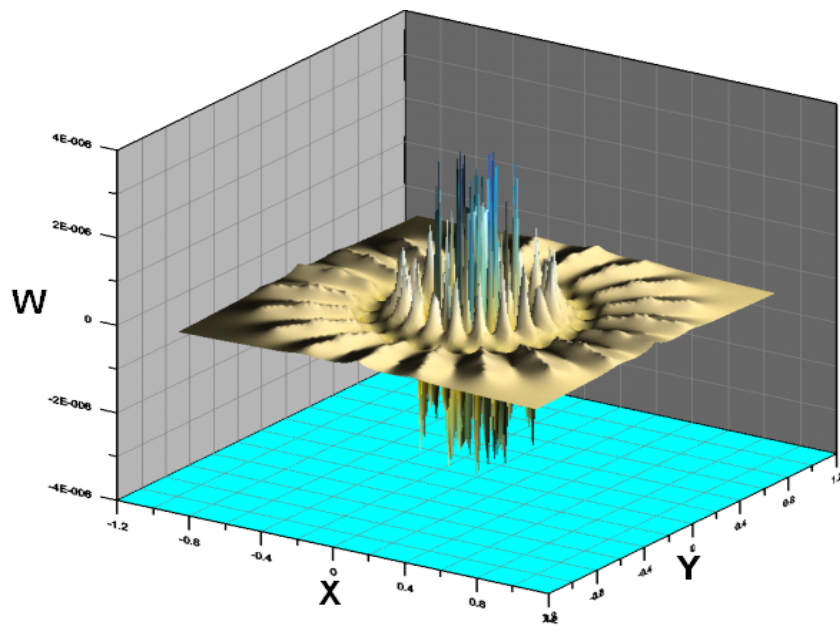
*Puc. 11.9*



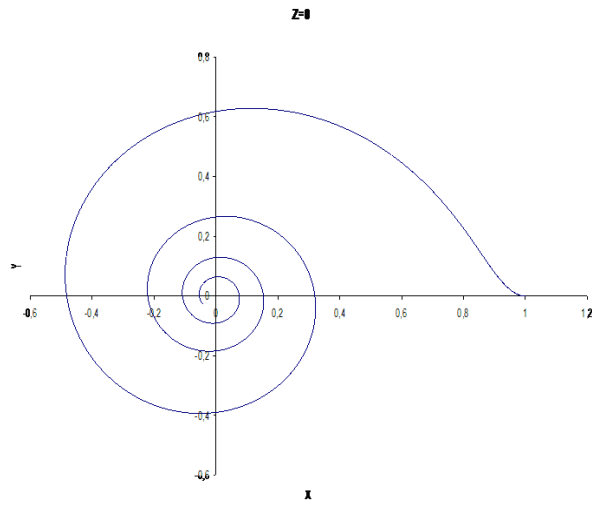
*Puc. 11.10*



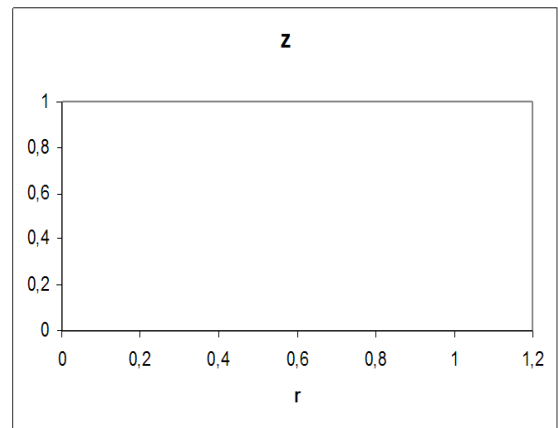
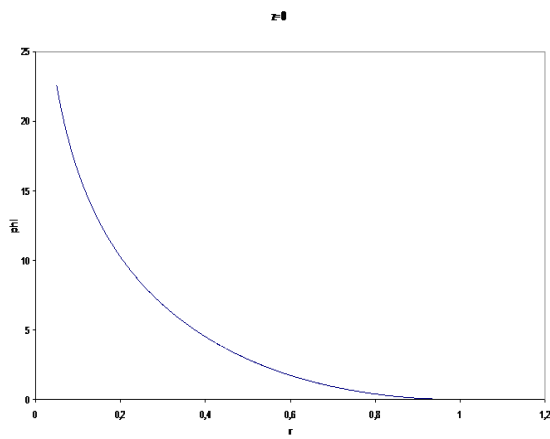
*Puc. 11.11*



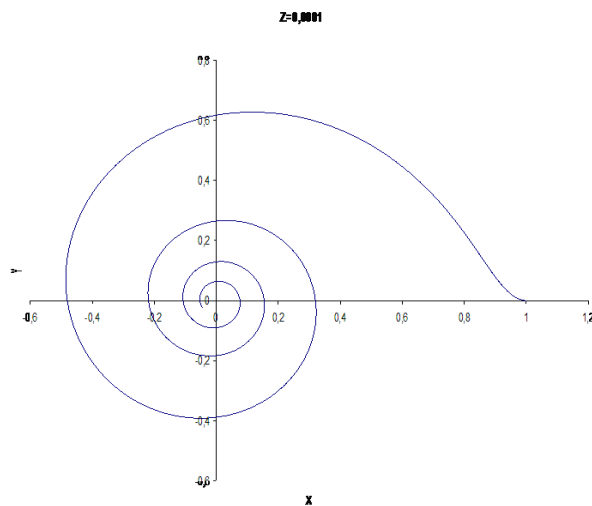
*Puc. 11.12*



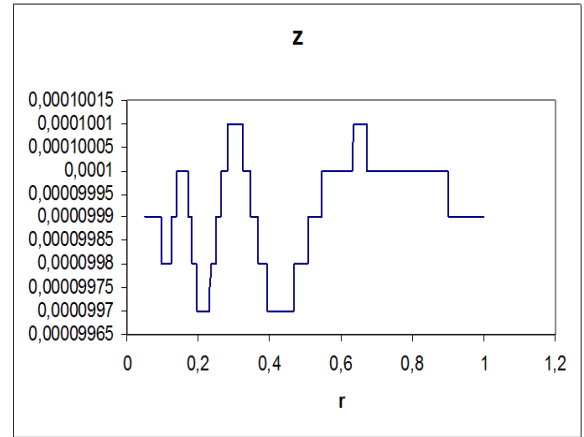
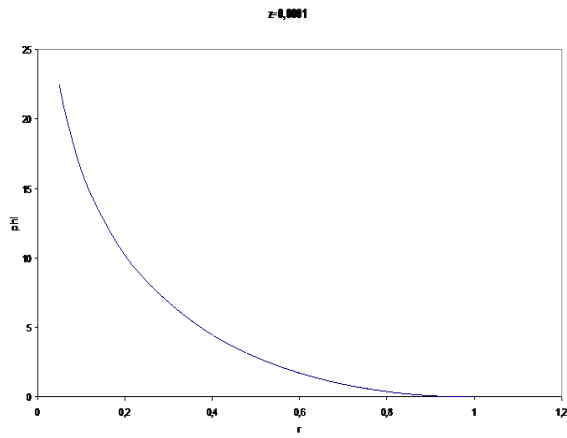
*Puc. 11.13*



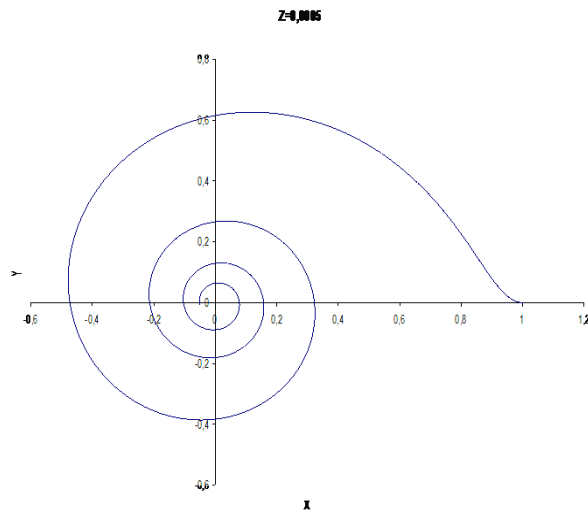
*Puc. 11.14*



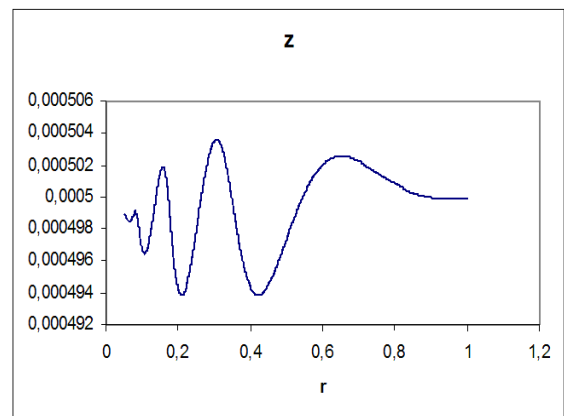
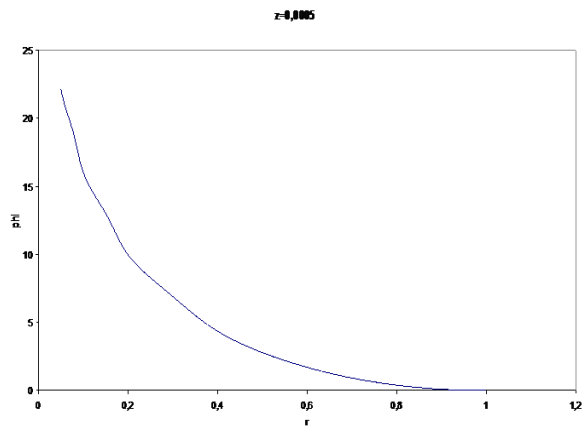
*Puc. 11.15*



*Puc. 11.16*



*Puc. 11.17*



*Puc. 11.18*



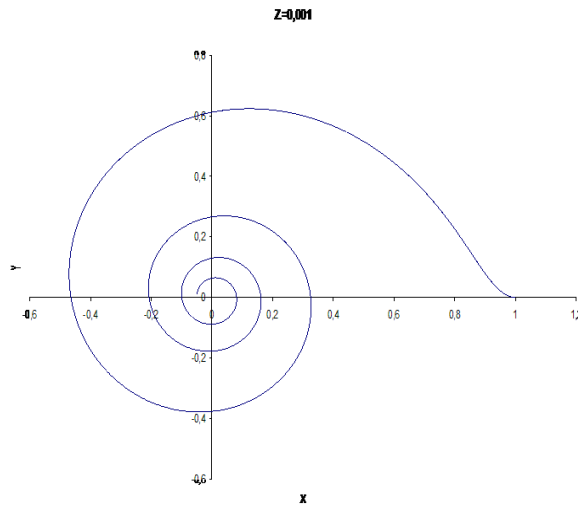


Рис. 11.19

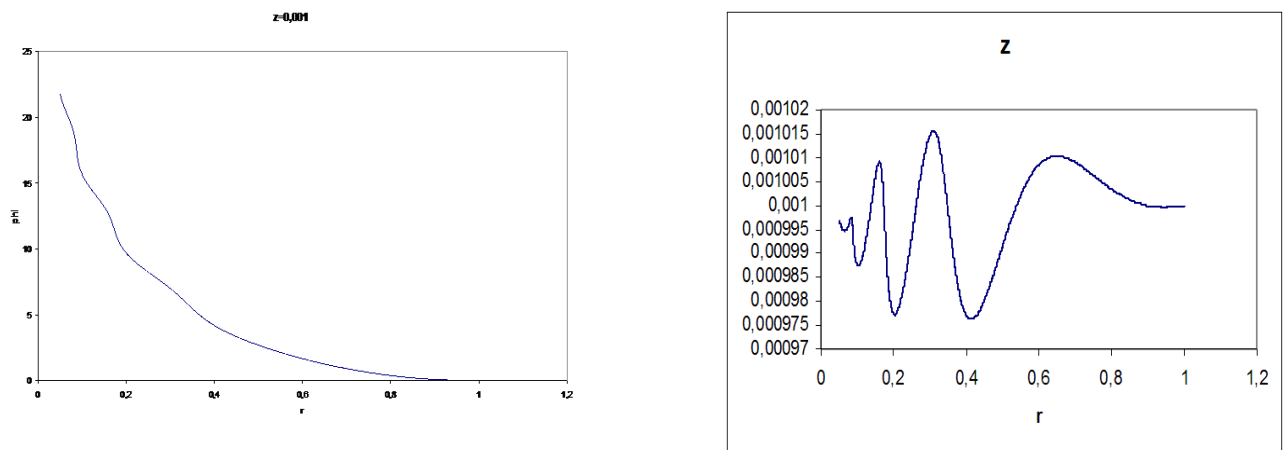


Рис. 11.20

На рисунках 11.13-11.20 при разных значениях  $z$  и при  $\varphi = 0$  приведены проекции траекторий линий тока на плоскости  $xOy$ ,  $rO\varphi$ ,  $rOz$  соответственно. Из представленных результатов следует:

- 1) частица делает больше полного оборота при движении от  $r_{in}$  к  $r_0$ ;
- 2) при увеличении высоты наблюдается изменение направления движения "вверх-вниз";
- 3) число локальных экстремумов на этих проекциях смотри в таблице 11.3.

Таблица 11.2

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
$r_{in}$	73000 м	1
$r_0$	3650.0 м	0.05
$\max c(r_{in})$	333 м/с	1
$\min c(r_{in})$	333 м/с	1
$\max  u(r_{in}) $	-0.41292 м/с	-0.00124
$\min  u(r_{in}) $	-0.41292 м/с	-0.00124
$\max v(r_{in})$	0 м/с	0
$\min v(r_{in})$	0 м/с	0
$\max c(r_0)$	332.1 м/с	0.9974
$\min c(r_0)$	332.1 м/с	0.9974
$\max  u(r_0) $	-8.366 м/с	-0.025124
$\min  u(r_0) $	-8.366 м/с	-0.025124
$\max v(r_0)$	52.9 м/с	0.1589
$\min v(r_0)$	52.9 м/с	0.1589
$\max z(r)$	73.0 м	0.001

Таблица 11.3

$\varphi$	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi$	$4\pi/3$	$5\pi/3$
$\max z(r)$	0,0010018 м	0,001 м	0,001 м	0,00103 м	0,00109 м	0,001075 м
$R$	7	6	6	7	6	6

где  $R$  – число локальных экстремумов на линии  $z(r)$ .

**Общие выводы** по расчетам течений среднего по своим характеристикам тропического циклона:

Поведение траекторий  $z = z(r)$  в зависимости от  $\varphi$  в отличие от траектории торнадо  $F3$  имеет существенно больше локальных экстремумов (3-4), а с учетом значений при  $r = r_0$  количество локальных максимумов достигает 5.

Перепад значений между локальным максимумом и локальным миниму-

мом для каждого значения  $\varphi$  практически постоянно. Самые большие значения при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , а все остальные значения меньше.

Так же, как и у торнадо F3, при изменении  $\varphi$  наблюдается разное поведение частицы при уменьшении  $r$ . В районе  $\varphi = \pi/3; 2\pi/3$  при уменьшении  $r$  высота от плоскости  $z = 0$  сначала уменьшается, затем растет. А при  $\varphi = 4\pi/3; 5\pi/3$  высота сначала растет, а потом убывает.

Перепады высот на траектории порядка 1 м: так называемая "рябь" начинает наблюдаться уже при достаточно больших значениях  $r = 0.2 - 0.4$  безразмерных единиц, то есть на расстояниях 15-30 км от центра циклона (от центра "глаза" циклона).

Проявление "ряби" в потоке также фиксируется тем, что при высоте  $z = 0.001$  поведение кривой  $\varphi = \varphi(r)$  (одна из составляющих пространственной траектории поршня) при  $r \rightarrow 0$  с  $r = 0.2 - 0.4$  меняет характер выпуклости несколько раз (5-6). Однако в проекции траектории на плоскость  $xOy$  "рябь" визуалью практически не фиксируется. Поскольку максимум  $\varphi = \varphi(r)$  при всех  $\varphi$  имеет значение порядка 12 радиан, а для циклона порядка 27 радиан, то закрутка потока (количество витков спирали) у циклона существенно больше.

При увеличении высоты уже с  $r = 1$  начинает проявляться немонотонность в поведении функций  $u$  и  $w$ , а функция  $c$  практически не меняется. Также не меняется максимальное значение  $v$ , которое достигается при  $r = v(r_0)$ . Несмотря на разные знаки  $u$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $u$  на стоке всегда отрицательно. Также с ростом высоты  $w$  принимает значения разных знаков, что говорит о более сложном поведении трехмерного потока при переходе от среднемасштабного восходящего закрученного потока (торнадо классов F0-F3) к крупномасштабным восходящим закрученным потокам (торнадо класса F5, тропический циклон).

Поведение газодинамических параметров  $u$ ,  $v$  и  $w$  с увеличением  $z$  начинает принципиально зависеть от  $r$  и от  $\varphi$ . Изменяется поведение графиков этих газодинамических параметров в зависимости от  $r$  и от  $\varphi$ , причем при  $r$

начиная с  $r = 1$  при уменьшении значений  $r$ . Однако эти изменения значений газодинамических параметров на характере поведения линий тока практически не сказываются: зависимость  $\varphi = \varphi(r)$  при разных значениях  $r$  меняет характер выпуклости;  $w = w(r)$  меняет знаки, имеет локальные экстремумы, но абсолютные перепады высот незначительные (5-6 м). А на проекции линий тока на плоскость переменных  $xOy$  изменения витков спирали визуально не фиксируются.

### **Общие выводы о свойствах спиральных трехмерных стационарных течениях**

Анализ приведенных графических зависимостей параметров газа в придонной части восходящих закрученных потоков позволяет отметить следующие характерные особенности их поведения с течением времени.

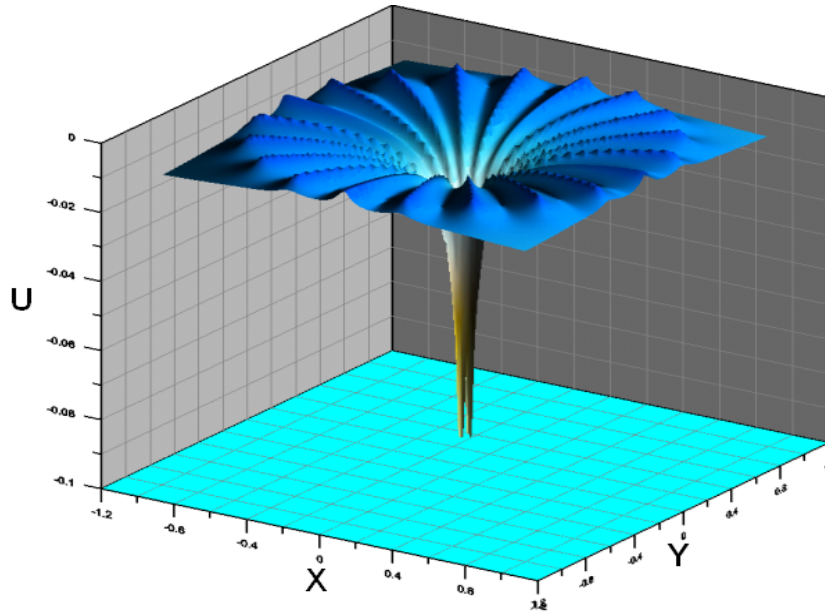
1. Течение в придонной части восходящего закрученного потока принципиально трехмерное. При этом наличие стока при  $r \rightarrow r_0 + 0$  существенно влияет на все течение, и абсолютное изменение всех газодинамических параметров настолько велики (относительно), что при  $r \rightarrow r_0 + 0$  "рябь" в потоке практически исчезает. Это иллюстрируют рисунки 11.21 и 11.22.

2. При увеличении интенсивности восходящего закрученного потока (при переходе к торнадо более высокого класса и к тропическому циклону) трехмерность потока проявляется все более существенно (смотри рисунки 11.23 и 11.24).

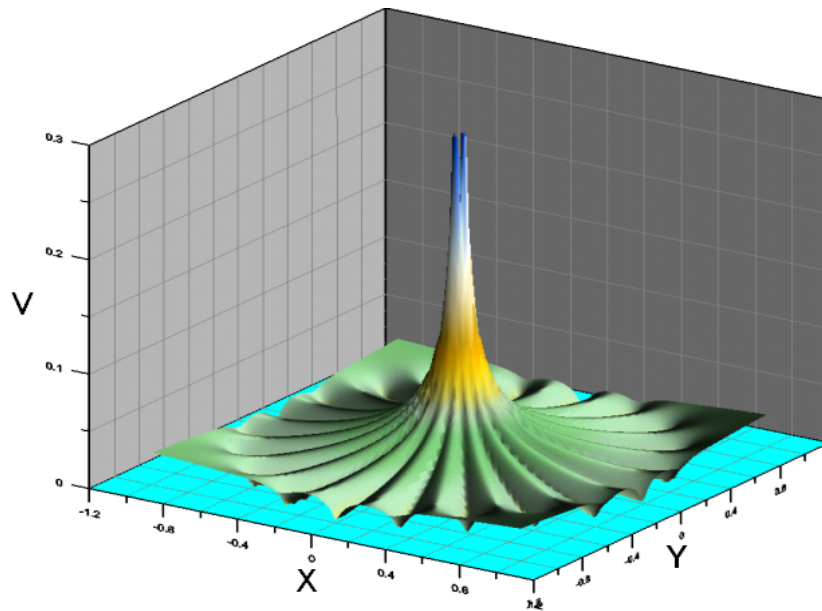
3. "Рябь" в потоке имеет достаточно незначительные изменения в безразмерных переменных. Тем не менее в размерных переменных изменения, например, по высоте траектории движения частиц, представляются достаточно ощутимыми: от метров для торнадо с маленьким номером по шкале Фудзиты до десятков сотен метров для тропического циклона средней интенсивности. Полученные количественные характеристики изменения газодинамических параметров хорошо согласуются с основными данными натурных наблюдений за природными восходящими закрученными потоками: скорости ветра в окрестности вертикальной части восходящих закрученных потоков, а также радиусами

вертикальной части природных восходящих закрученных потоков.

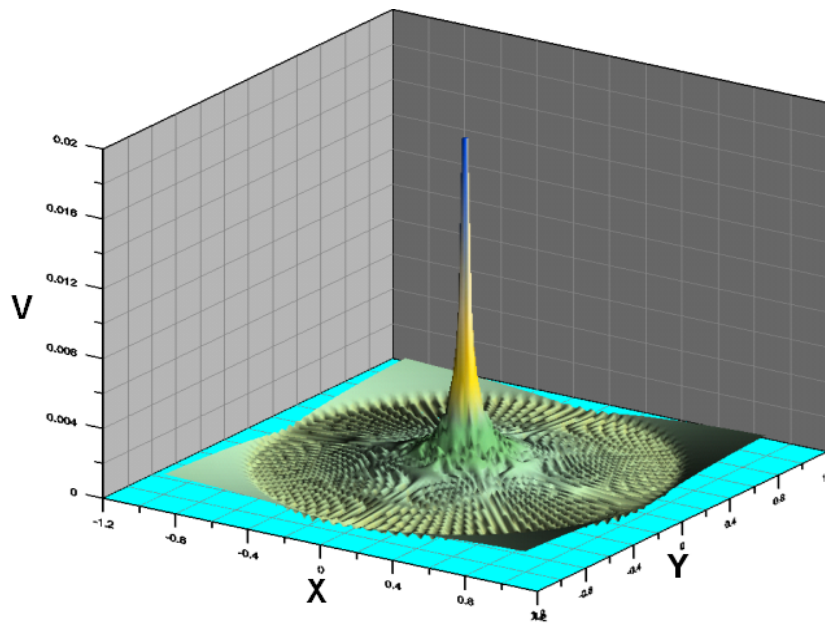
4. Изменения газодинамических параметров во всей придонной части восходящих закрученных потоков на качественном уровне также согласуются с "рябью наблюдаемой в природных восходящих закрученных потоках.



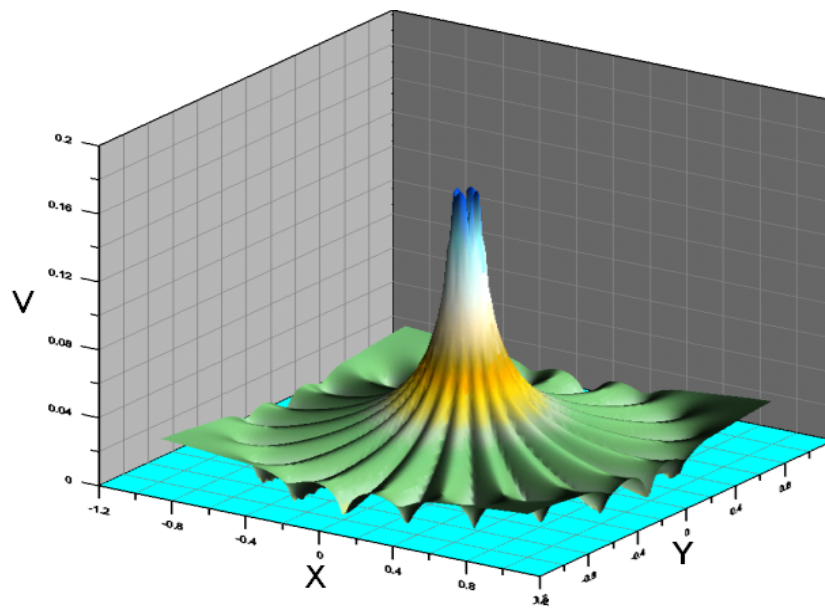
*Рис. 11.21*



*Рис. 11.22*



*Puc. 11.23*



*Puc. 11.24*

На рисунке 11.25 представлена поверхность скорости звука, когда значения этого газодинамического параметра взяты вдоль траекторий  $z_i = z(r, \varphi_i)$ ,  $1 \leq i \leq 20$ , выпущенных из точек на цилиндре притока при  $z = 0.001$ .

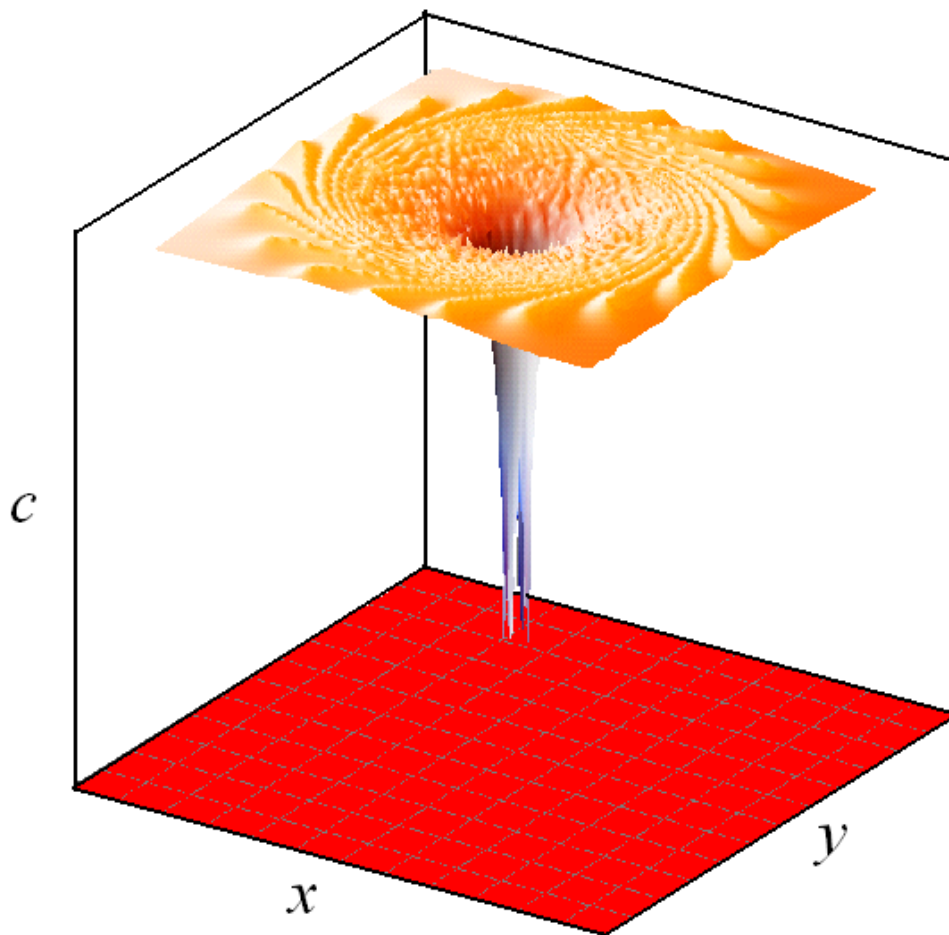


Рис. 11.25

## § 12. Таблицы геометрических, скоростных и энергетических характеристик придонных частей восходящих закрученных потоков

Природное явление торнадо, известное своей разрушительной силой, является объектом изучения многих ученых. Доступная часть данных натуральных наблюдений за этим природным явлением систематизирована и собрана в так называемую шкалу Фудзиты. В частности, в ней указывается ширина полосы разрушения для торнадо различной интенсивности, а из газодинамических параметров приведены только значения максимальной скорости ветра. Баутиным С.П. [1] предложена и обоснована ранее не встречавшаяся схема возникновения и функционирования природных восходящих закрученных потоков типа торнадо и тропического циклона. На основе этой схемы, исходя из данных шкалы Фудзиты, установлены внешние радиусы притока воздуха в придонных частях торнадо различной интенсивности и рассчитаны значения газодинамических параметров этих потоков. Оказалось, что в случае торнадо самой малой интенсивности из шкалы Фудзиты, кинетическая энергия вращательного движения воздуха составляет половину всей кинетической энергии потока в придонной части. И с ростом интенсивности торнадо кинетическая энергия вращательного движения составляет все бóльшую часть всей кинетической энергии потока. В данном параграфе при заданном в таблице Фудзиты значении ширины полосы разрушений для всех торнадо установлены два внешних радиуса притока воздуха в придонную часть торнадо:  $r_{in1}$  и  $r_{in2}$ . Первый из этих радиусов  $r_{in1}$  такой, что кинетическая энергия вращательного движения построенного потока составляет половину всей кинетической энергии этого потока. Второй —  $r_{in2}$ , при котором кинетическая энергии всего потока становится равной кинетической энергии самого слабого торнадо, при котором имеют место разрушения. Знание значений этих радиусов позволит более надежно прогнозировать возникновения торнадо.

Ранее были изучены все виды торнадо из шкалы Фудзиты [164], составленной по результатам многочисленных наблюдений за природными торнадо разной интенсивности. Из этих наблюдений, в частности, следует вывод,



что торнадо становится разрушительным, только начиная с самого маленького класса торнадо из шкалы Фудзиты. В десятом и одиннадцатом параграфах приведены численные расчеты придонных частей торнадо. В частности было установлено, что для самого слабого по интенсивности торнадо класса  $F0$  из шкалы Фудзиты отношения  $W_v$  — кинетической энергии окружного движения ко всей  $W$  кинетической энергии потока практически равно одной второй

$$\frac{W_v}{W} = \frac{1}{2}.$$

Для торнадо большей интенсивности это отношение растет и стремится к единице. Данный факт отражает то, что кинетическая энергия вращения Земли вокруг своей оси, вкладываемая в кинетическую энергию окружного движения воздуха придонной части торнадо, становится преобладающей для всего потока.

В данном параграфе для торнадо всех классов  $F1 - F5$  из шкалы Фудзиты исследуется вопрос: при каких радиусах притока воздуха в придонной части энергетические характеристики удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\frac{W_v}{W} \geq \frac{1}{2}; \quad \frac{W}{W_{\min}} \geq 1. \quad (12.1)$$

Здесь  $W_{\min}$  — общая кинетическая энергия потока торнадо класса  $F0$ . Выполнимость первого неравенства определяет первый радиус  $r_{in1}$ . Выполнимость второго неравенства определяет второй радиус  $r_{in2}$ .

### Постановка задачи

Будут рассматриваться плоские стационарные изэнтропические течения политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами:  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ . Функции  $c_0$ ,  $u_0$  описываются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.5), а функция  $v_0$  определяется в явном виде (см. (6.6))

$$v_0(r) = \frac{a(r_{in}^2 - r^2)}{2r}; \quad v_0(r_{in}) = 0; \quad a = 2\Omega \sin \psi.$$

Кинетическая энергия газа, движущегося в области  $(D)$ , задается трой-

ным интегралом:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2(D)} \rho_0 (u_0^2 + v_0^2) r dr d\varphi dz = \\
 &= \pi h \int_{r_0}^{r_{in}} [c_0(r)]^{2/(\gamma-1)} [u_0^2(r) + v_0^2(r)] r dr = W_u + W_v,
 \end{aligned}$$

где  $W$  — полная кинетическая энергия потока — состоит из двух составляющих: радиальной  $W_u$  и окружной  $W_v$ , поскольку в рассматриваемом плоском течении  $W_z = 0$ . В представленных далее расчетах размерное значение высоты придонной части полагалось 30 м,  $h$  — ее безразмерный аналог.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.5) численно решалась известным методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага для достижения заданной точности в пятом знаке после запятой. Вычисления определенных интегралов осуществлялись стандартной программой по методу Симпсона с  $\Delta r = 0.001$ .

Для того, чтобы в рамках предложенной С.П. Баутиным схемы [1] математически смоделировать течение газа, согласующееся с данными натуральных наблюдений в придонной части торнадо, используется шкала Фудзиты [164], составленная по результатам анализа большого количества данных натуральных наблюдений за различными торнадо.

А именно, для каждого класса торнадо из шкалы Фудзиты берутся значения:  $r_0$  — половина ширины полосы разрушения и  $V(r_0)$  — максимальная скорость ветра (см. первые три столбца из таблицы 12.1).

Таблица 12.1

1	2	3	4	5	6	7
Класс торнадо	$r_0, \text{ м}$	$V(r_0), \text{ м/с}$	$\sqrt{u_0^2(r_0) + v_0^2(r_0)},$ $\text{ м/с}$	$r_{in}, \text{ м}$	$W, \text{ Дж}$	$W_v/W$
$F0$	2.5	19.0	19.01	975	$5.099 \cdot 10^5$	0.497
$F1$	8.0	33.0	32.97	2618	$1.452 \cdot 10^7$	0.876
$F2$	25.5	51.0	51.02	5949	$3.248 \cdot 10^8$	0.973
$F3$	80.5	71.0	70.96	12522	$5.693 \cdot 10^9$	0.994
$F4$	273.5	93.0	93.01	26500	$1.000 \cdot 10^{11}$	0.9986
$F5$	804.5	117.0	116.98	50890	$1.212 \cdot 10^{12}$	0.9996

Затем при заданном значении  $u(r_{in}) = -0.0001$  определялось значение  $r_{in}$  (см. пятый столбец из таблицы 12.1) – радиуса внешнего притока воздуха в придонную часть торнадо такое, чтобы у решения задачи (6.5) значение  $\sqrt{u_0^2(r_0) + v_0^2(r_0)}$  (см. четвертый столбец из таблицы 12.1) совпало бы с соответствующим значением из таблицы Фудзиты (см. третий столбец из таблицы 12.1). Затем для течения, построенного при найденном значении  $r_{in}$ , вычислялись значения  $W$  и  $W_v/W$  (см. шестой, седьмой столбцы из таблицы 12.1). Далее значение  $W$  для торнадо  $F0$  обозначается  $W_{\min}$ , поскольку именно при этом значении кинетической энергии потока и начинаются разрушения, приносимые торнадо. Тем самым были построены течения в придонных частях торнадо различной интенсивности, параметры которых соответствуют параметрам природных торнадо, зафиксированных в шкале Фудзиты.

### Результаты расчетов различных течений

В данной работе расчеты геометрических, скоростных и энергетических характеристик придонных частей торнадо проводились по следующей схеме.

Для каждого класса торнадо при заданном в таблице Фудзиты значении  $r_0$  перебирались значения  $r_{in}$  так, чтобы определить: при каких значениях  $r_{in1}$  и  $r_{in2}$  для новых построенных течений выполняются неравенства (12.1).

Результаты расчетов для торнадо всех классов представлены в таблицах 12.2-12.12.

Таблица 12.2 для торнадо класса F0 с  $r_0 = 2.5$  м и скоростью ветра 18.99 м/с при  $r = r_0$  по шкале Фудзиты.

Таблица 12.2

$r_{in}, \text{ м}$	500	750	975	1200	1500	2000
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	7.6	12.9	19.0	26.4	38.4	64.2
$W, \text{ Дж}$	$7.5 \cdot 10^4$	$2.3 \cdot 10^5$	$5.1 \cdot 10^5$	$1.0 \cdot 10^6$	$2.2 \cdot 10^6$	$6.3 \cdot 10^6$
$W_v/W$	0.20	0.37	0.50	0.60	0.70	0.81
$W/W_{\min}$	0.15	0.45	1.00	1.98	4.30	12.41

Таблицы 12.3, 12.4 для торнадо класса F1 с  $r_0 = 8$  м и скоростью ветра 33.02 м/с при  $r = r_0$  по шкале Фудзиты.

Таблица 12.3

$r_{in}, \text{ м}$	950	1000	1025	1050	1150	1250
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	5.7	6.2	6.4	6.7	7.7	8.8
$W, \text{ Дж}$	$3.7 \cdot 10^5$	$4.4 \cdot 10^5$	$4.7 \cdot 10^5$	$5.1 \cdot 10^5$	$6.9 \cdot 10^5$	$9.2 \cdot 10^5$
$W_v/W, \text{ м}$	0.47	0.50	0.51	0.53	0.57	0.61
$W/W_{\min}$	0.73	0.86	0.93	1.00	1.36	1.80

Таблица 12.4

$r_{in}, \text{ м}$	1500	2000	2618	3000	3500	5000
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	11.99	20.00	33.02	42.80	57.61	115.77
$W, \text{ Дж}$	$1.75 \cdot 10^6$	$5.1 \cdot 10^6$	$1.5 \cdot 10^7$	$2.5 \cdot 10^7$	$4.6 \cdot 10^7$	$2.0 \cdot 10^8$
$W_v/W, \text{ м}$	0.70	0.80	0.88	0.90	0.93	0.96
$W/W_{\min}$	3.43	10.00	28.48	48.93	90.93	388.05

Таблицы 12.5, 12.6 для торнадо класса F2 с  $r_0 = 25.5$  м и скоростью ветра 51.07 м/с при  $r = r_0$  по шкале Фудзиты.

Таблица 12.5

$r_{in}, \text{ м}$	1000	1030	1090	1150	1300	1500
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	1.9	2.0	2.2	2.4	2.9	3.8
$W, \text{ Дж}$	$3.8 \cdot 10^5$	$3.5 \cdot 10^5$	$4.3 \cdot 10^5$	$5.1 \cdot 10^5$	$7.9 \cdot 10^5$	$1.3 \cdot 10^6$
$W_v/W, \text{ м}$	0.49	0.50	0.53	0.56	0.62	0.69
$W/W_{\min}$	0.63	0.70	0.84	1.01	1.54	2.58

Таблица 12.6

$r_{in}, \text{ м}$	2000	4000	5949	7000	8500	10000
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	6.27	23.41	51.07	70.49	103.68	143.31
$W, \text{ Дж}$	$3.9 \cdot 10^6$	$6.3 \cdot 10^7$	$3.2 \cdot 10^8$	$6.4 \cdot 10^8$	$1.4 \cdot 10^9$	$2.8 \cdot 10^9$
$W_v/W, \text{ м}$	0.80	0.94	0.97	0.98	0.99	0.99
$W/W_{\min}$	7.62	10.00	123.28	636.90	$1.25 \cdot 10^3$	$5.51 \cdot 10^3$

Таблицы 12.7, 12.8 для торнадо класса F3 с  $r_0 = 80.5$  м и скоростью ветра 71.02 м/с при  $r = r_0$  по шкале Фудзиты.

Таблица 12.7

$r_{in}, \text{ м}$	1000	1100	1200	1295	1500	2000
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.2	2.0
$W, \text{ Дж}$	$2.1 \cdot 10^5$	$2.9 \cdot 10^5$	$3.9 \cdot 10^5$	$5.1 \cdot 10^5$	$8.9 \cdot 10^5$	$2.7 \cdot 10^6$
$W_v/W, \text{ м}$	0.46	0.51	0.55	0.59	0.67	0.79
$W/W_{\min}$	0.41	0.57	0.77	1.01	1.74	5.28

Таблица 12.8

$r_{in}, \text{ м}$	4000	8000	12522	14000	16000	18000
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	7.4	29.1	71.0	88.7	115.8	146.6
$W, \text{ Дж}$	$4.6 \cdot 10^7$	$8.6 \cdot 10^8$	$5.7 \cdot 10^9$	$9.1 \cdot 10^9$	$1.6 \cdot 10^{10}$	$2.6 \cdot 10^{10}$
$W_v/W, \text{ м}$	0.93	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
$W/W_{\min}$	90.5	$1.7 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^4$	$1.8 \cdot 10^4$	$3.1 \cdot 10^4$	$5.1 \cdot 10^4$

Таблицы 12.9, 12.10 для торнадо класса F4 с  $r_0 = 273.5$  м и скоростью ветра 93.06 м/с при  $r = r_0$  по шкале Фудзиты.

Таблица 12.9

$r_{in}, \text{ м}$	5000	10000	15000	20000	26450	2000
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.6
$W, \text{ Дж}$	$2.1 \cdot 10^5$	$2.1 \cdot 10^5$	$2.5 \cdot 10^5$	$4.7 \cdot 10^5$	$5.1 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^6$
$W_v/W, \text{ м}$	0.49	0.50	0.52	0.62	0.63	0.75
$W/W_{\min}$	0.41	0.42	0.49	0.93	1.00	2.82

Таблица 12.10

$r_{in}, \text{ м}$	10000	15000	20000	26450	30000	35000
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	1.3	30.0	53.2	93.1	119.7	162.9
$W, \text{ Дж}$	$1.5 \cdot 10^9$	$8.9 \cdot 10^9$	$3.0 \cdot 10^{10}$	$1.0 \cdot 10^{11}$	$1.7 \cdot 10^{11}$	$3.3 \cdot 10^{11}$
$W_v/W, \text{ м}$	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
$W/W_{\min}$	$3.0 \cdot 10^3$	$1.7 \cdot 10^4$	$6.0 \cdot 10^4$	$2.0 \cdot 10^5$	$3.3 \cdot 10^5$	$6.4 \cdot 10^5$

Таблицы 12.11, 12.12 для торнадо класса F5 с  $r_0 = 804.5$  м и скоростью ветра 117.04 м/с при  $r = r_0$  по шкале Фудзиты.

Таблица 12.11

$r_{in}, \text{ м}$	1500	1725	1900	2070	2500	5000
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	1.1
$W, \text{ Дж}$	$1.0 \cdot 10^5$	$2.1 \cdot 10^5$	$3.4 \cdot 10^5$	$5.2 \cdot 10^5$	$1.3 \cdot 10^6$	$3.9 \cdot 10^7$
$W_v/W, \text{ м}$	0.38	0.50	0.58	0.65	0.76	0.95
$W/W_{\min}$	0.20	0.40	0.66	1.02	2.6	76.48

Таблица 12.12

$r_{in}, \text{ м}$	20000	35000	50890	65000	80000	100000
$V_{\text{ветра}}, \text{ м/с}$	18.1	55.4	117.0	191.0	289.3	452.1
$W, \text{ Дж}$	$2.1 \cdot 10^{10}$	$2.4 \cdot 10^{11}$	$1.2 \cdot 10^{12}$	$3.4 \cdot 10^{12}$	$8.1 \cdot 10^{12}$	$2.0 \cdot 10^{13}$
$W_v/W, \text{ м}$	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
$W/W_{\min}$	$4.2 \cdot 10^4$	$4.8 \cdot 10^5$	$2.4 \cdot 10^6$	$6.7 \cdot 10^6$	$1.6 \cdot 10^7$	$3.9 \cdot 10^7$

В таблице 12.13 собраны соответствующие значения результатов расчетов для всех классов торнадо F0 – F5.

Таблица 12.13

	$r_0, \text{М}$	$r_{in1}, \text{М}$	$r_{in2}, \text{М}$	$r_{in}, \text{М}$	$V_1(r_0), \text{М/с}$	$V_2(r_0), \text{М/с}$	$V(r_0), \text{М/с}$
<i>F0</i>	2.5	975	975	975	19.0	19.0	19.0
<i>F1</i>	8.0	1000	1050	2618	6.2	6.7	33.0
<i>F2</i>	25.5	1030	1150	5949	2.0	2.4	51.0
<i>F3</i>	80.5	1100	1295	12522	0.7	0.9	71.0
<i>F4</i>	273.5	1251	1557	26500	0.3	0.4	93.0
<i>F5</i>	804.5	1725	2070	50890	0.1	0.2	117.0

Здесь  $r_{in1}$  – то значение радиуса внешнего притока воздуха, при котором для получающегося потока выполняется первое неравенство из (12.1);  $r_{in2}$  – то значение радиуса внешнего притока воздуха, при котором для получающегося потока выполняется второе неравенство из (12.1);  $r_{in}$  – радиус внешнего притока воздуха, при котором скорость ветра на стоке совпала с соответствующей скоростью ветра из шкалы Фудзиты;  $V_1(r_0)$  – скорость ветра на радиусе стока, получающаяся для радиуса притока  $r_{in1}$ ;  $V_2(r_0)$  – скорость ветра на радиусе стока, получающаяся для радиуса притока  $r_{in2}$ .

### Выводы

Результаты расчетов позволили установить следующее:

1. С увеличением  $r_{in}$  для всех значений  $r_0$  растут величины

$$W; \frac{W_v}{W}; \frac{W}{W_{\min}}.$$

2. Значения  $r_{in1}$  и  $r_{in2}$  не совпадают:  $r_{in1} < r_{in2}$ .

3. Оказалось, что для торнадо большой интенсивности неравенства (12.1) начинают выполняться для достаточно небольших размерных значений скорости ветра на стоке при  $r = r_0$ .

### § 13. Возможность предсказания, обнаружения и уничтожения торнадо

Полученные результаты исследований и их совпадение с тем, что наблюдается и в природных условиях, и в экспериментах, позволяют высказать конкретные предложения по выявлению торнадо на ранних стадиях их образования и по уничтожению торнадо с разумными энергетическими затратами.

Первым шагом по выявлению мест возможного возникновения торнадо должно стать выявление тепловых пятен на ровной земляной или водной поверхности. Подобная технология уже реализуется МЧС РФ с помощью спутников для выявления пожаров.

Расчеты, представленные в предыдущем параграфе, дают рекомендации по размерам тепловых пятен, на которые необходимо обращать внимание в первую очередь.

Следующим шагом, на наш взгляд, должен стать анализ конкретных данных с целью прогнозирования возникновения торнадо и возможных последствий: наличие или возможность возникновения грозовых фронтов, близость населенных пунктов, большое скопление людей.

После получения информации о наиболее возможных и наиболее опасных местах возникновения торнадо проведение более детального исследования выявленных мест, в том числе с помощью авиации, включая беспилотные летательные аппараты. Цель этого этапа — обнаружение восходящих конвективных потоков и закрутки воздуха вокруг них. Для подобного диагностирования, кроме визуального осмотра, возможно использовать и оптические свойства воздуха с различными значениями его термодинамических параметров.

Естественно, что при обнаружении подобных потоков, чем раньше будут предприняты превентивные меры, тем меньше негативных последствий принесет выявленный воздушный поток. В качестве возможных превентивных мер можно указать на уничтожение приближающихся грозовых фронтов и (или) на уничтожение самого восходящего закрученного потока с помощью разрушения его вертикальной части. Представляется, что именно этот способ будет наиболее эффективен в борьбе с торнадо, в том числе достигших разруши-



тельной фазы.

Уже в монографии [1] был предложен один из возможных способов борьбы с природными восходящими закрученными потоками. Позже этот способ был запатентован [22]: разрушить «внешние непроницаемые стенки» вертикальной части восходящего закрученного потока и тем самым изменить течение во всем восходящем закрученном потоке.

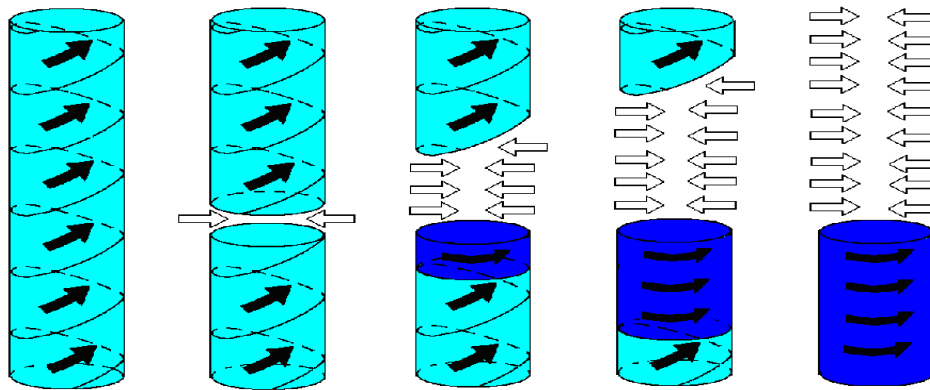


Рис. 13.1

Кстати, человечество имеет положительный опыт борьбы с природными восходящими закрученными потоками подобным образом с применением корабельных пушек еще в XIX веке, что описано русским писателем И.А. Гончаровым в книге «Фрегат Паллада».

После разрушения «внешних непроницаемых стенок» внешний покоящийся воздух устремится в разрыв «стенки», поскольку внешнее давление  $p_0$  больше, чем давление  $p_1$  в центре вертикальной части восходящего закрученного потока на всем участке, где разрушены «стенки». На рис. 13.1 такое движение обозначено горизонтальными линиями со стрелками. В результате заполнения разорванной части восходящего закрученного потока внешним воздухом давление в ней станет практически равно внешнему давлению  $p_0$ . Тогда если в этой заполненной извне части и возникнет движение, то оно не будет обладать ни закруткой, ни вертикальной составляющей вектора скорости газа.

Поскольку воздух в вертикальной части восходящего закрученного потока движется вверх, то верхняя от места указанного воздействия часть потока будет продолжать двигаться вверх. Это движение вверх будет освобождать

всё больше места для заполнения освобождающейся области внешним покоящимся газом и очень быстро захлопнется внешним воздухом (см. рис. 13.1).

На нижнем крае разрушенной «стенки» будет наблюдаться другая картина. Фактически возникнет ситуация, которая в газовой динамике называется распад разрыва. А именно, по одну сторону от этой поверхности разрыва — сверху — будет располагаться газ с одними значениями параметров, а по другую сторону от этой поверхности — снизу — будет газ с другими значениями параметров. При этом давление сверху будет больше, чем внизу. Не вдаваясь в детали известного в газовой динамике решения задачи о распаде разрыва [179], укажем только на следующий факт. Чем больше значение давления сверху, тем вероятнее появление границы раздела, идущей вниз, на которой вертикальная скорость будет близка к нулю. Иначе говоря, чем больше разность указанных давлений, тем больше на границе разрыва будет тормозиться идущий вверх газ и тем быстрее область с заторможенным газом, отмеченная темным цветом на рис. 13.1, будет распространяться вниз. В итоге заторможенный газ закроет выход воздуха вверх из закрученной придонной части и придонная часть из-за отсутствия стока газа вверх со временем сама перестанет вращаться из-за диссипативных процессов и взаимодействия с неровностями, находящимися на земной поверхности.

И, наконец, самый важный вопрос: какую энергию надо вложить, чтобы разрушить восходящий закрученный поток подобным воздействием? Представляется, что не очень большую. Во-первых, давление, которое надо преодолеть для разрушения «стенок», есть давление во внешнем воздухе, т.е. порядка всего одной атмосферы или даже меньше. Во-вторых, именно давление внешнего воздуха в месте разрушения «стенок» будет тормозить ту часть восходящего закрученного потока, что лежит ниже места разрушения «стенок». Конечно, если это давление окажется недостаточным для торможения газа ниже места разрушения стенок, то одновременно с разрушением «стенок» необходимо будет соответствующим внешним воздействием увеличивать давление сверху от поверхности разрыва «стенок».

Следовательно, при указанном способе внешнего воздействия на вертикальную часть восходящего закрученного потока основная энергия потребуется на разрушение «стенок». А тормозить поток в целом будет давление внешнего воздуха, т.е. работу по уничтожению восходящего закрученного потока произведет сама природа.

## § 14. Описание численных методик

### Численные расчеты нулевых коэффициентов

С помощью  $c_0(r)$ ,  $u_0(r)$ ,  $v_0(r)$  — нулевых коэффициентов ряда по степеням  $z$  — восстанавливаются плоские течения.

Для нахождения нулевых коэффициентов  $c_0(r)$ ,  $u_0(r)$ ,  $v_0(r)$  численно стандартным методом Рунге—Кутты решается система обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной  $r$  на отрезке

$$r_0 \leq r \leq r_{in}; \quad 0 < r_0 < r_{in}$$

с шагом  $\Delta r$ . Здесь:  $r_0$  — радиус стока,  $r_{in}$  — радиус притока.

Для проверки точности расчетов они проводились с разными значениями  $\Delta r$ : 0.001, 0.0005, 0.0001. При этом результаты расчетов совпадали в пяти—шести знаках после десятичной точки.

Расчеты велись от точки  $r = r_{in}$  до точки  $r = r_0$ .

Безразмерное значение  $r_{in}$  для всех торнадо и для тропического циклона средней интенсивности полагалось равным единице.

Безразмерное значение  $r_0$  разное для разных торнадо и для тропического циклона. Это значение в расчетах менялось от 0.003 до 0.05.

На всем отрезке интегрирования построенные функции, передающие поведение газодинамических параметров, вели себя монотонно. При приближении к точке  $r_0$  никаких особенностей не возникало. С увеличением интенсивности торнадо и при переходе к тропическому циклону средней интенсивности увеличивались значения

$$\max_r |\mathbf{V}_0|$$

и уменьшались значения

$$\min_r c_0,$$

где  $\mathbf{V}_0 = (u_0, v_0)$ .

Поскольку в СОДУ входит  $\sin \psi$ , то с увеличением угла  $\psi$  — широты точки нахождения восходящего закрученного потока — также увеличивались значения

$$\max_r |\mathbf{V}_0|$$

и уменьшались значения

$$\min_r c_0.$$

### Численные расчеты следующих коэффициентов начального отрезка ряда по степеням $z$

Нахождение следующих коэффициентов

$$\mathbf{U}_k(r, \varphi) = (c_k(r, \varphi), u_k(r, \varphi), v_k(r, \varphi)); \quad k \leq 1$$

также осуществлялось численно методом Рунге–Кутта при решении соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной  $r$ . Зависимость от  $\varphi$  в этих коэффициентах присутствует явно через гармоники, поскольку для этих коэффициентов независимые переменные частично разделились.

Для проверки точности расчетов они также проводились с разными значениями  $\Delta r$ : 0.001, 0.0005, 0.0001. При этом результаты расчетов совпадали в пяти–шести знаках после десятичной точки.

#### Торнадо F3

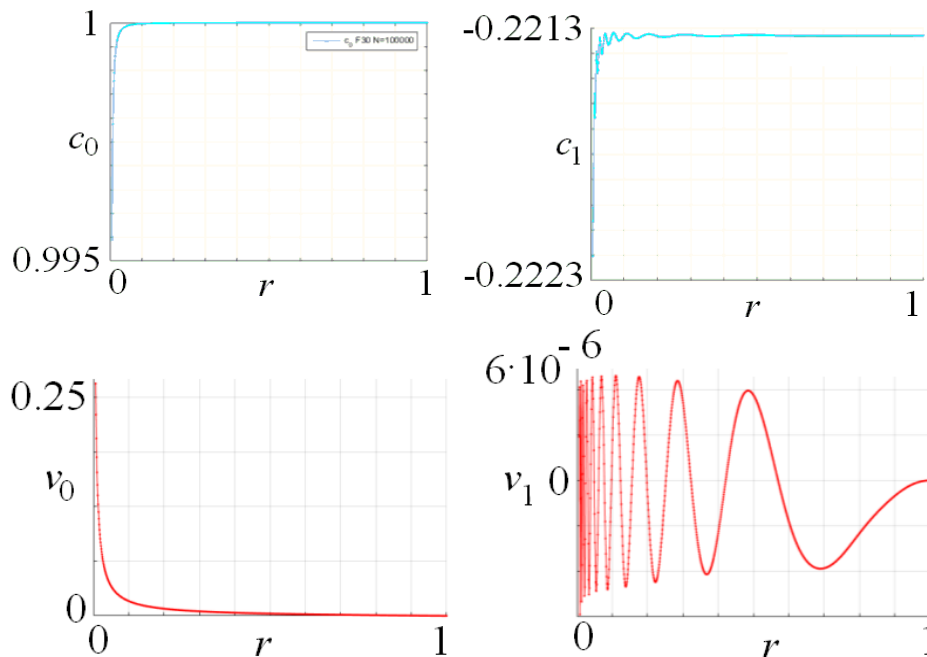


Рис. 14.1

Но эти следующие коэффициенты вели себя немонотонно. На рис. 14.1 для торнадо класса F3 приведены графики нулевых и первых коэффициентов для функций  $c(r, \varphi)$  и  $v(r, \varphi)$  при  $\varphi = \pi/4$ . Немонотонность начинала проявляться где-то «посередине» между  $r_0$  и  $r_{in}$ . Число локальных экстремумов с ростом  $k$  — номера коэффициента не увеличивается. При этом

$$\max_r |\mathbf{U}_k|,$$

принципиально растет с увеличением номера  $k$ ,  $\mathbf{U}_k = (c_k, u_k, v_k)$ .

### Поведение начального отрезка ряда по степеням $z$

Быстрый рост безразмерных величин

$$\max_r |\mathbf{U}_k|,$$

с ростом  $k$  номера коэффициента ряда приводит к тому, что  $R$  радиус сходимости ряда в безразмерных величинах, приближенно оцениваемый по подсчитанным первым коэффициентам, оказывается маленьким:

$$R \approx 0.001.$$

Поскольку для разных восходящих закрученных потоков за масштабные значения расстояния брались разные величины, то соответствующие размерные значения  $R$  следующие: для торнадо класса F0  $R \approx 1$  м; для торнадо класса F3  $R \approx 12$  м; для тропического циклона  $R \approx 200$  м.

Безразмерные значения  $h$  высоты придонной части, естественно не превышающие  $R$ , в расчетах подбирались такими, чтобы значения

$$|\mathbf{U}_4 z^4|_{z=h}$$

для суммы

$$\left( \sum_{k=0}^4 \mathbf{U}_k \frac{z^k}{k!} \right) \Big|_{z=h}$$

сказывались только в третьем—четвертом знаке после десятичной точки.

## § 15. Описание программного комплекса

Разработанный в рамках настоящего исследования комплекс программ характеризуется тем, что он представляет собой взаимосвязанный набор модулей, объединенных общими исходными данными и общим интерфейсом взаимодействия. Отдельные составляющие модули комплекса зарегистрированы в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (Роспатент).

1. Программа для ЭВМ «Моделирование трехмерного стационарного потока идеального газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса».

2. Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, stationary case». Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, stationary case» предназначена для численного моделирования придонных частей торнадо и тропического циклона в стационарном плоском случае для расчета газодинамических характеристик. Программа обеспечивает выполнение следующих функций: В процессе работы программы происходит: считывание данных о выбранном пользователем классе торнадо с текстового файла на той или иной широте; расчет газодинамических характеристик торнадо методом Рунге-Кутты 4-го порядка; расчет кинетической энергии радиальной и окружной ее составляющих; запись в файл результатов расчетов газодинамических характеристик;

3. Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, calculation of zero coefficients of gas-dynamic parameters by the Euler method» Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, calculation of zero coefficients of gas-dynamic parameters by the Euler method» предназначена для расчета нулевых коэффициентов основных газодинамических характеристик, реализованного с помощью метода Эйлера. Производится считывание данных о выбранном пользователем классе торнадо с текстового файла для той или иной широты, расчет окружной и радиальной составляющих скорости ветра, запись в файл результатов расчетов газодинамических параметров.

4. Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, calculation of zero coefficients

of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method». Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, calculation of zero coefficients of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method»

предназначена для расчета нулевых коэффициентов основных газодинамических параметров: окружной и радиальной скорости ветра, скорости звука ветра, траектории движения частицы методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

5. Прикладная программа для ЭВМ «Tornadoes, calculation of the first coefficients of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method and the Euler method». Прикладная программа для ЭВМ «Tornadoes, calculation of the first coefficients of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method and the Euler method»

предназначена для расчета первых коэффициентов основных газодинамических параметров: окружной и радиальной скорости ветра, скорости звука ветра, траектории движения частицы. Для получения более точной математической модели представления торнадо и тропического циклона в стационарном плоском случае реализован метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности, также представлен метод Эйлера.

6. Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, calculating the incoming radius». Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, calculating the incoming radius»

предназначена для расчета входящего радиуса любого класса торнадо по известной скорости ветра и радиусу стока методом дихотомии.

7. Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, visualization». Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, visualization»

предназначена для визуализации расчетов основных газодинамических параметров придонной части торнадо различных классов для широт  $\varphi = \pi/6$ ,  $\varphi = \pi/4$ ,  $\varphi = \pi/3$ .

8. Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, calculation tables». Прикладная программа для ЭВМ «Tornado, calculation tables» предназначена для



математического моделирования такого природного явления, как восходящие закрученные потоки типа торнадо. Представлены расчеты входящего радиуса торнадо при выполнении условия: отношение окружной кинетической энергии к полной кинетической энергии больше либо равно 0.5, в этом случае считается, что торнадо приобретает разрушительную силу. Подбор входящего радиуса при условии выполнения: отношение общей кинетической энергии к минимальной кинетической энергии больше либо равной 1, в этом случае определяются таблицы обнаружения торнадо.

В процессе обработки результатов расчетов: выдача результатов в табличном и графическом виде.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Обосновано существование и единственность решения конкретной характеристической задачи Коши стандартного вида. Данное решение моделирует трехмерное нестационарное течение газа при наличии радиального стока в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

2. На основании исследования свойств первых коэффициентов бесконечных рядов, моделирующих течения с радиальным стоком, установлены факты возникновения закрутки и ее направление в исследуемом течении газа.

3. Численными методами приближенно построены трехмерные стационарные течения идеального газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

4. Получены результаты массовых расчетов, которые приближенно моделируют течения газа в придонных частях природных торнадо различных классов, а также тропического циклона средней интенсивности.

Полученные в диссертации результаты по математическому моделированию течений газа в восходящих закрученных потоках позволяют сделать вывод о том, что разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное научное достижение: даны обоснованные ответы на самые главные вопросы - почему возникает закрутка воздуха и откуда берется энергия на возникновение и продолжительное функционирование восходящих закрученных потоков.

Автор выражает искреннюю благодарность доктору физико-математических наук, профессору Сергею Петровичу Баутину за поддержку, постоянное внимание к работе и обсуждение ее результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин, С.П. Торнадо и сила Кориолиса / С.П. Баутин – Новосибирск : Наука, 2008. – 96 с.
2. Баутин, С.П. Движение материальной точки в поле тяжести при учете силы Кориолиса / С.П. Баутин // Проблемы прикладной математики и механики : сб. науч. тр. – Екатеринбург : УрГУПС, 2008. – № 65(148)/3м. – С. 90–104.
3. Баутин, С.П. Некоторые параметры течения газа в придонной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин // Проблемы прикладной математики, механики и информатики : сб. науч. тр. – Екатеринбург : УрГУПС, 2009. – № 77(160). – С. 6–18.
4. Баутин, С.П. Аналитическое и численное моделирование течения газа в придонной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин, А.В. Рощупкин // Проблемы прикладной математики, механики и информатики : сб. науч. тр. – Екатеринбург : УрГУПС, 2009. – № 77(160). – С. 18-40.
5. Баутин, С.П. Восходящие закрученные потоки. Аналитическое и численное моделирование течения газа в придонной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин // Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение : тезисы докладов Всерос. конф. – Новосибирск : ИГ СО РАН, 2009. – С. 30–31.
6. Баутин, С.П. Математическая модель торнадо и расчет течения в его придонной части / С.П. Баутин, А.В. Рощупкин // Успехи механики сплошной среды : тезисы докладов Всерос. конф., приуроченной к 70-летию академика В.А. Левина. – Владивосток : ИАУП, ДВО РАН, – 2009. – С. 24.
7. Дерябин, С.Л. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, под действием сил тяготения и Кориолиса / С.Л. Дерябин, А.В. Мезенцев // Успехи механики сплошной среды : тезисы докладов Всерос. конф., приуроченной к 70-летию академика В.А. Левина. – Владивосток : ИАУП, ДВО РАН, 2009. – С. 32–33.
8. Баутин, С.П. Математическая модель торнадо / С.П. Баутин, П.С. Баутин // Снежинск и наука – 2009. Современные проблемы атомной науки и техни-

ки : сб. науч. тр. междунар. науч.-практ. конф. — Снежинск : СГФТА, 2009. — С. 23.

9. Мезенцев, А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, под действием сил тяготения и Кориолиса / А.В. Мезенцев // Снежинск и наука — 2009. Современные проблемы атомной науки и техники : сб. науч. тр. междунар. науч.-практ. конф. — Снежинск : СГФТА, 2009. — С. 72.

10. Баутин, С.П. Восходящие закрученные потоки политропного газа / С.П. Баутин, П.С. Баутин // Потоки и структуры в жидкостях: физика геосфер : сб. тезисов междунар. конф. — М. : Институт проблем механики РАН, МГУ, 2009. — С. 28.

11. Мезенцев, А.В. Математическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса / А.В. Мезенцев // Математическое моделирование в естественных науках : тезисы докладов XVIII Всерос. школы-конф. молодых ученых и студентов. — Пермь : ПГТУ, 2009. — С. 58–59.

12. Мезенцев, А.В. Моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса / А.В. Мезенцев // Молодые ученые транспорту — 2009 : сб. науч. тр. : в 3-х ч. Ч. 1. — Екатеринбург : УрГУПС, 2009. — С. 315–348.

13. Дерябин, С.Л. Изэнтропические течения политропного газа, примыкающие к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса / С.Л. Дерябин, А.В. Мезенцев // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ : сб. тр. Всерос. науч. молодежных школ. — Ростов н/Д : ЮФУ, 2009. — С. 197–204.

14. Баутин, С.П. Математическая модель торнадо / С.П. Баутин, П.С. Баутин, А.В. Рощупкин // Забабахинские научные чтения : сб. материалов X междунар. конф. — Снежинск : Изд-во РФЯЦ-ВНИИ ТФ, 2010. — С. 261–262.

15. Баутин, С.П. Закрутка газа силой Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.В. Рощупкин // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике : тезисы докладов. — Новосибирск : Институт гидродинамики им. М. А.

Лаврентьева, 2010. – С. 75.

16. Баутин, С.П. Математическое моделирование течения газа в придонной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин, П.С. Баутин, А.В. Рошупкин // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики : тезисы докладов XVIII Всерос. конф. – Дюрсо : Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2010. – С. 8–9.

17. Дерябин, С.Л. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса / С.Л. Дерябин, А.В. Мезенцев // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т.16, №2. – С.63–74.

18. Дерябин, С.Л. Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса / С.Л. Дерябин, А.В. Мезенцев // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, № 5. – С.51–71.

19. Баутин, С.П. Об одном численно-аналитическом моделировании течений газа при учете действия силы Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Краевые задачи и математическое моделирование [Текст]: тематич. сб. науч. ст.: в 3 т. Т. 1. / НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. ред. В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2010. С. 36–42.

20. Баутин, С.П. Возможная схема лабораторного эксперимента по созданию, поддержанию и уничтожению восходящего закрученного потока / С.П. Баутин // Проблемы прикладной математики, механики и информатики : сб. науч. тр. – Екатеринбург : УрГУПС, 2010. – № 84(167) 4м. – С. 6–23.

21. Баутин, С.П. Численно-аналитическое исследование значений газодинамических характеристик, изменяемых в придонной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Механика неоднородных жидкостей в полях внешних сил : тезисы докладов. – М. : Институт проблем механики РАН, 2010. – С. 21–22.

22. Баутин, С.П. Способ управления восходящим закрученным потоком воз-

духа для прекращения его движения / С.П. Баутин, П.С. Баутин, А.С. Баутина // Патент РФ 2407281, МПК А01G15/00; – заявка 2009114525 от 16.04.2009 ; опублик. 27.12.2010, Бюл. № 36.

23. Баутин, С.П. Математическая модель торнадо / С.П. Баутин, П.С. Баутин, А.В. Рощупкин // Забабахинские научные чтения : сб. материалов X междунар. конф. – Снежинск : Изд-во РФЯЦ-ВНИИ ТФ, 2010. – С. 261–262.

24. Дерябин, С.Л. Моделирование изэнтропических газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса / С.Л. Дерябин, А.В. Мезенцев // Забабахинские научные чтения : сб. материалов X междунар. конф. – Снежинск : Изд-во РФЯЦ-ВНИИ ТФ, 2010. – С. 297–298.

25. Баутин, С.П. Закрутка газа силой Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.В. Рощупкин // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике : тезисы докладов. – Новосибирск : Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 2010. – С. 75.

26. Баутин, С.П. Математическое моделирование течения газа в придонной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин, П.С. Баутин, А.В. Рощупкин // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики : тезисы докладов XVIII Всерос. конф. – Дюрсо : Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2010. – С. 8–9.

27. Баутин, С.П. Моделирование спиральных течений в придонной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин, А.Г. Обухов – Екатеринбург : УрГУПС, 2011. – 80 с.

28. Баутин, С.П. Аналитическое и численное построение решений системы уравнений газовой динамики, имеющих спиральный характер / С.П. Баутин, А.В. Рощупкин // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 1. – С. 18–29.

29. Баутин, С.П. Математическое моделирование природных восходящих закрученных потоков типа торнадо / С.П. Баутин, П.С. Баутин, Е.Д. Белова,

- В.Е. Замыслов, И.Ю. Крутова, А.В. Мезенцев, А.Г. Обухов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 384–385.
30. Баутин, С.П. Задача о плавном стоке в переменных  $r, t$  как характеристическая задача Коши стандартного вида / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2011. № 1 (9). С. 4–13.
31. Баутин, С.П. Задача о плавном стоке газа в переменных  $t, r, \varphi, z$  при учете сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Проблемы прикладной математики, механики и информатики: сб. науч. тр. / под общ. ред. С.Л. Дерябина, д-ра физ.-мат. наук. – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2011. – Вып. 95 (178)/6м. – С. 16–43.
32. Мезенцев, А.В. Приближенные решения, описывающие конический и цилиндрический случаи движения свободной границы восходящего закрученного потока / А.В. Мезенцев // Проблемы прикладной математики и механики. – Екатеринбург : УрГУПС, 2011. – Вып. 95(178)/6м. – С. 85–102.
33. Мезенцев, А.В. Численное моделирование движения границы «газ-вакуум» и исследование системы транспортных уравнений в условиях действия сил тяготения и Кориолиса / А.В. Мезенцев // Проблемы прикладной математики и механики. – Екатеринбург : УрГУПС, 2011. – Вып. 95(178)/6м. – С. 103–127.
34. Баутин, С.П. Математическое моделирование природных вихрей типа торнадо / С.П. Баутин // Нелинейные волны: теория и приложения : тезисы докладов Всерос. конф. – Новосибирск : Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2011. – С. 12.
35. Баутин, С.П. Математическое и экспериментальное моделирование потоков типа торнадо / С.П. Баутин // Современные проблемы математики и механики: теория, эксперимент и практика : тезисы докладов междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко. – Новосибирск : Академгородок, 2011. – С. 17.

36. Обухов, А.Г. Численное построение отдельных спиральных течений газа / А.Г. Обухов, В.Е. Замыслов // Современные проблемы математики и механики: теория, эксперимент и практика : тезисы докладов междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко. — Новосибирск : Академгородок, 2011. — С. 97–98.
37. Белова, Е.Д. Аналитическое построение закрученных вертикальных течений газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / Е.Д. Белова // Современные проблемы математики и механики: теория, эксперимент и практика : тезисы докладов междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко. — Новосибирск : Академгородок, 2011. — С. 113–114.
38. Крутова, И.Ю. Аналитическое исследование течений газа, закрученных действием силы Кориолиса / И.Ю. Крутова // Современные проблемы математики и механики: теория, эксперимент и практика : тезисы докладов междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко. — Новосибирск : Академгородок, 2011. — С. 120.
39. Баутин, С.П. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей / С.П. Баутин, А.Г. Обухов — Новосибирск : Наука, 2012. — 152 с.
40. Баутин, С.П. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части тропического циклона / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Вестник Тюменского государственного университета. — 2012. — № 4. — С. 175–182.
41. Обухов, А.Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части торнадо / А.Г. Обухов // Вестник Тюменского государственного университета. — 2012. — № 4. — С. 183–188.
42. Баутин, С.П. Закрутка газа при плавном стоке в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50, №3. С. 473–475.
43. Bautin, S.P. Twisting of smooth gas flow under the action of gravity and Coriolis Forces / S.P. Bautin, I.Yu. Krutova // High Temperature. — 2012. — Vol.



50, No. 3. — Pp. 444-446.

44. Крутова, И.Ю. Задача о движении газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости / И.Ю. Крутова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2012. № 1 (13). — Екатеринбург, Изд-во УрГУПС, 2012, С. 14–22.

45. Крутова, И.Ю. Закрутка газа силой Кориолиса при плавном стоке / И.Ю. Крутова // Современные проблемы математики : тезисы докладов междунар. (43-й Всерос.) молодежной школы-конф. — Екатеринбург : Институт математики и механики УрО РАН, 2012. — С. 372–374.

46. Баутин, С.П. Математическое моделирование разрушительных природных восходящих закрученных потоков / С.П. Баутин, Е.Д. Белова, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Забабахинские научные чтения : сб. материалов XI междунар. конф. — Снежинск : РФЯЦ, 2012. — С. 283–284.

47. Крутова, И.Ю. Трехмерный стационарный поток газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости / И.Ю. Крутова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. № 3 (15), 2012 год. — Екатеринбург, Изд-во УрГУПС, 2012, С. 16–23.

48. Крутова, И.Ю. Закрутка газа силой Кориолиса при плавном стоке / И.Ю. Крутова // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики : тезисы докладов XIX Всерос. конф., посвященной памяти К.И. Бабенко. — Дюрсо, 15–20 сентября 2012. — С. 57–59.

49. Мезенцев, А.В. Локальная теорема существования и единственности решения задачи о распаде специального разрыва для трехмерных течений газа / А.В. Мезенцев // Математические методы и модели в теоретических и прикладных исследованиях : сб. науч. тр. — Екатеринбург : УрГУПС, 2012. — Вып. 4(187). — С. 47–63.

50. Мезенцев, А.В. Нелокальная теорема существования и единственности решения задачи о распаде специального разрыва во всей области волны раз-

- режения / А.В. Мезенцев // Математические методы и модели в теоретических и прикладных исследованиях : сб. науч. тр. — Екатеринбург : УрГУПС, 2012. — Вып. 4(187). — С. 64—86.
51. Баутин С.П., Белова Е.Д., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Математическое моделирование спиральных течений идеального газа // Забабахинские научные чтения : сб. материалов XI междунар. конф. — Снежинск : РФЯЦ, 2012. — С. 283—284.
52. Крутова, И.Ю. Математическое моделирование спиральных течений идеального газа / И.Ю. Крутова // Актуальные проблемы механики, математики, информатики — 2012 : тезисы докладов Всерос. науч. -практ. конф. с междунар. участием, посвященной памяти С.Н. Черникова, И.Ф. Верещагина, Л.И. Волковыского. — Пермь : ПГНИУ, 30 октября—1 ноября 2012. — С. 98—99.
53. Баутин, С.П. Закрученные течения газа при учете действия сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов, К.В. Баутин // Материалы XVIII междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013), 22—31 мая 2013 г., Алушта. — М. : Изд-во "МАИ 2013. — С. 505—507.
54. Баутин, К.В. Экспериментальное подтверждение возможности создания потока воздуха, закрученного силой Кориолиса / К.В. Баутин, С.П. Баутин, В.Н. Макаров // Вестник УрГУПС. — 2013. — № 2(18). — С. 27—33.
55. Баутин, С.П. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Теплофизика высоких температур. — 2013. — Т. 51, № 4. — С. 567—570.
56. Bautin, S.P. Mathematical simulation of the near-bottom section of an ascending twisting flow / S.P. Bautin, A.G. Obukhov // High Temperature. — 2013. — Vol. 51, No. 4. — Pp. 509—512.
57. Баутин, С.П. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. — 2013. — № 4. — С. 81—86.
58. Баутин, С.П. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных

- нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. — 2013. — № 5. — С. 55–63.
59. Баутин, С.П. Моделирование трехмерного стационарного течения в придонной части тропического циклона / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Вестник Тюменского государственного университета. Нефть, газ, энергетика. 2013. № 7 (2). С. 124–132.
60. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты торнадо / С.П. Баутин, К.В. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Новосибирск : Наука; Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2013. — 215, [1] с.
61. Обухов, А.Г. Математическое моделирование и численный расчет трехмерного конвективного течения газа / А.Г. Обухов, Е.М. Сорокина // Известия вузов. Нефть и газ. — 2013. — № 6. — С.57–63.
62. Обухов, А.Г. Модельный расчет трехмерного нестационарного течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа / А.Г. Обухов, Е.М. Сорокина // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты : материалы XII междунар. науч.-практ. конф. — Новосибирск : Изд-во ЦРНС, 2014. — С. 113–120.
63. Баутин, С.П. Математическое моделирование течения в вертикальной части восходящего закрученного потока / С.П. Баутин // Теплофизика высоких температур. — 2014. — Т. 52, № 2. — С. 271–275.
64. Bautin, S.P. Mathematical simulation of the Vertical Part of an Upward Swirling Flow / S.P. Bautin // High Temperature. — 2014. — Vol. 52, No. 2. — Pp. 262–266.
65. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов, К.В. Баутин // Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение : тезисы докладов Всерос. конф. — Новосибирск : Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 2014. — С. 21–22.
66. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, экс-

- перименты / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов, К.В. Баутин // Забахинские научные чтения : сб. материалов XII междунар. конф. – Снежинск : Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. – С. 65–66.
67. Абдубакова, Л.В. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа / Л.В. Абдубакова, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2014. – № 3. – С. 88–94.
68. Обухов, А.Г. Численный расчет термодинамических характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа / А.Г. Обухов, Л.В. Абдубакова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика – 2014. – № 7. – С. 157–165.
69. Абдубакова, Л.В. Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом / Л.В. Абдубакова, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2014. – № 5. – С. 57–62.
70. Сорокина, Е.М. Численное исследование температурной зависимости скоростных характеристик нестационарного конвективного течения газа / Е.М. Сорокина, А.Г. Обухов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2014. – № 7. – С. 147–156.
71. Абдубакова, Л.В. Численное исследование термодинамических параметров закрученного потока газа при холодном вертикальном продуве / Л.В. Абдубакова, А.Г. Обухов // Инновации и инвестиции. – 2014. – № 8. – С. 167–170.
72. Абдубакова, Л.В. Расчет скоростей и линий тока трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве / Л.В. Абдубакова, А.Г. Обухов // Инновации и инвестиции. – 2014. – № 9. – С. 139–142.
73. Абдубакова, Л.В. Расчет плотности, температуры и давления трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве / Л.В. Абдубакова, А.Г. Обухов // Нефтегазовое дело. – 2014. – Т. 12, № 3. – С.

116–122.

74. Обухов, А.Г. Особенности течения газа в начальной стадии формирования теплового восходящего закрученного потока / А.Г. Обухов, Д.Д. Баранникова // Известия вузов. Нефть и газ. – 2014. – № 6. – С. 65–70.

75. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред : тезисы докладов. – Екатеринбург : РИО УрО РАН, 2015. – С. 35.

76. Баутин, С.П. Закрутка газа вокруг нагревающегося цилиндра при учете сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1, №1 (1). С. 112–126.

77. Баутин, С.П. Математическое и экспериментальное моделирование восходящих закрученных потоков / С.П. Баутин, Л.В. Абдубакова, Д.Д. Баранникова, А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, А.В. Мезенцев, А.Г. Обухов, Е.М. Сорокина // Сборник трудов XI Всерос. конф. по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20–24 августа 2015 г.). – Казань : Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 378–380.

78. Сорокина, Е.М. Численный расчет скоростей конвективного течения газа при кольцеобразной схеме нагрева / Е.М. Сорокина, А.Г. Обухов // Известия вузов. Нефть и газ. – 2015. – № 3. – С. 84–90.

79. Баутин, С.П. Учет влияния центробежной силы при численном моделировании восходящего закрученного потока газа / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2015. – № 4. – С. 92–97.

80. Баутин, С.П. Аналитическое, численное и экспериментальное моделирование потоков типа торнадо / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2015. Т. 4, №5. С. 397–400.

81. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике : тезисы докладов VIII междунар. конф. – Новосибирск : ИГиЛ СО РАН, НГУ, 2015. – С. 79–80.
82. Крутова, И.Ю. Расчеты газодинамических параметров в придонной части торнадо / И.Ю. Крутова // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2015. Т. 4, №6. С. 523–527.
83. Баутин, С.П. Закрутка огненного вихря при учете сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, №6. С. 961–964.
84. Bautin, S.P. Twisting of a Fire Vortex Subject to Gravity and Coriolis Forces / S.P. Bautin, I. Yu. Krutova, A.G. Obukhov // High Temperature. – 2015. – Vol. 53, No. 6. – Pp. 921–923.
85. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред : тезисы докладов. – Екатеринбург : РИО УрО РАН, 2015. – С. 35.
86. Баутин, С.П. Математическое и экспериментальное моделирование восходящих закрученных потоков / С.П. Баутин, Л.В. Абдубакова, Д.Д. Баранникова, А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, А.В. Мезенцев, А.Г. Обухов, Е.М. Сорокина // XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики : тезисы докладов XI Всерос. конф. – Казань : Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. – С. 34.
87. Казачинский, А.О. Построение течений в придонной части восходящих закрученных потоков как решение одной характеристической задачи Коши / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова // Снежинск : издательство СФТИ НИЯУ МИФИ, 2016 – 60 с.
88. Баутин, С.П. Проблема предсказания и уничтожения смерча / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Технологии гражданской безопасности. 2016. Т. 13, №1 (47). С. 70–75.

89. Баутин, С.П. Восходящие закрученные потоки воздуха, примыкающие к «глазу тайфуна» / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин // Вестник УрГУПС. – 2016. – № 2 (30). – С. 4–9.
90. Волков, Р.Е. Параллельные вычисления в исследованиях зависимости газодинамических параметров восходящего закрученного потока газа от скорости продува / Р.Е. Волков, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2016. – № 1. – С. 92–97.
91. Волков, Р.Е. Метод распараллеливания алгоритма численного решения полной системы уравнений Навье–Стокса / Р.Е. Волков, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2016. – № 2. – С. 92–98.
92. Bautin, S.P. The mathematical and experimental modeling twisting flows / S.P. Bautin, L.V. Abdubakova, A.O. Kazachinskii, I. Yu. Krutova, A.G. Obuhov // International Conference on the Methods of Aerophysical Research. Abstracts. Part I. – Perm, Russia. – 2016. – P. 8.
93. Bautin, S.P. The gas flows in neighborhood of the contact surface with the present the forces of a gravity and Coriolis / S.P. Bautin, S.L. Derjabin, A.S. Kirianova // International Conference on the Methods of Aerophysical Research. Abstracts. Part I. – Perm, Russia. – 2016. – P. 23.
94. Крутова, И.Ю. Численное моделирование придонных частей торнадо в стационарном плоском случае / И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2016. Т. 5, №6. С. 550–557.
95. Баутин, С.П. Полная система уравнений Навье–Стокса в цилиндрической системе координат / С.П. Баутин, А.Г. Обухов – Тюмень : ТИУ, 2016. – 54 с.
96. Баутин, С.П. Восходящие закрученные течения газа в окрестности контактной поверхности при учете сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин // Теоретические основы и конструирование алгоритмов решения задач математической физики : тезисы докладов XXI Всерос. конф., посвященной памяти К.И. Бабенко – М. : ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2016. – С. 67–68.

97. Баутин, С.П. Создание потока воздуха, закрученного силой Кориолиса при использовании трубы двухметрового диаметра / С.П. Баутин, В.В. Макаров // Вестник УрГУПС. – 2016. – № 4 (32). – С. 39–45.
98. Вараксин, А.Ю. О возможности физического моделирования воздушных смерчей в лабораторных условиях / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев, С.И. Таекин // Теплофизика высоких температур. – 2008. – Т. 46, № 6. – С. 957–960.
99. Varaksin, A.Yu. The possibility of physical simulation of air tornado under laboratory condition / A.Yu. Varaksin, M.E. Romash, V.N. Kopeitsev, S.I. Taekin // High Temperature. – 2008. – Vol. 46, No. 6. – Pp. 888–891.
100. Вараксин, А.Ю. Генерация свободных концентрированных воздушных вихрей в лабораторных условиях / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, С.И. Таекин, В.Н. Копейцев // Теплофизика высоких температур. – 2009. – Т. 47, № 1. – С. 84–88.
101. Varaksin, A.Yu. The generation of free air vortexes under laboratory condition / A.Yu. Varaksin, M.E. Romash, S.I. Taekin, V.N. Kopeitsev // High Temperature. – 2009. – Vol. 47, No. 1. – Pp. 78–82.
102. Вараксин, А.Ю. К вопросу управления поведением воздушных смерчей / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев // Теплофизика высоких температур. – 2009. – Т. 47, № 6. – С. 870–876.
103. Вараксин, А.Ю. Параметры неустойчивой стратификации воздуха, приводящие к генерации свободных вихрей / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев, С.И. Таекин // Теплофизика высоких температур. – 2010. – Т. 48, № 2. – С. 269–273.
104. Вараксин, А.Ю. О возможности воздействия на вихревые атмосферные образования / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев // Теплофизика высоких температур. – 2010. – Т. 48, № 3. – С. 433–437.
105. Вараксин, А.Ю. О возможности визуализации при моделировании воздушных смерчей / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев // Теплофизика высоких температур. – 2010. – Т. 48, № 4. – С. 617–622.



106. Вараксин, А.Ю. Моделирование свободных тепловых вихрей: генерация, устойчивость, управление / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев, М.А. Горбачев // Теплофизика высоких температур. – 2010. – Т. 48, № 6. – С. 965–972.
107. Вараксин, А.Ю. Физическое моделирование воздушных смерчей: некоторые безразмерные параметры / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев, М.А. Горбачев // Теплофизика высоких температур. – 2011. – Т. 49, № 2. – С. 317–320.
108. Вараксин, А.Ю. Торнадо / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев – М. : Физматлит, 2011. – 312 с.
109. Вараксин, А.Ю. Метод воздействия на свободные нестационарные воздушные вихри / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев, М.А. Горбачев // Теплофизика высоких температур. – 2012. – Т. 50, № 4. – С. 533–537.
110. Varaksin, A.Yu. Method of Impact on Free Nonstationary Air Vortices / A.Yu. Varaksin, M.E. Romash, V.N. Kopeitsev, M.A. Gorbachev // High Temperature. – 2012. – Vol. 50, No. 4. – Pp. 499–503.
111. Varaksin, A.Yu. Effect of Net Structures on Wall-Free Non-Stationary Air Heat Vortices / A.Yu. Varaksin, M.E. Romash, V.N. Kopeitsev // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2013. – V.64. – P.817–828.
112. Вараксин, А.Ю. К выбору параметров частиц для визуализации и диагностики свободных концентрированных воздушных вихрей / А.Ю. Вараксин, М.В. Протасов, Ю.С. Теплицкий // Теплофизика высоких температур. – 2014. – Т. 52, № 4. – С. 581–587.
113. Вараксин, А.Ю. Кластеризация частиц в турбулентных и вихревых двухфазных потоках / А.Ю. Вараксин // Теплофизика высоких температур. – 2014. – Т. 52, № 5. – С. 777–796.
114. Вараксин, А.Ю. О возможной генерации огненных вихрей без использования принудительной закрутки / А.Ю. Вараксин, М.Э. Ромаш, В.Н. Копейцев, М.А. Горбачев // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 456, № 2. – С. 159–161.

115. Наливкин, Д.В. Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность / Д.В. Наливкин — Л. : Наука, 1969.— 487 с.
116. Наливкин, Д.В. Смерчи / Д.В. Наливкин — М. : Наука, 1984.— 112 с.
117. Нечаев, А.М. К вопросу о механизме образования тропического циклона / А.М. Нечаев, А.А. Соловьев, Д.А. Соловьев// Процессы в геосредах. 2017, № 3 (12). С. 594–602.
118. Гутман, Л.Н. Теоретическая модель смерча / Л.Н. Гутман // Известия АН СССР. Серия геофизическая. — 1957. — Т. 1. — С. 79–84.
119. Ward, N.B. The exploration of a certain features of tornado dynamics using a laboratory model / N.B. Ward // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1972 — V. 29. — P. 1194–1204.
120. Пальмен, Е. Циркуляционные системы атмосферы / Е. Пальмен, К.У. Ньютон — М. : Мир, 1973. — 640 с.
121. Rotunno, R. Numerical simulation of a laboratory vortex / R. Rotunno // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1977 — V. 34. — Pp. 1942–1956.
122. Klemp, J.B. The simulation of three-dimensional convective storm dynamics / J.B. Klemp, R.B. Wilhelmson // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1978 — V. 35. — Pp. 1070–1096.
123. Rotunno, R. A study in tornado-like vortex dynamics / R. Rotunno // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1978 — V. 36. — Pp. 140–155.
124. Скорер, Р. Аэродинамика окружающей среды / Р. Скорер — М. : Мир, 1980. — 549 с.
125. Никулин, В.В. Исследование взаимодействия торнадоподобного вихря с твердыми границами / В.В. Никулин // Прикладная механика и техническая физика. — 1980. — № 1. — С. 68–75.
126. Church, C.R. Intense atmospheric vortices associated with a 1000 MW fire / C.R. Church, J.T. Snow // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1980 — V. 61. No. 7. — Pp. 682–694.
127. Анисимова, Е.Н. Физическая модель атмосферного вихря / Е.Н. Анисимова, Ю.Н. Белов, А.А. Сперанская, В.С. Шандин // Известия АН СССР.

- Физика атмосферы и океана. — 1981. — Т. 17, № 7. — С. 768—772.
128. Бодронос, А.В. Влияние температуры поверхности на развитие конвективного вихря / А.В. Бодронос, А.А. Соловьев // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. — 1982. — Т. 18, № 3. — С. 302—304.
129. Анисимова, Е.П. О структуре поля скорости в модели атмосферного вихря / Е.Н. Анисимова, А.С. Купаев, А.А. Сперанская, В.С. Шандин // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. — 1982. — Т. 18, № 7. — С. 761—763.
130. Gall, R.L. Internal dynamics of tornado-like vortex / R.L. Gall // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1982 — V. 39. — Pp. 2721—2736.
131. Моисеев, С.С. Физический механизм усиления вихревых возмущений в атмосфере / С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев, А.В. Тур, Г.А. Хоменко, А.М. Шукуров // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 273, № 3. — С. — 549—553.
132. Сноу, Дж.Т. Торнадо / Дж.Т. Сноу // В мире науки. — 1984. — № 6. — С. 44—55.
133. Хаин, А.П. Математическое моделирование тропических циклонов / А.П. Хаин — Л. : Гидрометеиздат, 1984. — 248 с.
134. Педлоски, Дж. Геофизическая гидродинамика / Дж. Педлоски Т. 1, 2. — М. : Мир, 1985. — 368 с.
135. Интенсивные атмосферные вихри / под ред. Л. Бергсона, Дж. Лайтхилла. — М. : Мир, 1985. — 368 с.
136. Гилл, А. Динамика атмосферы и океана: в 2-х т. / А. Гилл Т. 1, 2. — М. : Мир, 1986.
137. Walko, R. Some effects of momentum diffusion on axisymmetric vortices / R. Walko, R.L. Gall // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1986 — V. 43, No. 20. — Pp. 2137—2148.
138. Fiedler, В.Н. A theory for the maximum windspeeds in tornado-like vortices / В.Н. Fiedler, R. Rotunno // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1986 — V. 43, No. 21. — Pp. 2328—2340.
139. Шитс, Р.С. О структуре ураганов по данным исследовательских самолетов-

- лабораторий / Р.С. Шитс // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — 1987. — С. 48–65.
140. Пфедфер, Р.Л. Модель развития атлантических ураганов из кучевых ансамблей (кластеров), депрессий и циклонов, предшествующих урагану / Р.Л. Пфедфер, М. Чалла // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — 1987. — С. 95–111.
141. Краснов, Ю.К. Эволюция смерчей / Ю.К. Краснов // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — 1987. — С. 174–189.
142. Гупта, А. Закрученные потоки / А. Гупта, Д. Лилли, Н. Сайред — М. : Мир, 1987. — 588 с.
143. Монин, А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики / А.С. Монин — Л. : Гидрометеиздат, 1988. — 424 с.
144. Дымников, В.П. Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов / В.П. Дымников, А.П. Филатов — Л. : Наука, 1990. — 236 с.
145. Качурин, Л.Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы / Л.Г. Качурин — Л. : Гидрометеиздат, 1990. — 463 с.
146. Никулин, В.В. Аналог уравнений мелкой воды для полых торнадоподобных вихрей. Высота стационарного торнадоподобного вихря / В.В. Никулин // Прикладная механика и техническая физика. — 1992. — № 2. — С. 45–51.
147. Никулин, В.В. Распад вертикального торнадоподобного вихря / В.В. Никулин // Прикладная механика и техническая физика. — 1992. — № 4. — С. 42–47.
148. Смульский, И.И. Аэродинамика и процессы в вихревых камерах / И.И. Смульский — Новосибирск : Наука, 1992. — 301 с.
149. Смульский, И.И. Одномерная теория несжимаемого вязкого течения в вихревой камере / И.И. Смульский // Журнал технической физики. — 1994 — Т. 64, вып. 11. — С. 8–18.
150. Emanuel, K.A. On hurricane outflow structure / K.A. Emanuel // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1994. — V. 51, No. 13. — Pp. 1995–2003.
151. Никулин, В.В. Движение завихренной жидкости в ядре вертикального

- торнадоподобного вихря / В.В. Никулин // Прикладная механика и техническая физика. — 1995. — Т. 36, № 2. — С. 81–87.
152. Wicker, L.J. Simulation and analysis of tornado development and decay within a three-dimensional supercell thunderstorm / L.J. Wicker, R.B. Wilhelmson // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1995 — V. 52, No. 15. — Pp. 2675–2703.
153. Grasso, L.D.. Numerical simulation of tornado vortex / L.D. Grasso, W.R. Cotton // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1995 — V. 52, No. 8. — Pp. 1192–1203.
154. Emanuel, K.A. The behaviour of a simple hurricane model using a convective scheme based on subcloud-layer entropy equilibrium / K.A. Emanuel // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1995. — V. 52, No. 22. — Pp. 3960–3968.
155. Богатырев, Г.П. Физическая модель вращения тропического циклона / Г.П. Богатырев, Б.Л. Смородин // Письма в ЖЭФТ. — 1996. — Т. 63, № 1. — С. 25–28.
156. Смутьский, И.И. Стоковая теория смерча / И.И. Смутьский // Инженерно-физический журнал. — 1997 — Т. 70, № 6. — С. 979–989.
157. Мельников, В.П. Механизмы атмосферных вихрей / В.П. Мельников, И.И. Смутьский // Криосфера Земли. — 1997 — Т. 1, № 1. — С. 87–96.
158. Мельников, В.П. Вихревые явления в атмосфере / В.П. Мельников, И.И. Смутьский // Институт криосферы Земли СО РАН. — Тюмень, 1997. — Депонировано в ВИНТИ 21.04.1997, № 1304-В97. — 45 с.
159. Lewellen, W.S. Large-eddy simulation of a tornado's interaction with the surface / W.S. Lewellen, D.C. Lewellen // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1997 — V. 54. No. 5. — Pp. 581–605.
160. Солдатенко, С.А. Синоптические вихри в атмосфере и в океане / С.А. Солдатенко // Соросовский образовательный журнал. — 1999. — № 2. — С. 78–84.
161. Emanuel, K.A. A statistical Analysis of Tropical Cyclone Intensity / K.A. Emanuel // Journal of the Atmospheric Sciences. — 2000. — V. 128. — Pp. 1139–

1152.

162. Fernandez-Feria, R. On the appearance of swirl in a confined sink flow / R. Fernandez-Feria, E. Sanmiguel-Rojas // *Physics of fluids*. – 2000 – V. 12, No. 1. – Pp. 3082–3085.

163. Lewellen, D.C. The influence of a local swirl ratio on tornado intensification near the surface / D.C. Lewellen, W.S. Lewellen, J. Xia // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 2000 – V. 57. – Pp. 527–544.

164. Tatom, F.B. The transfer of energy from tornado into the ground / F.B. Tatom, S.J. Witton // *Seismological Research Letter*. – 2001. – V. 72, № 1. – Pp. 12–21.

165. Andreas, E.L. Effect of Sea spray on tropical cyclone intensity / E.L. Andreas, K.A. Emanuel // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 2001 – V. 58. – Pp. 3741–3751.

166. Алексеенко, С.В. Введение в теорию концентрированных вихрей / С.В. Алексеенко, П.А. Куйбин, В.Л. Окулов – Новосибирск : Институт теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.

167. Markowski, P.M. Tornadogenesis resulting from the transport of circulation by a downdraft: idealized numerical simulations / P.M. Markowski, J.M. Straka, E.N. Rasmussen // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 2003 – V. 60, No. 8. – Pp. 795–823.

168. Xia, J. The influence of mach number on tornado corner flow dynamics / J. Xia, W.S. Lewellen, D.C. Lewellen // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 2003 – V. 60. – Pp. 2820–2825.

169. Калашник, М.В. Формирование вихревой воронки стоком массы в модели мелкой воды / М.В. Калашник // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2004. – № 2. – С. 120–132.

170. Lewellen, D.C. Near-surface intensification of tornado vortices / D.C. Lewellen, W.S. Lewellen // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 2007 – V. 64. – Pp. 2176–2164.

171. Lewellen, D.C. Near-surface vortex intensification through corner flow collapse

- / D.C. Lewellen, W.S. Lewellen // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 2007 – V. 64. – Pp. 2195–2209.
172. Голицын, Г.С. Ураганы, полярные и тропические циклоны, их энергия и размеры, количественный критерий возникновения / Г.С. Голицын // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. – 2008. – Т. 44, № 5. – С. 579–590.
173. Боев, А.Г. Электромагнитная теория смерча. I. Электродинамика вихря / А.Г. Боев // *Радиофизика и радиоастрономия*. – 2009. – Т. 14, № 2. – С. 121-149.
174. Богатырев, Г.П. Лабораторная модель тропического циклона / Г.П. Богатырев – Пермь : Изд-во «Богатырев П.Г.», 2009. – 96 с.
175. Арсеньев, С.А. Теория мезомасштабной турбулентности. Вихри атмосферы и океана / С.А. Арсеньев, В.А. Бабкин, А.Ю. Губарь, В.Н. Николаевский – М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 308 с.
176. Montgomery, M.T. Paradigms for tropical-cyclone intensification / M.T. Montgomery, R.K. Smith // *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. – 2011 – V. 137. – Pp. 1–31.
177. Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики. Т. 2. / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье – М. : Наука, 1983. – 640 с.
178. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе – М. : Физматгиз, 1963. – 583 с.
179. Овсянников, Л.В. Лекции по основам газовой динамики / Л.В. Овсянников – М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
180. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский – М. : Наука, 1970. – 904 с.
181. Shapiro, A.H. The Bat-Tub Vortex / A.H. Shapiro // *Nature*. – 1962. – Vol. 196, № 4859. – Pp. 1080-1081.
182. Andrade, E.N. da S. Bat-Tub Vortex / E.N. Andrade // *Nature*. – 1963. – Vol. 197. – Pp. 480.
183. Trefethen, L.M. The Bat-Tub Vortex in the Southern Hemisphere / L.M

- Trefethen, R.W. Bilger, P.T. Fink, R.E. Luxton, R.I. Tanner // Nature. — 1965. — Vol. 207, № 5001.— Pp. 1084-1085.
184. Пиралишвили, Ш.А. Вихревой эффект. Эксперимент, теория, технические решения / Ш.А. Пиралишвили, В.М. Поляев, М.Н. Сергеев — М. : Энергомаш, 2000. — 412 с.
185. Баутин, С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа / С.П. Баутин — Новосибирск : Наука, 1997. — 160 с.
186. Баутин, С.П. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин — Новосибирск : Наука, 2005. — 390 с.
187. Баутин, С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа / С.П. Баутин — Новосибирск : Наука, 2007. — 312 с.
188. Баутин, С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике / С.П. Баутин — Новосибирск : Наука, 2009. — 368 с.
189. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе — М. : Физматгиз, 1963. — 728 с.
190. Баутин, С.П. Представление решений системы уравнений Навье—Стокса в окрестности контактной характеристики / С.П. Баутин // Прикладная математика и механика. — 1987. — Т. 51, вып.4. — С. 574—584.
191. Баутин, С.П. Характеристические поверхности в течениях газа / С.П. Баутин // Прикладная математика и механика. — 2001. — Т. 65, вып. 5. — С. 862—875.
192. Баутин, С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы / С.П. Баутин // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12, № 11. — С. 2052—2063.
193. Жуков, А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики / А.И. Жуков // Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 58. — М. : Изд-во АН СССР, 1960. — 151 с.
194. Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко — М. : Наука, 1968. — 529 с.



195. Venegas, S.A. The Antractic circumpolar waves: a combination of two signals / S.A. Venegas // Journal of climate. — 2003. — N 16. — Pp. 2509–2525.
196. Derzho, O.G. On one mechanism of low frequency variability of the Antractic circumpolar current / O.G. Derzho // Nonlinear Processes Geophysics. — 2011. — N 18. — Pp. 361–365.
197. Нигматуллин, Р.И. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Метод построения / Р.И. Нигматуллин, Р.Х. Болотнова // Теплофизика высоких температур. — 2008. — Т. 46, № 2. — С. 206–218.
198. Нигматуллин, Р.И. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Результаты расчетов / Р.И. Нигматуллин, Р.Х. Болотнова // Теплофизика высоких температур. — 2008. — Т. 46, № 3. — С. 362–373.
199. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант — М. : Мир, 1964. — 830 с.
200. Баутин, С.П. Представление приближенных решений полной системы уравнений Навье-Стокса в одномерном случае / С.П. Баутин, В.Е. Замыслов // Вычислительные технологии. — 2012. — Т. 17, № 3. — С. 3–12.
201. Замыслов, В.Е. Сравнение двух приближенных методов решения одной начально-краевой задачи газовой динамики с учетом вязкости и теплопроводности / В.Е. Замыслов, П.П. Скачков // Вестник УрГУПС. — 2012. — № 4(16). — С. 29–38.
202. Ван-Дайк, М. Альбом течений жидкостей и газов : пер. с англ. / М. Ван-Дайк — М. : Мир, 1986. — 184 с.
203. Баутин, С.П. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин — Новосибирск : Наука, 2005. — 390 с.
204. Баутин, С.П. Аналитическое моделирование истечения идеального газа в вакуум / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин // Успехи механики. — 2006. — Т. 4. № 1. — С. 77–120.
205. Баутин, С.П. Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин, А.В. Мезенцев, Н.П. Чуев — Новосибирск : Наука, Екатеринбург :

УрГУПС, 2015. – 191 с.

206. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси торнадо / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2017. – 338, [1] с.

207. Крутова, И.Ю. Закрутка газа при плавном стоке в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / И.Ю. Крутова // Краевые задачи и математическое моделирование [Текст]: тематич. сб. науч. ст. / НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. ред. В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2012. – 376 с. С. 91–97.

208. Крутова, И.Ю. Расчет кинетической энергии течений в придонной части торнадо и тропического циклона / И.Ю. Крутова, О.В. Опышко // Снежинск: издательство СФТИ НИЯУ МИФИ, 2017 – 62 с.

209. Крутова, И.Ю. Расчеты газодинамических параметров в придонной части торнадо / И.Ю. Крутова // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, №1. С. 17–24.

210. Крутова, И.Ю. Численное моделирование придонных частей торнадо в стационарном плоском случае / И.Ю. Крутова, О.В. Опышко // Неравновесные процессы в сплошных средах: материалы междунар. симп.: в 2 т. / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2017. – Т. 2. – 264 с. С. 31–33.

211. Krutova, I.Y. Destructive atmospheric vortices and the Earth rotation around its axis / I.Y. Krutova // Proceedings of the XLV Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS (A P M 2 0 1 7) St.Petersburg, Russia. P. 270–273.

212. Крутова, И.Ю. Приближенный аналитический и численный расчет кинетической энергии специального потока / И.Ю. Крутова, О.В. Опышко // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2018. Т. 7, №4. С. 298–303.

213. Баутин, С.П. Математическое обоснование влияния вращения Земли на торнадо и тропические циклоны / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2017. Т. 6, №2. С. 101–107.

214. Казачинский, А.О. Построение течений в придонной части восходящих закрученных потоков как решение одной характеристической задачи Коши / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2017. Т. 6, №6. С. 496–502.
215. Баутин, С.П. О геометрических, скоростных и энергетических характеристиках придонных частей торнадо и тропических циклонов / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Т. 4, №1. С. 55–67.
216. Arsen'yev, S.A. Mathematical modeling of tornadoes and squall storms / S.A. Arsen'yev // Geoscience Frontiers. 2011. No 2 (2). pp. 215–221.
217. Bolton, D. The Computation of Equivalent Potential Temperature / D. Bolton // Monthly Weather Rev. 1980. No 7 (108). pp. 1046–1053.
218. Chan, J.C.L. The Physics of Tropical Cyclone Motion / J.C.L. Chan // An. Rev. of Fluid Mech. 2005. № 1 (37). pp. 99–128.
219. Charney, J.G. On the Growth of the Hurricane Depression / J.G. Charney, A. Eliassen // J. of Atm. Sci. 1964. V. 21. No 1. pp. 68–75.
220. Emanuel, K.A. The Theory Of Hurricanes / K.A. Emanuel // An. Rev. of Fluid Mech. 1991. No 1 (23). pp. 179–196.
221. Emanuel, K.A. The Finite-Amplitude Nature of Tropical Cyclogenesis / K.A. Emanuel // J. of Atm. Sci. 1989. V. 46. No 22. pp. 3431–3456.
222. Frank, W.M. The Structure and Energetics of the Tropical Cyclone I. Storm Structure / W.M. Frank // Monthly Weather Rev. 1977. № 9 (105). pp. 1119–1135.
223. Hawkins, H.F. The Structure of a Small, Intense Hurricane - Inez 1966 / H.F. Hawkins, S.M. Imbembo // Monthly Weather Rev. 1976. No 4 (104). pp. 418–442.
224. Jorgensen, D.P. Mesoscale and Convective-Scale Characteristics of Mature Hurricanes. Part II. Inner Core Structure of Hurricane Allen (1980) / D.P. Jorgensen // J. of Atm. Sci. 1984. V. 41. No 8. pp. 1287–1311.
225. Josey, S.A. Exchanges Through the Ocean Surface (Chapter 5) / S.A. Josey,

- S. Gulev, L. Yu // *Int. Geophys.* 2013. V. 103. pp. 115–140.
226. Levina, G.V. When will Cyclogenesis Commence Given a Favorable Tropical Environment / G.V. Levina, M.T. Montgomery // *Procedia IUTAM*. 2015. No 2013 (17). pp. 59–68.
227. McBride, J.L. Observational Analysis of Tropical Cyclone Formation. Part I: Basic Description of Data Sets / J.L. McBride // *J. of Atm. Sci.* 1981. V. 38. No 6. pp. 1117–1131.
228. Nechayev, A.M. *Physics of the Atmospheric Vortex* / A.M. Nechayev // Moscow: LOGATA, 2011. 33 с.
229. Ooyama, K.V. Conceptual Evolution of the theory and modeling of the tropical cyclone / K.V. Ooyama // *J. Meteor. Soc. Japan*. 1982. No 60 (Feb.). pp. 369–380.
230. Юсупалиев, У. Численное моделирование самоподдержания и усиления вихрей / У. Юсупалиев, Н.П. Савенкова, С.А. Шутеев, С.А. Складчиков, В.Г. Еленский, А.К. Маслов // *ВМУ. Физика и астрономия*. 2013. № 4. С. 51–54.
231. Х. Фуджита Яшима Моделирование внутренней структуры тропических циклонов: уравнение потока на траектории ветра / Х. Фуджита Яшима // *Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематический обзор*. 2017, том 137. С. 118–130.
232. Кикоин, А.К. *Молекулярная физика* / А.К. Кикоин, И.К. Кикоин – М.: Наука, 1976.
233. Ландау, Л.Д. *Гидродинамика* / Курс Теоретическая физика. Т. 6. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц — М.: Наука, 1986.
234. Матвеев, Л.Т. *Основы общей метеорологии. Физика атмосферы* / Л.Т. Матвеев — СПб.: Гидрометеиздат, 2000.
235. Хаин, А.П. *Математическое моделирование тропических циклонов* / А.П. Хаин — Л.: Гидрометеиздат, 1984.
236. Cotton, W. *Storm and cloud dynamics* / W. Cotton, G. Bryan, S. van den Heever — Academic Press, 2011.
237. Emanuel, K.A. An air-sea interaction theory for tropical cyclones. Part I: Steady-state maintenance / K.A. Emanuel // *J. Atmos. Sci.* — 1986. — 43. — С.

585–604.

238. Ghomrani, S. Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensacion del vapor y su calculo numerico / S. Ghomrani, J. Marin Antuna, H. Fujita Yashima // Rev. Cuba Fis.—2015.— 32.— C. 3–8.

239. Holland, G.J. The maximum potential intensity of tropical cyclones / G.J. Holland G.J. // J. Atmos. Sci. — 1997.— 54.— C. 2519–2541.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ КРУТОВОЙ И.Ю.

### Монографии

1. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты торнадо / С.П. Баутин, Қ.В. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Новосибирск : Наука; Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2013. – 215, [1] с.

2. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2017. – 338, [1] с.

### Препринты

3. Казачинский, А.О. Построение течений в придонной части восходящих закрученных потоков как решение одной характеристической задачи Коши / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова // Снежинск : издательство СФТИ НИЯУ МИФИ, 2016 – 60 с.

4. Крутова, И.Ю. Расчет кинетической энергии течений в придонной части торнадо и тропического циклона / И.Ю. Крутова, О.В. Опышко // Снежинск : издательство СФТИ НИЯУ МИФИ, 2017 – 62 с.

### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК России

5. Баутин, С.П. Математическое моделирование природных восходящих закрученных потоков типа торнадо / С.П. Баутин, П.С. Баутин, Е.Д. Белова, В.Е. Замыслов, И.Ю. Крутова, А.В. Мезенцев, А.Г. Обухов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 384–385.

6. Баутин, С.П. Закрутка газа при плавном стоке в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50, №3. С. 473–475.

7. Баутин, С.П. Моделирование трехмерного стационарного течения в придонной части тропического циклона / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Вестник Тюменского государственного университета. Нефть, газ, энергетика. 2013. №

7 (2). С. 124–132.

8. Баутин, С.П. Аналитическое, численное и экспериментальное моделирование потоков типа торнадо / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2015. Т. 4, №5. С. 397–400.

9. Баутин, С.П. Закрутка огненного вихря при учете сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, №6. С. 961–964.

10. Крутова, И.Ю. Расчеты газодинамических параметров в придонной части торнадо / И.Ю. Крутова // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2015. Т. 4, №6. С. 523–527.

11. Баутин, С.П. Проблема предсказания и уничтожения смерча / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Технологии гражданской безопасности. 2016. Т. 13, №1 (47). С. 70–75.

12. Крутова, И.Ю. Численное моделирование придонных частей торнадо в стационарном плоском случае / И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2016. Т. 5, №6. С. 550–557.

13. Крутова, И.Ю. Расчеты газодинамических параметров в придонной части торнадо / И.Ю. Крутова // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, №1. С. 17–24.

14. Баутин, С.П. Математическое обоснование влияния вращения Земли на торнадо и тропические циклоны / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2017. Т. 6, №2. С. 101–107.

15. Казачинский, А.О. Построение течений в придонной части восходящих закрученных потоков как решение одной характеристической задачи Коши / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2017. Т. 6, №6. С. 496–502.

16. Баутин, С.П. О геометрических, скоростных и энергетических харак-

теристиках придонных частей торнадо и тропических циклонов / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, О.В. Опышко // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Т. 4, №1. С. 55–67.

17. Крутова, И.Ю. Приближенный аналитический и численный расчет кинетической энергии специального потока / И.Ю. Крутова, О.В. Опышко // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2018. Т. 7, №4. С. 298–303.

18. Крутова, И.Ю. Возникновение закрутки газа в придонной части восходящего закрученного потока / И.Ю. Крутова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Т. 4, №3. С. 55–67.

19. Крутова, И.Ю. Таблицы геометрических, скоростных и энергетических характеристик придонных частей торнадо / И.Ю. Крутова // Вычислительные технологии. 2018. Т. 23, №5. С. 17–24.

### **Публикации в прочих изданиях**

20. Баутин, С.П. Об одном численно-аналитическом моделировании течений газа при учете действия силы Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Краевые задачи и математическое моделирование [Текст]: тематич. сб. науч. ст.: в 3 т. Т. 1. / НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. ред. В.О. Каледина.— Новокузнецк, 2010. С. 36–42.

21. Баутин, С.П. Задача о плавном стоке в переменных  $r, t$  как характеристическая задача Коши стандартного вида / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2011. № 1 (9). С. 4–13

22. Баутин, С.П. Задача о плавном стоке газа в переменных  $t, r, \varphi, z$  при учете сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Проблемы прикладной математики, механики и информатики: сб. науч. тр. / под общ. ред. С.Л. Дерябина, д-ра физ.-мат. наук. — Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2011.



- Вып. 95 (178)/ 6м. – С. 16–43.

22. Крутова, И.Ю. Задача о движении газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости / И.Ю. Крутова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2012. № 1 (13). – Екатеринбург, Изд-во УрГУПС, 2012, С. 14–22.

23. Крутова, И.Ю. Трехмерный стационарный поток газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости / И.Ю. Крутова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. № 3 (15), 2012 год. – Екатеринбург, Изд-во УрГУПС, 2012, С. 16–23.

24. Крутова, И.Ю. Закрутка газа при плавном стоке в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / И.Ю. Крутова // Краевые задачи и математическое моделирование [Текст]: тематич. сб. науч. ст. / НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. ред. В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2012. – 376 с. С. 91–97.

25. Баутин, С.П. Закрутка газа вокруг нагревающегося цилиндра при учете сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1, №1 (1). С. 112–126.

26. Крутова, И.Ю. Численное моделирование придонных частей торнадо в стационарном плоском случае / И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко // Неравновесные процессы в сплошных средах: материалы междунар. симп.: в 2 т. / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2017. – Т. 2. – 264 с. С. 31–33.

27. Krutova, I.Y. Destructive atmospheric vortices and the Earth rotation around its axis / I.Y. Krutova // Proceedings of the XLV Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS (A P M 2 0 1 7) St.Petersburg, Russia. P. 270–273.

### **Основные материалы конференций**

28. Баутин, С.П. Об одном численно-аналитическом методе решения начальнo-

краевых задач для эволюционных систем уравнений с частными производными / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, Н.А. Первушина // Забабахинские научные чтения: сб. материалов X Междунар. конф. 15–19 марта 2010. – Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2010. – С. 276–277.

29. Баутин, С.П. Закрутка газа силой Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.В. Рощупкин // Международная конференция Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная 110-летию академика М. А. Лаврентьева: тезисы докладов. 23–27 августа 2010 г. – Новосибирск, 2010. – С. 75.

30. Баутин, С.П. Решения начально-краевых задач для эволюционных уравнений с частными производными методом, близким к методу Бубнова-Галеркина / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, Н.А. Первушина // XVIII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К. И. Бабенко: тезисы докладов. – Дюрсо, 15–20 сентября 2010. – С. 10–11.

31. Баутин, С.П. Аналитическое исследование течений газа, закрученных действием силы Кориолиса / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова // Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко: тезисы докладов. 30 мая–4 июня 2011 г., Новосибирск, Академгородок, 2011. – С. 120.

32. Баутин, С.П. Математическое моделирование разрушительных природных восходящих закрученных потоков / С.П. Баутин, Е.Д. Белова, В.Е. Замыслов, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Забабахинские научные чтения: сб. тезисов XI Международной конференции. 16–20 апреля 2012.- Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2012. – С. 283–284.

33. Крутова, И.Ю. Закрутка газа силой Кориолиса при плавном стоке / И.Ю. Крутова // XIX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К. И. Бабенко: Тезисы докладов. Дюрсо, 15–20

сентября 2012. – С. 57–59.

34. Баутин, С.П. Закрученные течения газа при учете действия сил тяжести и Кориолиса / С.П. Баутин, К.В. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // XVIII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013) 22-31 мая 2013 г. Алушта, Издательство МАИ-ПРИНТ Москва Алушта, тезисы. – С. 312–314.

35. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С.П. Баутин, К.В. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Всероссийская конференция «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 95-летию академика Л.В. Овсянникова. 18- 22 апреля 2014 г, тезисы докладов, Новосибирск, Академгородок 2014. – С. 127–128.

36. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С.П. Баутин, К.В. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Забабахинские научные чтения: сборник тезисов XII Международной конференции 2-6 июня 2014.- Снежинск: Издательство РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. – С. 65–66.

37. Баутин, С.П. Аналитическое, численное и экспериментальное моделирование потоков типа торнадо / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Международная конференция «Успехи механики сплошных сред» (УМСС'2014), приуроченная к 75-летию академика В.А. Левина, 28 сентября- 04 октября 2014 г., г. Владивосток (о. Русский), Приморский край, Россия. – С. 63–65.

38. Krutova, I.Y. Numerical modeling of tornado-type flows / I.Y. Krutova // XXX International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter. March 1-6, 2015, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia.

39. Абдубакова, Л.В. Математическое и экспериментальное моделирование восходящих закрученных потоков / Л.В. Абдубакова, С.П. Баутин, Д.Д. Баранникова, А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, А.В. Мезенцев, А.Г. Обухов, Е.М. Сорокина // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам

теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20-24 августа 2015). – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. – 319 с. – С. 34.

40. Казачинский, А.О. Трёхмерные нестационарные течения в придонных частях торнадо и тропических циклонов / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова // VIII Международная конференция Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная 115-летию академика М.А.Лаврентьева. 7-11 сентября 2015 г. Тезисы докладов. Новосибирск, 2015. – С. 131–132.

41. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // VIII Международная конференция Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная 115-летию академика М.А.Лаврентьева. 7-11 сентября 2015 г. Тезисы докладов. Новосибирск, 2015. – С. 79–80.

42. Казачинский, А.О. Моделирование трехмерных течений в придонных частях восходящих закрученных потоков типа торнадо / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко // Всероссийская конференция Нелинейные волны: теория и новые приложения, посвященная 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН В.М. Тешукова. 29 февраля – 2 марта 2016 г. Тезисы докладов. Новосибирск, 2016. – С. 59–60.

43. Bautin, S.P. Mathematical and Experimental Simulation of the Ascending Twisting Flows / S.P. Bautin, I.Y. Krutova, A.G. Obukhov // XLIV International Conference “Advanced Problems in Mechanics”- 2016 (APM-2016) June 27 - July 02, 2016, St. Petersburg, Russia. – P. 70–71.

44. Абдубакова, Л.В. Математическое и экспериментальное моделирование восходящих закрученных потоков / Л.В. Абдубакова, С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.О. Казачинский, А.Г. Обухов // XVIII Международная конференция по методам аэрофизических исследований (ICMAR 2016), 27 июня - 3 июля 2016 года, г. Пермь, Россия.

45. Казачинский, А.О. Математическое моделирование трёхмерных нестационарных течений в придонных частях торнадо и тропических циклонов /

А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова // Сборник материалов 6-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г.Яновского. 16-18 ноября 2016 г., Москва, 2016. – С. 380–381.

46. Баутин, С.П. Геометрические, скоростные и энергетические характеристики придонных частей торнадо и тропического циклона / С.П. Баутин, Р.Е. Волков, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов, О.В. Опрышко // Всероссийская научно-практическая конференция XX Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. Пермь: ИМСС УрО РАН, 2017. – С. 39.

47. Крутова, И.Ю. Геометрические, скоростные и энергетические характеристики придонных частей торнадо и тропического циклона / И.Ю. Крутова // Всероссийская научно-практическая конференция XX Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. Пермь: ИМСС УрО РАН, 2017. – С. 182.

48. Баутин, С.П. Геометрические, скоростные и энергетические характеристики придонных частей торнадо и тропического циклона / С.П. Баутин, Р.Е. Волков, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов, О.В. Опрышко // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XIII Международной конференции 20-24 марта 2017.- Снежинск: Издательство РФЯЦ-ВНИИТФ, 2017. – С. 18–19.

49. Крутова, И.Ю. Моделирование течений в придонных частях торнадо и тропического циклона / И.Ю. Крутова // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XIII Международной конференции 20-24 марта 2017.- Снежинск: Издательство РФЯЦ-ВНИИТФ, 2017. – С. 318–319.

50. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017) 24-31 мая 2017 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2017. – 816 с.: ил. – С. 380–381.

51. Казачинский, А.О. Математическое моделирование придонных частей восходящих закрученных потоков / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017) 24-31 мая 2017 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2017. – 816 с.: ил. – С. 463–464.

52. Bautin, S.P. Destructive atmospheric vortices and the Earth rotation around its axis / S.P. Bautin, S.L. Deryabin, I.Y. Krutova, A.G. Obukhov // XLV International Summer School – Conference Advanced Problems in Mechanics 2017 (APM-2017) June 22 - June 27, 2017, St. Petersburg, Russia. – P. 53–54.

53. Баутин, С.П. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси / С.П. Баутин, С.Л. Дерябин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов // Всероссийская конференция с международным участием, посвященная 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва». Тезисы докладов. Новосибирск: ИГиЛ; 4-8 сентября 2017. – С. 37–38.

54. Казачинский, А.О. Аналитическое и численное моделирование течений в придонных частях торнадо и тропического циклона / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко // Всероссийская конференция с международным участием, посвященная 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва». Тезисы докладов. Новосибирск: ИГиЛ; 4-8 сентября 2017. – С. 148–149.

55. Казачинский, А.О. Математическое моделирование течений в придонных частях потоков типа торнадо и тропических циклонов / А.О. Казачинский, И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко // Всероссийская конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. 21-23 ноября 2017 г., Москва, 2017. – С. 148–149.

56. Kazachinsky, A.O. Calculations of three-dimensional stationary flows in

lower parts of the tornado / A.O. Kazachinsky, I.Y. Krutova, O.V. Opryshko // XXXIII International Conference on Equations of State for Matter (ELBRUS 2018). March 1-6, 2018, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia.

### **Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ**

57. Крутова, И.Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012619314. "Моделирование трехмерного стационарного потока идеального газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса". Автор: И.Ю. Крутова. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 16.10.2012.

58. Крутова, И.Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018613844. "Tornado, stationary case". Авторы: И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23.03.2018.

59. Крутова, И.Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018619599. «Tornado, calculation tables». Автор: И.Ю. Крутова. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 08.08.2018.

60. Крутова, И.Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018619601. «Tornadoes, visualization». Авторы: И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 08.08.2018.

61. Крутова, И.Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018619944. «Tornado, calculation of zero coefficients of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method». Авторы: И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 15.08.2018.

62. Крутова, И.Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018660025. «Tornado, calculation of zero coefficients of gas-dynamic parameters by the Euler method». Авторы: И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 15.08.2018.

63. Крутова, И.Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018660024. «Tornado, calculating the incoming radius». Авторы: И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 15.08.2018.

64. Крутова, И.Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018660088. «Tornadoes, calculation of the first coefficients of gas-dynamic parameters by the Runge-Kutta method and the Euler method». Авторы: И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 16.08.2018.



КРУТОВА ИРИНА ЮРЬЕВНА

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В РАЗРУШИТЕЛЬНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЯХ**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

---

Подписано к печати 05.09.2018 г.

Формат бумаги 60 × 84 1/16

Объем усл. печ. л. 1,5

Тираж 20 экз.

Заказ 63

---

Издательско-полиграфический отдел СФТИ НИЯУ МИФИ, 456776, г. Снежинск, ул. Комсомольская, 8