

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Ахметова Оксана Валентиновна

**Температурные поля турбулентных и ламинарных
течений в скважинах**

01.04.14 – Теплофизика и теоретическая теплотехника

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор технических наук, профессор
Филиппов Александр Иванович

Стерлитамак 2016

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ	5
СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ	15
ГЛАВА I. ЗАДАЧА О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ В СКВАЖИНЕ	19
1.1. Задача о нестационарном теплообмене в скважине	19
1.1.1. <i>Описание физических процессов в восходящем потоке</i>	20
1.1.2. <i>Радиальный профиль скорости при ламинарном течении несжимаемой жидкости</i>	25
1.1.3. <i>Процессы переноса в турбулентном потоке</i>	26
1.1.3.1. <i>Зависимость турбулентной теплопроводности в скважине от радиальной координаты</i>	27
1.1.3.2. <i>Радиальный профиль скорости при турбулентном течении в скважине</i>	30
1.1.4. <i>Свойства окружающей среды</i>	31
1.2. Уравнения для описания температурных полей в скважине и окружающей среде с учетом анизотропии	32
1.3. Уравнение для температурных полей в скважине с учетом сжимаемости флюида	33
1.4. Математическая формулировка задачи о температурном поле в скважине в размерных переменных	36
1.5. Физические процессы, определяющие температурное поле в пласте..	40
1.6. Формулировка задачи для определения функции температурного сигнала пласта	42
1.7. Гидродинамика в неоднородных анизотропных пористых средах	45
1.8. Постановка задачи о поле давления для радиального течения при постоянном отборе	53
1.9. Асимптотический метод «покоэффициентного пространственного осреднения»	56
1.9.1. <i>Общие сведения о методе</i>	56
1.9.2. <i>Иллюстрация использования асимптотического метода «пространственного покоэффициентного осреднения»</i>	58
1.9.3. <i>Пример построения точного решения с помощью асимптотического метода</i>	73
1.10. Выводы по главе I	81
ГЛАВА II. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА В СТВОЛЕ СКВАЖИНЫ И ОКРУЖАЮЩИХ ПОРОДАХ	84
2.1. Постановка задачи о нестационарном теплообмене турбулентного потока в безразмерных переменных	84
2.2. Представление общей температурной задачи для турбулентного потока жидкости в асимптотической последовательности	86
2.2.1. <i>Применение метода малого параметра</i>	86
2.2.2. <i>Разложение задачи для нулевого коэффициента по формальному параметру</i>	88

2.3. Задача о температурном поле в нулевом приближении	90
2.4. Решение задачи о нестационарном теплообмене турбулентного потока для нулевого коэффициента асимптотического разложения	93
2.5. Температурная задача в первом приближении	95
2.6. Задача для остаточного члена в первом приближении	98
2.7. Асимптотическое решение задачи о температурном поле в первом приближении	103
2.8. Представление решения общей задачи в пространстве оригиналов .	108
2.9. Первый коэффициент разложения по малому параметру γ	111
2.10. Температурное поле турбулентного потока в скважине с учетом зависимости теплоемкости от температуры.....	117
2.11. Температурное поле в скважине при турбулентном течении в режиме постоянных градиентов	121
2.12. Выводы по главе II.....	122
Глава III. ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ.....	125
3.1. Формулы для расчета температурного поля ламинарного потока	125
3.1.1. <i>Формулы для расчета теплообмена ламинарного потока при постоянном вертикальном градиенте температуры.....</i>	<i>127</i>
3.2. Теплообмен потока в режиме выровненного профиля скорости $R(r) = 1$	129
3.2.1. <i>Асимптотические решения для выровненного профиля скорости и постоянного вертикального градиента температуры</i>	<i>129</i>
3.3. Теорема о температуре потока в нулевом приближении.....	130
3.4. Анализ расчетов температурных полей для различных режимов течения	132
3.5. Выводы по главе III.....	156
ГЛАВА IV. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ИНТЕРВАЛАХ СКВАЖИН С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПРОХОДНЫМ СЕЧЕНИЕМ	159
4.1. Постановка задачи о теплообмене цилиндрического потока в зоне изменяющегося проходного сечения	159
4.2. Разложение температурной задачи по формальному асимптотическому параметру	163
4.3. Решение задачи теплообмена в нижнем участке трубы в нулевом асимптотическом приближении	167
4.4. Определение асимптотически осредненной температуры в верхнем участке трубы	168
4.5. Расчет температурного поля в интервале изменения проходного сечения скважины	171
4.6. Выводы по главе IV	175
Глава V. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПЛАСТЕ.....	177
5.1. Параметризация задачи о температурном поле в анизотропном слое с источниками при отборе жидкости.....	177
5.2. Постановка задачи в нулевом асимптотическом приближении	179

5.3. Осреднение исходной задачи для случая не зависящей от z скорости конвективного переноса тепла.....	181
5.4. Предельный случай нулевого приближения	182
5.5. Нулевое приближение решения задачи о теплообмене при фильтрации углеводородов в слоистой среде.....	183
5.6. Оценка остаточного члена после первого коэффициента разложения по формальному параметру.....	186
5.7. Первый коэффициент разложения температуры и вертикальный профиль в области осреднения	189
5.8. Анализ результатов расчетов и оценка баротермического эффекта .	195
5.9. Выводы по главе V	208
Глава VI. ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ЗАДАННОМ ОТБОРЕ	209
6.1. Приведение задачи к безразмерным координатам	209
6.2. Разложение по формальному параметру	210
6.3. Нулевое приближение	212
6.4. Решение задачи о нестационарном поле давления в нулевом приближении	216
6.5. Первое приближение	218
6.6. Оценка остаточного члена и получение дополнительного условия...	221
6.7. Определение первого коэффициента разложения.....	223
6.8. Нахождение погранслойных поправок	227
6.9. Точное решение задачи	233
6.10. Переход в пространство оригиналов для асимптотических решений.....	237
6.11. Анализ результатов расчетов поля давления	240
6.12. Производные от функции давления по r и t	251
6.13. Выводы по главе VI	254
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	256
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Анализ зависимостей теплофизических свойств нефти и осадочных пород от температуры	259
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Асимптотическое решение задачи о поле давления в слоисто-неоднородном анизотропном пористом пласте	269
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Построение решения задачи о турбулентном теплообмене в скважине при постоянных вертикальных градиентах температуры.....	280
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Решение задачи о нестационарном теплообмене ламинарного потока	296
ПРИЛОЖЕНИЕ Д. Произвольный профиль скорости и постоянный вертикальный градиент температуры	323
ПРИЛОЖЕНИЕ Е. Решение задачи нестационарного теплообмена модельного потока с выровненным профилем скорости	344
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж. Частный случай постоянных градиентов и выровненного профиля скорости	363
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	385

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Проведение всесторонних комплексных исследований скважин и пластов, осуществляемых в ходе регулирования и контроля разработки, способствует наиболее полному извлечению углеводородного сырья и эффективному использованию новых технологий. Методы, основанные на интерпретации измерений параметров термогидродинамических процессов, при этом играют особую роль. Развитие методов диагностики требует постоянного совершенствования физико-математических моделей полей давления и температуры в скважинах и пластах [4, 52, 108, 126, 236].

К числу важных проблем моделирования относятся задачи теплофизики, описывающие температурные поля в скважине и пласте при эксплуатации, решаемые с целью прогноза отложения парафинов и газовых гидратов, определения интервалов заколонной циркуляции, а также при технологических операциях, к числу которых относятся методы интенсификации нефтегазоизвлечения, включая гидроразрыв пласта (ГРП).

Основы теоретических расчетов физических полей при разработке нефтегазовых коллекторов были заложены А. Дарси, Ж. Дюпюи, Ж. Буссинеском, К.Э. Лембке, Н.Е. Жуковским, Ч. Сливтером, Н.Н. Павловским, М. Маскетом, Л.С. Лейбензоном, А.Ю. Намиотом, В.Н. Щелкачевым, Х. Цирфасом, Г. Ван дер Влитом, И.А. Чарным, Л.И. Рубинштейном, В.М. Кейсом, П.Я. Полубариновой-Кочиной, М.А. Пудовкиным, А.Н. Саламатиным, В.А. Чугуновым, Х. Азизом, Э. Сеттари, Г.И. Баренблаттом, В.М. Ентовым, В.М. Рыжиком, К.С. Басниевым, И.Н. Кочиной, В.М. Максимовым, В.Н. Николаевским, В.Г. Шуховым, Э.Б. Чекалюком и др., а после развиты С.Е. Купцовым, Р.А. Валиуллиным, В.Ф. Назаровым, А.Ш. Рамазановым, Р.Ф. Шарафутдиновым, В.М. Конюховым, В.А. Толпаевым, Е.П. Вольницкой, М.А. Моховым, А.М. Киреевым, Т.Ф. Манаповым, Ю.Ф. Коваленко и др.

Однако, несмотря на большой объем научных исследований в этой области, отсутствуют аналитические решения задач, учитывающих слоистую неоднородность нефтегазового коллектора, анизотропию сред, нестационар-

ность полей температуры и давления, взаимное влияние полей на границах соприкосновения сред, зависимость физических параметров от координат при решении соответствующих задач и режим течения флюида в скважине.

Задачи сопряжения о поле температуры в скважине, учитывающие перечисленные выше факторы, в общем случае являются нелинейными, уравнения содержат переменные коэффициенты, связанные с учетом зависимости профиля скорости и теплопроводности от радиальной координаты, а также плотности сжимаемой среды от вертикальной координаты. Кроме того, задача о температурном поле в скважине осложнена необходимостью учета температурного поля в пласте-коллекторе, определяющегося, в свою очередь, полями давления и скоростей. Это означает, что необходимо рассматривать взаимосвязанные задачи о полях давления, скоростей, температуры в пласте и температурного поля в скважине. Основной причиной отсутствия аналитического решения такого рода задач следует признать недостаточную проработанность теоретических основ и отсутствие подходящих математических методов.

В работе показано, что решение задач сопряжения, в том числе с переменными коэффициентами, может быть найдено с использованием асимптотического метода пространственного поэффициентного осреднения, развитого автором для решения задач с переменными коэффициентами на основе «в среднем точного» асимптотического метода [11–14, 128–130, 171–176, 199–202].

Цель работы. Исследование температурных полей в скважинах на основе асимптотических решений, полученных методом пространственного поэффициентного осреднения при ламинарном и турбулентном течении флюида с учетом уточненной теории температурных полей в продуктивных пластах, использованных в задаче о температурном поле в скважине для определения граничной температуры поступающего в скважину потока – температурного сигнала пласта.

Объектами исследования являются слоисто-неоднородная ортотропная пластовая система, содержащая углеводороды; восходящий цилиндриче-

ский поток в скважине с аксиально-симметричным радиальным профилем скорости и теплопроводности, окруженной горными породами.

Предметами исследования являются особенности и закономерности формирования термогидродинамических полей в пласте и скважине при ламинарном и турбулентном течении флюида, теплофизические свойства которого зависят от температуры.

Методы исследования и фактический материал. Основным методом решения математических задач, представленных в диссертационной работе, является разработанный автором асимптотический «метод покоеэффициентного пространственного осреднения». Кроме того, для получения аналитических зависимостей, представленных в работе, использованы широко известные: метод характеристик, асимптотический метод малого параметра, интегральные преобразования. Графические зависимости рассчитаны с использованием стандартных математических программных пакетов. В качестве фактического материала для верификации разработанной теории использованы экспериментальные кривые, опубликованные в работах Э.Б. Чекалюка, Ю.М. Проселкова и А.И. Филиппова.

Задачи исследования:

- развитие асимптотического метода для решения теплофизических задач сопряжения с переменными коэффициентами;
- применение разработанных модификаций асимптотического метода к задаче о полях давления в слоисто-неоднородных пластах, в том числе с произвольной зависимостью проницаемости от глубины залегания. Изучение особенностей формирования фильтрационных полей давления путем расчетов пространственно-временных распределений давления в неоднородных ортотропных пластах на основе метода покоеэффициентного усреднения;
- получение и теоретическое исследование аналитических решений задач о температурном поле при фильтрации нефти и воды в слоисто-неоднородном анизотропном пласте. Нахождение решения температурной задачи при фильтрации флюида асимптотическими методами. Расчеты про-

странственно-временных зависимостей для реальных нефтегазовых месторождений;

– получение асимптотического решения задачи о нестационарном теплообмене ламинарного и турбулентного потоков в скважине с учетом зависимости коэффициента турбулентной теплопроводности от радиальной координаты, теплоемкости и теплопроводности от температуры;

– изучение закономерностей формирования температурного поля в скважине на основании полученных асимптотических решений;

– обоснование достоверности, заключающееся в сопоставлении полученных решений с результатами других исследователей и экспериментальными данными; в частных случаях сопоставление нулевого и первого коэффициентов асимптотического решения с разложением точного решения задачи в ряд Маклорена.

На защиту выносятся следующие оригинальные результаты, соответствующие пункту 1 (*Фундаментальные, теоретические и экспериментальные исследования молекулярных и макросвойств веществ в твердом, жидком и газообразном состоянии для более глубокого понимания явлений, протекающих при тепловых процессах и агрегатных изменениях в физических системах.*) области исследований по специальности «01.04.14 – Теплофизика и теоретическая теплотехника»:

1. Новый аналитический метод исследования явлений тепло- и массопереноса в сложных неоднородных, анизотропных и многослойных средах, широко распространенных в природных и технических системах, основанный на асимптотическом представлении полей температуры и давления с требованием тривиальных решений усредненной задачи для остаточного члена – «метод по коэффициентному пространственному осреднению». Метод позволяет также учитывать зависимость теплофизических параметров от температуры.

2. Объединенная термогидродинамическая модель температурного поля жидкости, текущей по скважине, окруженной сплошным массивом среды для

ламинарного и турбулентного течений флюида в диапазоне температур 270–400 К и давлений от 1 до 200 атм., соответствующих реальным условиям скважинной эксплуатации нефтяных и газовых месторождений с учетом зависимости профиля скорости и коэффициента теплопроводности от радиальной координаты, теплоемкости и теплопроводности от температуры в скважине, построенная с использованием модификации асимптотического метода. Модель включает описание температурного поля, индуцированного нестационарными полями давления упругого режима течения в нефтяных пластах, которое выступает в качестве граничного условия задачи о температурном поле в скважине.

3. Представление асимптотическими формулами температурного поля флюида, текущего по скважине и обменивающегося теплом с окружающим ее сплошным массивом среды, учитывающее источники тепла, реальный профиль скорости флюида и зависимость теплоемкости от температуры, а коэффициента теплопроводности – от радиальной координаты и температуры.

4. Зависимости от теплофизических свойств среды, геометрических параметров и дебита скважины радиальных профилей температуры при теплообмене турбулентного и ламинарного потоков, позволяющие определить температурные отклонения, обусловленные смещением термометра относительно оси (или стенки) скважины (основной систематической погрешности термокаротажа). Установленный на основании анализа полученных формул и расчетов преобладающий вклад дебита, коэффициентов теплопроводности флюида и окружающих пород и незначительное влияние пространственной позиции точки измерения по направлению потока.

5. Установившиеся распределения температурного поля при ламинарном и турбулентном теплообмене в скважине, полученные из асимптотического решения для первого коэффициента разложения с использованием разработанного алгоритма.

6. Осредненное температурное поле аксиально-симметричного потока, в том числе турбулентного и ламинарного, инвариантно относительно ради-

альных профилей скорости и коэффициента теплопроводности, т.е. одинаково для любых режимов течения несжимаемой жидкости при одинаковой средней скорости и всех остальных идентичных параметрах. Осредненное температурное поле определяет режим малодебитных скважин, поскольку при дебитах меньше 5 т/сут. и геотермическом градиенте 0.02 К/м максимальная разница температур между стенкой и осью скважины не превышает 0.05 К.

Научная новизна. Впервые построена теория решения асимптотическим методом многослойных взаимосвязанных нелинейных задач сопряжения скважинной теплофизики и гидродинамики, содержащих переменные коэффициенты, и приведены ее приложения.

1. Развита асимптотический метод покоеэффициентного осреднения, позволяющий строить приближенные аналитические решения задач скважинной теплофизики, содержащих переменные коэффициенты, нулевое приближение которого соответствует решению задачи, осредненной по ограниченной области (толщине пласта-коллектора или сечению скважины), а первое уточняет зависимость от координаты в области осреднения. Основная идея метода покоеэффициентного осреднения заключается в применении разложения по формальному асимптотическому параметру в задаче для остаточного члена и последующем интегральном осреднении в ограниченной области задач для коэффициентов.

2. Получено решение задачи о полях давления, возникающих при отборе и закачке флюида в режимах постоянной депрессии и постоянного отбора; решена гидродинамическая задача, учитывающая проницаемость и слоистую неоднородность продуктивного пласта и окружающих пород.

3. Построены асимптотические решения задач о баротермическом эффекте в неоднородном анизотропном нефтяном пласте, учитывающие теплообмен пласта с окружающими породами в нулевом и первом приближениях.

4. Получены новые решения нелинейных задач сопряжения о теплообмене восходящего потока с произвольным аксиально-симметричным радиальным профилем скорости в скважине, учитывающие изменение турбулент-

ного коэффициента теплопроводности от радиальной координаты, в нулевом и первом асимптотических приближениях.

Практическая значимость состоит в том, что разработанный новый метод расчета средней по сечению потока температуры, ее радиального профиля и установившихся значений обеспечивает возможности исследования особенностей формирования температурного поля в скважинах. Это позволяет идентифицировать и прогнозировать аномалии температурного поля в скважине, и открывает новые возможности исследования скважин и оптимизации условий их эксплуатации.

Полученные выражения для расчета баротермического эффекта в нефтегазовых коллекторах позволяют прогнозировать отклонение температуры в призабойной зоне от геотермической и определять на этой основе температурный сигнал пласта.

Разработанный способ расчета температурных аномалий, возникающих вследствие изменения сечения потока при переходе в насосно-компрессорные трубы, образовании парафиновых отложений или газовых гидратов, позволяет уточнить методику выявления интервалов заколонной циркуляции.

Достоверность и обоснованность проведенных исследований обеспечивается следующими положениями:

- применением в качестве исходных посылок фундаментальных физических законов;
- математической строгостью методов решения и идентичностью решений, полученных различными способами;
- совпадением коэффициентов асимптотического разложения с соответствующими членами разложения точного решения в ряд Маклорена в частных случаях, допускающих точное решение;
- согласованностью результатов, полученных другими исследователями, с частными случаями решенных задач;
- соответствием полученных выводов экспериментальным данным.

Личный вклад автора. Научные результаты, вынесенные на защиту, получены автором самостоятельно. Полученные результаты основаны на теоретических исследованиях научной школы профессора А.И. Филиппова, где при участии автора диссертации разработан «в среднем точный» асимптотический метод, позже усовершенствованный автором диссертации для решения задач с переменными коэффициентами.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 65 работах, отражающих основные результаты диссертации. Из них 2 монографии, 15 статей в журналах, индексируемых в международных базах цитирования, 16 статей в журналах, входящих в перечень изданий ВАК РФ, статьи в прочих журналах, а также материалах и трудах Международных и Всероссийских конференций.

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, 6 глав основного содержания, заключения, списка литературы, 7 приложений. Работа содержит 421 страницу, 5 таблиц, 88 рисунков и 323 библиографические ссылки.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

– международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы», посвященная 80-летию академика РАН В.А. Ильина (Стерлитамак, 2008);

– ВНКСФ 16: Шестнадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых (Волгоград, 2010);

– всероссийская молодежная научная конференция «Мавлютовские чтения» (Уфа, 2010);

– десятая международная научно-практическая конференция «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности» (Санкт-Петербург, 2010);

– международная научно-практическая конференция «Тенденции развития научных исследований» (Киев, 2010);

- VIII Международная научно-практическая конференция «Наука и современность – 2011» (Новосибирск, 2011);
 - всероссийская научная конференция «Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы» (Стерлитамак, 2011);
 - межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука. Технология. Производство» (Салават, 2012);
 - III Всероссийская научная конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации» (Якутск, 2012);
 - XIV Минский международный форум по тепло- и массообмену (Минск, 2012);
 - XIII Международная научно-практическая конференция «Естественные и математические науки в современном мире» (Новосибирск, 2013);
 - XIV Международная научно-практическая конференция «Естественные и математические науки в современном мире» (Новосибирск, 2014);
 - XXX Международная научно-практическая конференция «Инновации в науке» (Новосибирск, 2014);
 - межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука. Технология. Производство» (Салават, 2015);
 - IV Всероссийская научно-практическая конференция, посвященная 75-летию физико-математического факультета «Математическое моделирование процессов систем» (Стерлитамак, 2015);
 - XV Минский международный форум по тепло- и массообмену (Минск, 2016);
 - международная конференция «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики», приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова (Москва, 2016);
 - XLVIII Международная научно-практическая конференция «Естественные и математические науки в современном мире» (Новосибирск, 2016)
- и научных семинарах:

– лаборатории дифференциальных уравнений Стерлитамакского филиала Академии наук РБ (руководитель – д.ф.-м.н., проф., чл. корр. АН РБ К.Б. Сабитов) (Стерлитамак, 2004–2015);

– кафедры теоретической физики (руководитель – д.т.н., профессор А.И. Филиппов) (Стерлитамак, 2002–2015);

– кафедры общей и теоретической физики Баш ГПУ им. М. Акмуллы (руководители – д.ф.-м.н., проф. М.А. Фатыхов, д.ф.-м.н., проф. И.А. Фахретдинов) (Уфа, декабрь 2008);

– кафедры механики жидкости и газа (руководитель – д.ф.-м.н., проф., чл.- корр. АН РБ В.Ш. Шагапов) (Бирск, февраль 2009);

– кафедры нефтегазовой и подземной гидромеханики РГУ нефти и газа им. Губкина, (руководитель – д.т.н., проф., академик РАЕН, В.В. Кадет) (Москва, май 2013);

– института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, (руководитель – д.ф.-м.н., проф., С.Ф. Урманчеев) (Уфа, апрель 2016).

Результаты работы конструктивно обсуждались коллективами кафедр математического моделирования (д.ф.-м.н, профессор В.Н. Кризский), прикладной математики и механики (д.ф.-м.н., профессор И.К. Гималтдинов), математического анализа (д.ф.-м.н., профессор И.А. Калиев), общей физики (д.ф.-м.н., профессор Н.Н. Биккулова) Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета. Всем им автор выражает глубокую благодарность.

Автор выражает искреннюю признательность доктору технических наук, профессору Филиппову Александру Ивановичу за внимание к работе и ценные консультации.

В проведении расчетов и обсуждении результатов принимали активное участие ученики автора М.А. Горюнова, А.Г. Крупинов, А.С. Родионов, И.М. Филиппов, И.Ф. Кабиров, К.В. Олефиренко, М.Р. Губайдуллин, которых также соискатель благодарит. Автор отдает себе отчет, что без деятельного участия вышеперечисленных исследователей выполнение работы в представленном объеме вряд ли было бы возможно.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Латинские:

a – температуропроводность, $\text{м}^2/\text{с}$;

$A, A_1, A_2, B, D, E, F, M, R$ – функциональные коэффициенты, заданные в соответствующих главах;

c, c_1 – удельная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг})$;

$D_{\mu i}$ – коэффициент диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$;

D – глубина скважины (исследуемый интервал скважины), м ;

F_0 – безразмерное время (главы I – V);

h – полутолщина продуктивного пласта, м ;

H_d – граница изменения размера радиуса потока, м ;

I – энтальпия, $\text{Дж}/\text{кг}$;

\bar{j} – поток тепла, $\text{Вт}/\text{м}^2$;

J – безразмерная величина, характеризующая скорость конвективного переноса тепла фильтрующегося флюида;

k – проницаемость, м^2 (глава VI); отношение функций Бесселя

$k = k(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$ (главы II – IV);

L – теплота фазового перехода, $\text{Дж}/\text{кг}$;

m – масса, кг , пористость;

p – комплексный параметр преобразования Лапласа-Карсона;

P_d, P – соответственно размерное и безразмерное давление, Па ;

P_0 – давление в точке линеаризации, Па (глава I), безразмерная амплитуда давления;

P_{00} – константа, используемая для обезразмеривания, Па ;

P_A – атмосферное давление, Па ;

Pe – аналог параметра Пекле;

r_0 – внутренний радиус скважины, м ;

r_d, r – соответственно размерная и безразмерная радиальная координата цилиндрической системы координат, м ;

$R(r)$ – безразмерная функция радиального профиля скорости;
 q_d – плотность источников тепла, Вт/м³;
 Q – объемный дебит скважины м³/с; безразмерная функция источников тепла;
 s_i – объемное содержание i -ой фазы;
 t – размерное время, с;
 T – безразмерное температурное поле;
 T_0 – безразмерный температурный сигнал пласта; температура в точке линеаризации, K (глава I);
 \tilde{T} – безразмерный радиальный профиль температуры внутри скважины;
 $u_d(r_d, t)$ – скорость конвективного переноса тепла, м/с;
 v – скорость потока, м/с;
 v_0 – скорость потока при заданном значении координаты, м/с;
 $\langle v \rangle$ – средняя скорость жидкости в скважине, м/с;
 w – мгновенная скорость флюида в скважине, м/с;
 x_d, x – соответственно размерная и безразмерная горизонтальная координата прямоугольной декартовой системы координат, м;
 y – растянутая переменная $y = x / \sqrt{\varepsilon}$;
 z_d, z – соответственно размерная и безразмерная вертикальная координата, м.

Греческие:

α_g – коэффициент растворимости, Па⁻¹;
 α – коэффициент температурного расширения, К⁻¹; отношение температуропроводностей (глава V);
 β – коэффициент сжимаемости, Па⁻¹;
 $\gamma^*, \zeta^*, \sigma^*$ – температурные коэффициенты теплоемкости, теплопроводности и объемной теплоемкости соответственно, К⁻¹;
 γ, ζ, σ – безразмерные коэффициенты теплоемкости, теплопроводности и объемной теплоемкости соответственно;
 Γ – геотермический градиент, К/м;

θ, θ_1 – температура флюида и окружающей среды соответственно, К;
 θ_{01} – естественная невозмущенная температура, К;
 θ_{10} – константа, используемая для обезразмеривания, К;
 θ^* – температура в точке линеаризации, К;
 θ_0 – температурный сигнал пласта, К;
 $\tilde{\theta}$ – радиальный профиль температуры в скважине $\tilde{\theta} = (\theta^1 - \theta^1|_{r=1})$, К;
 Θ – остаточный член;
 $\epsilon_{\text{внутр}}$ – внутренняя энергия единицы массы, Дж/кг;
 $\epsilon_{\text{ДЖ}}$ – коэффициент Джоуля – Томсона, К/Па;
 $\epsilon_{\text{d.ef}}$ – эффективный коэффициент Джоуля – Томсона, К/Па;
 ϵ – параметр асимптотического разложения;
 η – адиабатический коэффициент, К/Па;
 $\eta_{\text{d.ef}}$ – эффективный адиабатический коэффициент, К/Па;
 H – относительный вклад адиабатического эффекта;
 λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);
 Λ – безразмерный параметр, определенный в соответствующих главах;
 $\nabla\mu_i$ – градиент химического потенциала, Дж/м;
 μ – вязкость жидкости, Па·с;
 ν – безразмерная величина, характеризующая размеры скважины;
 Π – погранслойная функция (в математическом смысле);
 ρ, ρ_1 – плотность флюида и окружающей среды, кг/м³;
 ρ_l – плотность несущей жидкой фазы, кг/м³;
 ρ_g – плотность растворенного газа, кг/м³;
 ρ_0 – плотность флюида при заданной координате, кг/м³;
 τ_0 – касательное напряжение;
 τ – безразмерное время (глава VI);
 χ – отношение объемных теплоемкостей; пьезопроводность, м²/с (глава VI);

ω_k' – диссипативный член, выражающий переход механической энергии во внутреннюю энергию, Вт/м³;

ω_q – мощность источника тепла, возникшего за счет внутренних процессов в веществе, Вт/м³.

Верхние индексы:

(0) – нулевое асимптотическое приближение;

(1) – первый коэффициент асимптотического разложения;

1 – первое асимптотическое приближение;

(2) – второй коэффициент асимптотического разложения;

i – номер коэффициента разложения;

u – изображение функции в пространстве Лапласа – Карсона;

s – изображение функции в пространстве Фурье – Бесселя.

Нижние индексы:

[0] – нулевой коэффициент разложения по малому параметру γ ;

{0} – нулевой коэффициент разложения по малому параметру σ ;

[1] – первый коэффициент разложения по малому параметру γ ;

{1} – первый коэффициент разложения по малому параметру σ ;

d – размерный (dimension);

i – номер фазы (глава I);

l – жидкость, нижний участок трубы (глава IV);

h – верхний участок трубы (глава IV);

s – скелет;

g – газ;

r, z, x – направления.

Сокращения:

ПДЗТСП – пространственный диапазон затухания температурного сигнала пласта;

ВДВТСП – временной диапазон влияния температурного сигнала пласта;

ПДКВ – пространственный диапазон конвективного влияния.

ГЛАВА I. ЗАДАЧА О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ В СКВАЖИНЕ

В первой главе приведен литературный обзор по обсуждаемой тематике. Описаны физические процессы, происходящие в восходящем потоке флюида в скважине и при его фильтрации к призабойной зоне.

Осуществлены математические постановки задач о нестационарном теплообмене флюида в скважине с окружающей средой, температурном поле и поле давления в пласте при фильтрации флюида к скважине, объединенные в термогидродинамическую модель.

Дана концепция асимптотического метода по коэффициентному осреднения. Проиллюстрировано его применение на задаче о поле давления, содержащей переменный коэффициент, обусловленный зависимостью проницаемости от вертикальной координаты. Приведен частный случай, когда использование разработанного метода позволило построить точное решение задачи.

1.1. Задача о нестационарном теплообмене в скважине

Диапазон температурных изменений в скважине простирается от температуры земной поверхности до температуры на забое скважины. Величина геотермического градиента большинства месторождений лежит в пределах от 0.01 до 0.06 К/м [216], поэтому для скважин глубиной 2 км температура на забое колеблется от 20 до 120 °С.

Для определения нижней границы температурного диапазона важна граница нейтрального слоя, т.е. самых верхних пластов, не подверженных сезонным колебаниям температур. Температура этого слоя может быть принята за 0 °С [216, 234]. Таким образом, основные температурные изменения в скважинах большинства месторождений локализованы в интервале от 270 до 400 К. Этот температурный диапазон принят в качестве базового в рассматриваемой работе.

1.1.1. Описание физических процессов в восходящем потоке

Рисунок 1.1 иллюстрирует геометрию задачи о нестационарном теплообмене восходящего потока в скважине радиуса r_0 . Вследствие осевой симметрии температурного поля используется цилиндрическая система координат с осью z_d , направленной вдоль оси скважины от забоя к устью. Обозначим θ_1 – температурное поле массива, θ – жидкости в трубе соответственно.

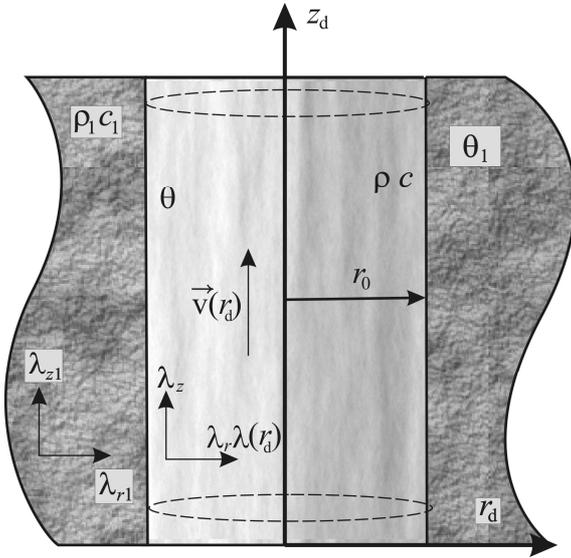


Рис. 1.1. Геометрия задачи о нестационарном теплообмене в скважине

В общем случае восходящий поток флюида в скважине является многофазным, имеет сложный состав и структуру [82, 102, 253, 272]. Из уравнений механики газожидкостных смесей можно получить эффективные параметры трехфазного потока [156] (1 – газ, 2 – нефть, 3 – вода).

Уравнение неразрывности для i -ой фазы с объемным содержанием

s_i и плотностью ρ_i имеет вид

$$\frac{\partial \rho_i s_i}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{mi} = q_i,$$

где функция плотности потока вещества содержит диффузионную, пропорциональную градиенту химического потенциала $\nabla \mu_i$, и конвективную составляющие $\vec{j}_{mi} = s_i D_{\mu i} \nabla \mu_i + s_i \rho_i \vec{v}_i$. Для трехфазного потока уравнение неразрывности запишется как

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^3 \rho_i s_i + \text{div} \left(\sum_{i=1}^3 s_i D_{\mu i} \nabla \mu_i + \sum_{i=1}^3 s_i \rho_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^3 q_i = 0. \quad (1.1.1)$$

Согласно (1.1.1), средняя плотность смеси трех фаз определяется выражением:

$$\rho = \sum_{i=1}^3 s_i \rho_i = s_1 \rho_1 + s_2 \rho_2 + s_3 \rho_3, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 1. \quad (1.1.2)$$

Из (1.1.1) с учетом (1.1.2) следует соотношение для вертикальной составляющей средней объемной скорости трехфазного потока

$$\bar{v} = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 \rho_i s_i} \sum_{i=1}^3 \rho_i s_i \bar{v}_i, \quad (1.1.3)$$

где \bar{v}_i – проекция вектора скорости i -ой фазы на ось z_d .

Исследуя аналогично уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\theta \sum_{i=1}^3 c_i \rho_i s_i \right) + \nabla \left(- \sum_{i=1}^3 \lambda_i s_i \nabla \theta + \sum_{i=1}^3 c_i \rho_i \bar{v}_i s_i \theta \right) = \sum_{i=1}^3 Q_{di}, \quad (1.1.4)$$

получим среднюю теплоемкость смеси

$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 \rho_i s_i} \sum_{i=1}^3 \rho_i c_i s_i,$$

где c_i – теплоемкость i -ой фазы, и средний коэффициент теплопроводности смеси

$$\lambda = \sum_{i=1}^3 s_i \lambda_i,$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности i -ой фазы.

Значение определяемых таким образом параметров заключается в том, что их использование позволяет свести задачу для многофазного течения к более простой задаче для определения температурного поля однофазного флюида, что существенно упрощает процесс поиска решений. Отсюда следует, что задача о температурном поле многофазного флюида сводится к задаче для течения одной фазы с эффективными параметрами, определяемыми выражениями (1.1.2), (1.1.3) и т.п.

При движении отбираемых углеводородов от забоя к устью скважины наряду с теплообменом наблюдается процесс выделения газа из нефти, который является фазовым переходом первого рода и сопровождается поглоще-

нием тепла, наряду с этим происходят диссипативные процессы превращения механической энергии в тепло за счет внутреннего трения, а также адиабатический эффект [15, 17, 19, 26, 178, 203, 233, 284, 286, 289].

Источники, обусловленные выделением газа, определяются следующим образом. Стационарное уравнение неразрывности для растворенной газовой компоненты имеет вид $\nabla \rho_g \vec{v}_l = -q$. Плотность растворенной газовой фазы определяется законом Генри $\rho_g = \alpha_g P \rho_l$, где ρ_l – плотность несущей жидкой фазы, ρ_g – плотность растворенного газа, \vec{v}_l – скорость жидкой фазы, α_g – коэффициент растворимости, P – давление на заданной глубине. Подставив в уравнение неразрывности закон Генри, найдем выражение для плотности источников $q = -\alpha_g \rho_l \vec{v}_l \nabla P$. Градиент давления при сравнительно невысоких скоростях содержит значительную гидростатическую составляющую $\rho_l \vec{g}$ и диссипативную $\nabla P - \rho_l \vec{g}$, которой часто можно пренебречь. С учетом этого найдем выражение для плотности источников растворенного газа $q = -\alpha_g \rho_l^2 \vec{v}_l \vec{g}$.

Соответствующая плотность тепловых источников получается простым умножением теплоты фазового перехода L на полученное выражение $q_{gd} = -\alpha_g \rho_l^2 \vec{v}_l \vec{g} L$. Для вертикального потока в скважине скорость и ускорение направлены противоположно, поэтому $q_{gd} = \alpha_g \rho_l^2 v_l g L$ [233].

Фазовые переходы в стволе скважины наблюдаются не только вследствие выделения газа, но и за счет выделения парафинистой фазы, происходящего из-за естественного снижения температуры в восходящем потоке. Уравнение конвективной теплопроводности, содержащее непрерывно распределенные источники тепла, зависящие от температуры, записывается в виде

$$c(T)\rho(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\nabla T\right) = \nabla(\lambda(T)\nabla T) + q^*(T), \quad (1.1.5)$$

где q^* – удельная мощность источников тепла, обусловленных отвердеванием парафина, $c(T)$, $\rho(T)$, $\lambda(T)$ – удельная теплоемкость (при постоянном объеме), плотность и теплопроводность нефти соответственно.

С увеличением температуры потока содержание в нем жидкой фазы увеличивается. Поглощение тепла, обусловленное фазовым переходом – $\Delta m_l L_l^*$, где L_l^* – скрытая теплота плавления. Так как L_l^* различается для компонент, скрытая теплота плавления L_l^* многокомпонентного вещества зависит от температуры T .

Рассмотрим в единице объема нагревающейся нефти элементарный малый объем, имеющий температуру T . Рост его температуры за время δt составит δT , а средняя скорость поглощения тепла, обусловленная плавлением определяется формулой

$$q^* = \frac{\delta Q}{\delta t} = - \frac{\delta \rho_l L_l^*}{\delta t} = - \frac{\delta \rho_l L_l^*}{\delta T} \frac{\delta T}{\delta t}.$$

Процесс выпадения парафина характеризуется тем, что плотность жидкой фазы, в основном, определяется температурой $\rho_l = \rho_l(T)$. По этой причине при переходе к дифференциалам использовано уравнение неразрывности для жидкой фазы и условие слабой сжимаемости несущей фазы. В результате выражение для плотности источников представлено в виде

$$q^* = -L^* \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \nabla T \right) = -L^* f(T) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \nabla T \right), \quad (1.1.6)$$

где $f(T) = \partial \rho_l / \partial T$ – кривая плавления парафина, определяемая экспериментально.

С учетом (1.1.6) уравнение (1.1.5) принимает вид

$$\left(c(T)\rho(T) + L^* f(T) \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \nabla T \right) = \nabla(\lambda(T)\nabla T). \quad (1.1.7)$$

Отсюда следует, что выпадение парафина описывается в уравнении конвективной теплопроводности добавлением к объемной теплоемкости произведе-

ния $L^* f(T)$, что соответствует кажущемуся росту теплоемкости и усилению ее зависимости от температуры.

Выделение газа и парафина приводят к изменениям вязкости отбираемых углеводородов. Вязкость нефти уменьшается с увеличением температуры [7, 29, 80, 119, 259]. Так, повышение температуры в пласте до 120–150°C приводит к снижению вязкости высоковязких нефтей с 1000 мПа·с до 3–4 мПа·с [119].

Тем не менее, изменения вязкости не вносят существенного вклада в температурное поле. Например, в случае стационарного течения уравнение баланса массы имеет вид $\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$, откуда вдоль ствола скважины имеем $v = \rho_0 v_0 / \rho$. Таким образом, значения скорости определяются ее граничным значением на входе в скважину (и законом сохранения массы) и не зависят от вязкости. В Приложении А показано, что зависимость вязкости от температуры влияет на поле давления и практически не влияет на температурное поле.

Изменение коэффициента теплопроводности нефти в температурном диапазоне 40–190°C составляет 2–5 % (см. Приложение А). Анализ экспериментальных данных [7] показывает, что зависимость коэффициента теплопроводности от температуры с высокой точностью представляется линейной функцией, поскольку погрешность аппроксимации не превышает 1 %. Величина температурного коэффициента теплопроводности лежит в пределах от $0.4 \cdot 10^{-5}$ до $0.2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ и представляется маленькой величиной, которая может быть принята в качестве малого параметра задачи. Для окружающих пород коэффициент теплопроводности в диапазоне температур 25–150°C изменяется от 1 % до 12 % в зависимости от типа пород. Однако возмущение температуры в окружающих породах на порядок меньше, поэтому влиянием температурной зависимости окружающих пород в задаче пренебрегается.

Температурный коэффициент теплоемкости нефти и окружающих пород в температурном диапазоне 20–175°C изменяется от $0.1 \cdot 10^{-2}$ до $0.2 \cdot 10^{-2}$ K^{-1} , при этом рост теплоемкости составляет от 14 % до 24 % [7].

В предположении, что поле скоростей жидкости в трубе имеет только одну отличную от нуля составляющую – в направлении оси z_d $\vec{v} = (0, 0, \langle v \rangle R(r_d/r_0))$, уравнения гидродинамики для установившегося аксиально-симметричного течения позволяют представить скорость в виде произведения средней по сечению потока скорости $\langle v \rangle$ и функции, в которую внесена зависимость от радиальной координаты $R(r)$: $v(r) = \langle v \rangle R(r)$ [182, 192, 212, 223, 233]. Кроме того, функция $R(r)$ включает зависимость профиля скорости от геометрии и размеров полости течения и т.д. Очевидно, эта функция различается для ламинарного и турбулентного режимов течения. Кроме того, на нее оказывает влияние выделение газа и парафина.

1.1.2. Радиальный профиль скорости при ламинарном течении несжимаемой жидкости

Радиальное распределение поля скорости в однородном ламинарном потоке, построенное Пуазейлем на основе решения уравнения Навье – Стокса, имеет вид [223, 233]

$$v = 2\langle v \rangle \left[1 - \left(\frac{r_d}{r_0} \right)^2 \right].$$

Выражение для средней скорости потока $\langle v \rangle = -\Delta P r_0^2 / (8l\mu)$ включает ΔP – перепад давления на участке трубы длиной l , μ – вязкость жидкости. Знак минус в этой формуле и ниже свидетельствует о том, что перепад давления отрицательный $\Delta P < 0$, поскольку жидкость течет противоположно градиенту давления [86].

Для несжимаемой жидкости в трубе постоянного радиуса, согласно уравнению неразрывности, средняя скорость $\langle v \rangle$ по всей длине скважины постоянна и от вязкости не зависит. Физически этот факт означает, что при

всяком изменении вязкости соответственно изменяется перепад давления. Аналогичное имеет место и для стационарного течения сжимаемого флюида.

Функция $R(r_d)$ при ламинарном режиме течения записывается как

$$R(r_d) = 2 \left[1 - \left(\frac{r_d}{r_0} \right)^2 \right],$$

откуда следует, что она тоже не зависит от вязкости.

Поскольку в задачу о температурном поле входят $\langle v \rangle$ и $R(r_d)$, то отсюда следует, что в сделанных предположениях температурное поле не зависит от вязкости.

Можно показать также, что учет диссипативных источников тепла также не приводит к зависимости температурного поля от вязкости как для ламинарного, так и для турбулентного потоков. Эти рассуждения позволяют заключить, что зависимость вязкости от температуры практически не влияет на температурное поле в скважине.

Теплопроводность несущей среды при ламинарном режиме течения от пространственных координат не зависит и совпадает с молекулярной λ_d во всей области, занимаемой несущей жидкостью [223].

1.1.3. Процессы переноса в турбулентном потоке

Турбулентный режим реализуется при значениях числа Рейнольдса $Re_{кр} = 2000 - 2300$. Согласно оценкам, представленным в таблице 1.1, составленной из экспериментальных данных, опубликованных в работе [152], турбулизация потока нефти в скважине возможна при дебитах от $34 \text{ м}^3/\text{сут}$ и выше.

Таблица 1.1.

Дебит нефти для скважин месторождений РБ,
при котором достигается критическое значение Re

Месторождение	Плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$	Вязкость нефти при $50 \text{ }^\circ\text{C}$, $\text{мПа}\cdot\text{с}$	Дебит скважины ($Re_{кр.} = 2320$), $\text{м}^3/\text{сут}$
Гежское	0,809	1,50	171
Осинцевское	0,818	1,40	158
Аскаринское	0,905	2,60	266
Леяковское	0,809	1,30	149
Русский хутор	0,814	0,30	34

Газли	0,816	1,40	159
Юго-западный юлдузкак	0,800	1,50	173
Северо-Варьеганское	0,793	1,10	128
Тагринское	0,723	0,44	56

Таким образом, исследование особенностей формирования температурного поля турбулентного потока является важной задачей скважинной теплофизики.

1.1.3.1. Зависимость турбулентной теплопроводности в скважине от радиальной координаты

Флуктуации скорости и температуры, возникающие в турбулентных потоках, приводят к изменению его структуры, эффективной вязкости и теплопроводности [1, 58, 221, 270, 276, 278, 307, 314, 322, 333]. Жидкость по теплофизическим свойствам приобретает неоднородность и анизотропность, поскольку коэффициент теплопроводности зависит от радиуса и направления. Известны различные эмпирические формулы для расчета вязкости и теплопроводности при турбулентном течении [94, 224, 263, 270, 307, 322, 323], позволяющие приближенно определить соотношения для расчета поля скорости в трубе кругового сечения.

Существо турбулентной теплопроводности можно пояснить следующим образом. Флуктуации скорости являются отражением случайных смещений участков среды, охваченной турбулизацией. Поскольку эти смещения случайны и являются отклонениями от регулярного движения потока, то осредненные по пространству и времени значения смещений равны нулю. Это означает, что макроскопического конвективного переноса несущей среды эти отклонения не вызывают. Однако именно эти отклонения являются причиной переноса тепла, примесей, заряда при наличии градиентов температуры, химического и электрического потенциалов [270, 322, 323].

Математическое описание соответствующих процессов требует использования тензорного исчисления, поскольку турбулизация потока связана с некоторым упорядоченным движением, определяющим выделенное направление в пространстве. Хотя чаще всего несущая среда в отсутствие

движения однородна и изотропна, для общности описания введем тензор теплопроводности, вектор-столбец скорости и оператор-столбец градиента, используя в обозначении двух последних выделенный жирный шрифт, в виде

$$\|\lambda_d\| = \begin{vmatrix} \lambda_{rr} & \lambda_{r\varphi} & \lambda_{rz} \\ \lambda_{\varphi r} & \lambda_{\varphi\varphi} & \lambda_{\varphi z} \\ \lambda_{zr} & \lambda_{z\varphi} & \lambda_{zz} \end{vmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

В обозначениях обычных векторов здесь и ниже выделенный шрифт не применяется.

При турбулентном режиме течения *микроскопический* тепловой поток \vec{j}_m складывается из диффузионного $\vec{j}_{df} = -\|\lambda_d\| \vec{\nabla} \theta$ и конвективного $\vec{j}_{cv} = c\rho \vec{v}_m \theta$, где скорость $\vec{v}_m(r)$ представляется в виде суммы регулярной $\vec{v}_{rg}(r)$ и случайной турбулентной \vec{v}_m составляющих [223]

$$\vec{j}_m = -\|\lambda_d\| \vec{\nabla} \theta + c\rho (\vec{v}_{rg} + \vec{v}_m) \theta.$$

Строго говоря, в выражениях для микроскопических потоков вместо θ должна использоваться микроскопическая температура θ_m , также испытывающая турбулентные флуктуации. Анализ турбулентных флуктуаций температуры здесь упрощен без заметного искажения существа теории.

Микроскопический тепловой поток испытывает большие пространственные и временные турбулентные флуктуации, поэтому его измерение затруднено. На практике проще и чаще осуществляется регистрация так называемого *макроскопического* потока \vec{j} . Макроскопический поток получается осреднением по пространству и времени микроскопического потока для того, чтобы выровнять влияние случайных турбулентных флуктуаций

$$\vec{j} = \langle \vec{j}_m \rangle = -\|\lambda_d\| \langle \nabla \theta \rangle + c\rho \langle \vec{v}_m \theta \rangle + c\rho \vec{v}_{rg} \langle \theta \rangle.$$

Полученное выражение для макроскопического потока содержит диффузионную, турбулентную и конвективную составляющие [182, 221].

Турбулентная составляющая потока тепла $\vec{j}_t = c\rho\langle\vec{v}_m\theta\rangle$ отлична от нуля, поскольку \vec{v}_m и θ коррелированы. Эта корреляция вызвана зависимостью температурного поля от скорости, поскольку это поле описывается уравнением конвективной теплопроводности, содержащим в используемых здесь обозначениях слагаемое $\vec{v}^T\vec{\nabla}\theta$, где $\vec{v}^T = (v_r, v_\varphi, v_z)$ – транспонированный вектор-столбец скорости. Отсюда также следует, что турбулентный поток тепла зависит от градиента температуры $\vec{j}_t = \vec{j}_t(\vec{\nabla}\theta)$.

Дальнейшие преобразования сводятся к разложению в ряд Маклорена вектора турбулентного потока тепла \vec{j}_t по градиенту температуры $\vec{\nabla}\theta$. Легко показать, что нулевое слагаемое разложения, не зависящее от градиента температуры, обращается в нуль, поскольку случайные компоненты скорости не создают регулярного движения несущей среды. Первое слагаемое разложения вектора \vec{j}_t представляется в виде выражения [221]

$$\vec{j}_t = -\|\lambda_t\|\vec{\nabla}\theta,$$

где коэффициенты разложения образуют тензор

$$\|\lambda_t\| = \begin{vmatrix} \lambda_{t,rr} & \lambda_{t,r\varphi} & \lambda_{t,rz} \\ \lambda_{t,\varphi r} & \lambda_{t,\varphi\varphi} & \lambda_{t,\varphi z} \\ \lambda_{t,zr} & \lambda_{t,z\varphi} & \lambda_{t,zz} \end{vmatrix},$$

описывающий турбулентную составляющую теплопроводности.

Применительно к течению в трубах особое значение имеет радиальная компонента тензора турбулентной теплопроводности $\lambda_{t,rr}$. Несущие турбулентность жидкости чаще всего изотропны, поэтому радиальная компонента тензора молекулярной теплопроводности идентифицируется с обычной теплопроводностью $\lambda_{rr} = \lambda_d$. Кроме того, турбулентная теплопроводность, индуцированная турбулентными конвективными смещениями среды, реализуется через обычную, молекулярную. По этой причине $\lambda_{t,rr}$ содержит пропорциональный молекулярной теплопроводности множитель λ_d [223].

При течении по трубам турбулентная теплопроводность зависит от расстояния до центра трубы

$$\lambda_{t,rr} = \lambda_{rr} \lambda_t(r) = \lambda_d \lambda_t(r),$$

где $\lambda_t(r)$ – фактор турбулентности, или относительная турбулентная теплопроводность.

Результирующая теплопроводность в каждой точке внутри трубы складывается из молекулярной и турбулентной

$$\lambda_{rs} = \lambda_d + \lambda_{t,rr} = \lambda_d (1 + \lambda_t(r)) = \lambda_d \lambda(r),$$

где $\lambda(r) = 1 + \lambda_t(r)$ – удобное представление относительной результирующей теплопроводности, поскольку для ламинарного потока турбулентная составляющая обращается в нуль $\lambda_t(r) = 0$, а $\lambda(r) = 1$.

Фактор турбулентности хорошо изучен экспериментально. В [94] для его расчетов рекомендовано несколько эмпирических зависимостей, из которых для расчетов, представленных в диссертации, выбрана следующая:

$$\lambda_t(r) = \kappa [\exp(\kappa u) - \varphi_3(u)] / E,$$

где $\kappa = 0.407$, $E = 10$, $\varphi_m(u) = \sum_{n=0}^m (\kappa u)^n / n!$. Расчеты турбулентной теплопроводности осуществляются совместно с радиальным профилем, при определении которого важнейшую роль играет внутреннее трение, основной вклад в которое вносит турбулентная составляющая. При ее анализе, как и при изучении турбулентной диффузии, применимы те же представления, что и приведенные выше для теплопроводности.

1.1.3.2. Радиальный профиль скорости при турбулентном течении в скважине

Поле скоростей в сечении трубы с турбулентным потоком находится из уравнений Сполдинга [94]

$$y(r_d) = u(r_d) + [\exp(\kappa u(r_d)) - \varphi_4(u(r_d))] / E,$$

а турбулентный профиль скорости определен по формуле

$$R(r_d/r_0) = u(y(r_d)) / v_0 \sqrt{\tau_0/\rho},$$

где τ_0 – касательное напряжение, $y(r_d) = \sqrt{\tau_0/\rho}(r_0 - r_d)/\nu$, $u(y(r(r_d)))$ – решение уравнения Сполдинга. Соотношение τ_0/ρ определено из уравнения Кармана – Никурадзе

$$1/\sqrt{4f} = -0.8 + 0.87 \ln(\text{Re} \sqrt{4f}),$$

где $f = 2\tau_0\rho/\nu_0^2$.

Расчеты полей скорости и турбулентного фактора на основе приведенных зависимостей без особых трудностей реализуются с стандартных математических программных пакетов.

Таким образом, флюид в турбулентном потоке приобретает фиктивные ортотропные свойства, связанные с проявлением турбулентности ($\lambda_r, \lambda(r_d/r_0)$ и λ_z – соответствующие осям компоненты тензора теплопроводности жидкости с учетом турбулентной составляющей). Коэффициент теплопроводности λ_r и скорость жидкости в трубе зависят только от расстояния до оси скважины: $\lambda_r, \lambda(r_d/r_0)$, $v(r_d/r_0) = v_0 R(r_d/r_0)$ [223].

1.1.4. Свойства окружающей среды

Массив пород, окружающих скважину, будем считать ортотропным. Компоненты теплопроводности массива в соответствии с направлениями осей λ_{r1} и λ_{z1} . Восходящий поток в стволе скважины способствует нагреву (или охлаждению) окружающих пород, поэтому необходимо учитывать влияние температурного поля окружающих пород на формирование температурного поля в скважине [27, 33, 223].

При отсутствии движения флюида в стволе скважины распределение температуры вдоль ствола стремится к геотермическому распределению (геотерме). Геотерма в слоистой среде является кусочно-линейной функцией, изменяющей угол наклона на границах соприкосновения пластов за счет разницы их теплопроводностей, так как поток тепла из недр остается постоянным или меняется незначительно в пределах конкретного нефтяного месторождения [68]. Геотермическое распределение не меняется в участках пласта, удаленных от скважины $r_{1d} \rightarrow \infty$, так как зона теплового влияния

скважины ограничена, как при бурении, так и при эксплуатации [233, 250, 251].

1.2. Уравнения для описания температурных полей в скважине и окружающей среде с учетом анизотропии

Вывод уравнения теплопроводности для анизотропной среды базируется на уравнении неразрывности, выражающем закон сохранения энергии [112, 223]:

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \vec{j} = q_d. \quad (1.2.1)$$

Плотность источников тепла определяется выражением

$$q_d = -\eta c \rho^2 \bar{g} \bar{v} R(r) + q_{gd}, \quad (1.2.2)$$

которое содержит источники возникающие в следствии адиабатического эффекта в восходящем потоке $\eta c \rho^2 \bar{g} \bar{v}$ и другие источники тепла q_{sd} .

Для плотности тепловой энергии запишем [120]:

$$\rho_q = c \rho \theta. \quad (1.2.3)$$

Для ортотропной по теплофизическим свойствам среды вектор плотности потока тепла с учетом конвекции представляется функцией

$$\vec{j} = \vec{j}(\nabla \theta, \vec{v}). \quad (1.2.4)$$

Разложение функции (1.2.4) в ряд Маклорена позволило получить следующее тензорное представление для плотности потока тепла [223]:

$$\begin{pmatrix} j_{rs\ r} \\ j_{rs\ \varphi} \\ j_{rs\ z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \rho v_r \\ c \rho v_\varphi \\ c \rho v_z \end{pmatrix} \cdot \theta - \begin{pmatrix} \lambda_{rs\ rr} & \lambda_{rs\ r\varphi} & \lambda_{rs\ rz} \\ \lambda_{rs\ \varphi r} & \lambda_{rs\ \varphi\varphi} & \lambda_{rs\ \varphi z} \\ \lambda_{rs\ zr} & \lambda_{rs\ z\varphi} & \lambda_{rs\ zz} \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla} \theta, \quad (1.2.5)$$

в котором введены коэффициенты в соответствии с направлением осей. Для ортотропной среды систему координат можно ориентировать таким образом, что результирующий тензор будет представлен диагональной матрицей. Выражение для диффузионного потока тепла в этом случае представляется как [223]

$$\begin{pmatrix} j_{df\ r} \\ j_{df\ \varphi} \\ j_{df\ z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_r \lambda(r) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_z \end{pmatrix} \vec{\nabla} \theta. \quad (1.2.6)$$

В случае аксиальной симметрии температурного поля, наиболее подходящего для описания реального теплового поля в скважине для дивергенции потока тепла с учетом (1.2.5), (1.2.6) получим следующее выражение:

$$\nabla \vec{j} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_d \lambda(r) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + c_p \vec{v} \nabla \theta, \quad (1.2.7)$$

где учтено условие несжимаемости $\nabla \vec{v} = 0$.

Подстановкой (1.2.3) и (1.2.7) в (1.2.1) в предположении, что $\vec{v} = (0, 0, v(r))$ и $\lambda_r = \lambda_d$, получено уравнение теплопроводности для несжимаемого флюида в трубе с учетом конвекции [221]

$$c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_d \lambda(r) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + c_p v_0 R(r) \frac{\partial \theta}{\partial z} = q_d. \quad (1.2.8)$$

Уравнение теплопроводности в окружающем трубу массиве получено из (1.2.8) в предположении постоянства радиальной и вертикальной компонент тензора теплопроводности, при отсутствии источников и конвективного слагаемого [233]

$$c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} = 0. \quad (1.2.9)$$

Уравнения (1.2.8) и (1.2.9) являются основными для описания температурных полей в скважине и окружающих породах соответственно.

1.3. Уравнение для температурных полей в скважине с учетом сжимаемости флюида

Автором диссертации совместно с профессором А.И. Филипповым и аспирантом А.Г. Крупиновым дан детальный вывод уравнения, описывающего баротермический эффект при движении сжимаемого флюида в скважине. Для баланса внутренней энергии движущегося сжимаемого газа в скважине запишем следующее дифференциальное уравнение [189]:

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon_{\text{внутр}})}{\partial t} + \text{div}(\bar{\omega}\rho\varepsilon_{\text{внутр}}) - \text{div}(\lambda\nabla\theta) = \omega_q - \omega_k' - P\text{div}\bar{\omega}. \quad (1.3.1)$$

Воспользовавшись соотношением $I = \varepsilon_{\text{внутр}} + P/\rho$ – выделим в (1.3.1)

энтальпию [189]

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} + \text{div}(\bar{\omega}\rho I) - \text{div}(\lambda\nabla\theta) = \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\bar{\omega}P) - P\text{div}\bar{\omega} - \omega_k' + \omega_q \quad (1.3.2)$$

или

$$I \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial I}{\partial t} + I \cdot \nabla(\bar{\omega}\rho) + \bar{\omega}\rho \cdot \nabla I - \text{div}(\lambda\nabla\theta) = \frac{\partial P}{\partial t} + \bar{\omega}\nabla P - \omega_k' + \omega_q. \quad (1.3.3)$$

Выразив из известной формулы для энтальпии

$$dI = cd\theta + (1 - \alpha\theta) \frac{dP}{\rho}, \quad (1.3.4)$$

частные производные легко получить для (1.3.3), используя определение полного дифференциала функций $I(t, x_d, y_d, z_d)$, $\theta(t, x_d, y_d, z_d)$, $P(t, x_d, y_d, z_d)$

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial t} dt + \frac{\partial I}{\partial x_d} dx_d + \frac{\partial I}{\partial y_d} dy_d + \frac{\partial I}{\partial z_d} dz_d = c \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} dt + \frac{\partial \theta}{\partial x_d} dx_d + \frac{\partial \theta}{\partial y_d} dy_d + \frac{\partial \theta}{\partial z_d} dz_d \right) + \\ &+ \frac{(1 - \alpha\theta)}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial x_d} dx_d + \frac{\partial P}{\partial y_d} dy_d + \frac{\partial P}{\partial z_d} dz_d \right) = \left(c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{(1 - \alpha\theta)}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \right) dt + \\ &+ \left(c \frac{\partial \theta}{\partial x_d} + \frac{(1 - \alpha\theta)}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_d} \right) dx_d + \left(c \frac{\partial \theta}{\partial y_d} + \frac{(1 - \alpha\theta)}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y_d} \right) dy_d + \left(c \frac{\partial \theta}{\partial z_d} + \frac{(1 - \alpha\theta)}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z_d} \right) dz_d, \end{aligned}$$

откуда следует равенство множителей при dt , dx_d , dy_d , dz_d , а именно:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \left(c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{(1 - \alpha\theta)}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial I}{\partial x_d} = \left(c \frac{\partial \theta}{\partial x_d} + \frac{(1 - \alpha\theta)}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_d} \right), \quad (1.3.5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial y_d} = \left(c \frac{\partial \theta}{\partial y_d} + \frac{(1 - \alpha\theta)}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y_d} \right), \quad \frac{\partial I}{\partial z_d} = \left(c \frac{\partial \theta}{\partial z_d} + \frac{(1 - \alpha\theta)}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z_d} \right).$$

Подставляя в (1.3.3) выражения для производных (1.3.5), выделенные из (1.3.4), получаем [194]

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho c \bar{w} \nabla \theta + \bar{w} (1 - \alpha \theta) \nabla P - \operatorname{div}(\lambda \nabla \theta) = \\ = \bar{w} \nabla P + \alpha \theta \frac{\partial P}{\partial t} - I \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{w} \rho \right) - \omega_k' + \omega_q. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

С учетом уравнения неразрывности (1.3.6) можно записать в форме

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho c \bar{w} \nabla \theta + \bar{w} (1 - \alpha \theta) \nabla P - \operatorname{div}(\lambda \nabla \theta) = \bar{w} \nabla P + \alpha \theta \frac{\partial P}{\partial t} - \omega_k' + \omega_q. \quad (1.3.7)$$

Частный случай уравнения (1.3.7), в котором пренебрегается молекулярным переносом тепла сонаправленным с движением потока, представлен в работе [156]. Подставив соотношения для адиабатического коэффициента $\eta = \alpha \theta / \rho c$ и коэффициента Джоуля – Томсона $\varepsilon_{\text{ДЖ}} = (1 - \alpha \theta) / \rho c$ [177, 216] в (1.3.7), запишем

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{w} \rho c (\nabla \theta + \varepsilon_{\text{ДЖ}} \nabla P) - \rho c \eta \frac{\partial P}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \nabla \theta) + \bar{w} \nabla P - \omega_k' + \omega_q. \quad (1.3.8)$$

Из уравнения (1.3.8) для квазистационарного (с точки зрения газодинамики) течения, пренебрегая изменением кинетической энергии и молекулярным теплопереносом в направлении движения потока, учитывая теплообмен с окружающими породами согласно закону Ньютона – Рихмана получается известное уравнение Чекалюка [249].

Уравнение (1.3.8) можно также записать как

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{w} \rho c \nabla \theta - \bar{w} \rho c \eta \nabla P - \operatorname{div}(\lambda \nabla \theta) = \rho c \eta \frac{\partial P}{\partial t} - \omega_k' + \omega_q. \quad (1.3.9)$$

Таким образом, получено температурное уравнение в самом общем виде, связывающее тепловые и газодинамические характеристики [194].

При подстановке $\eta = 0$, из (1.3.9) получается известное уравнение для несжимаемой жидкости, которое в отсутствие молекулярного переноса тепла и внутреннего источника описывает изменение температуры только за счет конвекции и трения, что говорит об универсальном характере формы уравнения (1.3.9).

Гидродинамические параметры \bar{w} , $\operatorname{grad} P$, $\partial P / \partial t$ определяются из соответствующей гидродинамической задачи.

1.4. Математическая формулировка задачи о температурном поле в скважине в размерных переменных

В предположении осевой симметрии постановка задачи о нестационарном теплообмене восходящего потока содержит уравнение теплопроводности в окружающей скважину ортотропной среде [93, 182]

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \lambda_{r1} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \right) - \lambda_{z1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2} = 0, \quad r_d > r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0 \quad (1.4.1)$$

и уравнение теплопроводности с учетом конвекции

$$c(\theta) \rho(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \lambda \left(\frac{r_d}{r_0}, \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right) - \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} + c(\theta) \rho(\theta) v_0 R \left(\frac{r_d}{r_0} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z_d} = q_d, \quad r_d < r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0 -$$

в скважине.

Как показывает анализ экспериментальных данных (см. Приложение А), зависимости теплоемкости и коэффициента теплопроводности от температуры могут быть представлены в виде линейных, которые теоретически обоснованы представлением в виде первых двух слагаемых рядов Тейлора

$$c(\theta) = c(\theta - \theta^* + \theta^*) = c(\theta^*) + \left. \frac{dc}{d\theta} \right|_{\theta=\theta^*} (\theta - \theta^*) = c^* (1 + \zeta^* (\theta - \theta^*)),$$

$$\lambda(\theta) = \lambda(\theta - \theta^* + \theta^*) = \lambda(\theta^*) + \left. \frac{d\lambda}{d\theta} \right|_{\theta=\theta^*} (\theta - \theta^*) = \lambda^* (1 + \gamma^* (\theta - \theta^*)),$$

где ζ^* , γ^* – температурные коэффициенты теплоемкости и теплопроводности соответственно. Величина ζ^* имеет порядок 10^{-2} K^{-1} , а $\gamma^* - 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, что позволяет использовать эти коэффициенты в качестве малых параметров. С учетом вышесказанного, молекулярной и турбулентной составляющей $\lambda_r \lambda(r_d/r_0)$, уравнение конвективной теплопроводности флюида с источниками в трубе в предположении, что скорость жидкости зависит от расстояния до оси скважины $v = v_0 R(r_d/r_0)$, запишется как

$$\begin{aligned}
& c\rho(1 + \sigma^*(\theta - \theta^*))\frac{\partial\theta}{\partial t} - \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \lambda \left(\frac{r_d}{r_0} \right) (1 + \gamma^*(\theta - \theta^*)) \frac{\partial\theta}{\partial r_d} \right) - \\
& - \lambda_z \frac{\partial^2\theta}{\partial z_d^2} + c\rho(1 + \sigma^*(\theta - \theta^*))v_0 R \left(\frac{r_d}{r_0} \right) \frac{\partial\theta}{\partial z_d} = q_d, \quad r_d < r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0.
\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Функция источников тепла q_d описывается выражением (1.2.2). Заметим, что параметр σ^* учитывает зависимость не только теплоемкости, но и плотности от температуры.

Уравнение (1.4.2), таким образом, в достаточной степени обеспечивает учет зависимости теплофизических свойств флюида в скважине от температуры.

На границе трубы и окружающей среды заданы условия равенства температур

$$\theta|_{r_d=r_0} = \theta_1|_{r_d=r_0} \tag{1.4.3}$$

и тепловых потоков

$$\left(\lambda_r \lambda \left(\frac{r_d}{r_0} \right) (1 + \gamma^*(\theta - \theta^*)) \frac{\partial\theta}{\partial r_d} \right) \Big|_{r_d=r_0} = \lambda_{r1} \frac{\partial\theta_1}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0}, \tag{1.4.4}$$

здесь $\lambda(1) = 1$, поскольку турбулентность в пристеночном подслое, как правило, отсутствует.

В начальный момент времени температура флюида в скважине и окружающих пород соответствует геотермическому распределению

$$\theta|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad \theta_1|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \tag{1.4.5}$$

Радиус температурного влияния скважины ограничен

$$\theta_1|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \tag{1.4.6}$$

На границе $z_d = 0$ температура потока задана известной из задачи определения величины баротермического эффекта (см. гл. V) зависимостью

$$\theta|_{z_d=0} = \theta_{10}(t). \tag{1.4.7}$$

Кроме условий (1.4.3) – (1.4.7) при решении используется также условие симметрии: производная от функции температуры по радиальной координате равна нулю при $r_d = 0$.

Для получения единственного решения задачи следует сформулировать граничные условия по z_d . Далее показано, что после приведения задачи к безразмерному виду, вторыми производными по z_d в уравнениях теплопроводности можно пренебречь [224, 226].

Задача (1.4.1)–(1.4.7) в предлагаемой постановке является довольно общей и описывает широкий спектр процессов теплообмена в различных потоках жидкости:

- Модельный случай выровненного профиля скорости. Для выровненного профиля скорости построено наибольшее число моделей. Для перехода к этому случаю достаточно положить $\lambda(r)=1$, $R(r)=1$.
- Ламинарное течение. Функция профиля скорости $R(r)$ в этом случае описывается решением Пуазейля, а $\lambda(r)=1$.
- Турбулентного течения. Функции $R(r)$ и $\lambda(r)$ в этом случае зависят от радиальной координаты.
- Другие осесимметричные виды течения, например, газожидкостное при малом содержании газа. Для использования полученных уравнений достаточно определить функции радиальных профилей скорости и теплопроводности.

Так как для решения задач, в которых учтены вышеизложенные факторы, отсутствуют аналитические методы решения, то задача в полной постановке ранее, в работах других исследователей, заменялась более простой задачей.

В.Г. Шухов, вместо условий IV рода для теплообмена на границе скважины и окружающих пород использовал условия III рода, причем полагал коэффициент теплообмена потока в скважине с окружающими породами стационарным. Э.Б. Чекалюком в его докторской диссертации предложен способ интегрального учета теплообмена флюида в скважине с окружающим

массивом, а поток тепла представлялся в виде свертки [249]. Построенные Э.Б. Чекалюком решения для потока несжимаемой жидкости и газа в стволе скважины и ныне представляют ценность для расчета средней температуры газа или жидкости в стволе скважины. Некоторые из последующих работ посвящены развитию его подхода [154–156, 163].

В этих работах математические модели разработаны в предположении постоянства профиля скорости и температуры по сечению скважины. Это означает, что полученные зависимости не позволяют строить радиальные распределения температуры даже в режиме выровненного профиля скорости.

Использование термометрии при разработке нефтегазовых месторождений обострило проблему расчета радиальных зависимостей температуры в скважине [47, 49, 65, 106, 142, 143, 144, 154, 211, 255]. Это связано с тем, что высокочувствительный термометр, спускаемый на кабеле вдоль ствола скважины и чаще всего приближенный к ее стенке, в некоторых случаях от нее удаляется, приближаясь к оси скважины.

Уровень разрешающей способности современных термометров (10^{-3} – 10^{-4} К) намного выше перепадов температуры между стенкой и центром скважины, которые достигают нескольких градусов [91, 143]. Наблюдаемые на практике радиальные профили скорости зависят также от режима течения (ламинарное, турбулентное), наличия газовой фазы в жидкости, которая может приводить к возникновению встречных потоков. Поэтому важно знать радиальные распределения температуры в потоке для того, чтобы прогнозировать температурные аномалии, возникающие при этом.

Итак, предлагаемая в работе термогидродинамическая модель, в отличие от предшествующих работ [2, 5, 6, 8, 36, 40, 43, 54, 57, 59, 87, 99, 101, 110, 111, 115, 134, 135, 138–141, 146, 154–156, 167, 244, 264, 267, 268, 294, 296, 312–315, 317, 319, 321], позволяет:

- учесть зависимости теплофизических свойств флюида от температуры и пространственных координат, возникающие вследствие турбулентности и межфазного массообмена,

- исследовать влияние на теплообмен реального профиля скорости, зависящего от режима течения и фазового состава потока,
- перейти к физически более оправданным условиям равенства температур и тепловых потоков (вместо условия теплообмена по Ньютону) [121, 235] и т.п.

Однако учет указанных факторов приводит к нелинейным задачам, содержащим дополнительно переменные коэффициенты. Решение таких задач сильно затруднено и потребовало существенного развития методов их решения.

Особенностью развиваемого в данной работе подхода является включение в развиваемую термогидродинамическую модель описания процессов в перфорированном пласте, поскольку они определяют температуру жидкости в скважине в точке начала движения – температурный сигнал пласта [83, 84, 220, 290, 293]. Процессы в пласте, в свою очередь, определяются полем давления [30, 32–35, 247, 248]. Модель, включающая взаимосвязанные задачи о температурных полях в скважине и пласте, а также о полях давления, названа здесь *объединенной*. Такое расширение круга задач существенно повышает достоверность описания температурных полей в скважине и требует развития общих методов исследования теплофизических процессов.

1.5. Физические процессы, определяющие температурное поле в пласте

Дросселирование нефти и воды по пласту приводит к повышению его температуры, в результате теплопроводности нагреваются и окружающие работающий пласт породы. В покрывающих породах непосредственное измерение температуры, обусловленное теплоотдачей работающего пласта, затруднено вследствие экранирующего влияния конвективного переноса тепла потоком жидкости в стволе скважины. В работах Sage B.H., Lacey W.N., Steffensen R.J., Smith R.G. и др. утверждается, что при фильтрации углеводородов наблюдается эффект Джоуля – Томсона [177].

Известно, что классический эффект Джоуля – Томсона заключается в повышении температуры потока при стационарной фильтрации в устано-

вившемся поле давления [63, 64]. Температурное поле при этом тоже должно быть установившимся. Реализация таких условий в нефтегазовых пластах затруднена и практически невозможна из-за значительных размеров пластов и условий эксплуатации скважин [4, 46, 48, 53, 60].

Вследствие упругости горных пород разработка подавляющего большинства нефтяных залежей протекает в упругом режиме, при котором наблюдаются длительные неустановившиеся процессы перераспределения пластового давления. Пластовые давления в реальных случаях нестационарны, поскольку насосная эксплуатация более отвечает режиму постоянного отбора, поэтому установление стационарного температурного поля требует времен, сравнимых со временем выработки пласта. В силу этого многочисленные попытки использования теории эффекта Джоуля – Томсона для нефтяных и газовых скважин противоречивы и приводят к расхождению с экспериментом [158, 177, 257].

Обоснованным представляется использование значительно более сложной теории баротермического эффекта, заключающегося в эволюции температурного поля при фильтрации в нестационарном поле давления [45, 157–159, 161, 177]. Определение величины баротермического эффекта связано с решением взаимосвязанных задач о полях давления, скоростей и температуры в реальных неоднородных и анизотропных пластах. Решение таких задач является одним из основных этапов настоящей работы, поскольку эта температурная аномалия (температурный сигнал пласта) служит начальным условием для температурного поля в скважине, а так же позволяет оценивать коллекторские характеристики призабойной зоны пласта.

Вывод уравнения, описывающего баротермический эффект при фильтрации сжимаемого флюида в значительной степени совпадает с приведенным в разделе 1.3. Окончательный вид уравнения представлен как

$$((1 - m)\rho_s c_s + m\rho c) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{w}\rho c (\nabla \theta + \varepsilon_{дж} (\nabla P - \rho \bar{g})) - \quad (1.5.1)$$

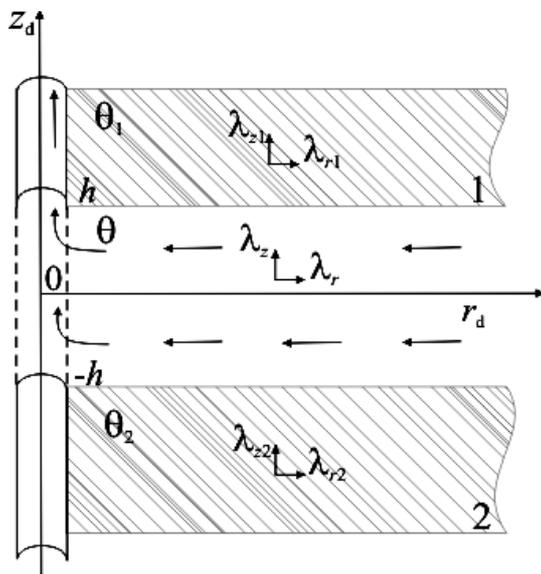
$$-\rho c \eta \frac{\partial P}{\partial t} - \eta c \rho^2 \vec{g} \vec{w} = \text{div}(\lambda \nabla \theta),$$

из которого в частном случае следует известное уравнение Чекалюка [249].

Величины $\text{grad}P$, $\partial P/\partial t$ определяются из соответствующей задачи для поля давления (см. гл. VI), а поля скоростей \vec{w} – с помощью закона Дарси [44, 72, 77].

1.6. Формулировка задачи для определения функции температурного сигнала пласта

Функция $\theta_{10}(t)$, представляющая граничное условие в постановке



(1.4.1)–(1.4.7), является решением следующей задачи. В цилиндрической системе координат слоисто-неоднородный пористый пласт представлен тремя областями с плоскими границами раздела $z_d = \pm h$, перпендикулярными вертикальной оси z_d , сонаправленной с осью скважины (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Геометрия задачи о температурном поле при фильтрации флюида к скважине

Каждая область считается ортотропной и характеризуется плотностью, удельной теплоемкостью, компонентами теплопроводности и температуропроводности в соответствии с направлением осей. Среда полагается сильно анизотропной $\lambda_r \ll \lambda_z$, $\lambda_{r1} \ll \lambda_{z1}$, $\lambda_{r2} \ll \lambda_{z2}$ настолько, что это позволяет в уравнениях теплопроводности для всех областей пренебречь слагаемыми, содержащими радиальные компоненты теплопроводности [179, 180].

Математическая постановка задачи для покрывающего и подстилающего массивов представляется уравнениями теплопроводности

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_{z1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2}, \quad z_d > h, \quad r_d > 0, \quad t > 0, \quad (1.6.1)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_{z2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z_d^2}, \quad z_d < -h, \quad r_d > 0, \quad t > 0, \quad (1.6.2)$$

уравнением конвективной теплопроводности с источником в пласте [293]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_d(z_d, r_d, t) \frac{\partial \theta}{\partial r_d} - a_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} = Q_d(z_d, r_d, t), \quad |z_d| < h, \quad r_d > 0, \quad t > 0, \quad (1.6.3)$$

где $Q_d(z_d, r_d, t) = m \frac{c_l \rho_l}{c_s \rho_s} \eta_{d.ef} \frac{\partial P_d}{\partial t} - u_d(z_d, r_d, t) \epsilon_{d.ef} \frac{\partial P_d}{\partial r_d} + q_d$. Источником

тепла q_d могут являться, например, электромагнитный излучатель, химическая реакция при взаимодействии соляной кислоты с карбонатной составляющей скелета, горячий пар и т.д., а задача для определения функции распределения давления в пласте P_d представлена в разделе 1.8.

На границах раздела областей определены условия равенства температур и тепловых потоков

$$\theta \Big|_{z_d=h} = \theta_1 \Big|_{z_d=h}, \quad \theta \Big|_{z_d=-h} = \theta_2 \Big|_{z_d=-h}, \quad (1.6.4)$$

$$\lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h} = \lambda_{z1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h}, \quad \lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h} = \lambda_{z2} \frac{\partial \theta_2}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h}. \quad (1.6.5)$$

Температура в каждом слое в начальный момент времени соответствует геотермическому распределению

$$\theta \Big|_{t=0} = \theta_0 - \Gamma z_d, \quad \theta_1 \Big|_{t=0} = \theta_0 - \Gamma h - \Gamma_1(z_d - h), \quad \theta_2 \Big|_{t=0} = \theta_0 + \Gamma h - \Gamma_2(z_d + h). \quad (1.6.6)$$

Температурные возмущения в удаленных от скважины участках пород отсутствуют

$$\begin{aligned} \theta \Big|_{r_d \rightarrow \infty} &\rightarrow \theta_0 - \Gamma z_d, \quad \theta_1 \Big|_{r_d + z_d \rightarrow \infty} \rightarrow \theta_0 - \Gamma h - \Gamma_1(z_d - h), \\ \theta_2 \Big|_{r_d - z_d \rightarrow \infty} &\rightarrow \theta_0 + \Gamma h - \Gamma_2(z_d + h). \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

Предполагается, что решение ограничено в области $r_d > 0$ и функция источников $Q(r_d, t)$ не зависит от температуры.

Б. Сейджем и У. Лейси в Калифорнийском технологическом институте (США, 1924 г.) впервые были определены термодинамические эффекты при фильтрации газа в пластах. Их лабораторные исследования показали, что фильтрация природного газа через пористый пласт не является изотермическим процессом. Позже в СССР подобные исследования были проведены Б.Б. Лапуком, исследующем подземное течение как дроссельный процесс [116].

В 1965 г. Э.Б. Чекалюком [249] было построено уравнение сохранения энергии флюида в условиях пористой среды, описывающее температурные процессы, происходящие при фильтрации в упругом режиме. Он получил простые аналитические решения, описывающие распределение температур в однородном изотропном плоскорадиальном пласте при нестационарной одномерной фильтрации.

В этих и многих других работах ученых прошлого века [52, 53, 64, 65, 117, 147, 154, 155, 156, 211, 216, 247, 257] заложены основы термометрии, которая стала применяться как в России, так и в других странах.

В работах [154–156, 249] при постановке задачи о распределении температуры в стволе действующей скважины используется условие вида (1.4.7). Однако вопрос определения вида функции $T_0(F_0)$ в них не рассматривается.

В работе Г.Г. Куштановой [114] при моделировании теплообмена флюида в скважине температурный сигнал пласта присутствует в качестве граничного условия. Но при его расчете не был учтен баротермический эффект, учитывающий изменение давления в пласте при нестационарной фильтрации, а температурный сигнал пласта определяется эффектом Джоуля – Томсона, который наблюдается в случае стационарной фильтрации флюида в пласте.

В работах А.Ш. Рамазанова и др. [159–161] исследуется нестационарное температурное поле в пористой среде при фильтрации многофазного флюида. В этих работах режим фильтрации считается стационарным и не учитывается слоистая неоднородность залежи.

В настоящее время создается аналитическая теория баротермического эффекта – температурного эффекта, наблюдающегося в условиях нестационарной фильтрации. Основным математическим методом, применяемым для создания этой теории является разработанный в научной школе профессора А.И. Филиппова при участии автора диссертации, «в среднем точный» асимптотический метод, позже усовершенствованный автором диссертации для решения задач с переменными коэффициентами [11–16, 18, 20–24, 100, 164, 171–177, 179–182, 184–201, 204–210, 212–215, 217–231, 233, 262, 281–288, 290–293]. Разработка метода, обеспечивающего приближенные аналитические решения, предоставляет возможность развития теории баротермического эффекта в нефтегазовых пластах.

В предлагаемой объединенной термогидродинамической модели значение температурного эффекта при дросселировании флюида по пласту, полученного как решение задачи (1.6.1)–(1.6.7), используется в качестве температурного сигнала пласта в задаче (1.4.1)–(1.4.7).

В отличие от работ предыдущих исследователей [3, 55, 89, 92, 95, 97, 98, 137, 147, 170, 237, 252, 254–257, 261, 266, 269, 271, 279, 302, 304, 316], представленная в работе термогидродинамическая модель позволяет учесть

- слоистую неоднородность залежи,
- вклад теплообмена пласта с окружающими породами,
- вклад анизотропии пласта и окружающих пород в температурное поле,
- вертикальные распределения температуры в пласте и окружающих породах,
- нестационарность поля давления при исследовании баротермического эффекта.

1.7. Гидродинамика в неоднородных анизотропных пористых средах

Информация о распределении давления в нефтяном пласте используется при оценке величины баротермического эффекта в пласте [179, 180]. Вместе с тем, тщательное изучение механизма течения жидкостей в нефтесодер-

жащих породах обеспечивает получение достаточно определенных данных о величине отбора, а также тех факторов, которые влияют на изменение этой величины [9, 41, 51, 61, 62, 69–79, 90, 136, 165, 238–243]. На этих сведениях основывается проектирование разработки месторождения, и, если это необходимо, выбор методов искусственного воздействия на залежь.

Учет сжимаемости жидкости и скелета осуществляется путем представления уравнения состояния в линеаризованной форме, которая в баротропном приближении имеет вид

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{P=P_0} (P - P_0) \right] = \rho_0 [1 + \beta(P - P_0)]. \quad (1.7.1)$$

Экспериментальные исследования поведения реальных жидкостей показывают отклонения от закона Гука. Коэффициент объемной упругости β_l для конкретной жидкости, при сохранении всех прочих условий, уменьшается с увеличением давления [81, 107]. Отклонения от закона Гука для воды и нефти в тех диапазонах изменения давления, с которыми обычно приходится иметь дело при разработке нефтеносных пластов в условиях упругого режима, малы. Так, например, для чистой воды величина коэффициента объемной сжимаемости увеличивается на 6 % при снижении давления от 200 до 1 атм. или на 3 % при изменении давления от 200 до 100 атм. Поэтому в расчетах величина коэффициента β_l определяется как среднее значение этого коэффициента в соответствующем интервале изменения давления ΔP . Величина коэффициента объемной упругости нефти зависит так же от температуры, фракционного состава нефти и растворенного в ней газа [81].

По аналогии с баротропным приближением линеаризованное уравнение состояния пластового флюида в термотропном приближении представится как

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T=T_0} (T - T_0) \right] = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)], \quad (1.7.2)$$

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T=T_0},$$

где α – коэффициент температурного расширения.

Если учитывать вклад и температуры и давления, то линеаризованное уравнение состояния запишется как

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{P=P_0} (P - P_0) + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T=T_0} (T - T_0) \right] = \\ &= \rho_0 [1 + \beta(P - P_0) - \alpha(T - T_0)]. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Коэффициент сжимаемости пористой среды определяется через сжимаемость жидкости и скелета $\beta = m_0 \beta_l + (1 - m_0) \beta_s$ [35]. Здесь ρ_0 , ρ_{0s} , P_0 – значения плотности жидкости, материала скелета и давления в точке линеаризации [232].

По пути движения в пористой среде на фильтрующийся флюид, обладающий вязкостью, действуют силы трения, как между флюидом и скелетом горных пород, так и между слоями флюида. По данным Г.Ф. Требина вязкость нефти в пластовых условиях различных месторождений изменяется от сотен мПа·с до десятых долей мПа·с [169] и снижается с увеличением температуры, причем с увеличением давления от 3 до 160 атм. диапазон изменения вязкости уменьшается в 4 раза. Оценки показывают, что для пластовых давлений изменение вязкости составляет около 2 % на 1 градус.

Основным законом, определяющим течение жидкости в пористой среде, является закон Дарси, который в анизотропной пористой среде в прямоугольной декартовой системе координат записывается в тензорном виде [125]

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial P / \partial x \\ \partial P / \partial y \\ \partial P / \partial z \end{pmatrix}. \quad (1.7.4)$$

Известно, что путем выбора системы координат тензор проницаемости можно привести к диагональному виду, тогда закон фильтрации представляется как

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial P / \partial x \\ \partial P / \partial y \\ \partial P / \partial z \end{pmatrix}. \quad (1.7.5)$$

В этом случае каждая координата вектора скорости зависит только от одной координаты давления

$$v_x = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z},$$

или в векторном виде

$$\vec{v} = -\left(\vec{i} \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \vec{j} \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} + \vec{k} \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right).$$

Последнее уравнение в однородной изотропной среде имеет вид [28, 125]

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla P.$$

Закон Дарси утверждает, что при малых градиентах давлений скорость фильтрации пропорциональна градиенту давления. В этом смысле вид закона Дарси представляет первый член разложения вектора скорости по градиенту давления, поэтому с уменьшением градиента давления применимость закона и его точность возрастают. При увеличении градиента давления возникает необходимость учета более высоких степеней градиента давления в законе Дарси.

Следует отметить, что все приведенные выше выражения закона Дарси справедливы для ньютоновских жидкостей, не имеющих начального градиента сдвига. Для жидкостей с начальным градиентом сдвига необходимо использование более сложных соотношений [28, 72, 77, 228, 229, 246].

В естественных условиях фильтрация происходит в поле сил тяжести. Выражение для закона Дарси в этом случае имеет вид $\vec{v} = -k(\nabla P - \rho \vec{g})/\mu$.

Фильтрация в реальных пластах обычно рассматривается в цилиндрической системе координат, преобразование представленных выше соотношений к цилиндрической системе координат осуществляется с использованием тензорных соотношений.

Дальнейшее развитие теории нестационарной фильтрации требует рассмотрения волновых процессов. Вывод фильтрационно-волнового уравнения для слабоанизотропной среды описан в работе [232]. Истинная скорость *стационарной* фильтрации в отсутствие поля сил тяжести \vec{g} и других массовых сил \vec{F} подчиняется закону Дарси, который для ортотропной среды в собственной системе координат записывается в виде

$$\vec{v} = -\frac{1}{\mu m} \left(k_x \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + k_y \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + k_z \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (1.7.6)$$

В [232] показано, что соотношение (1.7.6) соответствует наличию объемных фиктивных сил трения

$$\vec{R}^* = -\frac{\mu m}{\rho} \left(\frac{v_x}{k_x} \vec{i} + \frac{v_y}{k_y} \vec{j} + \frac{v_z}{k_z} \vec{k} \right). \quad (1.7.7)$$

Учитывая действие указанных сил, получим

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \text{grad} P - \rho \vec{R}^* = 0, \quad (1.7.8)$$

где полная субстанциональная производная представляется как [85]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla). \quad (1.7.9)$$

Сила \vec{R}^* зависит от скорости фильтрации, поэтому из (1.7.8) получим уравнение движения жидкой фазы [232]

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \text{grad} P + \mu m \left(\frac{v_x}{k_x} \vec{i} + \frac{v_y}{k_y} \vec{j} + \frac{v_z}{k_z} \vec{k} \right) = 0, \quad (1.7.10)$$

совпадающее, в частном случае, с уравнением Эйлера – Жуковского. Не трудно убедиться, что в случае равенства нулю полного ускорения жидкой фазы из (1.7.10) следует закон Дарси (1.7.6).

Приведенные выше выражения позволяют получить уравнения, описывающие фильтрационно-волновые явления в пористых средах. Для этого linearизуем исходные уравнения. Во втором слагаемом уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \operatorname{div}(\rho m\vec{v}) = 0. \quad (1.7.11)$$

Полагаем приближенно $\rho = \rho_0$, $m = m_0$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \rho_0 m_0 \operatorname{div}\vec{v} = 0. \quad (1.7.12)$$

Далее уравнение движения (1.7.10) умножаем на соответствующие коэффициенты проницаемости по координатам, и, пренебрегая слагаемыми второго порядка по скорости, в предположении $m = m_0$, $\rho = \rho_0$, запишем

$$\begin{aligned} & \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (k_x v_x \vec{i} + v_y k_y \vec{j} + v_z k_z \vec{k}) + \\ & k_x \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + k_y \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + k_z \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} + \mu m_0 \vec{v} = 0. \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

Поддействуем оператором набла на векторное уравнение (1.7.13)

$$\begin{aligned} & \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} k_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y k_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z k_z \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \mu m_0 \nabla \vec{v} = 0. \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

Подставив выражение $\operatorname{div}\vec{v}$, найденное из уравнения (1.7.12) в (1.7.14), получим

$$\begin{aligned} & \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} k_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y k_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z k_z \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial P}{\partial z} \right) - \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) = 0. \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

В предположении независимости компонент тензора проницаемости от пространственных координат и времени преобразуем первое слагаемое [232]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} k_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y k_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z k_z = k_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + k_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + k_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ & = \frac{(k_x + k_y + k_z)}{3} \operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{(2k_x - k_y - k_z)}{3} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \end{aligned} \quad (1.7.16)$$

$$+ \frac{2k_y - k_x - k_z}{3} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2k_z - k_x - k_y}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

В слабо анизотропной среде разница между компонентами тензора проницаемости много меньше их полных значений, поэтому последним слагаемым в (1.7.16) можно пренебречь [232]. Для такой среды уравнение (1.7.16)

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) - \rho_0 \frac{k_x + k_y + k_z}{3} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\vec{v}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial P}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.7.17)$$

Подставив в (1.7.17) дивергенцию вектора скорости из линейризованного уравнения неразрывности, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) + \frac{k_x + k_y + k_z}{3m_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (m\rho) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial P}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.7.18)$$

Произведение плотности жидкости на пористость в линейризованной по давлению форме запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho m &= \rho_0 m_0 \left[1 + \frac{1}{\rho_0 m_0} \frac{\partial \rho m}{\partial P} \Big|_{P=P_0} (P - P_0) \right] = \rho_0 [1 + \beta (P - P_0)], \\ \beta &= \frac{1}{\rho_0 m_0} \frac{\partial \rho m}{\partial P} \Big|_{P=P_0}. \end{aligned} \quad (1.7.19)$$

Тогда уравнение для поля давления в ортотропной однородной среде представляется в виде [232]

$$\begin{aligned} & \mu \beta m_0 \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{k_x + k_y + k_z}{3} \beta \rho_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial P}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.7.20)$$

Полученное уравнение определяет скорости распространения фильтрационной волны, относящиеся к соответствующим координатам [232]

$$c_x^2 = \frac{3}{(1 + k_y/k_x + k_z/k_x)\beta\rho_0}, \quad c_z^2 = \frac{3}{(1 + k_x/k_z + k_y/k_z)\beta\rho_0},$$

$$c_y^2 = \frac{3}{(1 + k_x/k_y + k_z/k_y)\beta\rho_0}$$

и компоненты коэффициента пьезопроводности ортотропной среды [232]

$$\chi_x = k_x/(\mu\beta m_0), \quad \chi_y = k_y/(\mu\beta m_0), \quad \chi_z = k_z/(\mu\beta m_0).$$

Для вычисления эффективной сжимаемости β необходимо учесть следующую из определения пористости и закона сохранения массы зависимость

$$\text{ее от плотности подвижной фазы } \rho \text{ и скелета } \rho_s: m = \left(1 + \frac{1 - m_0}{m_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\rho_{s0}}{\rho_s}}\right)^{-1}.$$

Тогда выражение для эффективной сжимаемости запишется как

$$\beta = \frac{1}{\rho_0 m_0} \left. \frac{\partial m}{\partial P} \right|_{P=P_0} = \frac{1 + m_0}{2} \beta_l + \frac{1 - m_0}{2} \beta_s. \quad (1.7.21)$$

Значения плотности жидкости, материала скелета и давления в точке линеаризации обозначены ρ_0 , ρ_{0s} , P_0 соответственно.

Сравнивая полученное уравнение с классическим уравнением колебаний можно записать выражение для коэффициента затухания [232]

$$\gamma = \frac{c_x^2}{2\chi_x} = \frac{3\mu m_0}{2(k_x + k_y + k_z)\rho_0}. \quad (1.7.22)$$

Нетрудно увидеть, что при устремлении в бесконечность скорости распространения возмущений из фильтрационно-волнового уравнения следует классическое уравнение пьезопроводности,

$$\frac{\partial P_d}{\partial t} - \chi_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) - \chi_z \frac{\partial^2 P_d}{\partial z_d^2} - \chi_\varphi \frac{1}{r_d^2} \frac{\partial^2 P_d}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1.7.23)$$

которое записано в цилиндрической системе координат для случая ортотропной среды и использовано ниже при постановке гидродинамической задачи в данной диссертации.

1.8. Постановка задачи о поле давления для радиального течения при постоянном отборе

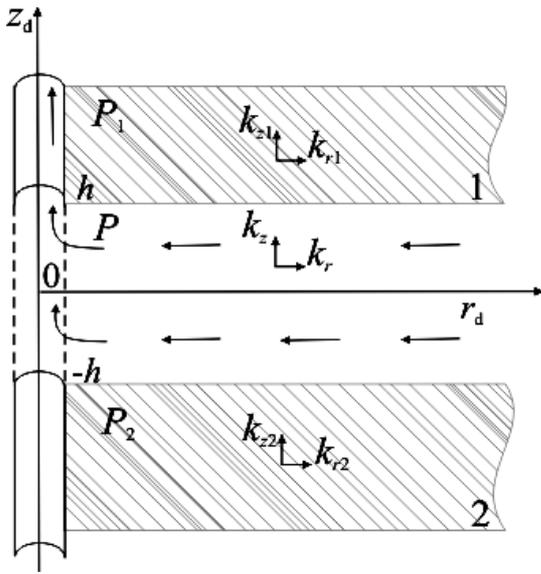


Рис. 1.3. Геометрия задачи о радиальной фильтрации в слоисто неоднородном пласте

Математическая постановка задачи о нестационарном поле фильтрации в слоисто-неоднородной анизотропной пористой пластовой системе содержит уравнения пьезопроводности

$$\frac{\partial P_{d1}}{\partial t} - \chi_{r1} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial P_{d1}}{\partial r_d} \right) - \chi_{z1} \frac{\partial^2 P_{d1}}{\partial z_d^2} = 0, \quad t > 0, \quad r_d > 0, \quad z_d > h, \quad (1.8.1)$$

$$\frac{\partial P_d}{\partial t} - \chi_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) - \chi_z \frac{\partial^2 P_d}{\partial z_d^2} = 0, \quad t > 0, \quad r_d > 0, \quad -h < z_d < h, \quad (1.8.2)$$

$$\frac{\partial P_{d2}}{\partial t} - \chi_{r2} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial P_{d2}}{\partial r_d} \right) - \chi_{z2} \frac{\partial^2 P_{d2}}{\partial z_d^2} = 0, \quad t > 0, \quad r_d > 0, \quad z_d < -h. \quad (1.8.3)$$

Условия сопряжения имеют вид

$$P_{d1}|_{z_d=h} = P_d|_{z_d=h}, \quad P_{d2}|_{z_d=-h} = P_d|_{z_d=-h}, \quad (1.8.4)$$

$$k_{z1} \frac{\partial P_{d1}}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h} = k_z \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h}, \quad k_{z2} \frac{\partial P_{d2}}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h} = k_z \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h}, \quad (1.8.5)$$

$$P_d|_{t=0} = P_{d1}|_{t=0} = P_{d2}|_{t=0} = P_0. \quad (1.8.6)$$

На границе со скважиной в интервале центрального пласта выполняет-

ся предельное условие [204]

$$\frac{k_r}{\mu} \lim_{r_{d0} \rightarrow 0} r_{d0} \left. \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right|_{r_d=r_0} = -\frac{Q}{4\pi h}, \quad -h < z_d < h. \quad (1.8.7)$$

Окружающие пласты считаются изолированными от скважины

$$\left. \frac{\partial P_{d1}}{\partial r_d} \right|_{r_d=r_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P_{d2}}{\partial r_d} \right|_{r_d=r_0} = 0, \quad |z_d| > h. \quad (1.8.8)$$

В бесконечно удаленных от интервала перфорации областях возмущения давления отсутствуют.

И.А. Чарным получены интегральные соотношения для исследования ряда задач безнапорной и напорной фильтрации, разработаны приближенные методы решения задач равновесия и движения двух жидкостей в пористой среде [247].

Г.Ф. Требин в монографии [169] рассмотрел задачи фильтрации жидкостей и газов в различных пористых пластах, описал влияние свойств жидкостей на проницаемость естественных пористых сред. Определил границы справедливости линейного закона фильтрации жидкостей и газов в пористых средах.

Г.И. Баренблаттом, В.М. Ентовым, В.М. Рыжиком в работах [30, 32] рассмотрены задачи о движении неоднородных несмешивающихся жидкостей, нестационарной фильтрации жидкости, газа и многокомпонентных систем. Описаны теоретические предпосылки фильтрации в пористых, трещиноватых и трещиновато-пористых средах и физико-химическая гидродинамика процессов вытеснения. Г.И. Баренблатт в [31] представил анализ размерностей и теории подобия. Применил гипотезу автомодельности нового типа для задач о турбулентных течениях в приземном слое атмосферы и пристеночном слое турбулентного потока и других.

Акад. А.Х. Мирзаджанзаде ввел релаксационный закон фильтрации, а также закон фильтрации с учетом начального градиента давления при течении жидкостей и газов [127]. Он предложил дифференциальное уравнение, описывающее движение вязкопластичных сред и фильтрацию газоконден-

сатных систем в пористой среде, разработал методические основы освоения месторождений не-newтоновских нефтей и газоконденсатных систем.

Значительный вклад в теоретическое изучение гидродинамики в неоднородных пористых средах внесли так же акад. П.Я. Полубаринова-Кочина [153], Г.Г. Вахитов [52, 53].

С развитием компьютерной техники большее внимание стало уделяться возможностям решения задач фильтрации численными методами. Так в монографии А.Н. Коновалова [102] излагаются принципы построения эффективных численных методов решения задач фильтрации. Проводится анализ специфических особенностей этих задач и обосновываются предлагаемые алгоритмы, рассматриваются технологические аспекты создания численных методов, программ и пакетов прикладных программ.

В предлагаемой объединенной термогидродинамической модели определенная из (1.8.6)–(1.8.13) зависимость возмущения давления от времени и координат с учетом физических характеристик пласта и насыщающего флюида используется в уравнении (1.7.3) для определения величины температурной аномалии, обусловленной баротермическим эффектом при нестационарной фильтрации.

В отличие от работ предыдущих исследователей [35, 37, 39, 42, 44, 56, 88, 96, 103–105, 113, 117, 122–125, 131–133, 149–153, 162, 166, 258, 265, 267, 273–275, 280, 295, 297, 299, 300, 303, 305, 306, 308–311, 318, 320] постановка гидродинамической задачи, представленная в работе, позволяет учесть

- слоистую неоднородность залежи,
- массообмена перфорированных слоев с окружающими проницаемыми породами,
- анизотропию пласта и окружающих проницаемых сред в поле давления,
- вертикальные распределения давления в пласте и окружающих средах и т.п.

В разделе 1.9 описаны наиболее общие особенности асимптотического метода по коэффициентному осреднения, позволяющего успешно строить ре-

шения всех вышеприведенных задач сопряжения, содержащих уравнения с переменными коэффициентами.

1.9. Асимптотический метод «покоэффициентного пространственного осреднения»

1.9.1. Общие сведения о методе

При практическом использовании математических методов большое значение имеют задачи для осредненных по области значений физических параметров, например, определение средней температуры жидкости в трубе [156, 249, 263], возмущений давления в продуктивном пласте [30, 125] и т.д. Для этого созданы специальные методы, например, «сосредоточенной емкости», схема Ловерье [9, 163] и др. Однако при использовании этих методов возникают проблемы определения погрешностей физических параметров или приближенного детального описания полей в области осреднения, трудно-разрешимые в рамках указанных методов.

В работах [10–16, 18, 20–24, 100, 164, 171–177, 179–182, 184–201, 204–210, 212–215, 217–231, 233, 262, 281–288, 290–293] показано, что такие задачи могут быть успешно решены с использованием асимптотических методов при специальном выборе формального параметра асимптотического разложения. Использование метода заключается в построении нулевого и первого коэффициентов разложения, погранслойных функций и оценочных выражений для остаточного члена.

Установлено, что нулевой коэффициент разложения при этом описывает некоторые асимптотически усредненные по пространственным областям значения физических параметров и в частных случаях найденные решения совпадают с выражениями, полученными по схеме «сосредоточенной емкости». Для более сложных случаев, когда задачи являются нелинейными или содержат переменные коэффициенты, построение нулевого коэффициента является оригинальной процедурой осреднения, которая не может быть осуществлена на основе осреднения исходных уравнений.

Нахождение первого коэффициента разложения требует добавочных условий, которые определяются из требования тривиальности решений задач для коэффициентов разложения остаточного члена в виде асимптотической формулы (рис. 1.4). Этот факт оценивает близость искомого точного решения и асимптотического.

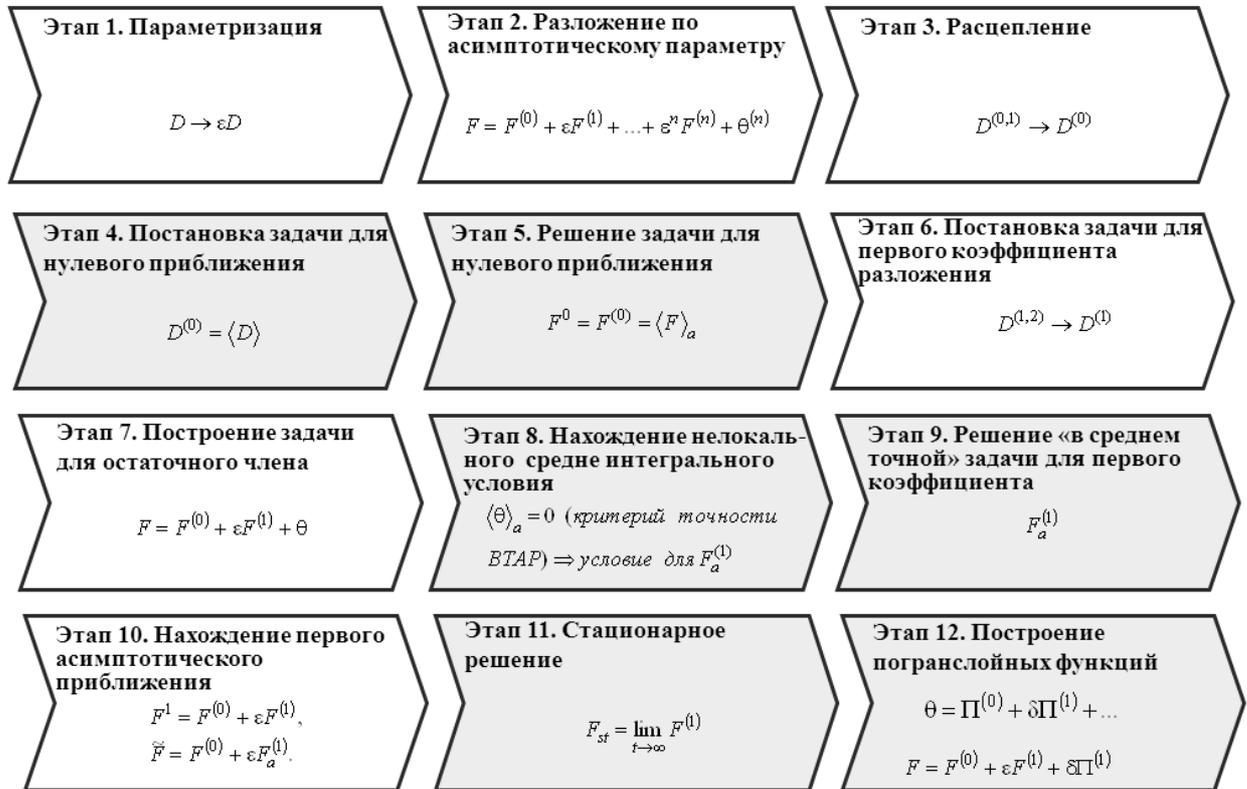


Рис. 1.4. Схема построения асимптотического решения методом «пространственного покоэффициентного осреднения»

Выражения для первого коэффициента, на самом деле, уточняют распределение физических параметров в области осреднения. Кроме того, именно из этих выражений следуют стационарные решения задач, полученные при формальном устремлении времени к бесконечности. В этом смысле построение первого коэффициента разложения представляет важнейшую задачу определения стационарных решений ряда задач теории теплопроводности. Решение для первого коэффициента разложения позволяет также определить «погрешность» осредненных значений физических параметров [128–130, 204, 213, 221].

Далее рассмотрено применение этого метода к задаче сопряжения областей, содержащей переменный коэффициент – проницаемость, зависящую от вертикальной координаты.

Следующий раздел иллюстрирует введение и использование асимптотического формального параметра.

1.9.2. Иллюстрация использования асимптотического метода «пространственного по коэффициентному осреднения»

В этом разделе иллюстрируется использование метода «пространственного по коэффициентному осреднения» на примере задачи о квазистационарном поле давления неоднородного анизотропного пласта в среде с вертикальными трещинами.

Постановка задачи в прямоугольной декартовой системе координат в предположении симметрии относительно оси Ox_d содержит уравнения пьезопроводности флюида с плотностью ρ в гравитационном поле \vec{g} , направленном противоположно вертикальной оси z_d

$$\frac{\partial P_{d1}}{\partial t} - \chi_{1z} \frac{\partial^2 P_{d1}}{\partial z_d^2} = 0, \quad t > 0, \quad z_d > h, \quad (1.9.1)$$

$$k_x(z_d) \frac{\partial^2 P_d}{\partial x_d^2} + \frac{\partial}{\partial z_d} \left[k_z(z_d) \left(\frac{\partial P_d}{\partial z_d} + \rho g \right) \right] = 0, \quad 0 < z_d < h, \quad x_d > 0, \quad (1.9.2)$$

условия симметрии, равенства давлений и скоростей фильтрации на границах раздела высокопроницаемого пропластка и окружающих проницаемых пород [204]

$$\left. \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \right|_{z_d=0} = 0, \quad P_{d1}|_{z_d=h} = P_d|_{z_d=h}, \quad k_{z1} \left. \frac{\partial P_{d1}}{\partial z_d} \right|_{z_d=h} = k_{zd}(z_d) \left. \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \right|_{z_d=h}. \quad (1.9.3)$$

Рассмотрен режим постоянной депрессии величиной P_{01} в перфорированном пласте [11]

$$P_d|_{x_d=0} = P_{01} + P_A - \rho g z_d. \quad (1.9.4)$$

Значения давления P_d , P_{d1} на бесконечности и в начальный момент времени соответствуют гидростатическим, а его возмущения отсутствуют

$$P_{1d}|_{x_d+z_d \rightarrow \infty} = P_d|_{x_d \rightarrow \infty} = P_A - \rho g z_d, \quad P_{1d}|_{t=0} = P_A - \rho g z_d. \quad (1.9.5)$$

Для простоты окружающие перфорированный пласт породы в задаче считаются полубесконечными.

Задача (1.9.1)–(1.9.5) приводится к безразмерному виду с использованием соотношений

$$z = z_d/h, \quad x = x_d/h, \quad \tau = t\chi_{1z}/h^2, \quad P_0 = P_{01}/P_{00}, \quad k_x(z) = k_{xd}(z_d)/k_{1z}, \\ k_z(z) = k_{zd}(z_d)/k_{1z}, \quad P_j = (P_{dj} - P_A + \rho g z_d)/P_{00}.$$

В безразмерном виде задача (1.9.1)–(1.9.5) представится как

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad z > 1, \quad (1.9.6)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0, \quad -1 < z < 1, \quad x > 0, \quad (1.9.7)$$

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = k_z(z) \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (1.9.8)$$

$$P|_{x=0} = P_0, \quad P_1|_{x+z \rightarrow \infty} = P|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad P_1|_{\tau=0} = 0. \quad (1.9.9)$$

1⁰. Первым этапом применения асимптотического метода является *параметризация*. В рассматриваемой задаче она заключается в формальной замене безразмерной переменной $k_z(z)$ на $k_z(z)/\epsilon$ как в уравнении для давления в пласте, так и в граничном условии, связывающем потоки. Такая параметризация имеет физический смысл, заключающийся в том, что устремление формального параметра к нулю соответствует возрастанию вертикальной проницаемости среды в скважине до бесконечности. В результате, будет показано ниже, давление по толщине пласта выравнивается и перестает зависеть от вертикальной координаты [173].

Параметризованная задача в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (1.9.10)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0, \quad -1 < z < 1, \quad x > 0, \quad (1.9.11)$$

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{k_z(z)}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (1.9.12)$$

$$P|_{x=0} = P_0, \quad P_1|_{x+z \rightarrow \infty} = P|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad P_1|_{t=0} = 0. \quad (1.9.13)$$

2⁰. Для разложения задачи по асимптотическому параметру решение задачи представляется формулой вида

$$P_j = P_j^{(0)} + \varepsilon P_j^{(1)} + \varepsilon^2 P_j^{(2)} + \dots + \varepsilon^n P_j^{(n)} + \theta_j^{(n)}, \quad (1.9.14)$$

где нижние индексы у безразмерного давления P относятся к номеру области и принимают значение либо «пробел», либо единица, а верхние соответствуют порядковому номеру приближения.

Подставив (1.9.14) в (1.9.10)–(1.9.13), получим задачу, разбитую по степеням ε [173]

$$\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad (1.9.15)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \right) + \left[\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{1}{k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \right) \right] + \dots = 0, \quad (1.9.16)$$

$$P_1^{(0)}|_{z=1} - P^{(0)}|_{z=1} + \varepsilon (P_1^{(1)}|_{z=1} - P^{(1)}|_{z=1}) + \dots = 0,$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} + \left(\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_z(z) \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) + \dots = 0, \quad (1.9.17)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} + \dots = 0,$$

$$P^{(0)}|_{x=0} + \varepsilon P^{(0)}|_{x=0} + \dots = P_0, \quad P_1^{(0)}|_{x+z \rightarrow \infty} + \varepsilon P_1^{(1)}|_{x+z \rightarrow \infty} + \dots = 0, \quad (1.9.18)$$

$$P^{(0)}|_{x \rightarrow \infty} + \varepsilon P^{(1)}|_{x \rightarrow \infty} + \dots = 0,$$

$$P_1^{(0)}|_{\tau=0} + \varepsilon P_1^{(1)}|_{\tau=0} + \dots = 0. \quad (1.9.19)$$

Анализ задачи показывает, что в уравнениях, например, в (1.9.16), при одинаковой степени ε содержатся коэффициенты различных порядков разложения. Приравнивание этих коэффициентов к нулю приводит к «зацепленным» уравнениям. Для построения решения необходимо осуществить процедуру расщепления [173].

3⁰. *Расщепление* уравнений для нулевого коэффициента осуществляется следующим образом. Поскольку уравнения и условия задачи (1.9.15)–(1.9.19) выполняются по ε тождественно, коэффициент при каждой степени параметра ε обращается в нуль независимо. Так из (1.9.16), получим уравнение для нулевого коэффициента разложения для $P^{(0)}$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.9.20)$$

С учетом условий (1.9.17) получим, что нулевой коэффициент является только функцией горизонтальной координаты $P^{(0)} = P^{(0)}(x)$. Уравнение для определения нулевого коэффициента разложения для давления получено при помощи расщепления уравнения, следующего из (1.9.16). Представим выражение, следующее из (1.9.16) при ε^0 , в виде

$$\frac{1}{k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} = A(t, x), \quad (1.9.21)$$

где $A(t, x)$ – вспомогательная функция [173]. Интегрируя (1.9.21) по z , найдем

$$k_z(z) \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} = \int_0^z k_x(z') dz' A(t, x) + B(t, x). \quad (1.9.22)$$

Используя (1.9.17), получим

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = B(t, x) = 0, \quad A(t, x) = \frac{1}{\langle k_x \rangle} \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \text{где } \langle k_x \rangle = \int_0^1 k_x(z') dz'. \quad (1.9.23)$$

Подставляя (1.9.23) в (1.9.21), найдем уравнение для нулевого коэффициента асимптотического разложения

$$\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{1}{\langle k_x \rangle} \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad (1.9.24)$$

которое содержит коэффициенты разложения только нулевого порядка.

4⁰. *Постановка задачи для нулевого коэффициента разложения имеет вид*

$$\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (1.9.25)$$

$$\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{1}{\langle k_x \rangle} \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (1.9.26)$$

$$P^{(0)} = P_1^{(0)} \Big|_{z=1}, \quad P^{(0)} \Big|_{x=0} = P_0, \quad P_1^{(0)} \Big|_{t=0} = 0. \quad (1.9.27)$$

В случаях, когда задача не содержит переменных коэффициентов, постановка задачи для нулевого коэффициента разложения совпадает с интегрально осредненной исходной параметризованной задачей, а *нулевой коэффициент разложения совпадает с решением интегрально усредненной задачи* [11, 221].

Приведенная задача (1.9.25)–(1.9.27) отличается от классических наличием моментных функций от переменных коэффициентов и следом производной решения для внешней области в (1.9.26).

5⁰. *Решение задачи для нулевого коэффициента осуществим методом интегрального преобразования Лапласа – Карсона [67]. Для этого трансформируем задачу (1.9.25)–(1.9.27) в пространство изображений*

$$pP_1^{(0)u} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (1.9.28)$$

$$\frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} + \frac{1}{\langle k_x \rangle} \frac{\partial P_1^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (1.9.29)$$

$$P^{(0)u} = P_1^{(0)u} \Big|_{z=1}, \quad P^{(0)u} \Big|_{x=0} = P_0. \quad (1.9.30)$$

Решение уравнения (1.9.28) с учетом условия (1.9.30) имеет вид

$$P_1^{(0)u} = P^{(0)u} \exp(-\sqrt{p}(z-1)). \quad (1.9.31)$$

С учетом (1.9.31) уравнение (1.9.29) для определения $P^{(0)u}$ можно представить как

$$\frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{P}}{\langle k_x \rangle} P^{(0)u} = 0. \quad (1.9.32)$$

Решение уравнения (1.9.32) представится в форме

$$P^{(0)u} = P_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{P}}{\langle k_x \rangle}} x\right), \quad 0 < z < 1. \quad (1.9.33)$$

Подставив (1.9.33) в (1.9.31), получим решение для внешней области

$$P_1^{(0)u} = P_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{P}}{\langle k_x \rangle}} x\right) \exp(-\sqrt{p}(z-1)), \quad z > 1. \quad (1.9.34)$$

Выражения (1.9.33) и (1.9.34) представляют решение задачи в нулевом приближении в пространстве изображений. Если проницаемости $k_x(z) = k_z(z) = 1$ и $P_0 = 1$, то решения (1.9.33), (1.9.34) примут вид [11]:

$$P^{(0)u} = \exp(-\sqrt[4]{p}x), \quad P^{(0)u} = \exp(-\sqrt[4]{p}x - \sqrt{p}(z-1)). \quad (1.9.35)$$

6⁰. *Постановка задачи для первого коэффициента разложения* включает уравнения

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad z > 1, \quad (1.9.36)$$

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right) = 0, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1. \quad (1.9.37)$$

Далее осуществим «расщепление» уравнения (1.9.37) [11, 173]. Для этого подставим в него выражение для $P^{(1)}$, найденное из (1.9.22)

$$P^{(1)} = -K(z) \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} + D(\tau, x), \quad \text{где } K(z) = \int_0^z \frac{1}{k_z(z')} \int_0^{z'} k_x(z'') dz'' dz'. \quad (1.9.38)$$

Проинтегрировав полученное после указанной подстановки уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right) = -k_x(z) \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} = k_x(z) K(z) \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4} - k_x(z) \frac{\partial^2 D(\tau, x)}{\partial x^2}$$

по вертикальной координате, с учетом симметрии получим выражение для радиальной производной от второго коэффициента асимптотического разложения

$$k_z(z) \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} = \int_0^z k_x(z') K(z') dz' \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4} - \int_0^z k_x(z') dz' \frac{\partial^2 D(\tau, x)}{\partial x^2} + E(\tau, x). \quad (1.9.39)$$

Воспользовавшись далее условием равенства потоков (1.9.17), имеем

$$k_z(z) \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \int_0^1 k_x(z') K(z') dz' \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4} - \int_0^1 k_x(z') dz' \frac{\partial^2 D(\tau, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1}.$$

Последнее равенство представляет уравнение для определения $D(\tau, x)$

$$\langle k_x(z) \rangle \frac{\partial^2 D(\tau, x)}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \int_0^1 k_x(z') K(z') dz' \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4}. \quad (1.9.40)$$

Заметим, что $D(\tau, x)$ является единственным неизвестным коэффициентом в (1.9.38), поэтому его нахождение является завершающим этапом для определения первого коэффициента разложения $P^{(1)}$. Коэффициент $D(\tau, x)$ определяется с помощью уравнения (1.9.40). Однако для нахождения коэффициента $D(\tau, x)$ предварительно сформулирована полная краевая задача для первого коэффициента разложения $P^{(1)}$.

Сначала найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет первый коэффициент. Для этого подставим выражение $D(\tau, x)$ через $P^{(1)}$, найденное из (1.9.38), в (1.9.40)

$$\langle k_x(z) \rangle \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \left(\int_0^1 k_x(z') K(z') dz' - \langle k_x(z) \rangle K(z) \right) \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4}, \quad (1.9.41)$$

$$x > 0, \quad 0 < z < 1.$$

Математическая постановка задачи для первых коэффициентов разложения наряду с (1.9.41) включает также уравнение для окружающей среды

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad z > 1, \quad (1.9.42)$$

граничные и начальное условия

$$P^{(1)} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad P^{(1)} \Big|_{x=0} = 0, \quad P_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (1.9.43)$$

В процессе решения возникает необходимость видоизменения начального условия при $x = 0$ в (1.9.43), поскольку при наличии его задача имеет только тривиальное решение [11]. Видоизмененное условие получено ниже на основе требования нулевого решения осредненной задачи для остаточного члена для любых ε . Такая замена начального условия возможна благодаря наличию «вязкого погранслоя» (математический термин теории асимптотических методов) в начальный момент времени. Она обеспечивает построение асимптотического решения, с одной стороны. С другой – нулевые осредненные значения остаточного члена представляют критерий близости искомого точного решения и асимптотического.

7⁰. Для постановки задачи для остаточного члена искомое решение представим в виде $P_j = P_j^{(0)} + \varepsilon P_j^{(1)} + \Theta_j$, где нижний индекс представляет номер области, верхний – порядок коэффициента асимптотического разложения. Остаточным членом назовем сумму слагаемых после исследуемого коэффициента разложения, в рассматриваемом случае после первого.

Воспользовавшись выражениями для нулевого и первого коэффициентов (1.9.25)–(1.9.27), (1.9.42), (1.9.43) соответственно, из (1.9.6)–(1.9.9) получим

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad (1.9.44)$$

$$\frac{\partial^2 (\varepsilon P^{(1)} + \Theta)}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0, \quad (1.9.45)$$

$$\Theta \Big|_{z=1} = \Theta_1 \Big|_{z=1}, \quad \frac{k_z(z)}{\varepsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial (\Theta_1 + \varepsilon P_1^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad (1.9.46)$$

$$\Theta_1 \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (\varepsilon P^{(1)} + \Theta) \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.9.47)$$

Заметим, что в постановке задачи для остаточного члена также присутствуют переменные коэффициенты, обусловленные зависимостью проницаемости пласта от вертикальной координаты. В частных случаях задачи [11,

221], когда коэффициенты не зависят от пространственных координат, дополнительное среднеинтегральное условие отыскивалось из требования тривиального решения осредненной по толщине центрального пласта задачи для остаточного члена.

Однако, постановка задачи для $\langle \Theta \rangle$, путем интегрального осреднения (1.9.44)–(1.9.47) по z от 0 до 1, не представляется возможной из-за наличия переменных коэффициентов. Это означает, что в среднем точный асимптотический метод при наличии переменных коэффициентов не работает. Для решения задач с переменными коэффициентами нами создан новый метод «покоэффициентного осреднения», существо которого и основные отличия описаны ниже.

Далее иллюстрируется основное отличие развитого способа, заключающееся в разложении по формальному асимптотическому параметру задачи для остаточного члена и последующем интегральном осреднении задачи для соответствующего коэффициента с целью определения нелокального среднеинтегрального условия.

8⁰. *Нахождение нелокального среднеинтегрального условия.* Для нахождения дополнительных условий представим остаточный член в каждой области в виде асимптотического ряда

$$\Theta_1 = \Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2 \Theta_1^{(2)} + \dots, \quad \Theta = \Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + \varepsilon^2 \Theta^{(2)} + \dots \quad (1.9.48)$$

Подставляя (1.9.48) в задачу для остаточного члена, получим

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta_1^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta_1^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad (1.9.49)$$

$$\frac{1}{\varepsilon k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \Theta^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{1}{k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial z} \right) + \dots = -\varepsilon \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2}, \quad (1.9.50)$$

$$\left(\Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=1} = \left(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=1}, \quad \left(\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial z} + \dots \right) \Big|_{z=1} = 0, \quad (1.9.51)$$

$$\frac{k_z(z)}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial z} + \dots \right) \Big|_{z=1} = \frac{\partial (\Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \dots + \varepsilon P_1^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=1},$$

$$\left(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \dots \right) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \left(\varepsilon P^{(1)} + \Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + \dots \right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.9.52)$$

Как и в случае нулевого коэффициента, интегрируя уравнение $\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} \right) = 0$, найдем, что нулевой коэффициент не зависит от вертикальной координаты $\Theta^{(0)} = \Theta^{(0)}(x)$. Из (1.9.49)–(1.9.52) определим задачу для нулевого коэффициента разложения. Расцепление уравнения

$$\frac{1}{k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial^2 \Theta^{(0)}}{\partial x^2} \quad (1.9.53)$$

осуществлено аналогично нулевому приближению для давления

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0,$$

$$\langle k_x \rangle \frac{\partial^2 \Theta^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0,$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{z=1} = \Theta_1^{(0)} \Big|_{z=1},$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{x=0} = 0, \quad \Theta_1^{(0)} \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что задача для нулевого коэффициента разложения имеет тривиальное решение $\Theta^{(0)} = 0$, $\Theta_1^{(0)} = 0$. Отсюда, согласно (1.9.53) с учетом условий (1.9.51), следует, что первый коэффициент разложения остаточного члена также не зависит от вертикальной координаты $\Theta^{(1)} = \Theta^{(1)}(x)$.

Из (1.9.49)–(1.9.52) получим задачу для первого коэффициента разложения. Для исключения $\Theta^{(2)}$ из уравнения

$$\frac{1}{k_x(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(z) \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial^2 \Theta^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} \quad (1.9.54)$$

умножим его на $k_x(z)$ и проинтегрируем от нуля до z

$$k_z(z) \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial z} = \int_0^z k_x(z') \frac{\partial^2 (P^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial x^2} dz'. \quad (1.9.55)$$

Далее воспользуемся условием сопряжения (1.9.51)

$$k_z(z) \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \int_0^1 k_x(z') \frac{\partial^2 (P^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial x^2} dz' = \frac{\partial (P_1^{(1)} + \Theta_1^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=1}. \quad (1.9.56)$$

Согласно (1.9.37) и (1.9.17) все слагаемые, содержащие $P^{(1)}$ в (1.9.56), сокращаются, а уравнение для первого коэффициента остаточного члена представляется как

$$\langle k_x \rangle \frac{\partial^2 \Theta^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0.$$

Математическая постановка задачи для первого коэффициента разложения остаточного члена содержит также следующие уравнение и условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta_1^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \Theta^{(1)} \Big|_{z=1} &= \Theta_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \\ (P^{(1)} + \Theta^{(1)}) \Big|_{x=0} &= 0, \quad \Theta_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{aligned}$$

Нелокальные среднеинтегральные условия находятся из требования тривиального решения осредненной интегрально задачи для $\Theta^{(1)}$

$$\frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad (1.9.57)$$

$$\langle k_x \rangle \frac{\partial^2 \langle \Theta^{(1)} \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad (1.9.58)$$

$$\langle \Theta^{(1)} \rangle \Big|_{z=1} = \Theta_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad (1.9.59)$$

$$\langle \Theta^{(1)} \rangle \Big|_{x=0} = -\langle P^{(1)} \rangle \Big|_{x=0}, \quad \Theta_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (1.9.60)$$

Тривиальное решение задачи для первого коэффициента остаточного члена возможно при равенстве нулю правой части (1.9.60). Таким образом, условие

$$\left\langle P^{(1)} \right\rangle \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.9.61)$$

может быть использовано для получения единственного решения задачи определения первого асимптотического коэффициента $P^{(1)}$.

9⁰. *Асимптотическое решение задачи для первого коэффициента разложения.* С учетом вышеизложенного математическая постановка задачи для первого коэффициента разложения примет вид

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad z > 1, \quad (1.9.62)$$

$$\left\langle k_x(z) \right\rangle \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \left(\int_0^1 k_x(z') K(z') dz' - K(z) \right) \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4}, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (1.9.63)$$

$$P^{(1)} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad \left\langle P^{(1)} \right\rangle \Big|_{x=0} = 0, \quad P_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (1.9.64)$$

Задача для первых коэффициентов разложения (1.9.62)–(1.9.64) в пространстве изображений Лапласа – Карсона запишется как

$$p P_1^{(1)u} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (1.9.65)$$

$$\left\langle k_x(z) \right\rangle \frac{\partial^2 P^{(1)u}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \left(\int_0^1 k_x(z') K(z') dz' - K(z) \right) \frac{\partial^4 P^{(0)u}}{\partial x^4}, \quad (1.9.66)$$

$$x > 0, \quad 0 < z < 1,$$

$$P^{(1)u} = P_1^{(1)u} \Big|_{z=1}, \quad \left\langle P^{(1)u} \right\rangle \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.9.67)$$

Решение уравнения (1.9.65) с учетом (1.9.67) представится в виде

$$P_1^{(1)u} = P^{(1)u} \Big|_{z=1} \exp\left(-\sqrt{p}(z-1)\right), \quad (1.9.68)$$

откуда

$$\frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\sqrt{p} P^{(1)u} \Big|_{z=1}. \quad (1.9.69)$$

Из (1.9.38) получим

$$P^{(1)u} = -K(z) \frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} + D^u(p, x) = \frac{\sqrt{p}}{\langle k_x \rangle} K(z) P^{(0)u} + D^u(p, x). \quad (1.9.70)$$

Решение (1.9.66) с использованием (1.9.67) имеет вид

$$P^{(1)u} = \left[\frac{\sqrt{p}(\langle K(z) \rangle - K(z))}{\langle k_x \rangle} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\langle k_x \rangle}{\sqrt{p}}} \frac{pP_0x}{2} \left(K(1) - \frac{1}{\langle k_x \rangle} \int_0^1 k_x(z')K(z')dz' \right) \right] P^{(0)u}. \quad (1.9.71)$$

Решение в настиляющем слое запишется как

$$P_1^{(1)u} = \exp(-\sqrt{p}(z-1)) \left[\frac{\sqrt{p}(\langle K(z) \rangle - K(1))}{\langle k_x \rangle} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\langle k_x \rangle}{\sqrt{p}}} \frac{pP_0x}{2} \left(K(1) - \frac{1}{\langle k_x \rangle} \int_0^1 k_x(z')K(z')dz' \right) \right] P^{(0)u}. \quad (1.9.72)$$

В случае $k_x(z) = k_z(z) = P_0 = 1$ решение для первого коэффициента асимптотического разложения запишется в виде [11]

$$P^{(1)u} = \left(-\sqrt{p} \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{p^{3/4}}{6} x \right) \exp(-\sqrt[4]{p}x), \\ P_1^{(1)u} = \frac{1}{3} \left(\frac{p^{3/4}}{2} - \sqrt{p} \right) \exp(-\sqrt[4]{p}x - \sqrt{p}(z-1)). \quad (1.9.73)$$

В Приложении Б проведено сравнение асимптотического и точного (с использованием интегральных преобразований Лапласа – Карсона по переменной $\tau (\Rightarrow p)$ и синус-преобразования по координате $x (\Rightarrow s)$) решений задачи, аналогичной (1.9.6)–(1.9.9), в модельном частном случае $k_x(z) = k_z(z) = P_0 = 1$.

Точное решение такой задачи имеет вид

$$\tilde{P}^u = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\sqrt{p} \operatorname{ch}(sz\sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{p} \operatorname{ch}(s\sqrt{\varepsilon}) + \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon})} \right], \quad \tilde{P}_1^u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon}) \exp(-\sqrt{p}(z-1))}{\sqrt{p} \operatorname{ch}(s\sqrt{\varepsilon}) + \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon})}.$$

Это решение позволяет определить нулевой и первый коэффициенты разложения в ряд Маклорена по формальному параметру ε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{P}^u = \frac{s}{\sqrt{p+s^2}}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \tilde{P}^u = \frac{1}{2} \frac{s\sqrt{p}}{\sqrt{p+s^2}} \left(\frac{1}{3} - z^2 \right) + \frac{sp}{3(\sqrt{p+s^2})^2}. \quad (1.9.74)$$

Нетрудно убедиться, что полученные выражения для коэффициентов ряда Маклорена являются соответственно синус-преобразованием нулевого (1.9.35) и первого (1.9.73) коэффициентов асимптотического разложения.

10⁰. *Нахождение первого асимптотического приближения.* Решение в первом асимптотическом приближении получается подстановкой в формулы $P^{1u} = P^{(0)u} + \varepsilon P^{(1)u}$, $P_1^{1u} = P_1^{(0)u} + \varepsilon P_1^{(1)u}$ выражений для нулевого (1.9.33), (1.9.34) и первого (1.9.71), (1.9.72) коэффициентов асимптотического разложения.

11⁰. *Стационарное решение.* Из (1.9.72) также следуют стационарные распределения

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} P^{(1)u} &= \left[\frac{\sqrt{p}(\langle K(z) \rangle - K(z))}{\langle k_x \rangle} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{\langle k_x \rangle}{\sqrt{p}}} \frac{pP_0 x}{2} \left(K(1) - \frac{1}{\langle k_x \rangle} \int_0^1 k_x(z') K(z') dz' \right) \right] P^{(0)u} \Big|_{p \rightarrow 0} = 0. \end{aligned} \quad (1.9.75)$$

В рассматриваемой задаче получаем ожидаемое тривиальное решение.

12⁰. *Построение погранслошной функции.* Асимптотическое решение рассматриваемой задачи содержит погранслош при $x = 0$, где, значения первого приближения не удовлетворяют исходному условию

$$P^{(1)u} \Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{p}(\langle K(z) \rangle - K(z))}{\langle k_x \rangle} P_0 \neq 0. \quad (1.9.76)$$

Указанный недостаток решения устраняется построением погранслошной функции. Проиллюстрируем получение погранслошной поправки в случае коэффициентов k_x и k_z , не зависящих от вертикальной координаты, и $k_x = k_z$. Для этого в задаче для остаточного члена (1.9.44)–(1.9.47) введем растянутую переменную $y = x/\sqrt{\varepsilon}$, вид которой устанавливается на основании анализа размерностей, и, обозначив $f(x) = \partial^2 P^{(1)}/\partial x^2$, вместо (1.9.45) получим [11]

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\varepsilon^2 f(\varepsilon, y). \quad (1.9.77)$$

Записывая остаточный член в виде асимптотической формулы

$$\theta = \Pi^{(0)} + \varepsilon \Pi^{(1)} + \dots, \quad \theta_1 = \Pi_1^{(0)} + \varepsilon \Pi_1^{(1)} + \dots, \quad (1.9.78)$$

представим (1.9.44)–(1.9.47) в виде задач для коэффициентов разложения различных порядков. Очевидно, что коэффициенты нулевого порядка равны нулю $\Pi^{(0)} = 0$ и $\Pi_1^{(0)} = 0$. В соответствии с этим краевая задача для первого коэффициента в пласте имеет вид [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \\ \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} &= -\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left(\frac{1}{3} - z^2 \right). \end{aligned}$$

Ее решение может быть найдено независимо от задачи для первого погранслоного коэффициента для окружающей пласт среды $\Pi_1^{(1)}$. С помощью метода разделения переменных получим выражение для $\Pi^{(1)}$

$$\Pi^{(1)} = \frac{2}{\pi^3 \sqrt{\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \cos(\pi n z) \exp\left(-\frac{\pi n x}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (1.9.79)$$

определяющее граничное условие в задаче для отыскания $\Pi_1^{(1)}$

$$\Pi_1^{(1)} = \frac{2}{\pi^3 \sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{4\tau}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \exp\left(-\frac{\pi n x}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad z > 1, \quad x > 0. \quad (1.9.80)$$

Погранслоные функции (1.9.79), (1.9.80) представляют добавку к решению задачи нахождения первого коэффициента определяют искомое асимптотическое решение исходной задачи. На этом нахождение асимптотического решения заканчивается, поскольку построение оригиналов решений является самостоятельной задачей и осуществлено в следующих главах.

1.9.3. Пример построения точного решения с помощью асимптотического метода

Рассмотрим практически важный случай, для которого развитый метод формального параметра приводит к точному решению в ограниченном числе слагаемых разложения. Построим температурное поле в скважине, по которой течет флюид. Для этого рассмотрим линейный частный случай задачи, сформулированной в разделе 1.4, о теплообмене потока жидкости в скважине, для выровненного профиля скорости $R(r) = 1$, $\lambda(r) = 1$, в которой не учитывается расход тепла на увеличение температуры жидкости в скважине $\partial\theta/\partial t = 0$.

Постановка задачи в размерных переменных в предположении осевой симметрии включает уравнение теплопроводности в окружающем трубу массиве [223]

$$c_1\rho_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \lambda_{1z} \frac{\partial^2\theta_1}{\partial z_d^2} + \lambda_{1r} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial\theta_1}{\partial r_d} \right), \quad r_d > r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0, \quad (1.9.81)$$

стационарное уравнение конвективной теплопроводности флюида в трубе

$$\lambda_z \frac{\partial^2\theta}{\partial z_d^2} + \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial\theta}{\partial r_d} \right) - c\rho v \frac{\partial\theta}{\partial z_d} = q_d, \quad r_d < r_0, \quad z_d > 0. \quad (1.9.82)$$

На границе труб и окружающего массива заданы условия IV рода

$$\theta|_{r_d=r_0} = \theta_1|_{r_d=r_0}, \quad (1.9.83)$$

$$\lambda_r \frac{\partial\theta}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0} = \lambda_{1r} \frac{\partial\theta_1}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0}. \quad (1.9.84)$$

Начальные условия в квазистационарной задаче могут быть записаны только для окружающей среды и соответствуют геотермическому распределению

$$\theta_1|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \quad (1.9.85)$$

Радиус теплового влияния скважины ограничен

$$\theta_1|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \quad (1.9.86)$$

Дополнительно упростим задачу тем, что будем считать постоянным градиент температуры вдоль оси трубы ($\partial\theta/\partial z_d = \partial\theta_1/\partial z_d = \Gamma = \text{const}$). Тогда

вторые производные по z_d в задаче исчезают, поскольку производная от константы равна нулю. Случай постоянных градиентов часто встречается в практических расчетах.

Далее, пусть источники тепла в задаче представлены только адиабатическим эффектом. Используя следующие соотношения [223]

$$r = r_d / r_0, \quad z = z_d / D, \quad \text{Fo} = a_{1r} t / r_0^2, \quad T_1 = (\theta_1 - \theta_{01} + \Gamma z_d) / \theta_0,$$

$$\text{Pe} = v r_0 / a_{1r}, \quad \theta_0 = \Gamma D, \quad \chi = c_1 \rho_1 / c \rho, \quad v = r_0 / D, \quad T = (\theta - \theta_{01} + \Gamma z_d) / \theta_0, \quad (1.9.87)$$

$$\text{H} = \eta \rho g r_0 / v \theta_0,$$

преобразуем задачу (1.9.81)–(1.9.86) к безразмерному виду.

1⁰. *Параметризация.* Параметризованная задача в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad (1.9.88)$$

$$\frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \text{Pe} v (1 - \text{H}) = 0, \quad (1.9.89)$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad (1.9.90)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (1.9.91)$$

$$T_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (1.9.92)$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.9.93)$$

Решение задачи предполагается ограниченным. Прежде, чем переходить к следующему этапу асимптотического метода, произведем отыскание точного решения параметризованной задачи.

Рассматриваемая задача ценна тем, что допускает простое *точное решение* [223, 245]. Для построения точного решения применим преобразование Лапласа – Карсона к уравнению (1.9.88) с условием (1.9.92), тогда отыскание температуры в окружающей среде сводится к решению уравнения Бесселя

$$pT_1^u - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^u}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.9.94)$$

с дополнительными условиями (1.9.90) и (1.9.93). Искомое решение представляется через функцию Макдональда [109], поскольку именно она обеспечивает ограниченность решения на больших расстояниях от скважины

$$T_1^u = \frac{K_0(\sqrt{pr})}{K_0(\sqrt{r})} T^u \Big|_{r=1}. \quad (1.9.95)$$

Интегрируя (1.9.89) и учитывая ограниченность решения на оси скважины, последовательно получим [223]

$$\frac{\partial T^u}{\partial r} = -\frac{\varepsilon \Lambda r}{2\chi} \text{Pev}(1-H), \quad T^u = -\frac{\varepsilon \Lambda r^2}{4\chi} \text{Pev}(1-H) + C(p). \quad (1.9.96)$$

Из (1.9.95) и (1.9.96) имеем

$$\frac{\partial T_1^u}{\partial r} \Big|_{r=1} = -k\sqrt{p} \left(C(p) - \frac{\varepsilon \Lambda}{4\chi} \text{Pev}(1-H) \right), \quad (1.9.97)$$

где $k = \frac{K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}$. Подставив (1.9.96) и (1.9.97) в (1.9.91), найдем

$$C(p) = \left(\frac{1}{k\sqrt{p}} + \frac{\varepsilon \Lambda}{2} \right) \frac{1}{2\chi} \text{Pev}(1-H). \quad (1.9.98)$$

Учитывая (1.9.95), (1.9.96), (1.9.98), получим решение задачи с использованием интегрального преобразования Лапласа – Карсона [223, 245]

$$T^u = \left(\frac{1}{k\sqrt{p}} + \frac{\varepsilon \Lambda}{2} (1-r^2) \right) \frac{1}{2\chi} \text{Pev}(1-H), \quad T_1^u = \frac{K_0(\sqrt{pr})}{K_0(\sqrt{r})} \frac{\text{Pev}(1-H)}{2\chi k\sqrt{p}}. \quad (1.9.99)$$

Теперь вернемся к решению задачи (1.9.88)–(1.9.93) асимптотическим методом.

2⁰. *Разложение по асимптотическому параметру* в виде асимптотической формулы по ε [223]

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \varepsilon^2 T_j^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T_j^{(n)} + \Theta_j^{(n)}, \quad (1.9.100)$$

где нижние индексы у безразмерной температуры T относятся к номеру области и принимают значение либо «пробел» – для среды в скважине, либо

единица – для окружающей скважину среды, а верхние соответствуют порядковому номеру приближения.

Подставив (1.9.100) в параметризованную задачу, сгруппируем слагаемые по степеням параметра ε . Разложенная по степеням формального параметра задача представится как

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (1.9.101)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\chi}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\chi}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) + \text{Pev}(1 - H) \right] + \\ & + \varepsilon^2 \frac{\chi}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (1.9.102)$$

$$T^{(0)} \Big|_{r=1} - T_1^{(0)} \Big|_{r=1} + \varepsilon \left(T^{(1)} \Big|_{r=1} - T_1^{(1)} \Big|_{r=1} \right) + \varepsilon^2 \left(T^{(2)} \Big|_{r=1} - T_1^{(2)} \Big|_{r=1} \right) + \dots = 0, \quad (1.9.103)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \dots = 0, \quad (1.9.104)$$

$$T_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} + \varepsilon T_1^{(1)} \Big|_{Fo=0} + \varepsilon^2 T_1^{(2)} \Big|_{Fo=0} + \dots = 0, \quad (1.9.105)$$

$$T_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon T_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon T_1^{(2)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \dots = 0. \quad (1.9.106)$$

Для построения решения необходимо осуществить процедуру расщепления.

3⁰. *Расщепление.* Формально полагая $\varepsilon = 0$ в (1.9.102), получим

$$\frac{\chi}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (1.9.107)$$

Из (1.9.107) для радиального градиента температуры в нулевом приближении получим следующее выражение:

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = \frac{C}{r}. \quad (1.9.108)$$

Из требования ограниченности решения на оси скважины, получаем $C = 0$, при последующем интегрировании можно сделать вывод, что нулевое асимптотическое приближение температуры в скважине не зависит от радиальной координаты r и является функцией времени Fo

$$T^{(0)} = T^{(0)}(Fo).$$

Из (1.9.102) выпишем уравнение конвективной теплопроводности для первого коэффициента разложения температуры:

$$\frac{\chi}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = -\text{Pev}(1 - \text{H}). \quad (1.9.109)$$

Интегрируя (1.9.110) с учетом ограниченности решения при $r = 0$, получим

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} = -\frac{\Lambda r}{2\chi} \text{Pev}(1 - \text{H}), \quad T^{(1)} = -\frac{\Lambda r^2}{4\chi} \text{Pev}(1 - \text{H}) + B(Fo), \quad (1.9.110)$$

где функция B зависит только от времени Fo .

Далее используем условие сопряжения, следующее из (1.9.104)

$$\left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}.$$

Заменив в нем радиальную производную первого коэффициента асимптотического разложения температуры выражением из (1.9.110), получим расцепленное уравнение для нулевого коэффициента [223]

$$\text{Pev}(1 - \text{H}) = -2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}. \quad (1.9.111)$$

4⁰. *Постановка задачи для нулевого коэффициента* разложения включает уравнение (1.9.111). Далее, полагая $\varepsilon = 0$ в (1.9.106), получим уравнение для нулевого коэффициента в окружающей среде

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (1.9.112)$$

Из (1.9.103) следуют условия равенства нулевых коэффициентов на границе

$$T^{(0)} \Big|_{r=1} = T_1^{(0)} \Big|_{r=1}. \quad (1.9.113)$$

Условие (1.9.105) обеспечивает начальные данные

$$T_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (1.9.114)$$

а выражение (1.9.106) указывает на регулярность нулевого коэффициента на бесконечности

$$T_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.9.115)$$

Ниже показано, что постановки задач для нулевого асимптотического коэффициента и исходной после ее интегрального осреднения совпадают с точностью до обозначений.

5⁰. *Решение задачи для нулевого коэффициента* находится с использованием интегрального преобразования Лапласа – Карсона [67]. Задача (1.9.111)–(1.9.115) в изображениях имеет вид

$$\text{Re}v(1 - \text{H}) = -2\chi \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (1.9.116)$$

$$pT_1^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad (1.9.117)$$

$$T^{(0)u} \Big|_{r=1} = T_1^{(0)u} \Big|_{r=1}, \quad (1.9.118)$$

$$T_1^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.9.119)$$

Решение уравнения (1.9.117) с учетом условий (1.9.118) и (1.9.119) имеет вид

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}. \quad (1.9.120)$$

Учитывая (1.9.120), из уравнения (1.9.116) имеем

$$\text{Re}v(1 - \text{H}) = 2\chi k \sqrt{p} T^{(0)u}. \quad (1.9.121)$$

Отсюда

$$T^{(0)u} = \frac{\text{Re}v(1 - \text{H})}{2k\chi\sqrt{p}}. \quad (1.9.122)$$

Для первого коэффициента в окружающей среде получим решение

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \frac{\text{Re}v(1 - \text{H})}{2k\chi\sqrt{p}}. \quad (1.9.123)$$

Выражения (1.9.122), (1.9.123) представляют искомое решение задачи в нулевом приближении в изображениях [223].

6⁰. *Постановка задачи для первого коэффициента* разложения включает уравнения для первых коэффициентов в скважине

$$\frac{\chi}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = -\text{Pev}(1 - \text{H}) \quad (1.9.124)$$

и окружающей среде

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (1.9.125)$$

Из (1.9.103) следуют условия равенства первых коэффициентов на границе

$$T^{(1)} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)} \Big|_{r=1}. \quad (1.9.126)$$

Условие (1.9.105) обеспечивает начальные данные для первого коэффициента в окружающей среде

$$T_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (1.9.127)$$

а выражение (1.9.106) указывает на его регулярность при $r \rightarrow \infty$

$$T_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.9.128)$$

Задача для первого коэффициента в изображениях имеет вид [223]

$$\frac{\chi}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)u}}{\partial r} \right) = -\text{Pev}(1 - \text{H}), \quad (1.9.129)$$

$$p T_1^{(1)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad (1.9.130)$$

$$T^{(1)u} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)u} \Big|_{r=1}, \quad (1.9.131)$$

$$T_1^{(1)u} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (1.9.132)$$

$$T_1^{(1)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.9.133)$$

Решение уравнения (1.9.129) представляется как

$$T^{(1)u} = -\frac{\Lambda r^2}{4\chi} \text{Pev}(1 - \text{H}) + B(p). \quad (1.9.134)$$

Задача для $T_1^{(1)}$ имеет аналогичную задаче для $T_1^{(0)}$ структуру, поэтому как и в нулевом приближении получим

$$T_1^{(1)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(1)u} \Big|_{r=1}. \quad (1.9.135)$$

Для второго коэффициента асимптотического разложения из (1.9.102) следует

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = 0, \quad T^{(2)} = T^{(2)}(Fo), \quad (1.9.136)$$

отсюда на основе условия сопряжения

$$\left. \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1},$$

следующего из (1.9.104), находим $\left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = 0$. Это условие необходимо для определения $B(Fo)$.

Используя $\left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = 0$, соотношения (1.9.134) и (1.9.135), определим

уравнение, из которого получим

$$B(Fo) = \frac{\Lambda}{4\chi} \text{Pe}\nu(1 - H). \quad (1.9.137)$$

Итак, решение для первого коэффициента разложения в скважине представляется как [223]

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{4\chi} \text{Pe}\nu(1 - H)(1 - r^2). \quad (1.9.138)$$

Для внешней области получаем нулевое решение

$$T_1^{(1)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(1)u} \Big|_{r=1} = 0, \quad (1.9.139)$$

поскольку $T^{(1)u} \Big|_{r=1}$, как нетрудно убедиться с помощью (1.9.138), равно нулю.

Полученные выражения для нулевого и первого коэффициентов позволяют записать решение в первом приближении. С помощью (1.9.122), (1.9.123), (1.9.138) и (1.9.139) имеем

$$T^{1u} = T^{(0)u} + \varepsilon T^{(1)u} = \frac{1}{2\chi} \text{Pe}\nu(1 - H) \left(\frac{1}{k\sqrt{p}} + \frac{\varepsilon\Lambda}{2} (1 - r^2) \right), \quad (1.9.140)$$

$$T_1^{1u} = T_1^{(0)u} + \varepsilon T_1^{(1)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p}) \operatorname{Pe} \nu (1 - H)}{K_0(\sqrt{p}) 2k\chi\sqrt{p}}. \quad (1.9.141)$$

Путем сравнения решений в первом приближении с точными (1.9.99) убеждаемся, что они совпадают. Приведенный пример иллюстрирует обусловленную соответствующим выбором асимптотического параметра возможность построения точного решения асимптотическим методом при ограниченном числе слагаемых в асимптотическом ряду [223].

Полученное совпадение не является систематическим. Круг задач, в которых асимптотическое решение совпадает с точным, узок для практических приложений. Однако именно эти примеры убеждают в высокой эффективности развитого метода и, в известном смысле, позволяют судить о близости точного и приближенного решения, построенного с помощью асимптотического метода.

1.10. Выводы по главе I

Итак, в первой главе описана нелинейная объединенная термогидродинамическая модель температурного поля флюида, текущего по скважине, окруженной сплошным массивом горных пород для ламинарного и турбулентного течений жидкости в диапазоне температур 270–400 К и давлений от 1 до 200 атм., соответствующих реальным условиям скважинной эксплуатации нефтяных и газовых месторождений.

Модель включает описание температурного поля, индуцированного нестационарными полями давления упругого режима течения в нефтяных пластах, которое выступает в качестве граничного условия задачи о температурном поле в скважине. Обоснована необходимость определения функции температурного сигнала пласта на базе решения уравнения, описывающего баротермический эффект.

На основе анализа литературных источников выявлено, что восходящий трехфазный поток можно представить в виде эффективного однофазно-

го, характеризующегося усредненной эффективной скоростью, плотностью, теплоемкостью и теплопроводностью.

Показано, что при стационарном движении флюида зависимость вязкости потока от температуры не влияет на скорость движения флюида, а следовательно, и на формирование температурного поля, поскольку

– движение вдоль ствола скважины в этом случае определяется уравнением неразрывности $\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$,

– радиальные профили температуры определяются типом течения и размерами трубы и не зависят от вязкости, коэффициент Джоуля – Томсона, характеризующий переход механической энергии в тепло, также не зависит от вязкости.

Из анализа экспериментальных данных получены значения температурных коэффициентов теплоемкости и теплопроводности. Показано, что эти температурные зависимости представляются линейными функциями в виде первых слагаемых ряда Тейлора с погрешностью не превышающей 1 %.

Дана концепция нового аналитического метода исследования явлений тепло- и массопереноса в сложных неоднородных, анизотропных и многослойных средах, широко распространенных в природных и технических системах, основанная на асимптотическом представлении полей температуры и давления с требованием тривиальных решений усредненной задачи для остаточного члена – «метод по коэффициентному пространственному осреднению». Метод проиллюстрирован на примере задачи о квазистационарном поле давления неоднородного анизотропного пласта в среде с вертикальными трещинами, где переменными коэффициентами выступают зависимости компонент проницаемости центрального пласта от вертикальной координаты. Показано совпадение коэффициентов асимптотического разложения с коэффициентами разложения в ряд Маклорена, что свидетельствует о корректности применяемого в работе асимптотического метода. Представлен частный случай задачи о нестационарном теплообмене, в котором использование асимптотического метода позволяет найти точное решение.

Развитая модификация асимптотического метода, позволяющая трансформировать переменные коэффициенты исходной задачи в моментные интегралы с постоянными пределами в задачах для коэффициентов разложения, открывает новые пути для использования классических методов, таких как интегральные преобразования, спектральные методы, автомодельные методы и т.п., для исследования и решения задач с переменными коэффициентами.

ГЛАВА II. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА В СТВОЛЕ СКВАЖИНЫ И ОКРУЖАЮЩИХ ПОРОДАХ

В этой главе представлена нелинейная по теплоемкости, плотности и коэффициенту теплопроводности математическая модель температурного поля турбулентного потока в скважине, учитывающая теплообмен с окружающей средой. Определена базисная совокупность безразмерных параметров.

Развит подход, основанный на комбинации асимптотических методов, для решения задач сопряжения, содержащих внутреннее разложение в ряд Тейлора зависимостей теплоемкости, плотности и коэффициента теплопроводности от температуры. Указанный подход заключается в последовательном применении асимптотических методов малого параметра и пространственного по коэффициенту осреднения.

На основе развитого подхода с использованием интегрального преобразования Лапласа – Карсона построены решения задач о температурном поле турбулентного потока жидкости, учитывающих зависимости теплопроводности, теплоемкости и плотности от температуры. Для определения нелокального среднеинтегрального условия к задаче для остаточного члена применено разложение по формальному асимптотическому параметру с последующим интегральным осреднением задач для его коэффициентов. Найдены решения задачи в пространстве оригиналов.

2.1. Постановка задачи о нестационарном теплообмене турбулентного потока в безразмерных переменных

Постановка задачи (1.4.1)–(1.4.7), в отличие от рассмотренных в работах [163, 175, 193], осложнена переменными коэффициентами $\lambda(r)$ и $R(r)$, которые для турбулентного потока рассчитываются из уравнений Сполдинга (раздел 1.3), а для ламинарного – определены в разделе 1.2. Используя следующие соотношения

$$r = r_d / r_0, \quad z = z_d / D, \quad Fo = a_{r1} t / r_0^2, \quad T_j = (\theta_j - \theta_{01} + \Gamma z_d) / \theta_{11}, \quad (2.1.1)$$

$$\Lambda = \lambda_{r1}/\lambda_r, \text{ Pe} = vr_0/a_{r1}, \theta_{11} = \Gamma D, \chi = c_1 \rho_1 / c \rho, v = r_0 / D,$$

$$H = \eta \rho g r_0 / v \theta_{11}, \gamma = \gamma^* \Gamma D, \sigma = \sigma^* \Gamma D,$$

где $j = \langle \text{пробел} \rangle$ или «1» – номер области, приведем задачу (1.6.1)–(1.6.7) к безразмерным переменным [148]

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} - \Lambda_{r1}^z v^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{ Fo} > 0, \quad z > 0, \quad (2.1.2)$$

$$(1 + \sigma(T - T^*)) \frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) (1 + \gamma(T - T^*)) \frac{\partial T}{\partial r} \right) - v^2 \chi \Lambda_{r1}^z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \quad (2.1.3)$$

$$(1 + \sigma(T - T^*)) R(r) \text{Pe} v \left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + H \right) = Q(r, z, \text{Fo}), \quad r < 1, \text{ Fo} > 0, \quad z > 0,$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad (2.1.4)$$

$$(1 + \gamma(T - T^*)) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.1.5)$$

$$T|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.1.6)$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.1.7)$$

$$T|_{z=0} = \frac{\theta_{10}(\tau) - \theta_{01}}{\theta_0} = T_0(\text{Fo}), \quad (2.1.8)$$

где в качестве параметра θ_{11} принята величина ΓD , Pe – аналог параметра Пекле, Fo – аналог числа Фурье, $Q(r, z, \text{Fo}) = r_0^2 q_d / c \rho \theta_0 a_{1r}$, $T_0(\text{Fo})$ – температурный сигнал пласта или функция, определяющая зависимость температуры поступающего из пласта в скважину флюида от времени. Температурное поле в пласте определяется баротермическим эффектом, имеющим место при нестационарном течении и теплообменом с окружающими породами. Определенное влияние на температурные поля в нефтегазовых коллекторах могут также оказывать тепловые эффекты фазовых переходов.

Следует подчеркнуть, что реальным отражением трудностей исследования турбулентного потока в задаче (2.1.2)–(2.1.8) является наличие переменных коэффициентов $\lambda(r)$ под знаком производной по координате r и $R(r)$ перед первой производной по z в уравнении (2.1.3).

Нелинейные поправки, учитывающие зависимость теплоемкости и теплопроводности от температуры, найдены путем разложения исходной задачи по двум малым параметрам σ и γ . Поскольку эти параметры являются независимыми, влияние каждой из поправок может быть определено независимо и последовательно.

Ниже для получения приближенных аналитических решений использована комбинация асимптотических методов малого параметра [25, 145] и по коэффициентного осреднения, описанного в главе I.

2.2. Представление общей температурной задачи для турбулентного потока жидкости в асимптотической последовательности

Как отмечено выше, задача о нестационарном температурном поле цилиндрического турбулентного потока (2.1.2)–(2.1.8) содержит малый параметр $\nu = r_0/D \sim 10^{-4}$, так как радиус скважины $r_0 \sim 0,1$ м много меньше ее длины $D \sim 10^3$ м. Это позволяет пренебречь слагаемыми, содержащими множитель порядка ν^2 .

2.2.1. Применение метода малого параметра

В качестве малого параметра использован температурный коэффициент теплопроводности γ , имеющий в безразмерных переменных порядок 10^{-2} . С учетом вышесказанного постановка задачи (2.1.2)–(2.1.8) примет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \left(1 + \gamma(T - T^*) \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ & + R(r) \text{Pev} \left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + H \right) = Q(r, z, Fo), \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad (2.2.3)$$

$$\left(1 + \gamma(T - T^*) \right) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.2.4)$$

$$T|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.2.5)$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.2.6)$$

$$T|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (2.2.7)$$

Решение нелинейной задачи (2.2.1)–(2.2.7) отыскивается в виде асимптотических формул

$$T_1 = T_{1[0]} + \gamma T_{1[1]} + \dots + \Theta_1, \quad T = T_{[0]} + \gamma T_{[1]} + \dots + \Theta, \quad (2.2.8)$$

где нижний индекс в квадратных скобках представляет порядок разложения по малому параметру γ .

Подставляя (2.2.8) в (2.2.1)–(2.2.7), получим задачу, разбитую по степеням γ

$$\frac{\partial T_{1[0]}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}}{\partial r} \right) + \gamma \left(\frac{\partial T_{1[1]}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[1]}}{\partial r} \right) \right) + \dots = 0, \quad (2.2.9)$$

$$r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_{[0]}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}}{\partial z} - 1 \right) + \gamma \left[\frac{\partial T_{[1]}}{\partial \text{Fo}} - \right. \\ & \left. - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[1]}}{\partial r} \right) - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) (T_{[0]} - T^*) \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{[1]}}{\partial z} \right] + \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$+ \dots = Q(r, z, \text{Fo}), \quad r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0,$$

$$(T_{[0]} + \gamma T_{[1]} + \dots)_{r=1} = (T_{1[0]} + \gamma T_{1[1]} + \dots)_{r=1}, \quad (2.2.11)$$

$$\left. \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right|_{r=1} + \gamma \left[\left. \frac{\partial T_{[1]}}{\partial r} \right|_{r=1} + (T_{[0]} - T^*) \left. \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right|_{r=1} \right] = \Lambda \left. \frac{\partial T_{1[0]}}{\partial r} \right|_{r=1} + \gamma \Lambda \left. \frac{\partial T_{1[1]}}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (2.2.12)$$

$$(T_{[0]} + \gamma T_{[1]} + \dots)_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (T_{1[0]} + \gamma T_{1[1]} + \dots)_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.2.13)$$

$$(T_{1[0]} + \gamma T_{1[1]} + \dots)_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.2.14)$$

$$(T_{[0]} + \gamma T_{[1]} + \dots)_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (2.2.15)$$

Поскольку уравнения и условия задачи (2.2.9)–(2.2.15) выполняются по γ тождественно, то коэффициенты при соответствующих степенях γ независимо обращаются в нуль [145]. При γ^0 получим постановку задачи

$$\frac{\partial T_{1[0]}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (2.2.16)$$

$$\frac{\partial T_{[0]}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}}{\partial z} - 1 \right) = Q(r, z, \text{Fo}), \quad (2.2.17)$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$T_{[0]}|_{r=1} = T_{1[0]}|_{r=1}, \quad (2.2.18)$$

$$\frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_{1[0]}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.2.19)$$

$$T_{[0]}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_{1[0]}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.2.20)$$

$$T_{1[0]}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.2.21)$$

$$T_{[0]}|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (2.2.22)$$

Задача (2.2.16)–(2.2.22) содержит переменные коэффициенты $\lambda(r)$ и $R(r)$, поэтому для построения решения использован развитый автором метод «покоэффициентного усреднения».

2.2.2. Разложение задачи для нулевого коэффициента по формальному параметру

В задачу (2.2.16)–(2.2.22) формально внесен параметр асимптотического разложения ε путем замены параметра Λ на его произведение с формальным асимптотическим параметром $\varepsilon \Lambda$. При $\varepsilon = 1$ задача сводится к исходной. Такое введение формального параметра в задаче имеет физический смысл, заключающийся в том, что устремление его к нулю $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствует возрастанию радиальной компоненты теплопроводности флюида до бесконечности $\lambda_r \rightarrow \infty$.

Решения задачи представим в виде асимптотических формул [233]

$$\begin{aligned} T_{[0]} &= T_{[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{[0]}^{(1)} + \varepsilon^2 T_{[0]}^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T_{[0]}^{(n)} + \Theta_{[0]}^{(n)}, \\ T_{1[0]} &= T_{1[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{1[0]}^{(1)} + \varepsilon^2 T_{1[0]}^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T_{1[0]}^{(n)} + \Theta_{1[0]}^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

где верхние индексы соответствуют порядковому номеру приближения по формальному параметру.

Подставляя (2.2.23) в (2.2.16), получим

$$\frac{\partial T_{1[0]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_{1[0]}^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (2.2.24)$$

$$r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0.$$

Аналогично из (2.2.17) имеем

$$-\frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial r} \right) + \left[\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. + R(r) \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - Q(r, z, \text{Fo}) \right] + \quad (2.2.25)$$

$$+ \varepsilon \left[\frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}^{(2)}}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial z} \right] + \dots = 0,$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0.$$

Граничные и начальные условия примут вид

$$\left(T_{[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{[0]}^{(1)} + \dots \right) \Big|_{r=1} = \left(T_{1[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{1[0]}^{(1)} + \dots \right) \Big|_{r=1}, \quad (2.2.26)$$

$$\frac{\partial \left(T_{[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{[0]}^{(1)} + \dots \right)}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial \left(T_{1[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{1[0]}^{(1)} + \dots \right)}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.2.27)$$

$$\left(T_{[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{[0]}^{(1)} + \dots \right) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \left(T_{1[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{1[0]}^{(1)} + \dots \right) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.2.28)$$

$$\left(T_{1[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{1[0]}^{(1)} + \dots \right) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.2.29)$$

$$\left(T_{[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{[0]}^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (2.2.30)$$

В постановке (2.2.24)–(2.2.30) уравнения, следующие из (2.2.25), являются зацепленными в том смысле, что содержат соседние коэффициенты асимптотического разложения. Процедуры расщепления для нулевого и первого коэффициентов аналогичны описанным в п. 1.9.

2.3. Задача о температурном поле в нулевом приближении

Умножив (2.2.25) на ε и устремив его к нулю, получим

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.3.1)$$

Отсюда для радиального градиента температуры в нулевом приближении имеем:

$$\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial r} = \frac{C}{r \lambda(r)}. \quad (2.3.2)$$

В силу требования ограниченности решения на оси скважины, из (2.3.2) получим $C = 0$, то есть

$$\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial r} = 0. \quad (2.3.3)$$

Из (2.3.3) следует, что в нулевом приближении температура не зависит от радиальной координаты r и является функцией только координаты z и безразмерного времени Fo

$$T_{[0]}^{(0)} = T_{[0]}^{(0)}(z, Fo). \quad (2.3.4)$$

Формально полагая $\varepsilon = 0$ в (2.2.24), получим уравнение для нулевого коэффициента разложения $T_{1[0]}^{(0)}$

$$\frac{\partial T_{1[0]}^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.3.5)$$

С учетом (2.3.4) из (2.2.25) при первой степени ε имеем следующее уравнение для определения нулевого коэффициента разложения температуры в трубе:

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial Fo} + R(r) \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial z} - 1 + H \right) - Q(r, z, Fo). \quad (2.3.6)$$

Уравнение (2.3.6) содержит коэффициенты разложения нулевого и первого порядков $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$, т.е. является сцепленным. Для расцепления исполь-

зована процедура, описанная, например, в [170]. Уравнение (2.3.6) запишем в виде

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} \right) = A_1(z, Fo) + R(r) A_2(z, Fo) - Q(r, z, Fo), \quad (2.3.7)$$

где, для удобства, введены вспомогательные функции с указанием на переменные, от которых они зависят

$$A_1(z, Fo) = \frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial Fo}, \quad A_2(z, Fo) = \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right). \quad (2.3.8)$$

Функции $A_1(z, Fo)$ и $A_2(z, Fo)$, как и $T_{[0]}^{(0)}$ не зависят от r . Уравнение (2.3.7) легко интегрируется, в результате получим

$$\frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r}{2\lambda(r)} A_1(z, Fo) + \frac{R_1(r)}{r\lambda(r)} A_2(z, Fo) - \frac{Q_1(r, z, Fo)}{r\lambda(r)} \right). \quad (2.3.9)$$

В выражении (2.3.9) введены следующие обозначения:

$$R_1(r) = \int_0^r r' R(r') dr', \quad Q_1(r, z, Fo) = \int_0^r r' Q(r', z, Fo) dr',$$

которые представлены интегралами от радиального профиля скорости и функции источников, и в силу этого названы *моментными*.

Осуществим исключение первого коэффициента асимптотического разложения, подставив (2.3.9) в (2.2.27)

$$\left. \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} A_1(z, Fo) + R_1(1) A_2(z, Fo) - Q_1(1, z, Fo) \right) = \Lambda \left. \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}. \quad (2.3.10)$$

Отсюда с учетом (2.3.8) получим уравнение, содержащее коэффициенты разложения только нулевого порядка

$$\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial Fo} + 2R_1(1) \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = 2\chi \left. \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} + 2Q_1(1, z, Fo), \quad (2.3.11)$$

$$r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0.$$

Постановка задачи для нулевого коэффициента разложения запишется как

$$\frac{\partial T_{1[0]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (2.3.12)$$

$$\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + 2R_1(1)\text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = 2\chi \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + 2Q_1(1, z, \text{Fo}), \quad (2.3.13)$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$T_{[0]}^{(0)} = T_{1[0]}^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (2.3.14)$$

$$T_{[0]}^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_{1[0]}^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.3.15)$$

$$T_{1[0]}^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.3.16)$$

$$T_{[0]}^{(0)} \Big|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (2.3.17)$$

Так, из исходной задачи для уравнений параболического типа получена смешанная краевая задача для коэффициента нулевого асимптотического разложения, со следом производной из внешней области (2.3.12)–(2.3.17), такая задача относится к неклассическим. Исследование таких задач является актуальным направлением современной математической физики.

Отметим, что переменные коэффициенты исходной задачи трансформировались в значения моментных функций в точках сопряжения $R_1(1) = R_1(r=1)$ и $Q_1(1, z, \text{Fo}) = Q_1(r=1, z, \text{Fo})$. По этой причине задача (2.3.12)–(2.3.17) не содержит переменных коэффициентов и для нее применимы хорошо развитые классические методы интегральных преобразований.

В частных случаях [180, 189, 193, 212] показано, что постановка интегрально осредненной по радиальной координате от 0 до 1 задачи и постановка для нулевого приближения асимптотического разложения совпадают с точностью до обозначений, предел решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ представляет «асимптотическое усреднение» искомого решения по радиальной координате, а нулевой коэффициент определяет «асимптотически усредненные» по сечению потока значения температуры.

Необходимо заметить, что интегральная процедура усреднения применительно к уравнению (2.2.2) не приводит к ожидаемому результату, как в [180, 189, 193, 212], поскольку оно содержит переменный коэффициент, зависящий от радиальной координаты, по которой осуществляется интегрирование. Однако совпадение решения осредненной температурной задачи с нулевым коэффициентом в частных случаях, когда такие коэффициенты отсутствуют, позволяют интерпретировать нулевой коэффициент как «асимптотически среднее» значение. В этом смысле нахождение нулевого коэффициента является расширением классической процедуры интегрального осреднения.

2.4. Решение задачи о нестационарном теплообмене турбулентного потока для нулевого коэффициента асимптотического разложения

С помощью преобразования Лапласа – Карсона [66, 67, 93]

$$T_j^u = p \int_0^{\infty} e^{-pFo} T_j(Fo) dFo, \quad (2.4.1)$$

запишем задачу (2.3.12)–(2.3.17) в пространстве изображений

$$pT_{1[0]}^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad z > 0, \quad (2.4.2)$$

$$pT_{[0]}^{(0)u} + 2R_1(1)\text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = 2\chi \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} + 2Q_1^u(1, z, p), \quad (2.4.3)$$

$$r < 1, \quad z > 0,$$

$$T_{[0]}^{(0)u} = T_{1[0]}^{(0)u} \Big|_{r=1}, \quad (2.4.4)$$

$$T_{1[0]}^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.4.5)$$

$$T_{[0]}^{(0)u} \Big|_{z=0} = T_0^u(p). \quad (2.4.6)$$

Решение уравнения (2.4.2) выражается через функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента

$$T_{1[0]}^{(0)u} = C_1 I_0(r\sqrt{p}) + C_2 K_0(r\sqrt{p}). \quad (2.4.7)$$

Условие (2.4.5) требует равенства нулю константы C_1 , поэтому запишем

$$T_{1[0]}^{(0)u} = C_2 K_0(r\sqrt{p}). \quad (2.4.8)$$

Определив константу C_2 из условия (2.4.4), представим решение (2.4.8) и его производную по радиальной координате в виде

$$T_{1[0]}^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T_{[0]}^{(0)u}, \quad \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)u}}{\partial r} = -\sqrt{p} \frac{K_1(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T_{[0]}^{(0)u}. \quad (2.4.9)$$

При $r = 1$ запишем

$$\left. \frac{\partial T_{1[0]}^{(0)u}}{\partial r} \right|_{r=1} = -\sqrt{p} k T_{[0]}^{(0)u}, \quad (2.4.10)$$

где $k = k(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$. С учетом (2.4.10) уравнение (2.4.3) для определения $T_{[0]}^{(0)u}$ запишется как

$$\frac{dT_{[0]}^{(0)u}}{dz} + \left(\frac{p + 2\chi k \sqrt{p}}{2R_1(1)\text{Pev}} \right) T_{[0]}^{(0)u} = 1 - \text{H} + \frac{Q_1^u(1, z, p)}{R_1(1)\text{Pev}}, \quad r < 1, \quad z > 0. \quad (2.4.11)$$

Решение уравнения (2.4.11), с учетом условия (2.4.6), представится в виде

$$T_{[0]}^{(0)u} = T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \int_0^z \frac{R_1(1)\text{Pev}(1 - \text{H}) + Q_1^u(1, \xi, p)}{R_1(1)\text{Pev}} e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi, \quad (2.4.12)$$

$r < 1, \quad z > 0,$

где $\alpha = \frac{p + 2\chi k \sqrt{p}}{2\text{Pev}R_1(1)}$.

Подставив (2.4.12) в (2.4.9), получим решение для внешней области

$$T_{1[0]}^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \int_0^z \frac{R_1(1)\text{Pev}(1 - \text{H}) + Q_1^u(1, \xi, p)}{R_1(1)\text{Pev}} e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi \right], \quad (2.4.13)$$

$r > 1, \quad z > 0.$

Выражения (2.4.12) и (2.4.13) представляют решения задачи в нулевом приближении в пространстве изображений. Анализ (2.4.12) показывает, что средняя по сечению скважины температура зависит от величины температурного сигнала пласта, дебита скважины, а также от теплофизических свойств углеводородов и окружающих горных пород.

Формула для описания температурного поля турбулентного потока, полученная в нулевом приближении, совпадает с аналогичными для ламинарного и выровненного профилей скорости [171–173, 175, 193, 223]. Это означает, что для получения информации о вкладе режима течения в темпе-

ратурное поле восходящего потока необходимо отыскание первого коэффициента асимптотического разложения по ε .

Разработанный алгоритм построения задачи для нулевого коэффициента разложения представляет некоторую универсальную процедуру асимптотического осреднения исходной задачи. Важность асимптотического осреднения заключается в том, что оно проще реализуется даже в том случае, когда интегральная процедура осреднения неприемлема.

2.5. Температурная задача в первом приближении

Уравнения (2.2.24)–(2.2.30) для первого коэффициента разложения по формальному параметру ε представляются в следующем виде:

$$\frac{\partial T_{1[0]}^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (2.5.1)$$

$$\frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial z} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}^{(2)}}{\partial r} \right), \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0. \quad (2.5.2)$$

Поскольку в уравнение (2.5.2) входят коэффициенты разложения первого и второго порядков, аналогично решению задачи для нулевого коэффициента разложения применим процедуру «расщепления» [192] к уравнению (2.5.2). Во избежание громоздкости математических преобразований введем обозначения операторов

$$\widehat{L}_1 = \frac{\partial}{\partial \text{Fo}}, \quad \widehat{L}_2 = \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.5.3)$$

тогда уравнение (2.5.2) запишется в виде

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}^{(2)}}{\partial r} \right) = \widehat{L}_1 T_{[0]}^{(1)} + R(r) \widehat{L}_2 T_{[0]}^{(1)}, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0. \quad (2.5.4)$$

Повторное интегрирование (2.3.9) по r позволяет получить выражение для коэффициента $T_{[0]}^{(1)}$

$$T_{[0]}^{(1)} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\lambda_1(r)}{2} A_1(z, Fo) + R_2(r) A_2(z, Fo) - Q_2(r, z, Fo) \right) + B(z, Fo), \quad (2.5.5)$$

где введены моментные интегралы

$$\lambda_1(r) = \int_0^r \frac{r'}{\lambda(r')} dr', \quad R_2(r) = \int_0^r \frac{R_1(r')}{r' \lambda(r')} dr', \quad Q_2(r, z, Fo) = \int_0^r \frac{Q_1(r', z, Fo)}{r' \lambda(r')} dr', \quad (2.5.6)$$

а $B(z, Fo)$ не зависит от r . Заметим, что эти моментные интегралы отражают зависимость распределения температуры в скважине от структуры потока, поскольку содержат коэффициенты $\lambda(r)$ и $R(r)$.

Выражение (2.5.4) с учетом (2.5.5), запишется как

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[0]}^{(2)}}{\partial r} \right) &= \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\lambda_1(r)}{2} \widehat{L}_1 A_1(z, Fo) + \right. \\ &+ R_2(r) \widehat{L}_1 A_2(z, Fo) - \widehat{L}_1 Q_2(r, z, Fo) \left. \right) + \\ &+ \widehat{L}_1 B(z, Fo) + \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\lambda_1(r)}{2} R(r) \widehat{L}_2 A_1(z, Fo) + R(r) R_2(r) \widehat{L}_2 A_2(z, Fo) - \right. \\ &\left. - R(r) \widehat{L}_2 Q_2(r, z, Fo) \right) + R(r) \widehat{L}_2 B(z, Fo). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Интегрированием (2.5.7) получим выражение для производной второго коэффициента разложения по радиальной координате, содержащее фундаментальные операторы задачи и моментные интегралы

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{[0]}^{(2)}}{\partial r} &= \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{\lambda_2(r)}{2r\lambda(r)} \widehat{L}_1 A_1(z, Fo) + \frac{R_3(r)}{r\lambda(r)} \widehat{L}_1 A_2(z, Fo) - \frac{1}{r\lambda(r)} \widehat{L}_1 Q_3(r, z, Fo) \right) + \\ &+ \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{R_5(r)}{2r\lambda(r)} \widehat{L}_2 A_1(z, Fo) + \frac{R_4(r)}{r\lambda(r)} \widehat{L}_2 A_2(z, Fo) - \frac{1}{r\lambda(r)} \widehat{L}_2 Q_R(r, z, Fo) \right) + \\ &+ \frac{\Lambda r}{2\chi\lambda(r)} \widehat{L}_1 B(z, Fo) + \frac{\Lambda R_1(r)}{\chi r\lambda(r)} \widehat{L}_2 B(z, Fo), \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

которое согласно условию на границе (2.2.27) равно

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_{[0]}^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=1} &= \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{1}{2} \lambda_2(1) \widehat{L}_1 A_1(z, Fo) + R_3(1) \widehat{L}_1 A_2(z, Fo) - \widehat{L}_1 Q_3(1, z, Fo) \right) + \\ &+ \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{R_5(1)}{2} \widehat{L}_2 A_1(z, Fo) + R_4(1) \widehat{L}_2 A_2(z, Fo) - \widehat{L}_2 Q_R(1, z, Fo) \right) + \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

$$+ \frac{\Lambda}{2\chi} \widehat{L}_1 B(z, Fo) + \frac{\Lambda R_1(1)}{\chi} \widehat{L}_2 B(z, Fo) = \Lambda \left. \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1}.$$

Последняя часть равенства (2.5.9) представляет уравнение, эквивалентное (2.5.2), где $A_1(z, Fo)$ и $A_2(z, Fo)$ определены согласно (2.3.8), а $B(z, Fo)$ является неизвестной функцией. Таким образом, отыскав аналитическое выражение для $B(z, Fo)$, получим решение задачи для первого коэффициента разложения по ϵ . Из (2.5.5) для $B(z, Fo)$ имеем

$$B(z, Fo) = T_{[0]}^{(1)} - \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_1(r) A_1(z, Fo) + R_2(r) A_2(z, Fo) - Q_2(r, z, Fo) \right). \quad (2.5.10)$$

Для отыскания $B(z, Fo)$ сначала необходимо сформулировать задачу для коэффициента $T_{[0]}^{(1)}$. Подставляя (2.5.10), (2.3.8) в (2.5.9), найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial Fo} + 2\text{Pev} R_1(1) \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2\lambda_2(1) - \lambda_1(r)}{2} \frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)}}{\partial Fo^2} + \frac{2\Lambda \text{Pe}^2 v^2}{\chi} (R_4(1) - R_1(1) R_2(r)) \times \\ & \times \frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{\Lambda}{\chi} [2R_3(1) - R_2(r) + R_5(1) - \lambda_1(r) R_1(1)] \text{Pev} \frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)}}{\partial z \partial Fo} = 2\chi \left. \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} - \\ & - \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_2(r, z, Fo)}{\partial Fo} - 2\text{Pev} R_1(1) \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_2(r, z, Fo)}{\partial z} + \\ & + 2 \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial Q_3(1, z, Fo)}{\partial Fo} + \text{Pev} \frac{\partial Q_R(1, z, Fo)}{\partial z} \right), \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

где обозначены следующие моментные функции переменных коэффициентов и источников:

$$\begin{aligned} R_3(r) &= \int_0^r r' R_2(r') dr', \quad R_4(r) = \int_0^r r' R(r') R_2(r') dr', \quad R_5(r) = \int_0^r \lambda_1(r') r' R(r') dr', \\ Q_3(r, z, Fo) &= \int_0^r r' Q_2(r', z, Fo) dr', \quad Q_R(r, z, Fo) = \int_0^r r' R(r') Q_2(r', z, Fo) dr'. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Математическая постановка задачи для первых коэффициентов разложения включает также уравнение для окружающей среды

$$\frac{\partial T_{1[0]}^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \quad (2.5.13)$$

условия равенства температур на границе

$$T_{[0]}^{(1)} \Big|_{r=1} = T_{1[0]}^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (2.5.14)$$

условия в начальный момент времени и в удаленных от скважины областях

$$T_{1[0]}^{(1)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (2.5.15)$$

$$T_{1[0]}^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.5.16)$$

Искомое решение задачи имеет вид (2.5.5). Удовлетворив всем начальным и граничным условиям задачи для первого коэффициента разложения невозможно построить для нее нетривиальные решения. Это свидетельствует о необходимости видоизменения условий в начальный момент времени $Fo = 0$ и на забое скважины $z = 0$, т.е. в математическом значении в области «вязких погранслоев». Выполнение условий $T_{[0]}^{(1)} \Big|_{Fo=0} = 0$ и $T_{[0]}^{(1)} \Big|_{z=0} = 0$ может быть обеспечено затем построением погранслойных функций.

Из (2.5.11) и (2.5.12) следует, что постановка задачи для первого коэффициента разложения содержит значения моментных функций высоких порядков от переменных коэффициентов $\lambda(r)$ и $R(r)$, зависящих от режима течения жидкости в скважине. Это означает, что применение в среднем точного асимптотического метода, по сути дела, трансформирует переменные коэффициенты, входящие в исходные уравнения, в значения моментных функций высоких порядков в точках сопряжения. Такая трансформация позволяет свести исходную задачу с переменными коэффициентами к задачам для коэффициентов асимптотического разложения с постоянными коэффициентами.

2.6. Задача для остаточного члена в первом приближении

Как и в главе I, сумму слагаемых после первого коэффициента разложения как представим как

$$T_{[0]} = T_{[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{[0]}^{(1)} + \Theta, \quad T_{1[0]} = T_{1[0]}^{(0)} + \varepsilon T_{1[0]}^{(1)} + \Theta_1, \quad (2.6.1)$$

где Θ и Θ_1 – остаточный член первого порядка асимптотического разложения искомого решения в скважине и окружающей среде.

Исследование поведения найденного для остаточного члена решения позволяет определить область лучшей применимости первого приближения. Наиболее благоприятным для широкой применимости полученного решения является условие, когда остаточный член обращается в нуль $\Theta = 0$. В таком исключительном случае полученное приближение представляет точное решение исходной задачи.

Нулевой коэффициент разложения и радиальная производная первого коэффициента удовлетворяют задаче (2.3.12)–(2.3.17) и уравнению (2.3.1) соответственно, поэтому из (2.2.1)–(2.2.7) получим

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial F_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.6.2)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial F_0} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \varepsilon R(r) \text{Pev} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\varepsilon^2 \left(\frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial F_0} - R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial z} \right), \quad (2.6.3)$$

$$\Theta|_{r=1} = \Theta_1|_{r=1}, \quad (2.6.4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial (\Theta_1 + \varepsilon T_{1[0]}^{(1)})}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.6.5)$$

$$(\Theta + \varepsilon T_{[0]}^{(1)}) \Big|_{F_0=0} = 0, \quad \Theta_1 \Big|_{F_0=0} = 0, \quad (2.6.6)$$

$$\Theta_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.6.7)$$

$$(\Theta + \varepsilon T_{[0]}^{(1)}) \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.6.8)$$

Заметим, что в постановке для остаточного члена также присутствуют переменные коэффициенты, обусловленные турбулентным режимом потока жидкости.

Для нахождения дополнительных условий представим остаточный член также в виде асимптотических рядов

$$\Theta_1 = \Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2 \Theta_1^{(2)} + \dots, \quad \Theta = \Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + \varepsilon^2 \Theta^{(2)} + \dots \quad (2.6.9)$$

Подставляя (2.6.9) в (2.6.2)–(2.6.8), получим

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (2.6.10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 \left[-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial r} \right) \right] + \varepsilon^1 \left[\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \\ + \text{vPe} R(r) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} - Q(z, r) \Big] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial (\Theta^{(1)} + T_{[0]}^{(1)})}{\partial \text{Fo}} - \right. \\ \left. - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} \right) + \text{vPe} R(r) \frac{\partial (\Theta^{(1)} + T_{[0]}^{(1)})}{\partial z} \right] + \dots = 0, \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{r=1} - \Theta_1^{(0)} \Big|_{r=1} + \varepsilon (\Theta^{(1)} \Big|_{r=1} - \Theta_1^{(1)} \Big|_{r=1}) + \dots = 0, \quad (2.6.12)$$

$$\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial (\Theta_1^{(1)} + T_{[0]}^{(1)})}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \dots = 0, \quad (2.6.13)$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon (\Theta^{(1)} + T^{(1)}) \Big|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \quad \Theta_1^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \quad (2.6.14)$$

$$\Theta_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \dots = 0, \quad (2.6.15)$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{z=0} + \varepsilon (\Theta^{(1)} + T_{[0]}^{(1)}) \Big|_{z=0} + \dots = 0. \quad (2.6.16)$$

Как и в случае нулевого коэффициента, интегрируя следующее из

$$(2.6.11) \text{ при } \varepsilon = 0 \text{ уравнение } \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \text{ с учетом (2.6.13) полу-}$$

чим, что нулевой коэффициент не зависит от радиальной координаты

$\Theta^{(0)} = \Theta^{(0)}(z, \text{Fo})$. Из (2.6.10)–(2.6.16) получим задачу для нулевого коэффи-

циента разложения. Расщепление уравнения

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + \text{vPe} R(r) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} \quad (2.6.17)$$

осуществлено аналогично нулевому приближению для температуры. Задача

для нулевого коэффициента остаточного члена имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.6.18)$$

$$\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + 2\nu \text{Pe} R_1(1) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} = \chi \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.6.19)$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{r=1} = \Theta_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (2.6.20)$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_1^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.6.21)$$

$$\Theta_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.6.22)$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.6.23)$$

Нетрудно убедиться, что задача (2.6.18)–(2.6.23) имеет тривиальное решение $\Theta^{(0)} = 0$. Отсюда, согласно (2.6.17) следует, что первый коэффициент разложения остаточного члена также не зависит от радиальной координаты $\Theta^{(1)} = \Theta^{(1)}(z, \text{Fo})$.

Из (2.6.10)–(2.6.16) получим задачу для первого коэффициента разложения. Для исключения $\Theta^{(2)}$ из уравнения

$$\frac{\partial (T_{[0]}^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial \text{Fo}} + \nu \text{Pe} R(r) \frac{\partial (T_{[0]}^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial z} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r)r \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.6.24)$$

умножим его на $\frac{\Lambda r}{\chi}$ и проинтегрируем от нуля до r

$$\lambda(r)r \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial r} = \frac{\Lambda}{\chi} \int_0^r r' \frac{\partial (T_{[0]}^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial \text{Fo}} dr' + \frac{\nu \text{Pe} \Lambda}{\chi} \int_0^r r' R(r') \frac{\partial (T_{[0]}^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial z} dr'. \quad (2.6.25)$$

Далее воспользуемся условием сопряжения (2.6.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} &= \frac{\Lambda}{\chi} \int_0^1 r' \frac{\partial (T_{[0]}^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial \text{Fo}} dr' + \\ &+ \frac{\nu \text{Pe} \Lambda}{\chi} \int_0^1 r' R(r') \frac{\partial (T_{[0]}^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial z} dr' = \Lambda \frac{\partial (T_{1[0]}^{(0)} + \Theta_1^{(1)})}{\partial r} \Big|_{r=1}. \end{aligned} \quad (2.6.26)$$

Согласно (2.5.12) все слагаемые, содержащие $T_{[0]}^{(1)}$ в (2.6.26), сокращаются, а уравнение для первого коэффициента остаточного члена представляется как

$$\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + 2\nu \text{Pe} R_1(1) \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial z} = 2\chi \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (2.6.27)$$

Математическая постановка задачи для первого коэффициента разложения остаточного члена наряду с (2.6.27) также содержит следующие уравнение и условия:

$$\frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.6.28)$$

$$\Theta^{(1)} \Big|_{r=1} = \Theta_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (2.6.29)$$

$$\left(T_{[0]}^{(1)} + \Theta^{(1)} \right) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.6.30)$$

$$\Theta_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.6.31)$$

$$\left(T_{[0]}^{(1)} + \Theta^{(1)} \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.6.32)$$

Нелокальные среднеинтегральные условия находятся из требования тривиального решения осредненной интегрально задачи для $\Theta^{(1)}$

$$\frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.6.33)$$

$$\frac{\partial \langle \Theta^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} + 2\nu \text{Pe} R_1(1) \frac{\partial \langle \Theta^{(1)} \rangle}{\partial z} = 2\chi \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.6.34)$$

$$\langle \Theta^{(1)} \rangle \Big|_{r=1} = \Theta_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (2.6.35)$$

$$\langle \Theta^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = -\langle T_{[0]}^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0}, \quad (2.6.36)$$

$$\Theta_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.6.37)$$

$$\langle \Theta^{(1)} \rangle \Big|_{z=0} = -\langle T_{[0]}^{(1)} \rangle \Big|_{z=0}. \quad (2.6.38)$$

Тривиальное решение задачи для первого коэффициента остаточного члена возможно при равенстве нулю правых частей (2.6.36) и (2.6.38). Таким образом, условия

$$\langle T_{[0]}^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = 0 \quad \text{и} \quad \langle T_{[0]}^{(1)} \rangle \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.6.39)$$

могут быть использованы при решении задачи для первого коэффициента разложения искомого решения $T_{[0]}^{(1)}$, при этом задача для первого коэффициента разложения имеет единственное решение.

Для такого асимптотического разложения по специальному параметру ϵ решение осредненной задачи для остаточного члена обращается в нуль при любых значениях параметра разложения.

2.7. Асимптотическое решение задачи о температурном поле в первом приближении

Математическая постановка задачи для первого коэффициента асимптотического разложения примет вид

$$\frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} \right), \quad r > 1, \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \quad (2.7.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + 2\text{Pev}R_1(1) \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2\lambda_2(1) - \lambda_1(r)}{2} \frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{2\Lambda \text{Pev}^2 v^2}{\chi} (R_4(1) - R_1(1)R_2(r)) \times \\ & \times \frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{\Lambda}{\chi} [2R_3(1) - R_2(r) + R_5(1) - \lambda_1(r)R_1(1)] \text{Pev} \frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)}}{\partial z \partial \text{Fo}} = 2\chi \frac{\partial T_{[0]}^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \\ & - \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_2(r, z, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - 2\text{Pev}R_1(1) \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_2(r, z, \text{Fo})}{\partial z} + \\ & + 2 \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial Q_3(1, z, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \frac{\partial Q_R(1, z, \text{Fo})}{\partial z} \right), \quad r < 1, \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

$$T_{[0]}^{(1)} \Big|_{r=1} = T_{[0]}^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (2.7.3)$$

$$\langle T_{[0]}^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_{[0]}^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.7.4)$$

$$T_{[0]}^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.7.5)$$

$$\langle T_{[0]}^{(1)} \rangle \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.7.6)$$

В пространстве изображений Лапласа – Карсона задача для первых коэффициентов разложения (2.7.1)–(2.7.6) запишется следующим образом:

$$pT_{1[0]}^{(1)u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[0]}^{(1)u}}{\partial r} \right), \quad r > 1, \quad z > 0, \quad (2.7.7)$$

$$\begin{aligned} & p \left[T_{[0]}^{(1)u} - T_{[0]}^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} \right] + 2R_1(1) \text{Pev} \frac{\partial T_{[0]}^{(1)u}}{\partial z} + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2\lambda_2(1) - \lambda_1(r)}{2} p \left[pT_{[0]}^{(0)u} - \frac{\partial T_{[0]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} \Big|_{\text{Fo}=0} \right] + \\ & + \frac{2\Lambda \text{Pev}^2 v^2}{\chi} (R_4(1) - R_1(1)R_2(r)) \frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z^2} + \frac{\Lambda p \text{Pev}}{\chi} [2R_3(1) - R_2(r) + \\ & + R_5(1) - \lambda_1(1)R_1(1)] \frac{\partial T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z} = 2\chi \frac{\partial T_{1[0]}^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\Lambda}{\chi} p [Q_2^u(r, z, p) - Q_2(r, z, 0)] - \\ & - 2\text{Pev} R_1(1) \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_2^u(r, z, p)}{\partial z} + 2 \frac{\Lambda}{\chi} p [Q_3^u(1, z, p) - Q_3(1, z, 0)] + 2\text{Pev} \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_R^u(1, z, p)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

$$r < 1, \quad z > 0,$$

$$T_{[0]}^{(1)u} \Big|_{r=1} = T_{1[0]}^{(1)u} \Big|_{r=1}, \quad (2.7.9)$$

$$\langle T_{[0]}^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = \lim_{p \rightarrow \infty} \langle T_{[0]}^{(1)u} \rangle = 0, \quad (2.7.10)$$

$$T_{1[0]}^{(1)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.7.11)$$

$$\langle T_{[0]}^{(1)u} \rangle \Big|_{z=0} = 0, \quad (2.7.12)$$

при этом, как нетрудно установить, имеют место равенства и выражения

$$\begin{aligned} T_{[0]}^{(1)u} &= \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{1}{2} \lambda_1(r) p T_{[0]}^{(0)u} + R_2(r) \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - Q_2^u(r, z, p) \right] + \\ & + B^u(z, p), \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

$$\begin{aligned} T_{[0]}^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} &= \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev} (1 - \text{H}) (\lambda_1(r) R_1(1) - R_2(r)) + \frac{\Lambda}{\chi} (\lambda_1(r) Q_1(1, z, 0) - Q_2(r, z, 0)) + \\ & + B(z, 0), \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

$$T_{[0]}^{(1)u} \Big|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{\lambda_1(1)}{2} p T_{[0]}^{(0)u} + R_2(1) \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - Q_2^u(1, z, p) \right] + B^u(z, p), \quad (2.7.15)$$

$$\frac{\partial T_{[0]}^{(1)u}}{\partial z} = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{\lambda_1(r)}{2} p \frac{\partial T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z} + R_2(r) \text{Pev} \frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z^2} - \frac{\partial Q_2^u(r, z, p)}{\partial z} \right] + \frac{\partial B^u(z, p)}{\partial z}, \quad (2.7.16)$$

$$\frac{\partial T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z} = (1 - H) + \frac{Q_1^u(1, z, p)}{R_1(1) \text{Pev}} - \alpha T_{[0]}^{(0)u}, \quad (2.7.17)$$

$$\frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z^2} = \frac{1}{R_1(1) \text{Pev}} \frac{\partial Q_1^u(1, z, p)}{\partial z} - \alpha \left((1 - H) + \frac{Q_1^u(1, z, p)}{R_1(1) \text{Pev}} - \alpha T_{[0]}^{(0)u} \right), \quad (2.7.18)$$

$$\left. \frac{\partial T_{[0]}^{(0)u}}{\partial \text{Fo}} \right|_{\text{Fo}=0} = 2R_1(1) \text{Pev} (1 - H) + 2Q_1(1, z, 0). \quad (2.7.19)$$

Решение уравнения (2.7.7) выражается через функции Бесселя нулевого порядка. По аналогии с нулевым коэффициентом разложения представим решение для окружающей скважину породы и его производной на границе $r = 1$ в форме

$$T_{1[0]}^{(1)u} = T_{[0]}^{(1)u} \Big|_{r=1} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}, \quad \left. \frac{\partial T_{1[0]}^{(1)u}}{\partial r} \right|_{r=1} = -\sqrt{pk} T_{[0]}^{(1)u} \Big|_{r=1}. \quad (2.7.20)$$

Подставляя в (2.7.8) выражение (2.7.20), получим

$$\begin{aligned} & p \left[T_{[0]}^{(1)u} - T_{[0]}^{(1)u} \Big|_{\text{Fo}=0} \right] + 2 \text{Pev} R_1(1) \frac{\partial T_{[0]}^{(1)u}}{\partial z} + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2\lambda_2(1) - \lambda_1(r)}{2} p \left[p T_{[0]}^{(0)u} - \left. \frac{\partial T_{[0]}^{(0)u}}{\partial \text{Fo}} \right|_{\text{Fo}=0} \right] + \\ & \frac{2\Lambda \text{Pe}^2 \nu^2}{\chi} (R_4(1) - R_1(1) R_2(r)) \frac{\partial^2 T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z^2} + \frac{\Lambda p \text{Pev}}{\chi} [2R_3(1) - R_2(r) + R_5(1) - \\ & - \lambda_1(1) R_1(1)] \frac{\partial T_{[0]}^{(0)u}}{\partial z} = -2\chi \sqrt{pk} T_{[0]}^{(1)u} \Big|_{r=1} - \frac{\Lambda}{\chi} p [Q_2^u(r, z, p) - Q_2(r, z, 0)] - \\ & - 2R_1(1) \text{Pev} \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_2^u(r, z, p)}{\partial z} + 2 \frac{\Lambda}{\chi} p [Q_3^u(1, z, p) - Q_3(1, z, 0)] + 2 \text{Pev} \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_R^u(1, z, p)}{\partial z}, \\ & r < 1, z > 0, \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

а затем и (2.7.13)–(2.7.19), найдем уравнение для неизвестной функции $B^u(p, z)$

$$\frac{dB^u(z, p)}{dz} + \alpha B^u(z, p) = \frac{pB(z, 0)}{2R_1(1)\text{Pev}} + C_1 T_{[0]}^{(0)u} + C_2^u(z), \quad r < 1, \quad z > 0. \quad (2.7.22)$$

Решение уравнения (2.7.22) имеет вид

$$B^u(z, p) = C^u(p)e^{-\alpha_1 z} + \frac{p}{2R_1(1)\text{Pev}} \int_0^z B(\xi, 0)e^{-\alpha_1(z-\xi)} d\xi + C_1^u(p) \int_0^z T_{[0]}^{(0)u} e^{-\alpha_1(z-\xi)} d\xi + \\ + \int_0^z C_2^u(\xi, p)e^{-\alpha_1(z-\xi)} d\xi, \quad (2.7.23)$$

где константы $C_1^u(p)$, $C_2^u(\xi, p)$ определяются соотношениями

$$C_1^u(p) = \frac{\Lambda}{\chi R_1(1)} [2R_3(1) + R_5(1) + R_1(1)(2\lambda_1(r) - \lambda_1(1))] p \frac{p + 2\chi k \sqrt{p}}{2\text{Pev}R_1(1)} - \\ - \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\lambda_2(r)p^2}{4\text{Pev}R_1(1)} + \frac{\Lambda}{\chi} \left[\text{Pev} \left(R_2(r) - \frac{R_4(1)}{R_1(1)} \right) - \frac{R_2(r)}{2R_1(1)} \right] \frac{(p + 2\chi k \sqrt{p})^2}{4\text{Pe}^2 v^2 R_1^2(1)}, \\ C_2^u(\xi, p) = \frac{\Lambda(1-H)}{\chi} \left[\frac{\lambda_1(r)R_1(r)}{2R_1(1)} + \frac{\chi R_2(r)}{4\Lambda\text{Pev}R_1^2(1)} - \lambda_2(1) + \frac{R_4(1) - R_1(1)R_2(r)}{R_1^2(1)} \right] p + \\ + \frac{\Lambda(1-H)}{\chi R_1^2(1)} \left[\frac{\chi^2 R_2(r)}{2\Lambda\text{Pev}} + R_4(1) - R_1(1)R_2(r) \right] \sqrt{p} + \frac{\Lambda}{2\chi R_1(1)\text{Pev}} [Q_2^u(r, z, p) - \\ - \frac{R_2(r)Q_2^u(r, z, p)}{R_1(1)} + \lambda_1(r)(Q_1^u(1, z, 0) - Q_1^u(1, z, p)) - Q_2^u(r, z, 0) + \\ + \frac{R_2(r)Q_1^u(1, z, p)}{2\text{Pev}R_1^2(1)} + \left(\frac{(2\lambda_2(1) - \lambda_1(r))}{2\text{Pev}R_1(1)} + \frac{R_4(1) - R_1(1)R_2(1)}{2\text{Pev}R_1(1)} + \lambda_1(1) - \right. \\ \left. - \frac{2R_3(1) - R_2(r) + R_5(1)}{R_1(1)} \right) Q_1^u(1, z, p) - Q_2^u(r, z, p) + Q_2^u(r, z, 0) + 2Q_3^u(1, z, p) - \\ - 2Q_3^u(1, z, 0)] p + \frac{\Lambda}{\chi\text{Pev}R_1(1)} \left[\frac{k\chi}{R_1^2(1)} - \frac{\chi R_2(1)}{R_1(1)} Q_1^u(1, z, p) + k\chi Q_2^u(1, z, p) + \right. \\ \left. + \frac{k\chi^2}{2\Lambda\text{Pev}R_1^2(1)} \right] \sqrt{p} - \frac{\Lambda}{\chi} \frac{R_4(1) - R_1(1)R_2(r)}{R_1^2(1)} \frac{\partial Q_1^u(1, z, p)}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{R_2(r)}{R_1(1)} \times \\ \times \left(\frac{\partial Q_2^u(r, z, p)}{\partial z} - \frac{\partial Q_1^u(1, z, p)}{\partial z} \right) + \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{R_1(1)} \frac{\partial Q_1^u(1, z, p)}{\partial z} - \frac{\partial Q_2^u(r, z, p)}{\partial z} \right), \quad (2.7.24)$$

а константа $C^u(p)$ определяется из (2.7.12)

$$C^u(p) = \frac{\Lambda}{\chi} \left[(2\alpha_1 R_3(1) \text{Pev} - p\lambda_2(1)) T_0^u(p) + 2Q_3^u(1,0,p) - 2 \frac{R_3(1)}{R_1(1)} Q_1^u(1,0,p) \right], \quad (2.7.25)$$

$B(\xi,0)$ находится из соответствия (2.7.10)

$$B(\xi,0) = \frac{2\Lambda}{\chi} [\text{Pev}(1-H)(R_3(1) - \lambda_2(1)R_1(1)) + Q_3(1,z,0) + Q_1(1,z,0)]. \quad (2.7.26)$$

Окончательная формула, описывающая первый коэффициент асимптотического разложения получается из (2.5.6) подстановкой выражения (2.7.23) и соотношений (2.7.24)–(2.7.26).

Из анализа полученного решения следует, что первый коэффициент содержит моментные функции различных порядков профилей теплопроводности и скорости $\lambda(r)$ и $R(r)$, и, следовательно, зависит от режима течения. Таким образом, для учета вклада турбулентности в *температурное поле необходимо расчет первого коэффициента разложения.*

Также очевидно, что первый коэффициент асимптотического разложения описывает радиальное распределение температуры турбулентного потока. Для радиального анализа наибольший интерес представляет разность температур между точками внутри скважины и ее стенкой $\tilde{T}_{[0]}^u = T_{[0]}^{1u} - T_{[0]}^{1u}|_{r=1}$.

В пространстве изображений $\tilde{T}_{[0]}^u$ имеет вид

$$\tilde{T}_{[0]}^u = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} p T_{[0]}^{(0)u} + (R_2(r) - R_2(1)) \frac{p + 2\chi k \sqrt{p}}{2R_1(1)} T_{[0]}^{(0)u} \right]. \quad (2.7.27)$$

Устремив параметр p к нулю в (2.7.27), получим стационарное распределение температуры по сечению скважины

$$\tilde{T}_{st} = \frac{\Lambda \text{Pev}(1-H)}{\chi} [(\lambda_1(r) - \lambda_1(1))R_1(1) + (R_2(r) - R_2(1))]. \quad (2.7.28)$$

Отметим, что совокупность действий, приведших к выражению для стационарного поля температуры в скважине, представляет общий алгоритм построения стационарных решений задач теплопроводности в выделенных подобластях. При этом стационарное решение во всей области может и не

достигаться, что характерно для задач теплопроводности. Развитый алгоритм основан на построении первого асимптотического коэффициента.

Полученные выше выражения представляют асимптотическое решение задачи для турбулентного потока жидкости в скважине. Эти формулы позволяют учитывать вклад турбулентного режима. Они применимы также для расчетов температурных полей ламинарного потока, модельного потока с выровненным профилем скорости и др.

2.8. Представление решения общей задачи в пространстве оригиналов

Переход в пространство оригиналов осуществляется по формуле

$$T_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \frac{T_j^u(p)}{p} dp, \quad (2.8.1)$$

с использованием численных алгоритмов [277, 298, 301], а в благоприятных случаях – с помощью справочных соотношений [67].

Оригиналы построены в предположении отсутствия источников, т.е. при $Q^u(r, z, p) = 0$, выражение $T_0^u(p)$ принято независимым от p . В этом случае для относительно малых времен в скважине при $p \rightarrow \infty$ ($Fo \rightarrow 0$), что соответствует $k \approx 1$; решение в нулевом приближении внутри скважины (2.6.12) примет вид [223]

$$T_{[0]}^{(0)u} \approx T_0 e^{-\frac{z}{2R_1(1)Pev} p} e^{-\frac{\chi z}{R_1(1)Pev} \sqrt{p}} + (1-H) \int_0^z e^{-\frac{z-\xi}{2R_1(1)Pev} p} e^{-\frac{\chi(z-\xi)}{R_1(1)Pev} \sqrt{p}} d\xi. \quad (2.8.2)$$

Для нахождения оригинала решения использованы следующее соотношение для обратного преобразования Лапласа – Карсона [67, 223]

$$e^{-\frac{z}{2R_1(1)Pev} p} e^{-\frac{\chi z}{R_1(1)Pev} \sqrt{p}} \rightarrow \Phi \left(Fo - \frac{z}{2R_1(1)Pev} \right) \times \\ \times \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi z}{R_1(1)Pev \sqrt{Fo - \frac{z}{2R_1(1)Pev}}} \right). \quad (2.8.3)$$

С использованием (2.8.3) из (2.6.12) получим оригинал решения для нулевого коэффициента разложения в скважине в приближении малых времен

$$\begin{aligned}
 T_{[0]}^{(0)} \approx & T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi z}{R_1(1) \operatorname{Pev} \sqrt{\operatorname{Fo} - \frac{z}{2R_1(1) \operatorname{Pev}}}} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{z}{2R_1(1) \operatorname{Pev}} \right) + \\
 & + \int_0^z (1 - \mathbf{H}) \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi(z - \xi)}{R_1(1) \operatorname{Pev} \sqrt{\operatorname{Fo} - \frac{z - \xi}{2R_1(1) \operatorname{Pev}}}} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{z - \xi}{2R_1(1) \operatorname{Pev}} \right) d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

Формула (2.8.4) позволяет определить критерий для оценки интервала Z влияния температурного сигнала на входе в интервал измерений и его зависимости от времени, связывающий числа Pe , Fo , относительный радиус ν и средние значения функции радиального распределения скорости

$$R_1(1) = \int_0^1 r' R(r') dr' = \frac{1}{2} \langle R(r) \rangle \text{ для различных профилей } R(r):$$

$$R_1(1) \operatorname{Pev} \sqrt{\operatorname{Fo} - Z/2R_1(1) \operatorname{Pev}} = 0.42 \chi Z, \operatorname{Fo} > Z/2R_1(1) \operatorname{Pev}.$$

Размеры этого интервала значительно меньше пространственного диапазона конвективного влияния $Z_f = 2R_1(1) \operatorname{Pev} \operatorname{Fo}$ и не зависят от распределения коэффициента теплопроводности по радиусу в турбулентном потоке.

Из (2.7.27) следует, что функция $\tilde{T}_{[0]}^u$, описывающая радиальный профиль температуры, имеет вид

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_{[0]}^u \approx & \left(\frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) T_0 p e^{-\frac{z}{2R_1(1) \operatorname{Pev} p}} e^{-\frac{\chi z}{R_1(1) \operatorname{Pev} \sqrt{p}}} + \\
 & + \left(\frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) (1 - \mathbf{H}) \int_0^z p e^{-\frac{z - \xi}{2R_1(1) \operatorname{Pev} p}} e^{-\frac{\chi(z - \xi)}{R_1(1) \operatorname{Pev} \sqrt{p}}} d\xi - \\
 & - (R_2(r) - R_2(1)) \frac{\chi T_0}{R_1(1)} \sqrt{p} e^{-\frac{z}{2R_1(1) \operatorname{Pev} p}} e^{-\frac{\chi z}{R_1(1) \operatorname{Pev} \sqrt{p}}} -
 \end{aligned} \tag{2.8.5}$$

$$-(R_2(r) - R_2(1)) \frac{r^2 - 1}{4} \frac{\chi(1-H)}{R_1(1)} \int_0^z \sqrt{pe}^{-\frac{z-\xi}{2R_1(1)Pe^2v}} e^{-\frac{\chi(z-\xi)}{R_1(1)Pe^2v} \sqrt{p}} d\xi.$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} pe^{-\frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}} e^{-\frac{\chi z}{R_1(1)Pe^2v} \sqrt{p}} &\rightarrow \Phi\left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}\right) \Psi\left(\frac{\chi z}{R_1(1)Pe^2v}, \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}\right), \\ \sqrt{pe}^{-\frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}} e^{-\frac{\chi z}{R_1(1)Pe^2v} \sqrt{p}} &\rightarrow \frac{\Phi\left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}\right)}{\sqrt{\pi\left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}\right)}} \exp\left[\frac{\chi^2 z^2}{4R_1^2(1)Pe^2v^2\left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}\right)}\right], \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

функцию $\tilde{T}_{[0]}^u$ в пространстве оригиналов представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{[0]}^u &\approx \frac{\Lambda}{\chi} T_0 \Phi\left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}\right) \left\{ \left(\frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) \times \right. \\ &\quad \times \Psi\left(\frac{\chi z}{R_1(1)Pe^2v}, \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}\right) - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} \times \\ &\quad \left. \times \frac{\chi}{\sqrt{\pi\left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}\right)}} \exp\left[-\frac{\chi^2 z^2}{4R_1^2(1)Pe^2v^2\left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe^2v}\right)}\right] \right\} + \\ &\quad + \frac{\Lambda(1-H)}{\chi} \int_0^z \Phi\left(\text{Fo} - \frac{z-\xi}{2R_1(1)Pe^2v}\right) \left\{ \left(\frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) \times \right. \\ &\quad \times \Psi\left(\frac{\chi(z-\xi)}{R_1(1)Pe^2v}, \text{Fo} - \frac{z-\xi}{2R_1(1)Pe^2v}\right) - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} \times \\ &\quad \left. \times \frac{\chi}{\sqrt{\pi\left(\text{Fo} - \frac{z-\xi}{2R_1(1)Pe^2v}\right)}} \exp\left[-\frac{\chi^2 (z-\xi)^2}{4R_1^2(1)Pe^2v^2\left(\text{Fo} - \frac{z-\xi}{2R_1(1)Pe^2v}\right)}\right] \right\} dz. \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

Таким образом, нелинейная задача сведена к совокупности линейных с переменными коэффициентами, для решения которых успешно применен развитый метод «покоэффициентного осреднения», позволивший построить приближенные решения со сколь угодно высокой точностью. Отметим также, что точность нулевого и первого коэффициента разложения по малому параметру зависит от выбора точки линеаризации θ^* (см. Приложение А).

Из построенных решений задачи о температурном поле турбулентного потока жидкости в трубе при указанных выше допущениях следуют решения задач для ламинарного режима течения, а также для модельного потока с выровненным профилем скорости (см. гл. III, Приложения Г, Е), найденные ранее в работах [20, 171, 193].

Графические зависимости, построенные по формулам, полученным в этом разделе, обсуждаются в следующей главе.

2.9. Первый коэффициент разложения по малому параметру γ

Для дальнейшего учета вклада нелинейности по коэффициенту теплопроводности рассматриваются соответствующие уравнения и условия при γ^1

$$\frac{\partial T_{[1]}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{[1]}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \quad (2.9.1)$$

$$\frac{\partial T_{[1]}}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[1]}}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{[1]}}{\partial z} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) (T_{[0]} - T^*) \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right), \quad (2.9.2)$$

$$r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0,$$

$$T_{[1]}|_{r=1} = T_{[1]}|_{r=1}, \quad (2.9.3)$$

$$\frac{\partial T_{[1]}}{\partial r} \Big|_{r=1} + (T_{[0]} - T^*) \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_{[1]}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.9.4)$$

$$T_{[1]}|_{Fo=0} = 0, \quad T_{[1]}|_{Fo=0} = 0, \quad (2.9.5)$$

$$T_{[1]}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.9.6)$$

$$T_{[1]}|_{z=0} = 0. \quad (2.9.7)$$

По аналогии с асимптотическим методом «покоэффициентного осреднения», позволяющим решать задачи с переменными коэффициентами (см. п. 1.9), в задаче введен параметр асимптотического разложения δ путем замены параметра Λ на его произведение $\Lambda \cdot \delta$. Заметим, что использование указанного метода для построения решения задачи для первого коэффициента разложения по малому параметру требует его модернизации.

После параметризации постановка задачи (2.9.1)–(2.9.7) примет вид

$$\frac{\partial T_{1[1]}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[1]}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (2.9.8)$$

$$\begin{aligned} & \delta \Lambda \frac{\partial T_{[1]}}{\partial \text{Fo}} - \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[1]}}{\partial r} \right) + \delta \Lambda R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{[1]}}{\partial z} = \\ & = -\chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) (T_{[0]} - T^*) \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right), \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \end{aligned} \quad (2.9.9)$$

$$T_{[1]}|_{r=1} = T_{1[1]}|_{r=1}, \quad (2.9.10)$$

$$\left. \frac{\partial T_{[1]}}{\partial r} \right|_{r=1} + (T_{[0]} - T^*) \left. \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right|_{r=1} = \delta \Lambda \left. \frac{\partial T_{1[1]}}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (2.9.11)$$

$$T_{[1]}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_{1[1]}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.9.12)$$

$$T_{1[1]}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.9.13)$$

$$T_{[1]}|_{z=0} = 0. \quad (2.9.14)$$

При $\delta = 1$ задача сводится к исходной. Такое введение формального параметра в задаче также имеет физический смысл, заключающийся в том, что устремление его к нулю $\delta \rightarrow 0$ соответствует возрастанию радиальной компоненты теплопроводности флюида до бесконечности $\lambda_r \rightarrow \infty$.

Решения задачи отыскивается в виде асимптотических формул

$$\begin{aligned} T_{[1]} &= T_{[1]}^{(0)} + \delta T_{[1]}^{(1)} + \delta^2 T_{[1]}^{(2)} + \dots + \delta^n T_{[1]}^{(n)} + \Theta_{[1]}^{(n)}, \\ T_{1[1]} &= T_{1[1]}^{(0)} + \delta T_{1[1]}^{(1)} + \delta^2 T_{1[1]}^{(2)} + \dots + \delta^n T_{1[1]}^{(n)} + \Theta_{1[1]}^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.9.15)$$

где нижние индексы у безразмерной температуры T относятся к номеру области, а верхние соответствуют порядковому номеру приближения.

Подставив (2.9.15) в (2.9.8)–(2.9.14), получим

$$\frac{\partial T_{1[1]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (T_{1[1]}^{(0)} + \delta T_{1[1]}^{(1)} + \dots)}{\partial r} \right) + \delta \left(\frac{\partial T_{1[1]}^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[1]}^{(1)}}{\partial r} \right) \right) + \dots = 0, \quad (2.9.16)$$

$$r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$-\chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda(r) \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial r} \right) + \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda(r) (T_{[0]} - T^*) \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right) + \delta \left(\Lambda \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \right. \quad (2.9.17)$$

$$\left. -\chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda(r) \frac{\partial T_{[1]}^{(1)}}{\partial r} \right) + \Lambda R(r) \text{Pe} \nu \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial z} \right) + \dots = 0, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$\left(T_{[1]}^{(0)} + \delta T_{[1]}^{(1)} + \dots \right)_{r=1} = \left(T_{[1]}^{(0)} + \delta T_{[1]}^{(1)} + \dots \right)_{r=1}, \quad (2.9.18)$$

$$\left. \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} + \left(T_{[0]} - T^* \right) \left. \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right|_{r=1} + \delta \left. \frac{\partial T_{[1]}^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} + \dots = \delta \Lambda \left. \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} + \dots, \quad (2.9.19)$$

$$\left(T_{[1]}^{(0)} + \delta T_{[1]}^{(1)} + \dots \right)_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \left(T_{[1]}^{(0)} + \delta T_{[1]}^{(1)} + \dots \right)_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.9.20)$$

$$\left(T_{[1]}^{(0)} + \delta T_{[1]}^{(1)} + \dots \right)_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.9.21)$$

$$\left(T_{[1]}^{(0)} + \delta T_{[1]}^{(1)} + \dots \right)_{z=0} = 0. \quad (2.9.22)$$

Выписывая множители при нулевой степени формального параметра разложения δ^0 для нулевого коэффициента из (2.9.17), имеем

$$\chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda(r) \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial r} \right) = -\chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda(r) (T_{[0]} - T^*) \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} \right),$$

интегрируя которое с учетом условия, следующего из (2.9.19), получим

$$\frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial r} + (T_{[0]} - T^*) \frac{\partial T_{[0]}}{\partial r} = 0.$$

Отсюда следует, что выражение

$$T_{[1]}^{(0)} + \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} = f(z, t) \quad (2.9.23)$$

не зависит от радиальной координаты, а является функцией переменных z, t .

Отметим, что в использованном в предыдущих работах для решения задач с переменными коэффициентами методе «покоэффициентного осреднения» нулевой коэффициент не зависел от радиальной координаты. При решении нелинейной задачи для первого коэффициента независимым от ра-

диальной координаты представляется выражение $f(z, t)$ из (2.9.23). Это обстоятельство требует существенного изменения процедуры построения решения.

При первой степени δ получим из (2.9.17) «зацепленное» уравнение, которое содержит соседние коэффициенты разложения

$$\Lambda \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[1]}^{(1)}}{\partial r} \right) + \Lambda R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial z} = 0, \quad (2.9.24)$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

и условие

$$\left. \frac{\partial T_{[1]}^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \Lambda \left. \frac{\partial T_{1[1]}^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (2.9.25)$$

следующее из (2.9.19).

При расцеплении (2.9.24) необходимо использовать независимость выражения $T_{[1]}^{(0)} + (T_{[0]} - T^*)^2 / 2$ от радиальной координаты r . Для этого уравнение (2.9.24) тождественно преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{[1]}^{(1)}}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \left(T_{[1]}^{(0)} + \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} + \\ &+ R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial z} \left(T_{[1]}^{(0)} + \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} \right) - R(r) \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z} \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.9.26)$$

При интегрировании (2.9.26) следует учесть также, что второе и четвертое слагаемое в правой части зависят от r . Далее с учетом условия (2.9.25) получим уравнение, содержащие только нулевые коэффициенты разложения по δ и $T_{[0]}$, найденные в предыдущих разделах

$$\frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \left(T_{[1]}^{(0)} + \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} \right) + 2 \text{Pev} R_1(r) \frac{\partial}{\partial z} \left(T_{[1]}^{(0)} + \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} \right) -$$

$$-2 \int_0^1 r' \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} dr' - 2 \text{Pev} \int_0^1 r' R(r') \frac{\partial}{\partial z} \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} dr' = 2\chi \left. \frac{\partial T_{1[1]}^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}.$$

Таким образом, математическая постановка задачи для первого коэффициента разложения по малому параметру γ нелинейной задачи в нулевом приближении асимптотического разложения по формальному параметру δ примет вид

$$\frac{\partial(T_{1[1]}^{(0)})}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1[1]}^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (2.9.27)$$

$$\frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + 2 \text{Pev} R_1(1) \frac{\partial T_{[1]}^{(0)}}{\partial z} - 2\chi \left. \frac{\partial T_{1[1]}^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} = q(r, z, \text{Fo}), \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (2.9.28)$$

$$T_{[1]}^{(0)}|_{r=1} = T_{1[1]}^{(0)}|_{r=1}, \quad (2.9.29)$$

$$T_{[1]}^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_{1[1]}^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.9.30)$$

$$T_{1[1]}^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.9.31)$$

$$T_{[1]}^{(0)}|_{z=0} = 0, \quad (2.9.32)$$

где функция источников

$$q(r, z, \text{Fo}) = 2 \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \left(\int_0^1 (T_{[0]} - T^*)^2 r' dr' - \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} \right) + \\ + 2 \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^1 r' R(r') \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} dr' - \frac{(T_{[0]} - T^*)^2}{2} R_1(1) \right).$$

Легко заметить, что эта функция обращается в нуль, если нулевой коэффициент разложения по малому параметру $T_{[0]}$ не зависит от радиальной координаты. Если в качестве $T_{[0]}$ использовать независящее от радиальной координаты нулевое приближение $T_{[0]}^{(0)}$ по параметру ϵ , то нелинейная поправка равна нулю. Это означает, с одной стороны, что нулевое приближение

$T_{[0]}^{(0)}$ является максимально точным приближением к решению нелинейной задачи. С другой стороны, нахождение нелинейной поправки, как минимум, требует нахождения первого коэффициента разложения $T_{[1]}^{(1)}$, которое, впрочем, можно записать сразу, используя результаты п. 2.6.

В пространстве изображений Лапласа – Карсона задача (2.9.27)–(2.9.32) примет вид

$$pT_{[1]}^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{[1]}^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad z > 0, \quad (2.9.33)$$

$$\left. \frac{\partial T_{[1]}^{(0)u}}{\partial \text{Fo}} - 2R_1(1)\text{Pev} \frac{\partial T_{[1]}^{(0)u}}{\partial z} - 2\chi \frac{\partial T_{[1]}^{(0)u}}{\partial r} \right|_{r=1} = q^u(r, z, p), \quad r < 1, \quad z > 0, \quad (2.9.34)$$

$$T_{[1]}^{(0)u}|_{r=1} = T_{[1]}^{(0)u}|_{r=1}, \quad (2.9.35)$$

$$T_{[1]}^{(0)u}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.9.36)$$

$$T_{[1]}^{(0)u}|_{z=0} = 0. \quad (2.9.37)$$

Решения задачи (2.9.33)–(2.9.37) найдены аналогично (2.6.12), (2.6.13) и запишутся как

$$T_{[1]}^{(0)u} = \int_0^z \frac{q^u(r, z, p) \exp(-\alpha(z - \xi))}{2R_1(1)\text{Pev}} d\xi, \quad (2.9.38)$$

$$T_{[1]}^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \int_0^z \frac{q^u(1, z, p) \exp(-\alpha(z - \xi))}{2R_1(1)\text{Pev}} d\xi. \quad (2.9.39)$$

Выражение для определения температуры в скважине в оригиналах в приближении малых времен имеет вид

$$T_{[1]}^{(0)} = \int_0^t \int_0^z \frac{q(r, z, \tau)}{2R_1(1)\text{Pev}} \Psi \left(\frac{\chi}{\text{Pev}}, \text{Fo} - \tau - \frac{z - \xi}{2R_1(1)\text{Pev}} \right) \Phi \left(\text{Fo} - \frac{z - \xi}{2R_1(1)\text{Pev}} \right) d\tau d\xi, \quad (2.9.40)$$

где $\Psi(x, y) = \frac{x}{2y\sqrt{\pi y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)$.

Выражения (2.6.12), (2.6.13) и (2.9.38), (2.9.39) являются решением задачи о температурном поле турбулентного потока в скважине с учетом зави-

симости теплопроводности от температуры в нулевом приближении по формальному параметру в пространстве изображений Лапласа – Карсона. Эти выражения могут быть уточнены более высокими приближениями для достижения требуемой точности. Для перехода в пространство оригиналов также могут быть использованы аналитические выражения, приведенные в Приложении В.

2.10. Температурное поле турбулентного потока в скважине с учетом зависимости теплоемкости от температуры

Постановка задачи для определения вклада нелинейности, обусловленной изменением плотности и теплоемкости восходящего потока, вследствие понижения температуры и выпадения парафина в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \quad (2.10.1)$$

$$\left(1 + \sigma(T - T^*) \right) \frac{\partial T}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \quad (2.10.2)$$

$$+ \left(1 + \sigma(T - T^*) \right) R(r) \text{Pev} \left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + H \right) = Q(r, z, Fo), \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0,$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.10.3)$$

$$T|_{Fo=0} = 0, \quad T_1|_{Fo=0} = 0, \quad T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.10.4)$$

$$T|_{z=0} = \frac{\theta_{10}(\tau) - \theta_{01}}{\theta_0} = T_0(Fo), \quad (2.10.5)$$

где $\sigma = \sigma^* GD$, остальные безразмерные величины определяются соотношениями (2.1.1).

Решение нелинейной задачи (2.10.1)–(2.10.5) отыскивается в виде асимптотических формул

$$T_1 = T_{1\{0\}} + \sigma T_{1\{1\}} + \dots + \Theta_1, \quad T = T_{\{0\}} + \sigma T_{\{1\}} + \dots + \Theta. \quad (2.10.6)$$

Подставляя (2.10.6) в (2.10.1)–(2.10.5), получим задачу, разбитую по степеням σ

$$\frac{\partial T_{1\{0\}}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1\{0\}}}{\partial r} \right) + \sigma \left(\frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial r} \right) \right) + \dots = 0, \quad (2.10.7)$$

$$r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) + \sigma \left[\frac{\partial T_{\{1\}}}{\partial \text{Fo}} - \right. \\ & \left. - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{\{1\}}}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{\{1\}}}{\partial z} + (T_{\{0\}} - T^*) \left(\frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial \text{Fo}} + R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \dots = Q(r, z, \text{Fo}), \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \end{aligned} \quad (2.10.8)$$

$$(T_{\{0\}} + \sigma T_{\{1\}} + \dots)_{r=1} = (T_{1\{0\}} + \sigma T_{1\{1\}} + \dots)_{r=1},$$

$$\left. \frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial r} \right|_{r=1} + \sigma \left. \frac{\partial T_{\{1\}}}{\partial r} \right|_{r=1} + \dots = \Lambda \left. \frac{\partial T_{1\{0\}}}{\partial r} \right|_{r=1} + \sigma \Lambda \left. \frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial r} \right|_{r=1} + \dots, \quad (2.10.9)$$

$$(T_{\{0\}} + \sigma T_{\{1\}} + \dots)_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (T_{1\{0\}} + \sigma T_{1\{1\}} + \dots)_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (2.10.10)$$

$$(T_{1\{0\}} + \sigma T_{1\{1\}} + \dots)_{r \rightarrow \infty} = 0,$$

$$(T_{\{0\}} + \sigma T_{\{1\}} + \dots)_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (2.10.11)$$

При σ^0 из (2.10.7)–(2.10.11) получим задачу для нулевого коэффициента разложения по малому параметру σ

$$\frac{\partial T_{1\{0\}}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1\{0\}}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (2.10.12)$$

$$\frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \left(\frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = Q(r, z, \text{Fo}), \quad (2.10.13)$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$T_{\{0\}}|_{r=1} = T_{1\{0\}}|_{r=1}, \quad \left. \frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial r} \right|_{r=1} = \Lambda \left. \frac{\partial T_{1\{0\}}}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (2.10.14)$$

$$T_{\{0\}}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_{1\{0\}}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_{1\{0\}}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.10.15)$$

$$T_{\{0\}}|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (2.10.16)$$

Нетрудно заметить, что постановка задачи (2.10.12)–(2.10.16) совпадает с точностью до обозначений с (2.2.16)–(2.2.22). Таким образом, ее решение совпадает с (2.6.12), (2.6.13), (2.7.27), (2.7.28).

Для исследования вклада нелинейности, обусловленной зависимостью плотности и теплоемкости от температуры, необходимо выписать соотношения при σ^1

$$\frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \quad (2.10.17)$$

$$\frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial z} = F(r, z, Fo), \quad (2.10.18)$$

$$r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0,$$

$$T_{1\{1\}}|_{r=1} = T_{1\{1\}}|_{r=1}, \quad \frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_{1\{1\}}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.10.19)$$

$$T_{1\{1\}}|_{Fo=0} = 0, \quad T_{1\{1\}}|_{Fo=0} = 0, \quad T_{1\{1\}}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.10.20)$$

$$T_{1\{1\}}|_{z=0} = 0, \quad (2.10.21)$$

где $F(r, z, Fo) = -(T_{[0]} - T^*) \left(\frac{\partial T_{[0]}}{\partial Fo} + R(r) \text{Pev} \frac{\partial T_{[0]}}{\partial z} \right)$.

Как и в п. 2.9, в задачу (2.10.17)–(2.10.21) введен параметр асимптотического разложения δ путем замены параметра Λ на его произведение $\Lambda \cdot \delta$. Расцепление уравнения для внутренней области производится аналогично п. 2.3. Задача, описывающая нелинейную добавку по плотности и теплоемкости в нулевом асимптотическом приближении по формальному параметру δ , аналогична (2.3.12)–(2.3.17) и в пространстве изображений Лапласа – Карсона имеет вид

$$p T_{1\{1\}}^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1\{1\}}^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \quad (2.10.22)$$

$$\frac{\partial T_{1\{1\}}^{(0)u}}{\partial Fo} - 2R_1(1) \text{Pev} \frac{\partial T_{1\{1\}}^{(0)u}}{\partial z} - 2\chi \frac{\partial T_{1\{1\}}^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = F_1^u(1, z, p), \quad (2.10.23)$$

$$r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0,$$

$$T_{1\{1\}}^{(0)u}|_{r=1} = T_{1\{1\}}^{(0)u}|_{r=1}, \quad (2.10.24)$$

$$T_{1\{1\}}^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.10.25)$$

$$T_{1\{1\}}^{(0)u} \Big|_{z=0} = 0, \quad (2.10.26)$$

где $F_1^u(r, z, p) = \int_0^r r' F^u(r', z, p) dr'$ Решения задачи (2.10.22)–(2.10.26) найдены

аналогично п. 2.4 и запишутся как

$$T_{1\{1\}}^{(0)u} = \frac{e^{-\alpha z}}{\text{Pe} \nu R_1(1)} \int_0^z F_1^u e^{\alpha z'} dz', \quad T_{1\{1\}}^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \frac{e^{-\alpha z}}{\text{Pe} \nu R_1(1)} \int_0^z F_1^u e^{\alpha z'} dz'. \quad (2.10.27)$$

Оригинал выражения, описывающего температурное поле в стволе скважины, в приближении малых времен имеет вид

$$T_{1\{1\}}^{(0)} = \int_0^z \int_0^{\text{Fo}} \frac{F_1}{2R_1(1)\text{Pe} \nu} \Psi\left(\frac{\chi}{\text{Pe} \nu}, \text{Fo} - \tau - \frac{z-z'}{2R_1(1)\text{Pe} \nu}\right) \Phi\left(\text{Fo} - \frac{z-z'}{2R_1(1)\text{Pe} \nu}\right) d\tau dz', \quad (2.10.28)$$

где $\Psi(x, y) = \frac{x}{2y\sqrt{\pi y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)$.

Следует отметить, что поправка в выражении для температурного поля, вызванная изменением теплоемкости и плотности нефти с понижением температуры, в отличие от поправки по коэффициенту теплопроводности, ненулевая уже в нулевом приближении.

На рис. 2.1 представлены кривые зависимости безразмерной температуры от безразмерного времени Fo на разных глубинах.

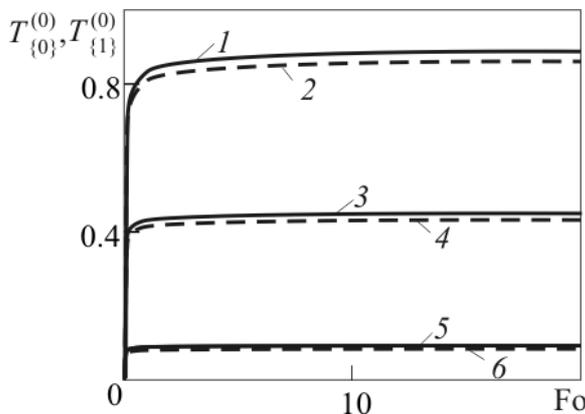


Рис. 2.1. Динамика температуры в нулевом (сплошные линии) и первом (штриховые линии) асимптотических приближениях по δ на разных глубинах: 1, 2 – $z = 1$, 3, 4 – 0.5, 5, 6 – 0.1

В расчетах приняты следующие значения параметров: $H = 0.1$, $\text{Pe} \nu = 10$, $T^* = 0.1$, $\delta = 0.04$. Зависимости температуры от времени без учета нели-

нейной поправки $T_{[0]}^{(0)}$ представлены сплошными линиями, а с учетом этой поправки $T_{[1]}^{(0)}$ – штриховыми. Из рисунка видно, что при равных значениях параметров штриховые кривые с учетом вклада нелинейности расположены ниже сплошных кривых, которые рассчитаны без учета вклада нелинейности. Отсюда следует, что учет зависимости теплоемкости от температуры приводит к уменьшению ее абсолютных возмущений.

Вклад нелинейности представляет расхождение сплошных и штриховых кривых с одинаковыми значениями глубины. Абсолютная величина вклада нелинейности, как следует из рисунка, увеличивается с ростом времени и увеличением координаты z , т.е. с уменьшением глубины. Относительные значения вклада нелинейности по теплоемкости при выбранных значениях параметров не велики и при $Fo > 0.1$ не превышают 3 %.

Нетрудно видеть, что полученное решение позволяет аналогично учесть вклад нелинейности не только по теплоемкости, но и по плотности или по обоим параметрам совместно.

2.11. Температурное поле в скважине при турбулентном течении в режиме постоянных градиентов

Сравнительно часто на практике реализуется случай постоянных вертикальных градиентов $\partial\theta_1/\partial z_d = \partial\theta/\partial z_d = -\Gamma$, поскольку производная $\partial\theta/\partial z$ отлична от константы вблизи аномалий температуры в скважине, однако при достаточном удалении от них реализуется режим, близкий к случаю постоянных градиентов. Математическая постановка задачи в безразмерных переменных в этом случае следует из (2.1.2)–(2.1.8), если положить $\partial T_1/\partial z = \partial T/\partial z = 0$. Ее решение асимптотическим методом по коэффициентного пространственного осреднения рассматривается в Приложении В.

Выражения, описывающие температурное поле флюида в скважине и окружающих породах, для нулевого и первого коэффициентов разложения в пространстве изображений Лапласа – Карсона получены из (2.6.12), (2.6.13), (2.7.13), (2.7.20), (2.7.23), (2.7.24), (2.7.25), (2.7.26). Для этого формально

устремляем z к бесконечности; источники полагаем не зависящими от вертикальной координаты, а температурный сигнал пласта – нулевым

$$T^{(0)u} = \frac{2R_1(1)\text{Pev}(1-H) + 2Q_1(1,p)}{p + 2\chi k\sqrt{p}}, \quad r < 1, \quad (2.11.1)$$

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left(\frac{2R_1(1)\text{Pev}(1-H) + 2Q_1(1,p)}{p + 2\chi k\sqrt{p}} \right), \quad r > 1, \quad (2.11.2)$$

$$\begin{aligned} T^{(1)u} = & \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_1(1) p T^{(0)u} - R_2(r)\text{Pev}(1-H) - Q_2^u(r,p) \right) + \\ & + \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left[\text{Pev}(1-H) \left(\frac{\sqrt{p}R_3(1)}{\chi} + kR_2(1) \right) + \frac{\sqrt{p}}{\chi} Q_3(1,0) + kQ_2^u(1,p) \right] - \\ & - \frac{\Lambda}{2\chi} \lambda_1(1) \frac{\sqrt{p} + 1}{\sqrt{p} + 2\chi k} p T^{(0)u}, \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

$$\begin{aligned} T_1^{(1)u} = & \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left\{ \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_1(1) p T^{(0)u} - R_2(1)\text{Pev}(1-H) - Q_2^u(1,p) \right) + \right. \\ & + \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left[\text{Pev}(1-H) \left(\frac{\sqrt{p}R_3(1)}{\chi} + kR_2(1) \right) + \frac{\sqrt{p}}{\chi} Q_3(1,0) + kQ_2^u(1,p) \right] - \\ & \left. - \frac{\Lambda}{2\chi} \lambda_1(1) \frac{\sqrt{p} + 1}{\sqrt{p} + 2\chi k} p T^{(0)u} \right\}. \end{aligned} \quad (2.11.4)$$

Оригиналы представленных решений найдены с использованием формул перехода, представленных в Приложении В. Анализ формул, как и в предыдущих случаях, показывает, что нулевое приближение описывает некоторым образом осредненные по сечению скважины значения температуры. Первый коэффициент асимптотического разложения уточняет решение в области осреднения.

2.12. Выводы по главе II

Во второй главе осуществлено представление температурного поля флюида, текущего по скважине и обменивающегося теплом с окружающим ее сплошным массивом среды, учитывающее адиабатический эффект, фазовые переходы и другие возможные источники, реальный профиль скорости

флюида и зависимость коэффициента теплопроводности от радиальной координаты, теплопроводности и объемной теплоемкости от температуры.

Исходная нелинейная задача, учитывающая зависимость теплоемкости и коэффициента теплопроводности флюида от температуры, представлена в виде суммы линейной задачи, описывающей основные закономерности происходящих процессов и задач, позволяющих отыскать аддитивные поправки, обусловленные зависимостью теплоемкости и коэффициента теплопроводности от температуры.

Исходные задачи представлены в виде бесконечной последовательности краевых задач для коэффициентов асимптотического разложения. Выполнены процедуры «расщепления» уравнений конвективной теплопроводности, различающиеся для нулевого и первого коэффициентов линейной задачи, а также для нелинейной поправки. Осуществлена постановка задач в нулевом и первом приближениях.

Показано, что краевые задачи, первоначально содержащие уравнения параболического типа, приводятся в асимптотическом представлении к смешанным краевым задачам для системы уравнений, состоящей из уравнения гиперболического типа со следом производной из внешней области и уравнения параболического типа.

Установлено, что нулевой коэффициент разложения не зависит от режима течения.

Найдены выражения для первых коэффициентов разложения, которые описывают радиальные профили температуры в скважине и учитывают вклад режима течения в температурные поля. Эти выражения могут быть использованы для расчетов температурных полей турбулентных, ламинарных и других видов течений.

Общетеоретическое значение результатов главы заключается в том, что они открывают новые возможности для исследования нелинейных задач, содержащих теплофизические величины, изменяющиеся в пространстве. Поскольку задачи для коэффициентов асимптотического разложения не содержат функций, зависящих от пространственных координат, и являются линей-

ными, для них применимы хорошо развитые классические методы, такие как интегральные преобразования. Это означает, по сути дела, что развито новое направление, открывающее новые перспективы решения нелинейных задач и задач с переменными коэффициентами, которые представляют значительный научный и практический интерес, особенно в области теплофизики и теоретической теплотехники.

Рассмотренный в главе подход к решению нелинейных задач может быть использован и в случаях, когда зависимость коэффициентов от искомой функции выражается многочленами более высоких порядков.

Глава III. ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ

В третьей главе представлены решения задач нестационарного теплообмена цилиндрического ламинарного потока флюида и модельного потока с выровненным профилем скорости. Эти решения являются частными случаями решений задачи о теплообмене турбулентного потока в стволе скважины и получены из решения задачи (1.4.1)–(1.4.7). Сформулирована теорема о температуре потока в нулевом приближении. Построены и проанализированы графические зависимости температуры от времени и пространственных координат для ламинарного, турбулентного и выровненного профилей скорости.

3.1. Формулы для расчета температурного поля ламинарного потока

Из выражений (2.4.12), (2.4.13), (2.7.13), (2.7.20), (2.7.23), (2.7.24), (2.7.25), (2.7.26), при $\lambda(r)=1$, следуют асимптотические формулы для расчета нестационарного температурного поля ламинарного потока для нулевого и первого коэффициентов асимптотического разложения

$$T^{(0)u} = T_0^u(p)e^{-\alpha z} + \int_0^z \left(1 - H + \frac{2Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}} \right) e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi, \quad r < 1, \quad z > 0, \quad (3.1.1)$$

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[T_0^u(p) \exp(-\alpha z) + \int_0^z \left(1 - H + \frac{Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}R_1(1)} \right) \exp[-\alpha(z-\xi)] d\xi \right], \quad r > 1, \quad z > 0, \quad (3.1.2)$$

$$T^{(1)u} = T_0^u(p) \frac{\Lambda e^{-\alpha z}}{\chi} \left(\frac{r^2 p}{4} - R_2(r) \text{Pev} \alpha \right) + \frac{\Lambda(1-H)}{4\chi R_1(1)} \left[\frac{r^2 p}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha z}) - 2R_2(r) \text{Pev} (e^{-\alpha z} + 2R_1(1)) \right] + F^u(z, p), \quad (3.1.3)$$

где

$$\begin{aligned}
F^u(z, p) = & T_0^u(p) z \frac{\Lambda e^{-\alpha z}}{\chi R_1(1)} \left[\alpha p \left(R_3(1) + \frac{R_{32}(1)}{4} \right) + \alpha \left(\chi \sqrt{p} k R_2(1) - \alpha \text{Pev} R_{12}(1) \right) - \right. \\
& - p \frac{p + 4\chi k \sqrt{p}}{16 \text{Pev}} \left. \right] + \frac{\Lambda z e^{-\alpha z} p (1 - \text{H})}{2\chi R_1^2(1)} \left[\frac{p + 4\chi k \sqrt{p}}{16 \text{Pev} \alpha} - \frac{\text{Pev} \alpha R_{12}(1)}{p} + \right. \\
& + R_3(1) + \frac{R_{32}(1)}{4} + \frac{\chi k R_2(1)}{\sqrt{p}} \left. \right] + \frac{\Lambda (1 - \text{H})}{4\chi R_1(1)} \left(\frac{p}{2} + 4\chi k \sqrt{p} R_2(1) - \right. \\
& \left. - \frac{p}{2\alpha^2} \frac{p + 4\chi k \sqrt{p}}{4 \text{Pev} R_1(1)} \right) + C_1 e^{-\alpha z} + \frac{p}{2\alpha \text{Pev} R_1(1)} B_1(0, z)
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Константа $B_1(0, z)$ определяется выражением:

$$B_1(0, z) = \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev} (1 - \text{H}) \left(\frac{1}{8} R_1(1) - 2R_3(1) \right). \tag{3.1.5}$$

Константа C_1 определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{p B_1(0, 0)}{2 \text{Pev} R_1(1) \alpha} - \frac{\Lambda (1 - \text{H})}{2 R_1(1) \alpha} \left(2\sqrt{p} k R_2(1) + p \frac{R_1(1)}{4\chi} \right) + \\
& + \frac{\Lambda}{\chi} \left(T_0^u(p) + \frac{1 - \text{H}}{\alpha_1} \right) \left[2R_3(1) \text{Pev} \alpha - \frac{1}{8} p + \right. \\
& \left. + \frac{p + 4\chi k \sqrt{p}}{16 \text{Pev} R_1(1)} + 2p + \frac{p R_1^3(1) - 2\chi \sqrt{p} k R_2(1) + 2 \text{Pev} R_{12}(1) \alpha^2}{R_1(1)} \right].
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Выражение для температурного поля во внешней среде имеет вид

$$\begin{aligned}
T_1^{(1)u} = & \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left\{ \frac{\Lambda r^2}{4\chi} p T^{(0)u} + \frac{\Lambda R_2(r)}{\chi} \left[\text{Pev} \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) \right] - \frac{p B(z, 0)}{2 \text{Pev} R_1(1) \alpha} + \right. \\
& + \frac{\Lambda p T^{(0)u}}{2 \text{Pev} R_1(1)} \left(\frac{p}{8\chi} + \frac{\sqrt{p} k}{4} \right) + \frac{\Lambda (1 - \text{H})}{2 R_2(1) \alpha} \left(2\sqrt{p} k R_2(1) + p \frac{R_1(1)}{4\chi} \right) - \\
& \left. - \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} \left(2p R_1(1) + p R_1^3(1) - 2\chi \sqrt{p} k R_2(1) \right) - \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2 \text{Pev} R_{12}(1)}{R_1(1)} \frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial z^2} + C_1 e^{-\alpha z} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Полное решение задачи о температурном поле ламинарного потока флюида в скважине представлено в Приложении Г. Совпадение решений

(3.1.1)–(3.1.7) и (Г.3.10), (Г.3.12), (Г.3.42)–(Г.3.46) свидетельствует о корректности развитого метода. Выражение для радиального перепада температуры следует из (3.1.3)

$$T^{(1)u} - T_{r=1}^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\left(\frac{r^2 - 1}{4} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) p - \chi \sqrt{pk} \frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} \right] \times \\ \times T^{(0)u} + \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} Q_1''(1, z, p) + Q_2''(1, z, p) - Q_2''(r, z, p) \right). \quad (3.1.8)$$

Там же, в Приложении Г, для (3.1.1)–(3.1.7) осуществлен переход в пространство оригиналов и определены погранслойные (в математическом смысле) функции, уточняющие решение задачи на границах $z = 0$ и $Fo = 0$.

3.1.1. Формулы для расчета теплообмена ламинарного потока при постоянном вертикальном градиенте температуры

Из (3.1.1)–(3.1.7) при устремлении z к бесконечности, равенстве нулю температурного сигнала пласта и $\partial T_1 / \partial z = \partial T / \partial z = 0$ получаются выражения, описывающие температурное поле ламинарного потока в предположении постоянных вертикальных градиентов

$$T^{(0)u} = 2 \frac{\text{Pev}(1 - \text{H})R_1(1) + Q_1''(1, p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}}, \quad r < 1, \quad (3.1.9)$$

$$T_1^{(0)u} = 2 \frac{K_0(r\sqrt{p}) \text{Pev}(1 - \text{H})R_1(1) + Q_1''(1, p)}{K_0(\sqrt{p}) (p + 2\chi k \sqrt{p})}, \quad r > 1, \quad (3.1.10)$$

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{r^2}{4} p T^{(0)} - \text{Pev}(1 - \text{H})R_2(r) - Q_2''(r, p) \right] + \\ + \frac{2\Lambda \text{Pev}(1 - \text{H})}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p}}{\chi} R_3(1) + kR_2(1) \right) + \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \times \\ \times \left(\frac{\sqrt{p}}{\chi} Q_3(1, p) + kQ_2''(1, p) \right) - \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\sqrt{p} + 4\chi k}{\sqrt{p} + 2\chi k} p T^{(0)u}, \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned}
T_1^{(1)u} = & \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[\frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{p}{4} T^{(0)} - \text{Pev}(1-H)R_2(1) \right) + \right. \\
& + \frac{2\Lambda \text{Pev}(1-H)}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p}R_3(1)}{\chi} + kR_2(1) \right) + \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \times \\
& \times \left. \left(\frac{\sqrt{p}Q_3(1,p)}{\chi} + kQ_2^u(1,p) \right) - \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\sqrt{p} + 4\chi k}{\sqrt{p} + 2\chi k} pT^{(0)u} \right].
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Эти же выражения можно получить из (2.10.1)–(2.10.4) при $\lambda(r)=1$.

Для температурного перепада между точками внутри скважины и её стенкой получим из выражения для первого коэффициента разложения

$$\begin{aligned}
T^{(1)u} - T^{(1)u}(r=1) = & \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{r^2 - 1}{4} pT^{(0)} - \text{Pev}(1-H)(R_2(r) - R_2(1)) - \right. \\
& \left. - Q_2^u(r,p) + Q_2^u(1,p) \right],
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

в отсутствии источников тепла имеем

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{r^2 - 1}{4} pT^{(0)} - \text{Pev}(1-H)(R_2(r) - R_2(1)) \right]. \tag{3.1.14}$$

Из (3.1.13) следует стационарный профиль температуры при наличии источников

$$T^{(1)} - T^{(1)}(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} [\text{Pev}(1-H)(R_2(1) - R_2(r)) + Q_2(1,\infty) - Q_2(r,\infty)], \tag{3.1.15}$$

и их отсутствии

$$T^{(1)} - T^{(1)}(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev}(1-H)(R_2(1) - R_2(r)). \tag{3.1.16}$$

Решение соответствующей задачи в изображениях, переход в оригиналы и определение погранслойных функций представлены в Приложении Д.

3.2. Теплообмен потока в режиме выровненного профиля скорости $R(r) = 1$

Формулы, описывающие теплообмен потока, профиль скорости которого выровнен по сечению скважины, выводятся из формул (3.1.1)–(3.1.7) в предположении $R(r) = 1$. В пространстве изображений эти зависимости выглядят следующим образом:

$$T^{(0)u} = T_0^u(p)e^{-\alpha z} + \int_0^z \left(1 - H + 2 \frac{Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}} \right) e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi, \quad r < 1, \quad z > 0, \quad (3.2.1)$$

где $\alpha = \frac{1}{\text{Pev}} (p + 2\chi k \sqrt{p})$.

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[T_0^u(p)e^{-\alpha z} + \int_0^z \left(1 - H + 2 \frac{Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}} \right) e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi \right], \quad r > 1, \quad z > 0, \quad (3.2.2)$$

$$T^{(1)u} = -\frac{\Lambda r^2}{2} \sqrt{pk} T^{(0)u} + \frac{1}{4} \Lambda \sqrt{pk} T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \frac{\Lambda}{4\alpha} \sqrt{pk} (1 - H) \times \\ \times (1 - \exp(-\alpha z)) + \frac{\Lambda \chi}{2\text{Pev}} k^2 p \int_0^z T^{(0)u}(\xi, p) \exp[-\alpha(z-\xi)] d\xi, \quad (3.2.3)$$

$$T_1^{(1)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})\Lambda}{K_0(\sqrt{p})} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{pk} T^{(0)u} + \frac{1}{4} \sqrt{pk} T_0^u(p) e^{-\alpha z} + (1 - H) \frac{\sqrt{pk}}{4\alpha} \times \right. \\ \left. \times (1 - \exp(-\alpha z)) + \frac{\Lambda \chi}{2\text{Pev}} k^2 p \int_0^z T^{(0)u}(\xi, p) \exp[-\alpha(z-\xi)] d\xi \right]. \quad (3.2.4)$$

Получение решения (3.2.1)–(3.2.4) задачи о температурном поле модельного потока с выровненным профилем скорости вблизи температурных аномалий описано в Приложении Д.

3.2.1. Асимптотические решения для выровненного профиля скорости и постоянного вертикального градиента температуры

Наиболее простой случай нестационарного теплообмена в случае постоянных градиентов рассмотрен в Приложении Е. Решения этой задачи могут быть получены также из (3.1.8)–(3.1.11) при $R(r) = 1$

$$T^{(0)u} = \frac{\text{Pev}(1 - \text{H}) + 2Q_1^u(1, p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}}, \quad r < 1, \quad (3.2.5)$$

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left(\frac{\text{Pev}(1 - \text{H}) + 2Q_1^u(1, p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}} \right), \quad r > 1, \quad (3.2.6)$$

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{2r^2 - 1}{4} - \frac{\chi k}{2(\sqrt{p} + 2\chi k)} \right) (Q_1^u(1, p) - \chi k \sqrt{p} T^{(0)u}) - \frac{\Lambda}{\chi} Q_2^u(r, p) + \frac{2\Lambda}{\chi(\sqrt{p} + 2\chi k)} (\sqrt{p} Q_3^u(1, p) + \chi k Q_2^u(1, p)), \quad (3.2.7)$$

$$T_1^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left\{ \frac{\sqrt{p}}{4(\sqrt{p} + 2\chi k)} (Q_1^u(1, p) - \chi k \sqrt{p} T^{(0)u}) - Q_2^u(1, p) + \frac{2}{\sqrt{p} + 2\chi k} (\sqrt{p} Q_3^u(1, p) + \chi k Q_2^u(1, p)) \right\}. \quad (3.2.8)$$

Анализ выражений, описывающих теплообмен вертикального потока с окружающей средой, показывает, что в нулевом приближении безразмерное решение не зависит от вертикальной координаты, а температура зависит от z линейно.

3.3. Теорема о температуре потока в нулевом приближении

Выпишем соответствующие выражения для температурного поля в случае постоянных градиентов в скважине $r < 1$ для различных видов течения:

- выровненный профиль скорости

$$T^{(0)u} = \frac{2R_{1e}(1)\text{Pev}(1 - \text{H}) + 2Q_1(1, p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}}, \quad (3.3.1)$$

где $R_1(1) = R_{1e}(1)$ выражается через функцию распределения выровненного профиля скорости;

- ламинарный поток

$$T^{(0)u} = \frac{2R_{1l}(1)Pe\nu(1-H) + 2Q_1(1,p)}{p + 2\chi k\sqrt{p}}, \quad (3.3.2)$$

где $R_1(1) = R_{1l}(1)$ – первая моментная функция для ламинарного профиля скорости;

– турбулентный поток

$$T^{(0)u} = \frac{2R_{1t}(1)Pe\nu(1-H) + 2Q_1(1,p)}{p + 2\chi k\sqrt{p}}, \quad (3.3.3)$$

где $R_1(1) = R_{1t}(1)$ – первая моментная функция для турбулентного профиля скорости.

Сравнивая указанные выражения, устанавливаем, что нулевой коэффициент или асимптотически усредненное выражение температуры вообще не зависит от радиального распределения теплопроводности $\lambda(r)$.

Зависимость температурного поля от радиального профиля скорости представляется через первую моментную функцию

$$R_1(1) = \int_0^1 r'R(r')dr', \quad (3.3.4)$$

которая определяется через радиальный профиль $R(r)$, зависящий от типа течения.

Покажем, что, несмотря на различие профилей для разных типов течения, величина интеграла $R_1(1)$ не изменяется. Доказательство этого факта базируется на определении средней по сечению скважины скорости потока

$$\langle v \rangle = 2 \int_0^1 r'v(r')dr'. \quad (3.3.5)$$

Подставив в это выражение значение скорости потока $v(r) = \langle v \rangle R(r)$, имеем

$$\langle v \rangle = 2 \langle v \rangle \int_0^1 r'R(r')dr' = 2 \langle v \rangle R_1(1), \quad (3.3.6)$$

откуда получаем $R_1(1) = 1/2$ независимо от профиля течения. Поскольку для всех профилей течения $R_1(1) = 0.5$, то и формулы для расчетов асимптотиче-

ски усредненных по сечению потока значений температуры (3.3.1)–(3.3.3) идентичны.

Итак, для решения в нулевом приближении также справедливо утверждение: решение для турбулентного потока (3.3.3) описывает среднюю по сечению трубы температуру и совпадает с аналогичными выражениями для ламинарного (3.3.2) и модельного выровненного (3.3.1) профилей скорости. Нулевое приближение описывает зависимость от времени «асимптотически средней» по сечению температуры и не дает представления ни о вкладе режима течения, ни о радиальном распределении температуры в скважине. Для учета описанных зависимостей необходимо решение задачи для первого коэффициента разложения.

Приведенные рассуждения легко обобщаются. Вообще, *температура потока в нулевом приближении, или асимптотически усредненное по сечению скважины значение температуры потока, не зависит от радиальных профилей скорости и коэффициента теплопроводности, т.е. одинаковы для любых режимов течения несжимаемой жидкости при всех остальных идентичных параметрах.*

Это утверждение значимо для практических приложений, поскольку в ряде случаев позволяет избавиться от необходимости учета радиальных распределений скорости и теплопроводности, что значительно упрощает задачу определения температурного поля.

Аналогичная теорема имеет место и в задачах о нестационарном теплообмене, где не постулируется постоянство вертикальных градиентов. В этом случае соответствующие выражения имеют вид (2.4.12), (3.1.1), (3.2.1) и при указанных выше условиях совпадают.

3.4. Анализ расчетов температурных полей для различных режимов течения

Решения задач для практически важных частных случаев и представление их в пространстве оригиналов вынесены в приложения. Буква в обозначении расчетных формул указывает на соответствующее приложение.

В большинстве рисунков раздела использованы следующие расчетные параметры: длина скважины: $D = 2000$ м, ее внутренний радиус $r_0 = 0.1$ м; физические свойства жидкости и окружающих скважину пород (нижние индексы: н – нефть, в – вода г – глина, ги – глинистый известняк, пг – песчаник глинистый, п – песчаник) $\lambda_n = 0.15$ Вт/(м·К), $\eta_n = 0.0137$ К/атм, $c_n = 2000$ Дж/(К·кг), $\rho_n = 800$ кг/м³; $\lambda_v = 0.6$ Вт/(м·К), $\eta_v = 0.0015$ К/атм, $c_v = 4100$ Дж/(К·кг), $\rho_v = 1000$ кг/м³; $\lambda_g = 0.67$ Вт/(м·К), $c_g = 950$ Дж/(К·кг), $\rho_g = 2000$ Дж/(К·кг), $\Gamma_g = 0.02$ К/м; $\lambda_{ги} = 2$ Вт/(м·К), $c_{ги} = 840$ Дж/(К·кг), $\rho_{ги} = 2400$ Дж/(К·кг), $\Gamma_{ги} = 0.03$ К/м; $\lambda_{пг} = 3.4$ Вт/(м·К), $c_{пг} = 920$ Дж/(К·кг), $\rho_{пг} = 1800$ Дж/(К·кг), $\Gamma_{пг} = 0.03$ К/м; $\lambda_p = 1.13$ Вт/(м·К), $c_p = 790$ Дж/(К·кг), $\rho_p = 1500$ Дж/(К·кг), $\Gamma_p = 0.03$ К/м [50, 51, 168, 177, 216, 260]. Расчетные параметры рисунка, отличающиеся от приведенных, представлены в описаниях соответствующих рисунков.

Рисунки 3.1 – 3.16 рассчитаны в предположении постоянных вертикальных градиентов температуры. Соответствующие формулы представлены в Приложениях В, Д, Ж.

Рисунки 3.1, 3.2 иллюстрируют эволюцию температуры, асимптотически осредненной по радиусу скважины, при постоянных вертикальных градиентах, которая согласно теореме о температуре потока в нулевом приближении не зависит от режима течения. При построении графических зависимостей использованы приближения маленьких (*непрерывные линии*) больших (*прерывистые линии*) времен. На рисунке 3.1 сопоставлены температурные кривые для нефти и воды при дебите скважины $Q = 10$ м³/сут. При течении воды температура растет быстрее, что обусловлено большей ее теплоемкостью. Рост температуры на графике при выборе асимптотики больших времен происходит медленнее, так как с увеличением времени температурное поле стабилизируется.

Рисунок 3.2 представляет сравнение динамики средней температуры нефти в асимптотике малых (*кривые 1, 3*) и больших (*кривые 2, 4*) времен при различных дебитах. Как показывает анализ рисунка, чем больше дебит, тем

быстрее растет температура в скважине, что связано с более интенсивной вынужденной конвекцией.

Влияние теплофизических свойств горных пород на динамику температурного поля цилиндрического потока представлено на рисунке 3.3. Расчетный дебит $Q = 7 \text{ м}^3/\text{сут}$. Из представленных на рисунке сред глина обладает меньшей теплопроводностью, и соответственно, меньшей интенсивностью теплообмена с восходящим потоком нефти. Это приводит к большему значению температуры нефтяного потока при прочих равных параметрах. Наибольшей теплопроводностью, а следовательно и большей интенсивностью теплообмена обладает глинистый песчаник. Температура нефтяного потока в глинистом песчанике меняется медленнее.

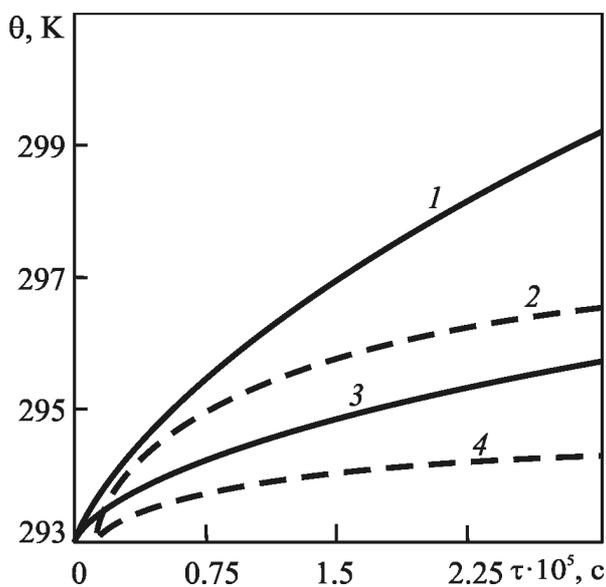


Рис. 3.1. Эволюция осредненного температурного поля для маленьких (*непрерывные линии*) и больших (*прерывистые линии*) времен: 1, 2 – вода; 3, 4 – нефть

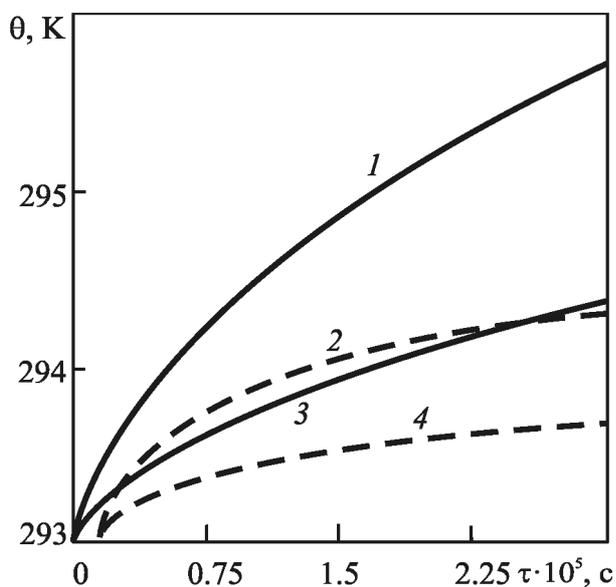


Рис. 3.2. Эволюция осредненного температурного поля потока нефти при дебитах: 1, 2 – $Q = 10 \text{ м}^3/\text{сут}$.; 3, 4 – $5 \text{ м}^3/\text{сут}$.

Рисунок 3.4 показывает установление радиальных профилей температуры нефтяного потока, скорость которого выровнена по сечению потока с дебитом $Q = 10 \text{ м}^3/\text{сут}$. Температура растет интенсивно до $\tau \approx 0.3 \cdot 10^5 \text{ с}$. При временах больших $0.3 \cdot 10^5 \text{ с}$ наблюдается установление радиального профиля, температурные кривые приближаются к стационарным.

На рисунках 3.5, 3.6 показано установление радиальных профилей температуры нефтяного потока с течением времени и для разных дебитов соот-

ответственно. Из рисунка 3.5 следует, что при выбранных расчетных параметрах установление профиля температуры происходит за время порядка 8 часов, затем значение перепада температуры стремится к стационарному. Заметим, что в начальный момент времени разница температур по сечению скважины отсутствует.

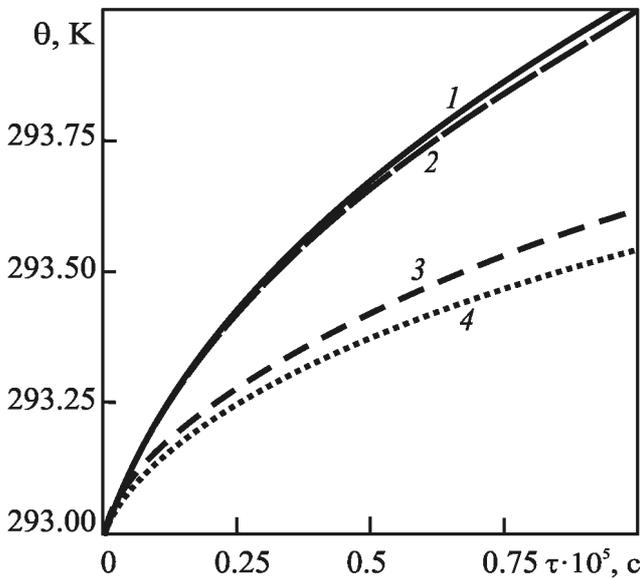


Рис. 3.3. Эволюция температуры потока нефти. Шифр кривых: 1 – глина, 2 – песчаник, 3 – глинистый известняк, 4 – песчаник глинистый

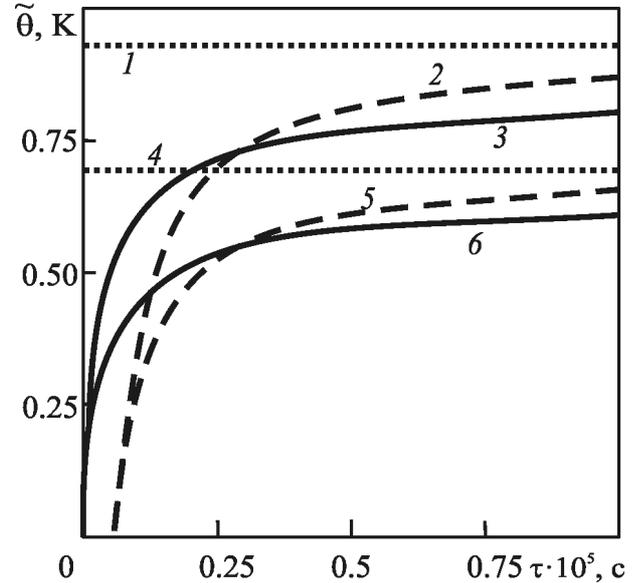


Рис. 3.4. Динамика стационарных распределений потока нефти (1, 4) и его радиального профиля температуры в малых (3, 6) и больших (2, 5) временах для значений радиальной координаты: 1, 2, 3 – $r_d = 0$ м; 4, 5, 6 – 0.05 м

На рисунке 3.6 видно, что чем больше дебит скважины и меньше теплопроводность жидкости, тем больший перепад температуры достигается между центром и стенкой скважины.

Рисунок 3.7 иллюстрирует вклад теплофизических свойств окружающей среды в формирование радиального перепада нефтяного потока в различных средах через час после начала отбора с дебитом $10 \text{ м}^3/\text{сут}$. Чем меньше теплопроводность среды, тем больше перепад температуры между центром и стенкой скважины. Это связано с тем, что тепловой поток в такую окружающую среду меньше.

Рисунок 3.8 иллюстрирует зависимость установившегося перепада температуры $\tilde{\theta} = (\theta^I - \theta^I|_{r=1})$ для потоков нефти и воды от дебита.

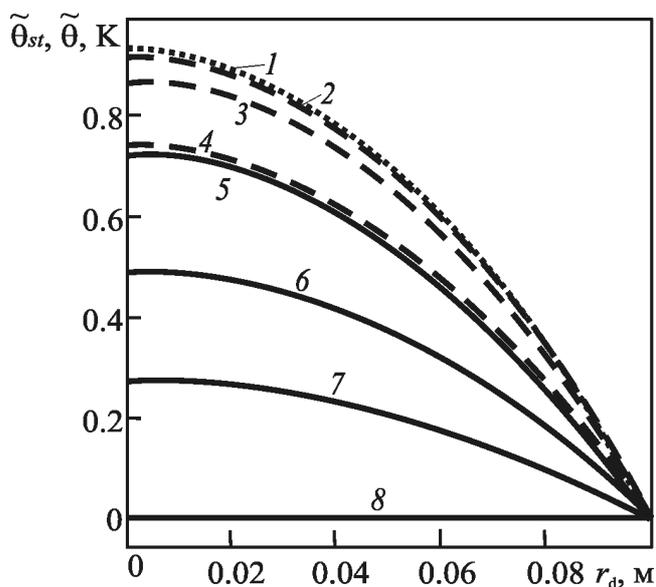


Рис. 3.5. Установление радиального профиля температуры в нефтяном потоке: 1 – $\tilde{\theta}_{st}$, 2 – $\tau = 10^6$ с, 3 – 10^5 с, 4, 5 – $3 \cdot 10^4$ с, 6 – $3.6 \cdot 10^3$ с, 7 – $6 \cdot 10^2$ с, 8 – 0 с

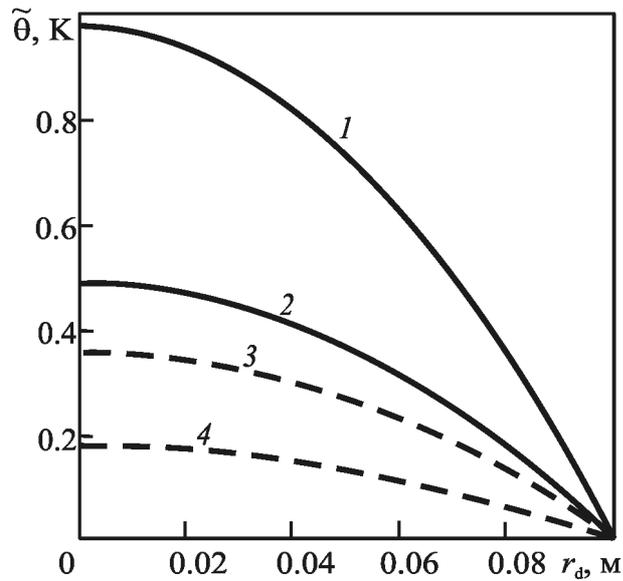


Рис. 3.6. Установление радиального профиля температуры потока нефти (кривые 1, 2) и воды (кривые 3, 4) в скважине при разных дебитах: 1, 3 – $Q = 5$ м³/сут., 2, 4 – 10 м³/сут.

Большемому значению дебита соответствует большее значение радиального перепада температуры в скважине, что согласуется с кривыми на рисунке 3.6.

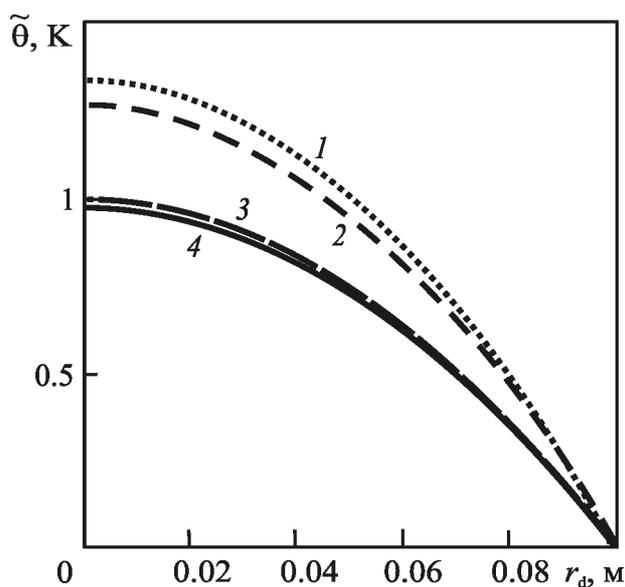


Рис. 3.7. Радиальные распределения температуры нефти. Шифр кривых: 1 – глина, 2 – песчаник, 3 – глинистый известняк, 4 – песчаник глинистый

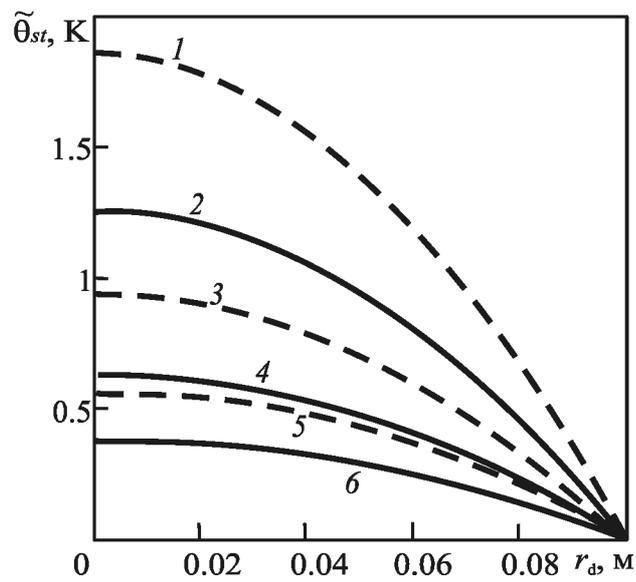


Рис. 3.8. Стационарный радиальный профиль температуры потоков нефти (кривые 1, 3, 5) и воды (кривые 2, 4, 6). Шифр кривых: 1, 2 – $Q = 10$ м³/сут.; 3, 4 – 5 м³/сут.; 5, 6 – 3 м³/сут.

Наибольшего значения достигает перепад температуры при течении флюида с меньшей теплопроводностью.

На рисунке 3.9 сопоставлены радиальные температурные профили восходящего потока нефти ($Q = 5 \text{ м}^3/\text{сут.}$) на расстоянии $r_d = 0.05 \text{ м}$ от оси скважины и в ее центре $r_d = 0 \text{ м}$ и с учетом погранслойной функции (*непрерывные линии*) и без учета (*прерывистые линии*).

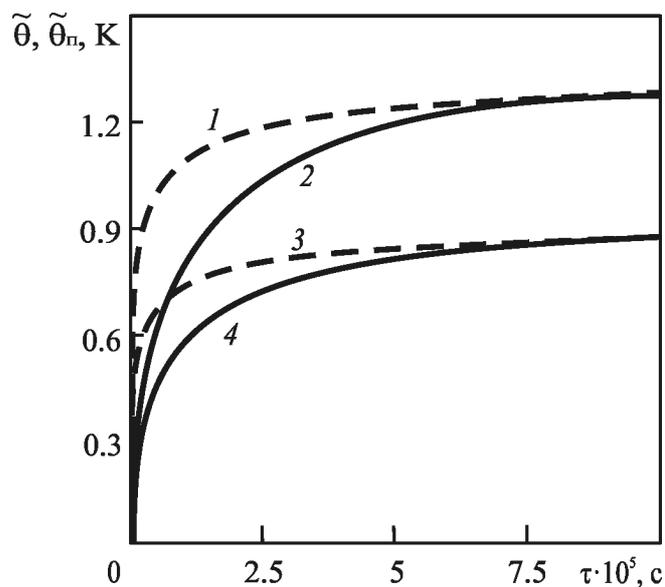


Рис. 3.9. Динамика радиального профиля температуры (*прерывистые линии*) и уточненного погранслойной функцией радиального профиля (*непрерывные линии*) на оси скважины $r_d = 0 \text{ м}$ (кривые 1, 2) и на расстоянии $r_d = 0.05 \text{ м}$ от оси скважины (кривые 3, 4)

Рисунок показывает, что использование погранслойной функции позволяют привести значение на границе $\tau = 0$ в соответствие с ожидаемым.

На рисунке 3.10 представлено сопоставление радиальных температурных профилей на оси скважины с погранслойной поправкой и без нее для дебитов 2 и 4 $\text{м}^3/\text{сут.}$

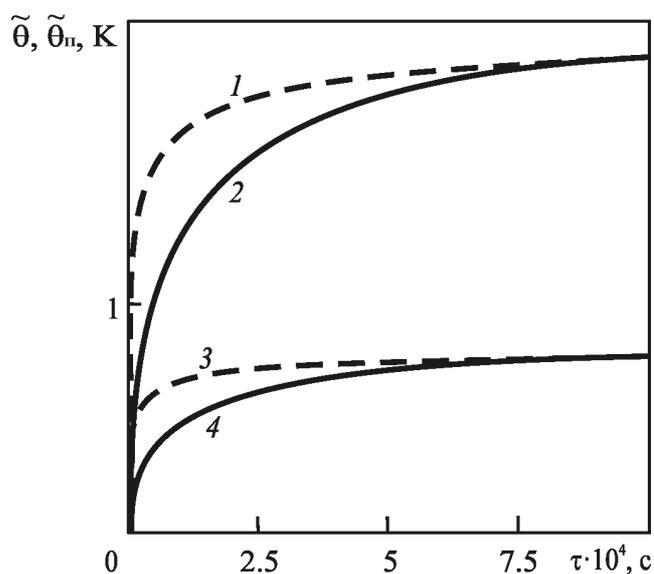


Рис. 3.10. Эволюция радиальных температурных профилей (кривые 1, 2) и уточненных погранслойной функцией радиальных профилей (кривые 3, 4) в центре трубы $r_d = 0 \text{ м}$ для дебитов: 1, 2 – $Q = 8 \text{ м}^3/\text{сут.}$, 3, 4 – $2 \text{ м}^3/\text{сут.}$

Как и на рисунке 3.9, учет погранслошной функции позволяет удовлетворить начальному условию.

На рисунке 3.11 сопоставлены радиальные профили температуры для ламинарных потоков нефти (*непрерывные линии*) и воды (*прерывистые линии*), окруженных глиной при разных дебитах через 0.3 суток после начала отбора.

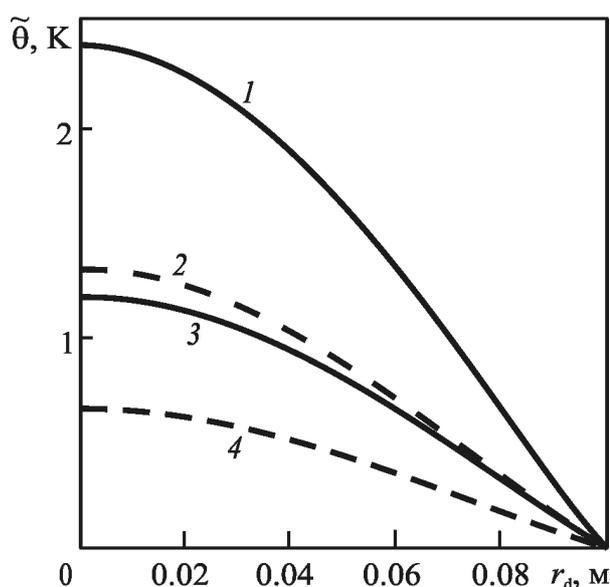


Рис. 3.11. Сопоставление радиальных профилей температуры $\tilde{\theta} = (\theta^1 - \theta^1|_{r=1})$ в потоках нефти (1, 3) и воды (2, 4). Шифр кривых: 1, 2 – $Q = 10 \text{ м}^3/\text{сут.}$; 3, 4 – $5 \text{ м}^3/\text{сут.}$

Наибольшая разница температур между центром и стенкой скважины соответствует большему значению дебита и жидкости с меньшей теплопроводностью – нефти. Однако, абсолютная температура воды больше, т.к. ее теплоемкость выше и она лучше аккумулирует тепло.

Рисунок 3.12 иллюстрирует радиальные профили температуры ламинарного потока нефти ($Q = 10 \text{ м}^3/\text{сут.}$) для различных сред, через час после начала отбора. На рисунке 3.12 наблюдаются те же особенности, что и на рисунке 3.6.

На рисунке 3.13 сопоставлены установившиеся радиальные перепады температуры $\tilde{\theta} = (\theta^1 - \theta^1|_{r=1})$ для ламинарных потоков нефти (*прерывистые линии*) и воды (*непрерывные линии*) при разных дебитах. Чем больше дебит и меньше теплопроводность жидкости, тем больше температурный перепад. Из рисунка (3.13) следует, что для ламинарного потока перепад температуры

между осью и стенкой скважины больше, чем в случае модельного потока с выровненным профилем скорости.

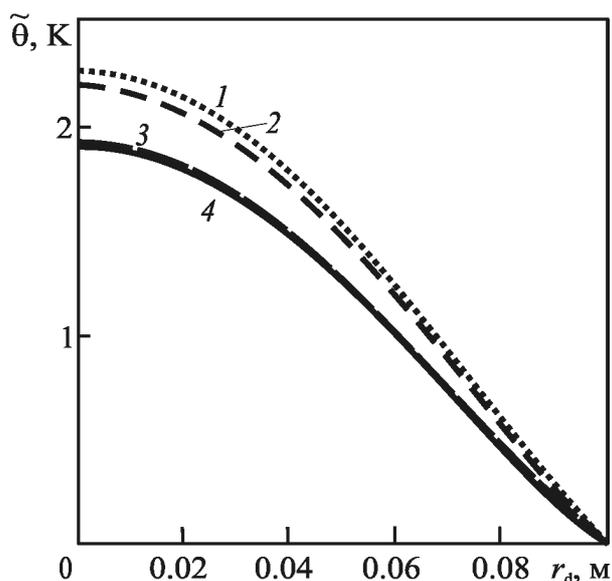


Рис. 3.12. Сопоставление радиальных профилей температуры $\tilde{\theta} = (\theta^1 - \theta^1|_{r=1})$ нефтяного потока в разных горных породах: 1 – песчаник глинистый, 2 – глинистый известняк, 3 – песчаник, 4 – глина

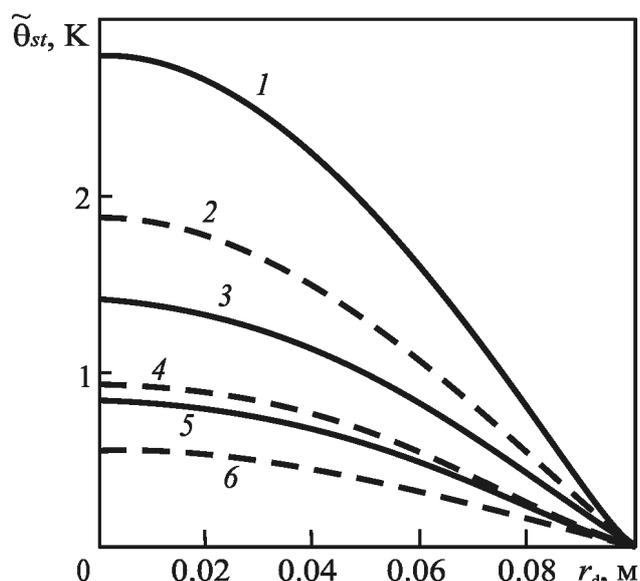


Рис. 3.13. Сопоставление стационарных радиальных профилей температуры в потоках нефти (непрерывные линии) и воды (прерывистые линии). Шифр кривых: 1, 2 – $Q = 10 \text{ м}^3/\text{сут.}$; 3, 4 – $5 \text{ м}^3/\text{сут.}$; 5, 6 – $3 \text{ м}^3/\text{сут.}$

Рисунок 3.14 иллюстрирует установление радиального профиля температуры со временем (*а* – без учета погранслошной поправки, *б* – с учетом). Сплошные линии соответствуют асимптотике малых времен, штриховые – больших.

Из рисунка 3.14, *а* видно, что радиальный профиль температуры без учета погранслошной функции не удовлетворяет начальному условию исходной задачи. Удовлетворить этому условию удастся на рисунке 3.14, *б* с помощью погранслошной функции, представленной в Приложении Д.

Установление радиального профиля температуры, как и на рисунке 3.6, происходит за время около 24 часов после начала отбора. Перепад температуры между стенкой скважины и ее осью для ламинарного потока в полтора раза больше чем для модельного случая с выровненным профилем скорости.

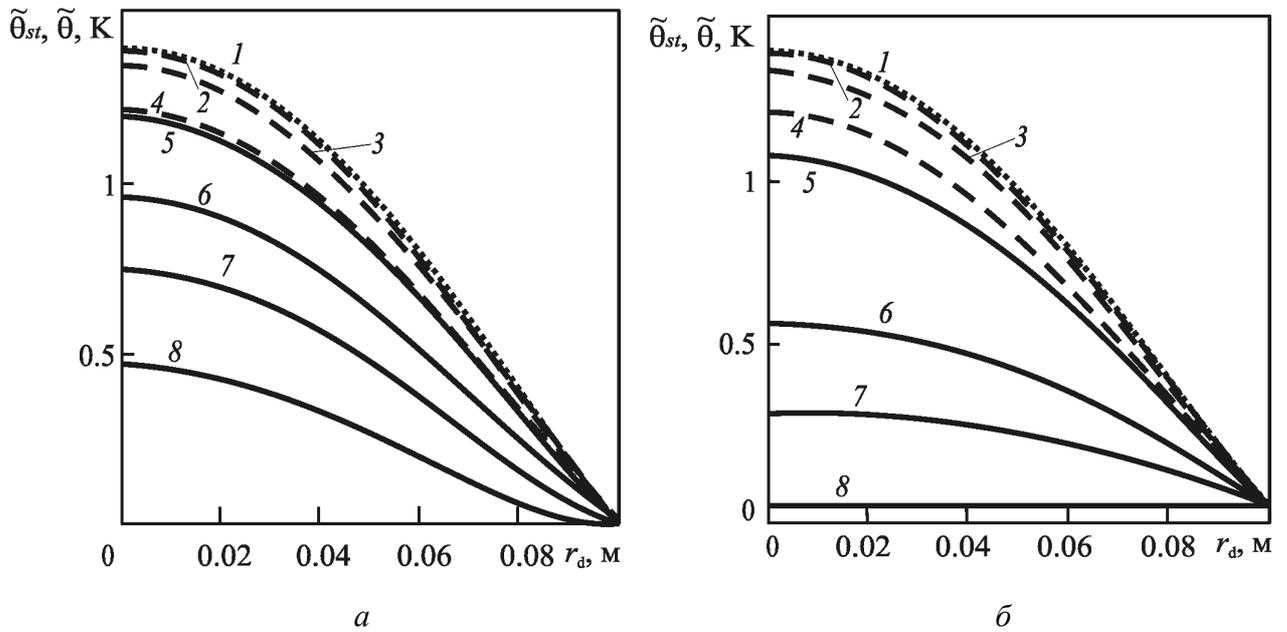


Рис. 3.14. Установление радиального профиля температуры $\tilde{\theta} = (\theta^1 - \theta^1|_{r=1})$ в ламинарном потоке нефти. Шифр кривых: 1 – $\tilde{\theta}_{st}$, 2 – $\tau = 10^6$ с, 3 – 10^5 с, 4, 5 – $3 \cdot 10^5$ с, 6 – $3.6 \cdot 10^3$ с, 7 – $6 \cdot 10^2$ с, 8 – 0 с

На рисунке 3.15 сопоставлены зависимости температуры в первом приближении в интервале малых времен с учетом погранслоя и без него на различных расстояниях от оси скважины. Построение температурных зависимостей с учетом погранслойных функций уточняем значение температуры в начальный момент времени на 10 % для координаты $r_d = 0.08$ м и на 3 % в центре скважины. С течением времени вклад погранслойной поправки уменьшается.

На рисунке 3.16 произведена оценка вклада погранслойной функции в температурное поле с течением времени. Величина погранслойной поправки с течением времени уменьшается за 20 часов от 40 % до 1 %. Сравнение полученных результатов с кривыми рисунка 3.16 позволяет сделать вывод о том, что через сутки после начала отбора температура в скважине устанавливается, и погранслойная функция практически не вносит корректив в температурное поле потока.

На рисунках 3.17 – 3.30 представлены графики, учитывающие температурный сигнал пласта, расчетные формулы для которых представлены в главе II и Приложениях Г,Е. В главе V показано, что температурный сигнал пла-

ста зависит от условий фильтрации и может достигать десятков градусов. Для лучшей наглядности на большинстве рисунков температурный сигнал пласта принят равным 1 К, а зависимости с учетом температурного сигнала представлены сплошными линиями. Кривые, построенные в предположении отсутствия температурного сигнала пласта $\theta_0 = 0$ К изображены штриховыми линиями.

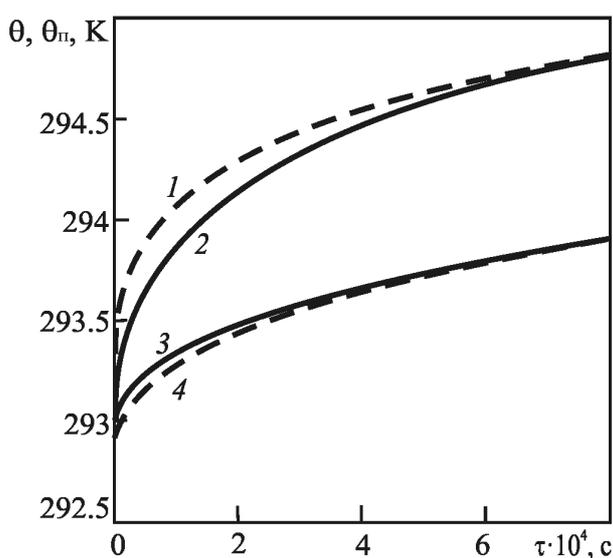


Рис. 3.15. Зависимость безразмерной температуры нефтяного потока в скважине от времени с учетом погранслоя (непрерывные кривые) и без него (прерывистые кривые) на различных расстояниях от оси скважины 1, 2 – $r_d = 0$ м; 3, 4 – 0.08 м

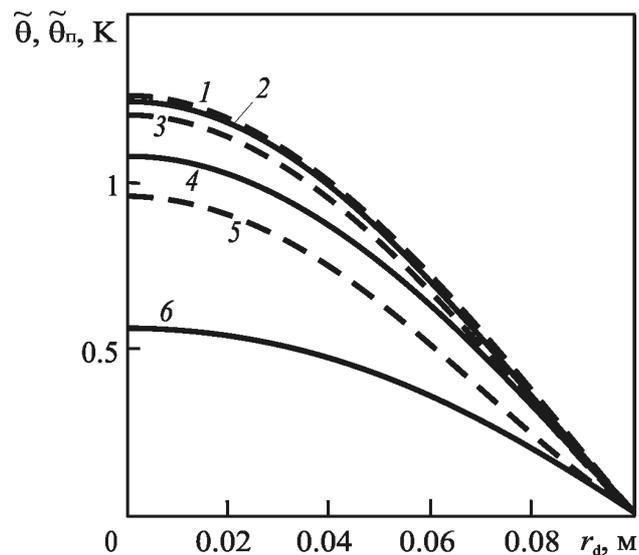


Рис. 3.16. Зависимость температурного перепада между внутренними точками и стенкой скважины в потоке нефти с учетом погранслоя (непрерывные кривые) и без него (прерывистые кривые). Шифр кривых: 1, 2 – $\tau = 20$ часов; 3, 4 – 8 часов, 5, 6 – 1 час

Рисунок. 3.17 иллюстрирует зависимость от вертикальной координаты относительной безразмерной (а) и размерной (б) температуры ламинарного потока нефти в трубе в интервале влияния температурного поля пласта при разных значениях времени.

Сопоставлением кривых, построенных при нулевом и единичном температурных сигналах, можно определить пространственный диапазон затухания температурного сигнала пласта (ПДЗТСП). На рисунке верхняя граница ПДЗТСП Z_T обозначена точкой 1, которая смещается вверх с течением времени. Эта точка разделяет две зоны: стабилизации теплообмена $0 < z < Z_T$ и постоянных градиентов $Z_T < z < D$. Из рисунка также видно, что размеры ПДЗТСП меньше размеров пространственного диапазона конвективного вли-

яния (ПДКВ), верхняя граница которого определяется как $Z_d = v \cdot \tau$ (или $Z = \text{Re}v \cdot \text{Fo}$ в безразмерных координатах).

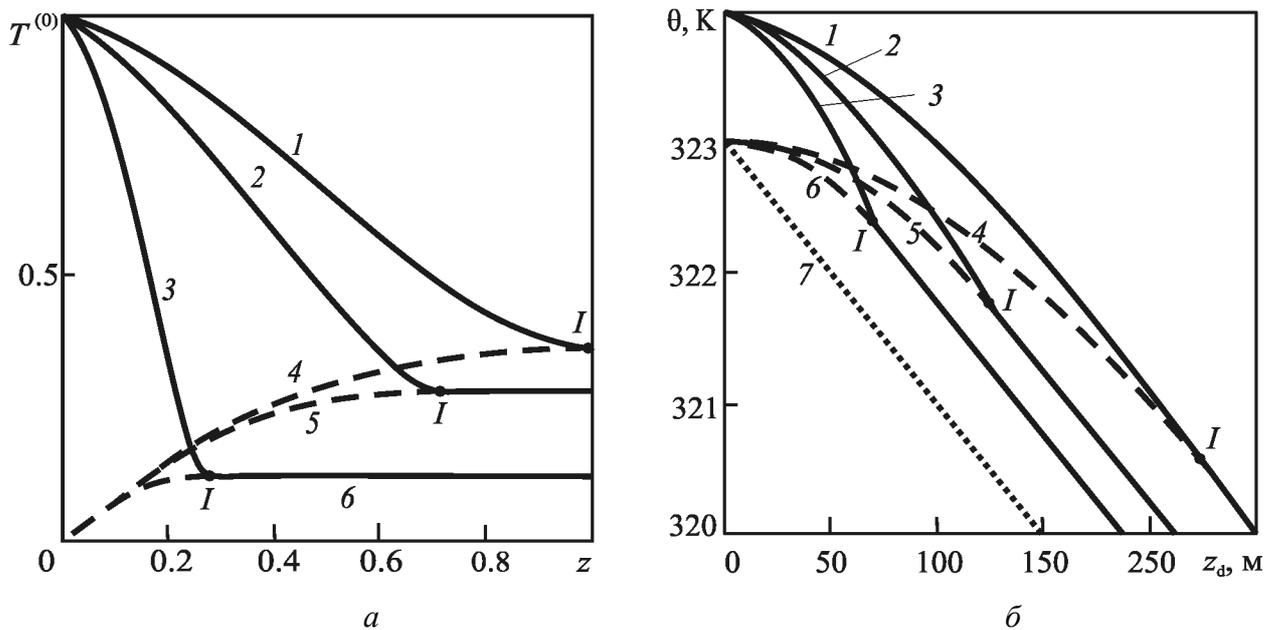


Рис. 3.17. Сопоставление осредненной температуры потока нефти в с глубиной в интервале влияния температурного поля пласта в безразмерном (а) и размерном (б) виде. Шифр кривых: 3, 6 – $\text{Fo} = 0.3$, 2, 5 – 1, 1, 4 – 1.5 (а); 1, 4 – $\tau = 8$ ч, 2, 5 – 4 ч, 3, 6 – 2 ч, 7 – геотерма (б).

Отметим, что на рис. 3.17, а в области постоянных градиентов температуры кривые параллельны оси z , а на рис. 3.17, б они параллельны геотерме, эта особенность следует из принятой базисной совокупности при построении безразмерной температуры. Таким образом, рост безразмерной температуры $T^{(0)}$ от забоя к устью не соответствует росту размерной температуры, которая уменьшается с увеличением вертикальной координаты (см. рис. 3.17, б), растет лишь разница между температурой жидкости в скважине и геотермической.

Рисунок 3.18 иллюстрирует зависимость размеров ПДЗТСП от теплофизических свойств горных пород, окружающих скважину с дебитом $Q = 70 \text{ м}^3/\text{сут}$ через 2 часа после начала отбора.

На рисунке 3.19 сопоставлены вертикальные распределения температуры относительной температуры потоков воды (кривые 1, 3) и нефти (2, 4) в скважине в ПДЗТСП в через 4 часа после начала отбора. Меньшее значение

ПДЗТСП для нефти объясняется более низкой теплоемкостью, что приводит к более заметному расходу запасов тепла в передней части ПДКВ.

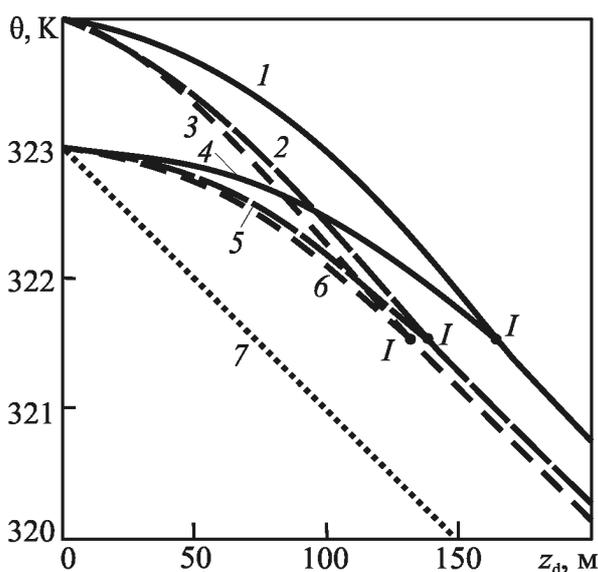


Рис. 3.18. Сопоставление средней по сечению температуры нефтяного потока. Шифр кривых: 1, 4 – глина; 2, 5 – глинистый известняк; 3, 6 – песчаник глинистый. 7 – геотерма

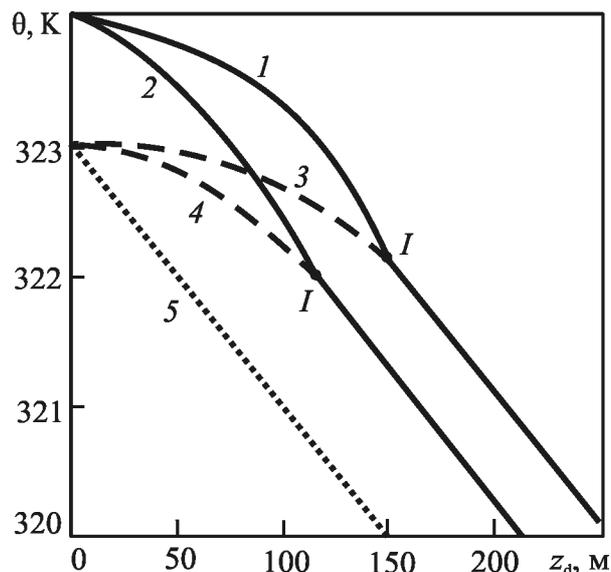


Рис. 3.19. Сопоставление средней по сечению температуры ламинарных потоков воды (кривые 1, 3) и нефти (2, 4) в скважине в интервале действия температурных сигналов пласта при $t = 4$ ч. Кривая 5 соответствует естественной невозмущенной температуре Земли

Из сопоставления рисунков 3.18 и 3.19 следует, что теплофизические свойства флюида в скважине и окружающих скважину пород оказывают значительное влияние на расположение точки I – верхней границы ПДЗТСП.

На рисунке 3.20 показана зависимость положения верхней границы ПДЗТСП от дебита скважины через 3 часа после начала отбора. Шифр кривых: 3, 6 – $Q = 50$ м³/сут., 2, 5 – 100 м³/сут., 1, 4 – 250 м³/сут. Как и на предыдущих рисунках, температура быстро возрастает в области глубин близких к забою скважины, а после установления стремится к геотерме. ПДЗТСП увеличивается с увеличением дебита.

Рисунок 3.21 показывает эволюцию асимптотически осредненной по сечению нефтяного потока температуры на разных глубинах в безразмерном (а) и размерном (б) виде. Температура уменьшается с приближением к устью скважины, что объясняется теплообменом между флюидом в скважине и окружающими горными породами.

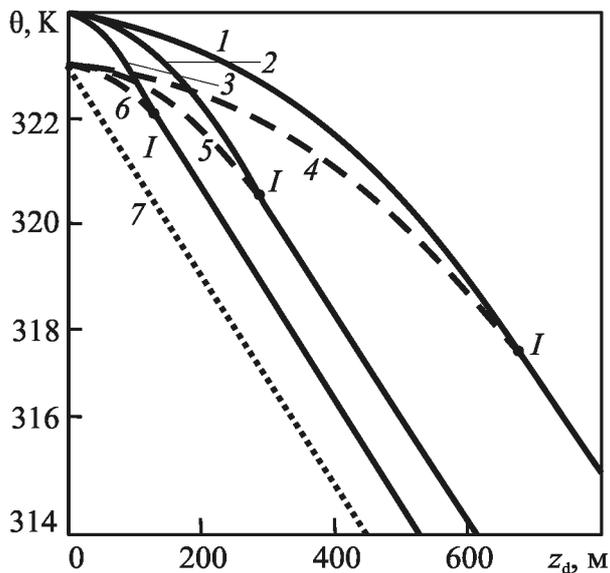


Рис. 3.20. Сопоставление осредненной температуры нефтяного потока при разных дебитах. Шифр кривых: 3, 6 – $Q = 50 \text{ м}^3/\text{сут.}$, 2, 5 – $100 \text{ м}^3/\text{сут.}$, 1, 4 – $250 \text{ м}^3/\text{сут.}$. Кривая 7 – геотерма

Нижняя граница временного диапазона влияния температурного сигнала пласта Fo_S (ВДВТСП) обозначена на рисунке точкой II, при движении от забоя к устью время подхода температурного сигнала увеличивается.

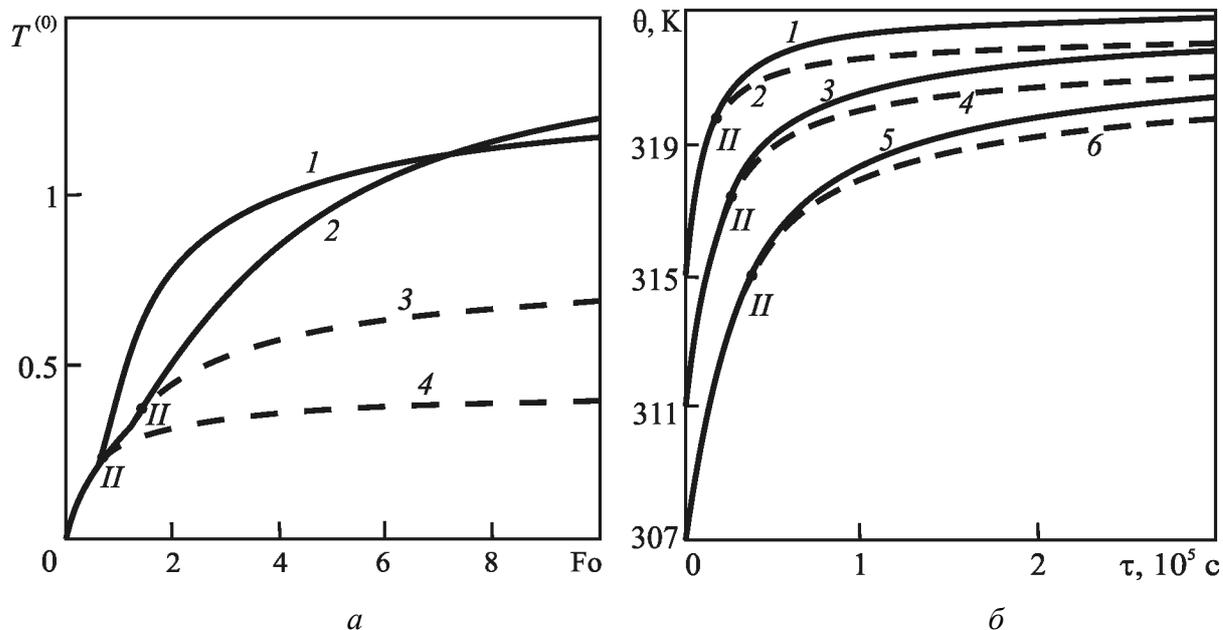


Рис. 3.21. Динамика средней по сечению температуры нефтяного потока на разных глубинах в безразмерном виде (а): 1, 4 – $z = 0.5$, 2, 3 – $z = 1$; и размерном (б): 1, 2 – $z_d = 400 \text{ м}$; 3, 4 – 600 м , 5, 6 – 800 м .

Рисунок 3.22 показывает динамику температуры нефти на глубине 1500 м ($z_d = 500 \text{ м}$) для ламинарных потоков разных дебитов. При увеличении дебита скважины увеличивается и температура в точке II, а время установления температуры и ВДВТСП уменьшаются.

На рисунке 3.23 сопоставлены ВДВТСП нефтяного потока с дебитом $Q = 100 \text{ м}^3/\text{сут.}$ в точке $z_d = 500 \text{ м}$ от теплофизических свойств окружающих горных пород.

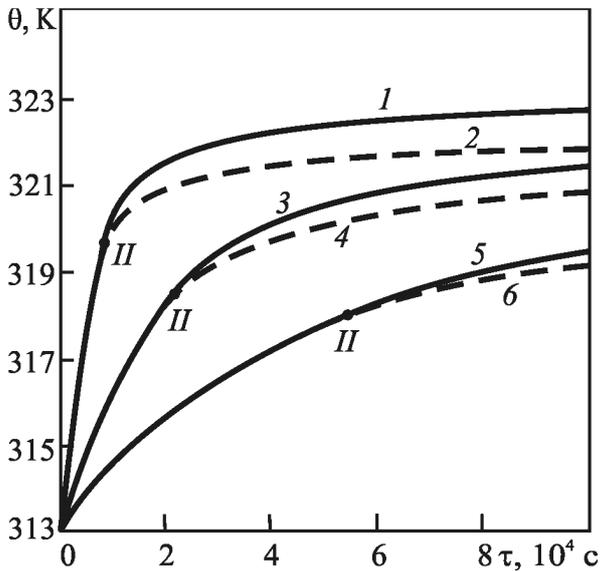


Рис. 3.22. Динамика средней по сечению температуры нефтяного потока на глубине $(D - z_d)$ 1500 м при разных дебитах: 5, 6 – $Q = 50 \text{ м}^3/\text{сут.}$, 3, 4 – $100 \text{ м}^3/\text{сут.}$, 1, 2 – $250 \text{ м}^3/\text{сут.}$

В породах с меньшим коэффициентом теплопроводности температура нефти достигает больших значений, поскольку в среде с меньшей теплопроводностью поток тепла в окружающую среду меньше. При увеличении теплопроводности окружающего массива, возрастает и нижняя граница ВДВТСП.

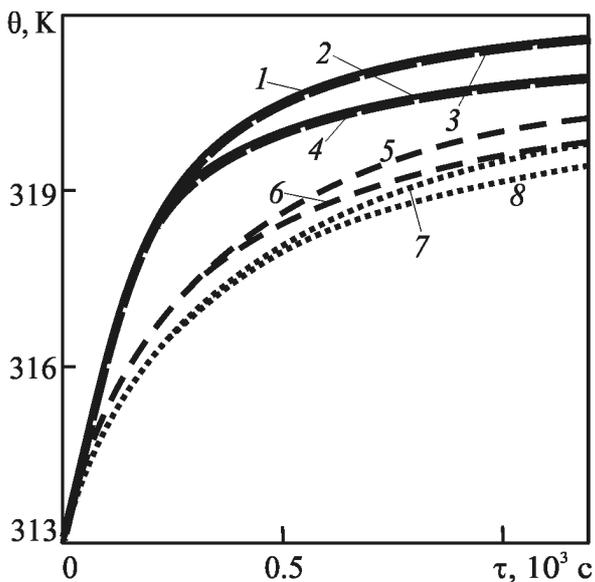


Рис. 3.23. Время подхода температурного сигнала пласта. Шифр кривых: 1, 2 – глина, 3, 4 – песчаник, 5, 6 – глинистый известняк, 7, 8 – песчаник глинистый. Линии 1, 2, 3, 7 соответствуют температурному сигналу пласта 1 К; 4, 5, 6, 8 – 0 К

На рисунке 3.24 иллюстрируется формирование температурного перепада между $r_d = 0.05 \text{ м}$ и осью скважины. При нулевом температурном сигнале

на больших глубинах наблюдается рост температурного перепада и дальнейшее его установление. В случае температурного сигнала 1 К при движении от забоя скважины к устью наблюдается более интенсивный рост перепада температур, который сменяется его уменьшением, а затем перепад стабилизируется. Точкой *I* отмечена верхняя граница ПДЗТСП для перепада температур между $r_d = 0.05$ м и осью скважины. С течением времени точка *I* смещается к устью, а абсолютное значение перепада увеличивается.

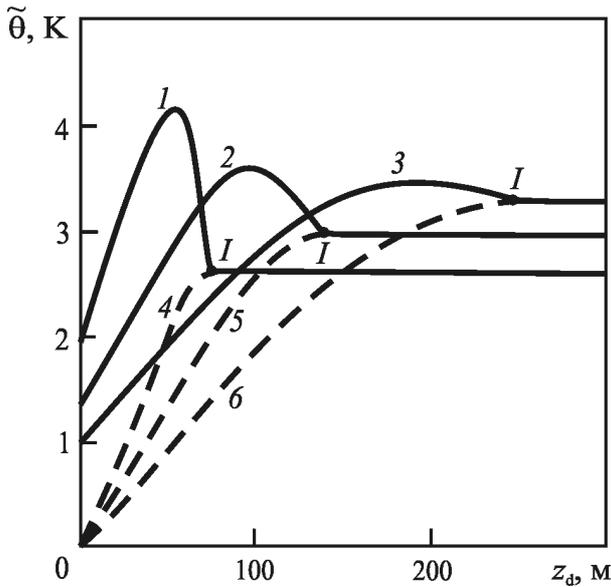


Рис. 3.24. Изменение радиального перепада температуры с глубиной в различные моменты времени: 1, 4 – $\tau = 2$ ч, 2, 5 – $\tau = 4$ ч, 3, 6 – $\tau = 8$ ч в точке $r_d = 0.05$ м.

На рисунке 3.25 приведены кривые, иллюстрирующие формирование температурного перепада потока вдоль ствола скважины при различных значениях радиальной координаты.

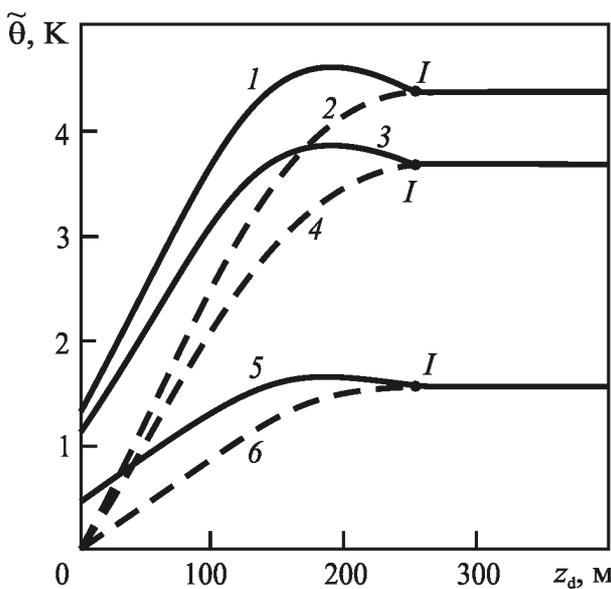


Рис. 3.25. Формирование перепада температуры вдоль ствола скважины на различных расстояниях от ее оси: 1, 2 – $r_d = 0$ м, 3, 4 – 0.04 м, 5, 6 – 0.08 м в момент времени $\tau = 8$ ч.

Время наблюдения $\tau = 8$ ч. Верхняя граница ПДЗТСП при удалении от оси скважины фактически не меняется.

Рисунок 3.26 иллюстрирует формирование перепада температуры между осью скважины и $r_d = 0.05$ м в потоке нефти вдоль ствола скважины с дебитом $Q = 30$ м³/сут, окруженной горными породами с различными теплофизическими свойствами.

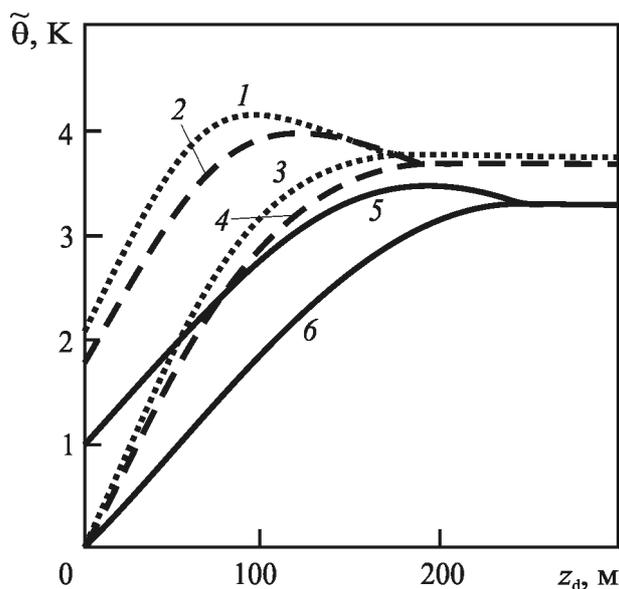


Рис. 3.26. Формирование перепада температуры нефти вдоль ствола скважины в момент времени 8 ч. Шифр кривых: 1, 3 – песчаник глинистый, 2, 4 – глинистый известняк, 5, 6 – глина. Линии 1, 2, 5 представляют единичный температурный сигнал 1 К, 3, 4, 6 – 0 К

Для глины (среды с наименьшей теплопроводностью) нижняя граница ПДЗТСП расположена ближе к устью, а абсолютное значение установившегося перепада меньше.

На рисунке 3.27 показана зависимость положения нижней границы ВДВТСП для температурного перепада в потоке нефти для дебита $Q = 30$ м³/сут. на глубине 1500 м ($z_d = 500$ м) на разных расстояниях от оси трубы: 1, 2 – $r_d = 0$ м, 3, 4 – 0.04 м, 5, 6 – 0.08 м. Как и верхняя граница ПДЗТСП нижняя граница ВДВТСП фактически не зависит от отклонения термометра от оси трубы.

Рисунок 3.28 показывает формирование перепада температуры нефтяного потока при различных дебитах: 1, 2 – $Q = 100$ м³/сут., 3, 4 – 70 м³/сут., 5, 6 – 40 м³/сут. на глубине 1500 м ($z_d = 500$ м) и расстоянии от оси трубы $r_d = 0.05$ м. С увеличением дебита возрастает значение температурного пере-

пада, а время достижения температурным сигналом указанной глубины уменьшается.

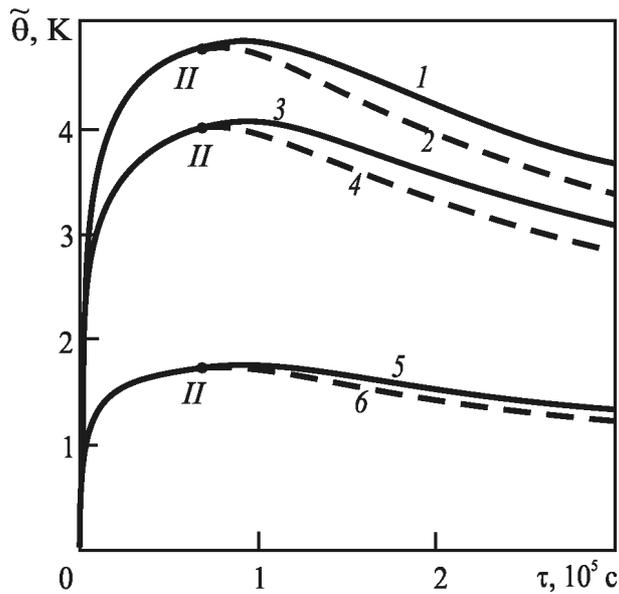


Рис. 3.27. Сопоставление перепадов температуры в потоке нефти для нулевого и единичного температурных сигналов пласта, на фиксированной глубине $z_d = 500$ м. Шифр кривых: 1, 2 – $r_d = 0$ м, 3, 4 – 0.04 м, 5, 6 – 0.08 м

На рисунке 3.29 представлены безразмерные зависимости температуры от вертикальной координаты без учета погранслойной поправки (*прерывистые линии*) и с ней (*непрерывные линии*) на разных расстояниях от оси скважины: 1, 2 – $r = 0$, 3, 4 – 0.5.

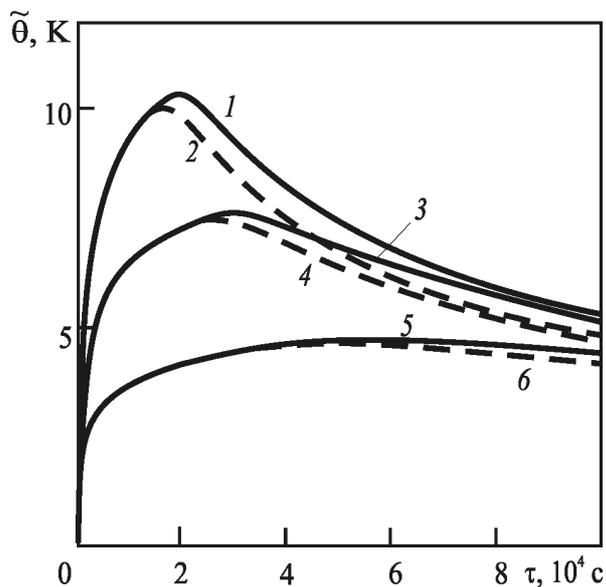


Рис. 3.28. Эволюция температурных перепадов в нефтяном потоке, при различных дебитах. Шифр кривых: 1, 2 – $Q = 100$ м³/сут., 3, 4 – 70 м³/сут., 5, 6 – 40 м³/сут.

Построение погранслойных функций позволяет удовлетворить условию задачи при $z = 0$. Максимальная погрешность расчета температуры потока наблюдается на забое скважины ($z = 0$) и уменьшается при движении к устью. Для безразмерных глубин $z > 0.3$ влияние поправки незначительно.

Оценки показывают, что вклад погранслойной функции на кривой 3 составляет 7 %, а на кривой 1 – 14 %.

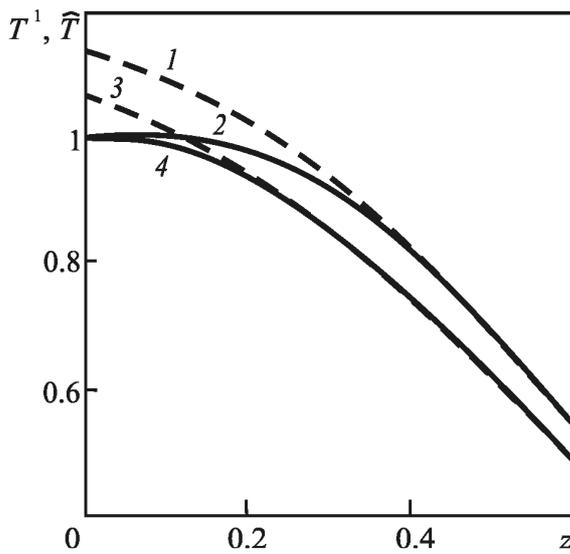


Рис. 3.29. Распределение безразмерной температуры нефтяного потока вдоль ствола скважины с учетом погранслоя (непрерывные линии) и без него (прерывистые линии) на разных расстояниях от оси скважины: 1, 2 – $r = 0$, 3, 4 – 0.5

Уточнение решения в области модификации граничного условия в различные моменты времени представлено на рисунке 3.30. Погранслойная поправка уточняет кривую 2 на 15 %, а кривую 1 на 20 %. Анализ решения без погранслойных функций дает значительную погрешность на глубинах, близких к забою и в начальный момент времени. С увеличением времени и при приближении к устью погранслойная поправка становится незначительной.

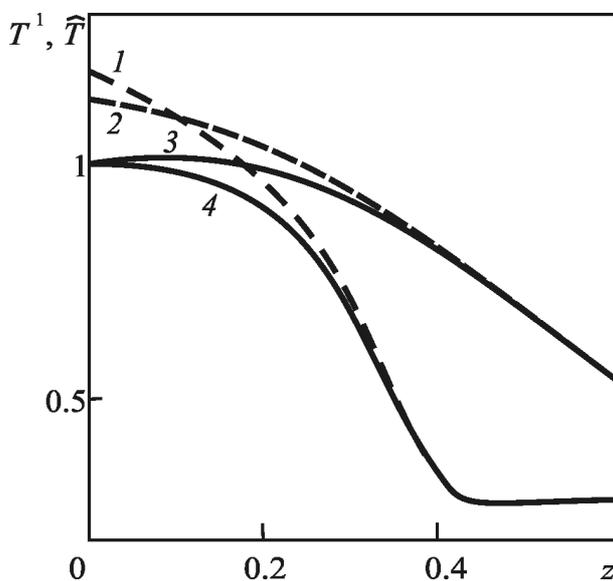


Рис. 3.30. Распределение безразмерной температуры нефтяного потока вдоль ствола скважины с учетом погранслоя (непрерывные линии) и без него (прерывистые линии) в разные моменты времени: 1, 4 – $Fo = 0.5$, 2, 3 – 1

На рисунке 3.31 представлены радиальные распределения температуры ламинарного (прерывистые линии) и турбулентного (непрерывные линии) нефтяного потоков. Радиальный перепад температуры ламинарного потока растет с увеличением дебита до $32 \text{ м}^3/\text{сут}$, при котором для выбранных расчетных параметров достигается критическое значение числа Рейнольдса. Де-

биту $32 \text{ м}^3/\text{сут}$ соответствуют две кривые на рисунке 3.31. Ламинарному режиму течения соответствует кривая 1, турбулентному – 4, турбулизация потока приводит к уменьшению температурного перепада на 5 градусов, совпадение кривых 1 и 4 возле стенки представляет ламинарный подслой.

Рисунок 3.32 иллюстрирует отклонение средней температуры турбулентного потока нефти от геотермической θ_{Γ} вдоль ствола скважины при температурном сигнале пласта 1 К для разных дебитов.

Наибольшее изменение температуры наблюдается на малых глубинах в ПДЗТСП. В областях, которых не достиг температурный сигнал распределение температуры параллельно геотермическому. С увеличением дебита, как и для ламинарного потока, верхняя граница ПДЗТСП сдвигается к устью скважины и растет отклонение температуры потока от геотермической.

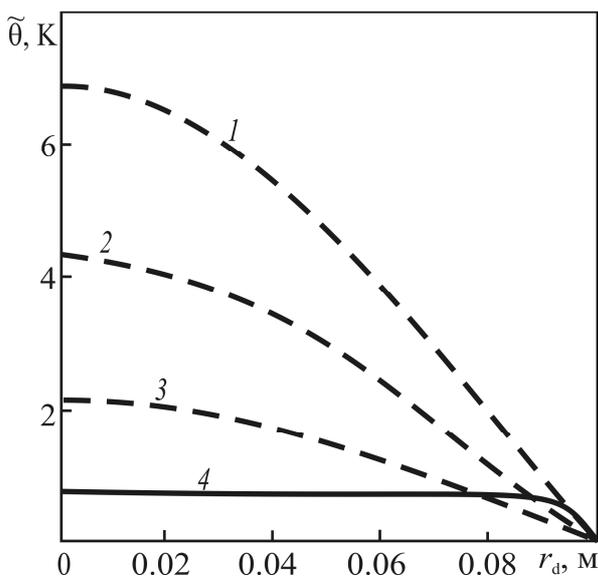


Рис. 3.31. Радиальные распределения температуры при ламинарном (*прерывистые линии*) и турбулентном (*непрерывные линии*) режимах течения. Шифр кривых: 1, 4 – $Q = 32 \text{ м}^3/\text{сут}$. ($Re = 2062$), 2 – $Q = 20$ ($Re = 1289$), 3 – $Q = 10$ ($Re = 645$)

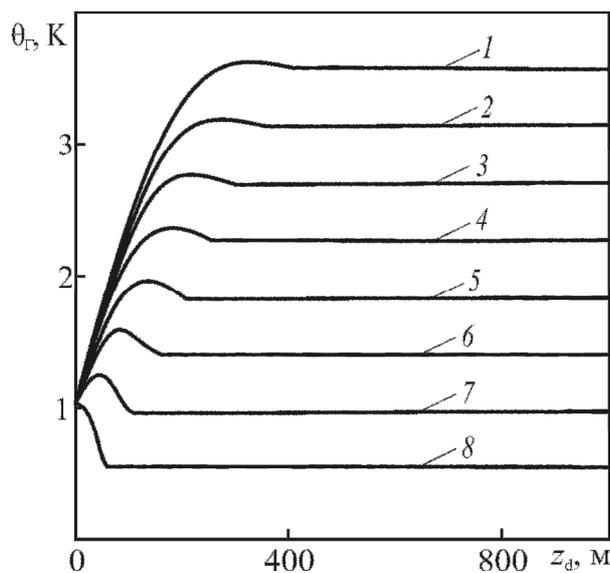


Рис. 3.32. Отклонение средней температуры от геотермической вдоль ствола скважины при турбулентном режиме течения. Шифр кривых: 1 – $Q = 82 \text{ м}^3/\text{сут}$. ($Re = 5285$), 2 – $72 \text{ м}^3/\text{сут}$. ($Re = 4640$), 3 – $62 \text{ м}^3/\text{сут}$. ($Re = 3996$), 4 – $52 \text{ м}^3/\text{сут}$. ($Re = 3351$), 5 – $42 \text{ м}^3/\text{сут}$. ($Re = 2707$), 6 – $32 \text{ м}^3/\text{сут}$. ($Re = 2062$), 7 – $22 \text{ м}^3/\text{сут}$. ($Re = 1418$), 8 – $12 \text{ м}^3/\text{сут}$. ($Re = 773$)

На рис. 3.33, 3.34 представлено формирование радиального перепада температуры при нулевом (рис. 3.33) и единичном (рис. 3.34) температурных сигналах пласта и разных значениях дебита: 1 – $Q = 32 \text{ м}^3/\text{сут}$, 2 – $Q = 40$, 3 –

$Q = 40$. Закономерности формирования температурного перепада для турбулентного режима течения подобны аналогичным для ламинарного.

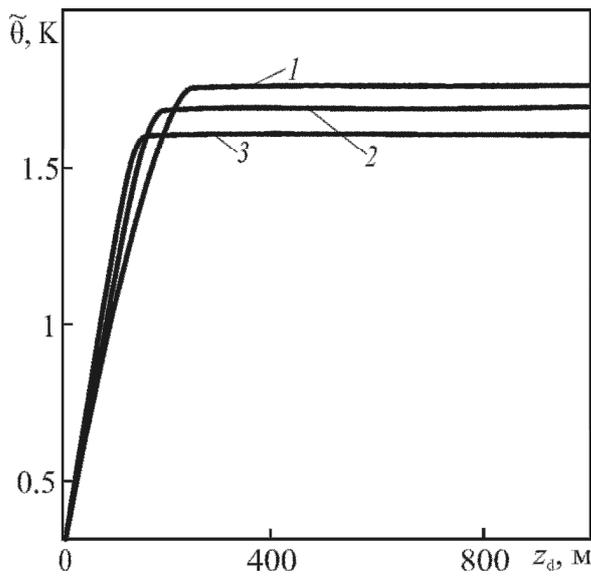


Рис. 3.33. Формирование радиально-температурного перепада в случае нулевого температурного сигнала. Шифр кривых: 1 – $Q = 32 \text{ м}^3/\text{сут.}$ ($Re = 2062$), 2 – $Q = 40$ ($Re = 2578$), 3 – $Q = 50$ ($Re = 3223$)

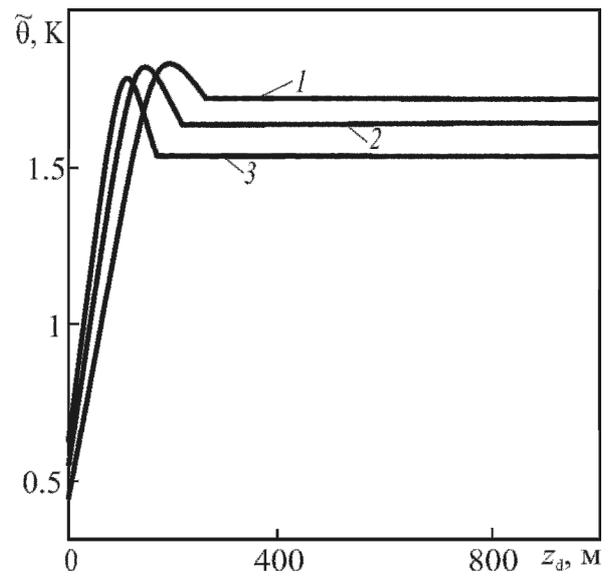


Рис. 3.34. Формирование радиально-температурного перепада в случае единичного температурного сигнала. Шифр кривых: 1 – $Q = 32 \text{ м}^3/\text{сут.}$ ($Re = 2062$), 2 – $Q = 40$ ($Re = 2578$), 3 – $Q = 50$ ($Re = 3223$)

Рисунок 3.35 иллюстрирует сопоставление радиальных распределений температуры в турбулентных потоках нефти (*непрерывные кривые*) и воды (*прерывистые кривые*) для разных дебитов: 1,3 – $Q = 60 \text{ м}^3/\text{сут.}$, 2,4 – $32 \text{ м}^3/\text{сут.}$

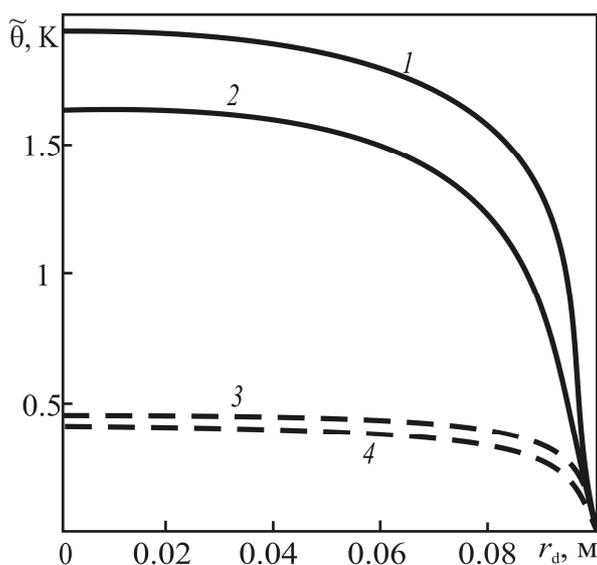


Рис. 3.35. Радиальные распределения температуры при турбулентного потока нефти (*непрерывные кривые*) и воды (*прерывистые кривые*) для разных дебитов: 1,3 – $Q = 60 \text{ м}^3/\text{сут.}$, 2,4 – $32 \text{ м}^3/\text{сут.}$

Сопоставление рисунков 3.35 и 3.13 позволяет сделать вывод о том, что радиальный профиль для турбулентного течения более выровненный на оси

скважины, чем для ламинарного. Особенности формирования радиального профиля температуры в турбулентном потоке при изменении дебита или теплофизических свойств флюида те же что и в ламинарном.

На рисунке 3.36 изображена зависимость величины $\tilde{\theta}$ (разницы между температурой ламинарного потока у стенки скважины $r_d = r_0$ и его температурой в любой точке r_d внутри скважины) на глубине 1200 м ($z_d = 800$ м) от радиальной координаты для разных времен и ее стационарное распределение, рассчитанные по формулам, следующим из (3.1.8).

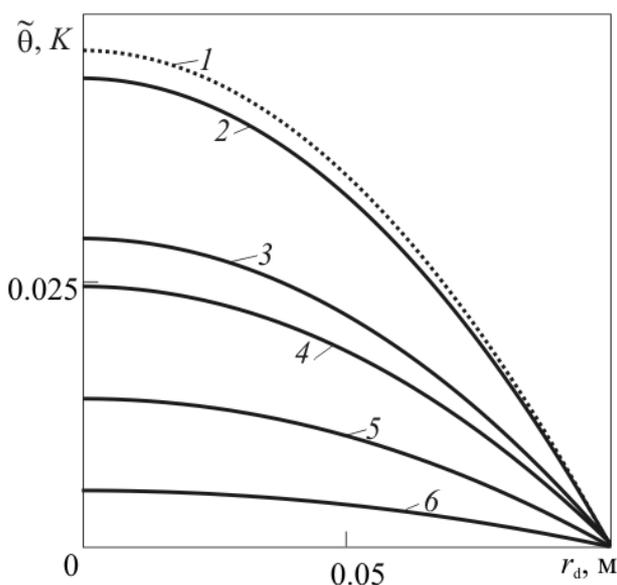


Рис. 3.36. Радиальный профиль температуры ламинарного потока в малодебитной скважине ($Q = 5 \text{ м}^3/\text{сут.}$) для разных времен: 2 – 6 сут., 3 – 2 ч, 4 – 1 ч, 5 – 10 мин, 6 – 1 мин и его стационарное распределение (кривая 1)

Анализ кривых показывает, что в малодебитных скважинах с дебитами меньше 5 т/сут. и геотермическом градиенте 0.02 К/м максимальная разница температур между стенкой и осью скважины не превышает 0.05 К. Эта величина определяет абсолютную точность нулевого приближения и иллюстрирует тот факт, что в большинстве практических случаев нулевым приближением можно ограничиться. Важность этой величины заключается также в том, что она определяет максимальную амплитуду аномалий, которые могут возникать из-за неконтролируемых радиальных отклонений термометра в процессе измерений.

На рисунке 3.37 показана зависимость радиального перепада температуры скважины от ее дебита для разных сред в случаях стационарного (пунктирные кривые) и нестационарного (сплошные кривые) течения.

Из рисунка видно, что с увеличением геотермического градиента растет и разница температур потока на стенке скважины и в ее центре. Излом сплошных кривых соответствует подходу температурного сигнала пласта.

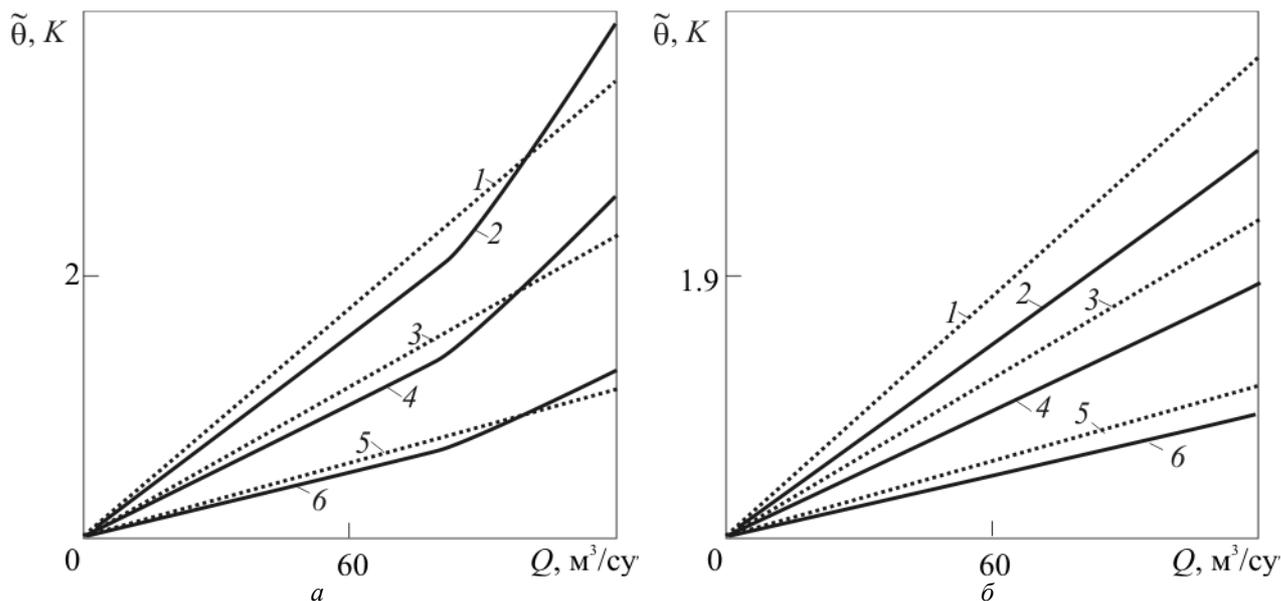


Рис. 3.37. Зависимость радиального перепада температуры ламинарного потока в скважине от ее дебита для стационарного (кривые 1, 3, 5) и нестационарного (кривые 2, 4, 6) течения для времени $a - t = 30$ часов, $b - t = 1$ час при различных значениях геотермического градиента окружающей среды. Шифр кривых: 1, 2 – $\Gamma = 0.06$ К/м, 3, 4 – 0.04 К/м, 5, 6 – 0.02 К/м

Рисунок 3.38 иллюстрирует зависимость радиального перепада температуры скважины от ее дебита на разных глубинах в момент времени 108000 с после пуска скважины.

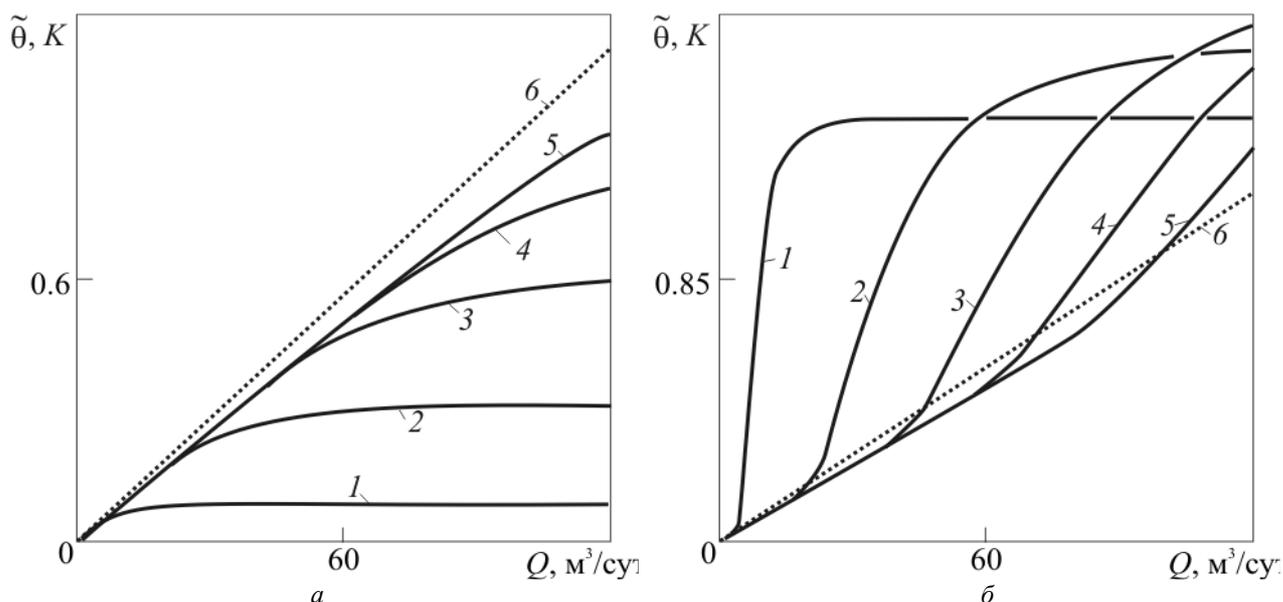


Рис. 3.38. Зависимость радиального перепада температуры скважины от ее дебита на разных расстояниях от забоя скважины. Шифр кривых: 1 – $z_d = 100$ м, 2 – 500 м, 3 – 1000 м, 4 – 1500 м, 5 – 2000 м, 6 – стационарный перепад

Геотермический градиент окружающих пород принят равным 0.02 К/м. На рисунке 3.8, *a* расчеты осуществлены при отсутствии граничных возмущений $\theta_0 = 0$ К при $z_d = 0$, а на рис. 3.8, *б* при $\theta_0 = 1$ К. Видно совпадение кривых при малых значениях дебита. Увеличение дебита (или скорости потока) приводит к более быстрому продвижению температурного сигнала пласта по стволу скважины.

Таким образом, рост дебита скважины приводит к увеличению радиального перепада температуры ламинарного потока. Разница температуры между стенкой и осью скважины резко возрастает при достижении температурным сигналом пласта точки наблюдения.

На рисунке 3.39 представлено сопоставление экспериментальной [154] и теоретической кривых изменения устьевой температуры восходящего потока промывочной жидкости. Теоретическая кривая рассчитана по формуле (Г.3.47) Приложения Г. Расчетные параметры: $D = 2000$ м, $r_0 = 0.125$ м, $\eta = 10^{-6}$ К/Па, $\lambda = 0.15$ Вт/(м·К), $c = 1800$ Дж/(К·кг), $\rho = 900$ кг/м³, $\lambda_1 = 2$ Вт/(м·К), $c_1 = 900$ Дж/(К·кг), $\rho_1 = 3400$ Дж/(К·кг), $\Gamma = 0.023$ К/м, $v = 2.3$ м/с.

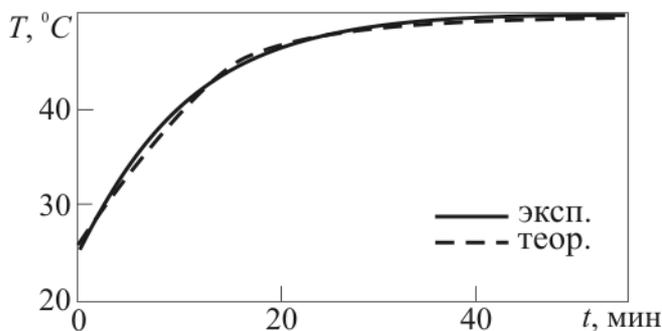


Рис. 3.39. Сопоставление экспериментальной [154] и теоретической кривых изменения устьевой температуры восходящего потока промывочной жидкости

Хорошая сопоставимость теоретической и экспериментальной кривых на рисунке свидетельствует о достоверности полученных в диссертации решений задач о температурном поле жидкости в скважине. Численные оценки показывают, что относительное расхождение кривых не превосходит 4 %.

На рисунке 3.40 приведено сопоставление экспериментальных [183] и теоретических зависимостей температуры жидкости в скважине от вертикальной координаты. Экспериментальные измерения проводились на скважине № 1925 Андреевской площади через час (кривая 1) и через 1.5 часа

(кривая 3) после остановки компрессора. Кривая 5 представляет геотермическое распределение температур. Состав восходящего потока – 100 % вода. Теоретические расчеты выполнены по формуле (Г.3.47) Приложения Г. Граница $z_d = 0$ м соответствует глубине 1344 м. Расчетные параметры: $r_0 = 0.1$ м, $\eta = 10^{-6}$ К/Па, $\lambda = 0.6$ Вт/(м·К), $c = 4000$ Дж/(К·кг), $\rho = 1000$ кг/м³, $\lambda_1 = 0.67$ Вт/(м·К), $c_1 = 950$ Дж/(К·кг), $\rho_1 = 2000$ Дж/(К·кг), $\Gamma = 0.02$ К/м.

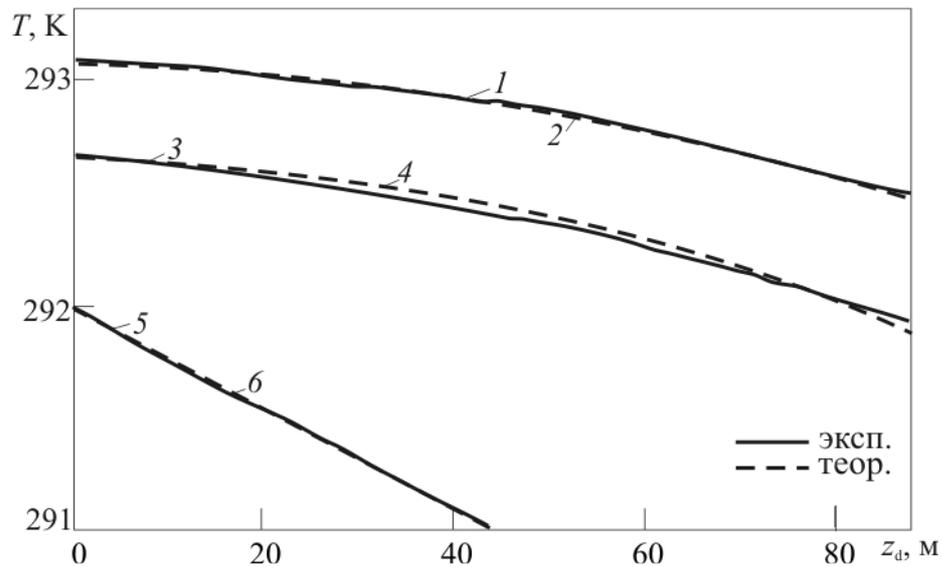


Рис. 3.40. Сопоставление экспериментальных (кривые 1, 3, 5) и теоретических (кривые 2, 4, 6) зависимостей температуры жидкости в скважине от вертикальной координаты. Шифр кривых: 1 – экспериментальная термограмма, замеренная через 1 час после остановки компрессора; 2 – расчетная кривая $\theta_0 = 1.1$ К, $Q = 90$ м³/сут; 3 – экспериментальная термограмма, замеренная через 1.5 часа после остановки компрессора; 4 – расчетная кривая $\theta_0 = 0.7$ К, $Q = 50$ м³/сут; 5 – экспериментальная геотерма; 6 – теоретическая геотерма

Из анализа кривых следует, что теоретические и экспериментальные кривые хорошо согласуются. В качестве меры погрешности принято максимальное расхождение кривых, которое наблюдается между кривыми 3 и 4 при $z_d = 45$ м и составляет 0.06 К или 5 %. Среднее же расхождение составляет на порядок меньшую величину, что свидетельствует об адекватности развитой теории.

Рисунок 3.41 иллюстрирует сопоставление экспериментальных [183] и теоретических зависимостей температуры жидкости в скважине от вертикальной координаты. Экспериментальные измерения проводились на скважине № 1420 Кувашской площади через 0.5 часа (кривая 2) и через 1.5 часа (кривая 4), и через 3 часа (кривая 6) после остановки компрессора. Кривая 8

представляет геотермическое распределение температур. Теоретические расчеты выполнены по формуле (Г.3.47) Приложения Г. Граница $z_d = 0$ м соответствует глубине 1388 м. Расчетные параметры: $r_0 = 0.1$ м, $\Gamma = 0.019$ К/м, $\eta = 10^{-6}$ К/Па, $\lambda = 0.15$ Вт/(м·К), $c = 2000$ Дж/(К·кг), $\rho = 800$ кг/м³, $\lambda_1 = 1.13$ Вт/(м·К), $c_1 = 950$ Дж/(К·кг), $\rho_1 = 2000$ Дж/(К·кг).

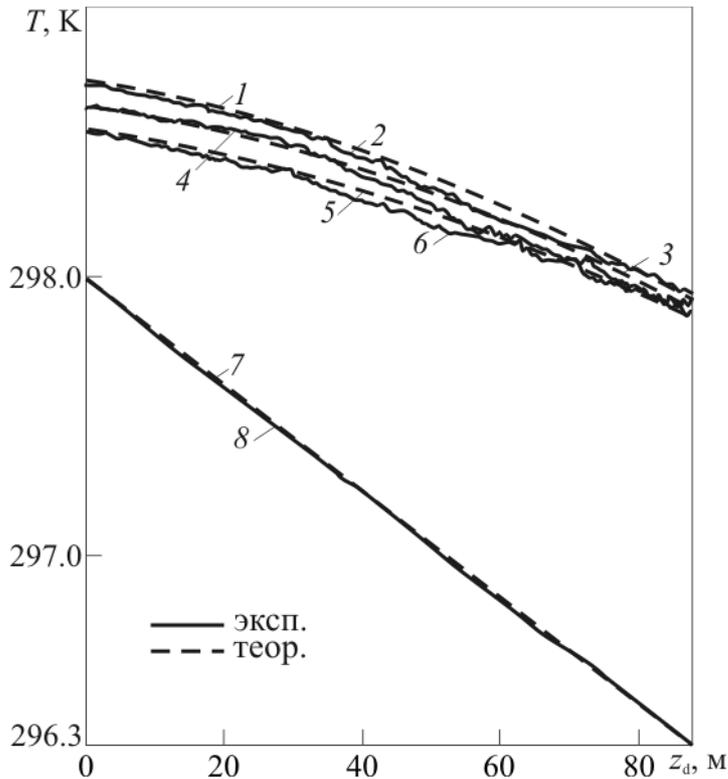


Рис. 3.41. Сопоставление экспериментальных (кривые 2, 4, 6, 8) и теоретических (кривые 1, 3, 5, 7) зависимостей температуры жидкости в скважине от вертикальной координаты. Шифр кривых: 1 – расчетная кривая $\theta_0 = 0.7$ К, $Q = 95$ м³/сут; 2 – экспериментальная термограмма, замеренная через 0.5 часа после остановки компрессора; 3 – расчетная кривая $\theta_0 = 0.61$ К, $Q = 77$ м³/сут; 4 – экспериментальная термограмма, замеренная через 1.5 часа после остановки компрессора; 5 – расчетная кривая $\theta_0 = 0.52$ К, $Q = 68$ м³/сут; 6 – экспериментальная термограмма, замеренная через 3 часа после остановки компрессора; 7 – теоретическая геотерма; 8 – экспериментальная геотерма

Анализ кривых показывает хорошее согласие теоретических и экспериментальных зависимостей. Амплитудная погрешность наблюдается между кривыми 3 и 4 при $z_d = 55$ м теоретической кривой не превышает 0.07 К или 8 % относительной величины. Средняя погрешность, как и в предыдущем случае, составляет значительно меньшую величину.

3.5. Выводы по главе III

Из решений общей задачи (2.2.16)–(2.2.22), представленных во второй главе, получены асимптотические формулы, описывающие температурное поле флюида, текущего по скважине и обменивающегося теплом с окружающим ее сплошным массивом среды в частных случаях ламинарного ($\lambda(r) =$

1) и выровненного ($R(r) = 1$, $\lambda(r) = 1$) профилей скорости. Аналогично из выражений (2.11.1), (2.11.3) получены асимптотические формулы для ламинарного потока и модельного потока с выровненным профилем скорости в режиме постоянных градиентов. В Приложениях В – Ж показано, что формулы, полученные из решений, представленных во второй главе, совпадают с решениями соответствующих упрощенных, по сравнению с (2.2.16)–(2.2.22), задач.

Установлено, что нулевое приближение описывает зависимость асимптотически осредненной температуры от времени, в то время как первое приближение описывает радиальные профили температуры.

На основе анализа решения задачи для нулевого коэффициента асимптотического разложения сформулирована следующая теорема: *температура потока в нулевом приближении, или асимптотически усредненное по сечению скважины значение температуры потока, не зависит от радиальных профилей скорости и коэффициента теплопроводности, т.е. одинаково для любых режимов течения несжимаемой жидкости при всех остальных идентичных параметрах.*

То есть, осредненное температурное поле аксиально-симметричного потока, в том числе турбулентного и ламинарного, инвариантно относительно радиальных профилей скорости и коэффициента теплопроводности, т.е. одинаково для любых режимов течения несжимаемой жидкости при одинаковой средней скорости и всех остальных идентичных параметрах. Определены значения параметров, при которых погрешностью расчетов, выполненных по формулам для нулевого приближения можно пренебречь.

Проанализировано влияние температурного сигнала пласта на температурное поле турбулентного и ламинарного потоков жидкости в скважине с учетом турбулентной составляющей теплопроводности и соответствующего профиля скорости, это позволило уточнить динамику температурных аномалий, обусловленных вкладом температурного сигнала пласта.

Из решения задач для первых коэффициентов разложения получены зависимости радиальных перепадов температуры при теплообмене потока между любой точкой внутри скважины и ее стенкой, позволяющие определить температурные аномалии, возникающие в различные моменты времени при отклонении термометра относительно оси (или стенки) скважины (основной систематической погрешности термокаротажа). На основании анализа полученных формул и расчетов установлен преобладающий вклад дебита, коэффициентов теплопроводности флюида и окружающих пород и незначительное влияние пространственной позиции точки измерения по направлению потока.

Из асимптотического решения в первом приближении, с использованием разработанного алгоритма, получены стационарные распределения температурного поля при теплообмене в скважине.

ГЛАВА IV. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ИНТЕРВАЛАХ СКВАЖИН С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПРОХОДНЫМ СЕЧЕНИЕМ

В данном разделе приведена теория температурных полей, возникающих в областях изменения площади поперечного проходного сечения скважины. Часто встречающимся в практике случаем такого рода является переход потока нефти, воды и газа в насосно-компрессорные трубы из обсадной колонны, участки выпадения парафинов или газовых гидратов.

4.1. Постановка задачи о теплообмене цилиндрического потока в зоне изменяющегося проходного сечения

До настоящего времени нет аналитических выражений, предназначенных для описания температурных аномалий, возникающих при изменении проходного сечения, как за счет перехода потока из обсадной колонны в насосно-компрессорные трубы, так и вследствие деформаций колонны, отложения парафинов, газовых гидратов и т.д. Температурные аномалии такого рода имеют самостоятельное значение, поскольку могут быть использованы для диагностики скважин методами термометрии. Кроме того, идентификация подобных температурных аномалий является необходимым условием успешного выявления расположенных выше интервала перфорации источников обводнения скважин.

Развитые в предыдущих главах методы решения задач скважинной термодинамики позволяют успешно справляться со сложной задачей описания температурных полей в условиях смены проходного сечения, независимо от режима течения.

На рисунке 4.1. изображена геометрия задачи о нестационарном теплообмене потока с изменяющейся площадью проходного сечения. В рассматриваемой задаче приняты те же предположения и допущения, что и при постановке задачи (1.4.1)–(1.4.7).

Обозначим $\theta_1, \theta_l, \theta_h$ – температурное поле массива и жидкости в нижней и верхней части трубы соответственно. Радиус нижнего и верхнего участков трубы r_l и r_h , изменение радиуса трубы происходит на высоте $z_d = H$.

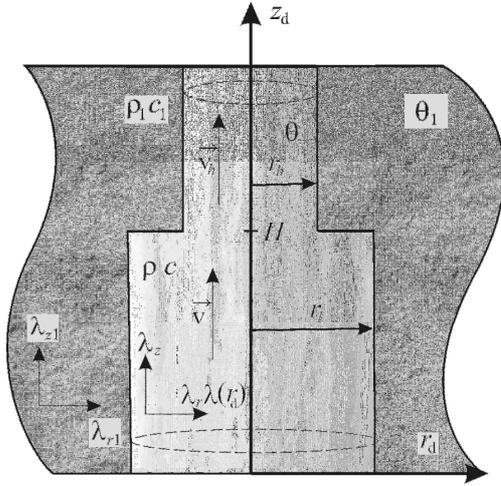


Рис. 4.1. Геометрия задачи о температурном поле в трубе с изменяющимся радиусом

Поля скоростей малосжимаемой жидкости в нижней и верхней частях трубы \vec{v}_l, \vec{v}_h имеют только одну отличную от нуля составляющую – в направлении оси z_d $\vec{v} = (0, 0, v)$.

Математическая постановка задачи для нижнего участка трубы содержит уравнение теплопроводности в окружающем трубу массиве

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial \theta_{l1}}{\partial t} = \lambda_{1z} \frac{\partial^2 \theta_{l1}}{\partial z_d^2} + \lambda_{1r} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_{l1}}{\partial r_d} \right), \quad r_d > r_l, \quad t > 0 \quad (4.1.1)$$

и уравнение конвективной теплопроводности в скважине

$$c \rho \frac{\partial \theta_l}{\partial t} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial z_d^2} + \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_l}{\partial r_d} \right) - c \rho v_{0l} R_l(r) \frac{\partial \theta_l}{\partial z_d} + q_d, \quad r_d < r_l, \quad (4.1.2)$$

$$t > 0,$$

где $q_d = -\eta c \rho^2 \bar{g} \bar{v}_0 R_l(r)$ – функция источников, описывающая поглощение тепла в восходящем потоке за счет адиабатического эффекта.

На границе трубы и окружающего массива заданы условия IV рода

$$\theta_l \Big|_{r_d=r_l} = \theta_{l1} \Big|_{r_d=r_l}, \quad (4.1.3)$$

$$\lambda_r \frac{\partial \theta_l}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_l} = \lambda_{1r} \frac{\partial \theta_{l1}}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_l}. \quad (4.1.4)$$

Начальная температура соответствуют геотермической

$$\theta_l \Big|_{t=0} = \theta_{l1} \Big|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d \quad (4.1.5)$$

и совпадает с температурой в удаленных от скважины областях окружающей среды

$$\theta_{l1} \Big|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \quad (4.1.6)$$

В точке $z_d = 0$ задан температурный сигнал пласта, определяемый в главе V

$$\theta \Big|_{z_d=0} = \theta_{10}(t). \quad (4.1.7)$$

Аналогично запишется постановка задачи для верхнего участка трубы

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial \theta_{h1}}{\partial t} = \lambda_{1z} \frac{\partial^2 \theta_{h1}}{\partial z_d^2} + \lambda_{1r} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_{h1}}{\partial r_d} \right), \quad r_d > r_h, \quad t > 0, \quad (4.1.8)$$

$$c\rho \frac{\partial \theta_h}{\partial t} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial z_d^2} + \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_h}{\partial r_d} \right) - c\rho v_{0h} R_h(r) \frac{\partial \theta_h}{\partial z_d} + q_d, \quad r_d < r_l, \quad (4.1.9)$$

$$t > 0,$$

$$\theta_h \Big|_{r_d=r_{hl}} = \theta_{h1} \Big|_{r_d=r_{hl}}, \quad (4.1.10)$$

$$\lambda_r \frac{\partial \theta_h}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_{hl}} = \lambda_{1r} \frac{\partial \theta_{h1}}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_{hl}}, \quad (4.1.11)$$

$$\theta_h \Big|_{t=0} = \theta_{h1} \Big|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad (4.1.12)$$

$$\theta_{h1} \Big|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \quad (4.1.13)$$

На границе $z_d = H_d$ выполняется условие равенства температур для нижнего и верхнего участков

$$\theta_h \Big|_{z_d=H_d} = \theta_l \Big|_{z_d=H_d}. \quad (4.1.14)$$

Таким образом, задача определения температурного поля в трубе с переменным проходным сечением разделяется на две задачи, связанные между собой условием (4.1.14), в каждой из которых проходное сечение остается постоянным.

С использованием соотношений

$$r = r_d / r_l, \quad z = z_d / D, \quad H = H_d / D, \quad Fo = t / (a_{1r} r_l^2), \quad H = \eta \rho g r_0 / v \theta_{11},$$

$$T_{l1} = (\theta_{l1} - T_{01} + \Gamma z_d) / \theta_0, \quad T_{h1} = (\theta_{h1} - T_{01} + \Gamma z_d) / \theta_0, \quad \theta_0 = \Gamma D, \quad (4.1.15)$$

$$\chi = c\rho / c_1 \rho_1, \quad v = r_l / D, \quad T_l = (\theta_l - T_{01} + \Gamma z_d) / \theta_0,$$

$$T_h = (\theta_h - T_{01} + \Gamma z_d) / \theta_0$$

задачи (4.1.1)–(4.1.7) и (4.1.8)–(4.1.14) приведены к безразмерной форме. Для нижнего участка трубы задача принимает следующий вид:

$$\frac{\partial T_{l1}}{\partial \text{Fo}} = \Lambda_{r1}^{z1} v^2 \frac{\partial^2 T_{l1}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{l1}}{\partial r} \right), \quad (4.1.16)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial \text{Fo}} = v^2 \chi \Lambda_{r1}^z \frac{\partial^2 T_l}{\partial z^2} + \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) - \text{Pe}_l v R_l(r) \left(\frac{\partial T_l}{\partial z} - 1 + \text{H} \right), \quad (4.1.17)$$

$$T_l|_{r=1} = T_{l1}|_{r=1}, \quad (4.1.18)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_{l1}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (4.1.19)$$

$$T_l|_{\text{Fo}=0} = T_{l1}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (4.1.20)$$

$$T_{l1} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.1.21)$$

$$T_l|_{z=0} = \frac{\theta_{10}(t) - \theta_{01} + \Gamma z_d}{\theta_0} = T_0(\text{Fo}), \quad (4.1.22)$$

где $\text{Pe}_l = v_l r_l / a_{1r}$ – аналог параметра Пекле, $\text{H} = \eta \rho g r_l / v \theta_0$.

Постановка для верхнего участка запишется в виде

$$\frac{\partial T_{h1}}{\partial \text{Fo}} = \Lambda_{r1}^{z1} v^2 \frac{\partial^2 T_{h1}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{h1}}{\partial r} \right), \quad (4.1.23)$$

$$\frac{\partial T_h}{\partial \text{Fo}} = v^2 \chi \Lambda_{r1}^z \frac{\partial^2 T_h}{\partial z^2} + \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_h}{\partial r} \right) - \text{Pe}_h v R_h(r) \left(\frac{\partial T_h}{\partial z} - 1 + \text{H} \right), \quad (4.1.24)$$

$$T_h|_{r=r_{hl}} = T_{h1}|_{r=r_{hl}}, \quad (4.1.25)$$

$$\frac{\partial T_h}{\partial r} \Big|_{r=r_{hl}} = \Lambda \frac{\partial T_{h1}}{\partial r} \Big|_{r=r_{hl}}, \quad (4.1.26)$$

$$T_h|_{\text{Fo}=0} = T_{h1}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (4.1.27)$$

$$T_{h1} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.1.28)$$

$$T_h|_{z=h} = T_l|_{z=h}, \quad (4.1.29)$$

где $\text{Pe}_h = v_h r_l / a_{1r}$.

4.2. Разложение температурной задачи по формальному асимптотическому параметру

Для получения приближенных аналитических решений использован описанный в п. 1.9 асимптотический метод. Аналогично предыдущим задачам, формально введен параметр асимптотического разложения ε .

Окончательная параметризованная постановка задачи (4.1.16)–(4.1.22) примет вид

$$\frac{\partial T_{l1}}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{l1}}{\partial r} \right), \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) + \text{Pe}_l \nu R_l(r) \left(\frac{\partial T_l}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = 0, \quad (4.2.2)$$

$$T_l|_{r=1} = T_{l1}|_{r=1}, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_{l1}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (4.2.4)$$

$$T_l|_{\text{Fo}=0} = T_{l1}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (4.2.5)$$

$$T_{l1}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.2.6)$$

$$T_l|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (4.2.7)$$

В постановке (4.2.1)–(4.2.7), как и в общей задаче, пренебрегли слагаемым содержащим множитель порядка ν^2 в силу его малости.

Поиск выражений для коэффициентов асимптотического разложения можно повторять до определения необходимого количества слагаемых. Здесь для простоты ограничимся нулевым приближением. При этом точное решение можно представить в виде (2.2.23).

Подставляя (2.2.23) в (4.2.1)–(4.2.7), получим

$$\frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon^1 \left[\frac{\partial T_{l1}^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{l1}^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (4.2.8)$$

$$r > 1, \text{Fo} > 0, 0 < z < H,$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \text{Pe}_l \nu R_l(r) \frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial z} - \right. \\
& \left. -\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l^{(1)}}{\partial r} \right) - \text{Pe}_l \nu (1-H) R_l(r) \right] + \dots = 0, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, 0 < z < H,
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$T_l^{(0)}|_{r=1} - T_{l1}^{(0)}|_{r=1} + \varepsilon (T_l^{(i)}|_{r=1} - T_{l1}^{(i)}|_{r=1}) + \dots = 0, \tag{4.2.10}$$

$$\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T_l^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \dots = 0, \tag{4.2.11}$$

$$T_l^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon T_l^{(1)}|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \quad T_{l1}^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon T_{l1}^{(1)}|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \tag{4.2.12}$$

$$T_{l1}^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon T_{l1}^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} + \dots = 0, \tag{4.2.13}$$

$$T_l^{(0)}|_{z=0} + \varepsilon T_l^{(1)}|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \tag{4.2.14}$$

Аналогично для верхнего участка трубы имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{h1}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{h1}^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_{h1}^{(i)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{h1}^{(i)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0,
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

$$r > 1, \text{Fo} > 0, z \geq H.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_h^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_h^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \text{Pe}_h \nu R_h(r) \frac{\partial T_h^{(0)}}{\partial z} - \right. \\
& \left. -\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_h^{(1)}}{\partial r} \right) - \text{Pe}_h \nu (1-H) R_h(r) \right] = 0, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z \geq H.
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

$$T_h^{(0)}|_{r=r_{hi}} - T_{h1}^{(0)}|_{r=r_{hi}} + \varepsilon (T_h^{(i)}|_{r=r_{hi}} - T_{h1}^{(i)}|_{r=r_{hi}}) + \dots = 0, \tag{4.2.17}$$

$$\frac{\partial T_h^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=r_{hi}} + \varepsilon \left(\frac{\partial T_h^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_{hi}} - \Lambda \frac{\partial T_{h1}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=r_{hi}} \right) + \dots = 0, \tag{4.2.18}$$

$$T_h^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon T_h^{(1)}|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \quad T_{h1}^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon T_{h1}^{(1)}|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \tag{4.2.19}$$

$$T_{h1}^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon T_{h1}^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} + \dots = 0, \tag{4.2.20}$$

$$T_h^{(0)}|_{z=H} + \varepsilon T_h^{(1)}|_{z=H} + \dots = T_l^{(0)}|_{z=H} + \varepsilon T_l^{(1)}|_{z=H} + \dots \tag{4.2.21}$$

Формально полагая $\varepsilon = 0$ в (4.2.9), запишем

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.2.22)$$

Проинтегрировав от 0 до 1 по r , получим

$$\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial r} = \frac{C}{r}. \quad (4.2.23)$$

Удовлетворяя требованию ограниченности решения при $r = 0$ из (4.2.23) положим $C = 0$, то есть

$$\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial r} = 0. \quad (4.2.24)$$

Из (4.2.24), как и в предыдущих случаях, заключаем, что, нулевое приближение представляет некоторым образом осредненное по сечению скважины значение температуры и является функцией только координаты z и времени Fo

$$T_l^{(0)} = T_l^{(0)}(Fo, z). \quad (4.2.25)$$

Полагая $\varepsilon = 0$ в (4.2.8), получим уравнение для нулевого коэффициента разложения $T_{l1}^{(0)}$

$$\frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.2.26)$$

С учетом (4.2.22) из (4.2.9) получим следующее уравнение для определения нулевого коэффициента разложения температуры в трубе:

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial Fo} + \text{Pe}_l \nu R_l(r) \left(\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right). \quad (4.2.27)$$

Так как уравнение (4.2.27) является «зацепленным», то далее проведем действия, позволяющие «расцепить» уравнение (4.2.27), исключив из него $T_l^{(1)}$.

Уравнение (4.2.27) запишем в виде

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l^{(1)}}{\partial r} \right) = A_{11}(z, Fo) + A_{12}(z, Fo) R_l(r), \quad (4.2.28)$$

где

$$A_{11}(z, Fo) = \frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial Fo}, \quad A_{12}(z, Fo) = \text{Pe}_l \nu \left(\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right). \quad (4.2.29)$$

Так как $T_l^{(0)}$ не зависит от r , то $A_{l1}(z, t)$ и $A_{l2}(z, Fo)$ также не зависят от r , поэтому из (4.2.28) получим

$$T_l^{(1)} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} A_{l1}(z, Fo) + A_{l2}(z, Fo) R_{l2}(r) \right) + B_{l1}(z, Fo), \quad (4.2.30)$$

где $B_{l1}(z, Fo)$ также не зависит от r . В выражении (4.2.30) введены обозначения

$$R_{l1}(r) = \int_0^r r' R_l(r') dr', \quad R_{l2}(r) = \int_0^r R_{l1}(r') \frac{dr'}{r'}. \quad (4.2.31)$$

Используя (4.2.28), получим из (4.2.18) условие, с помощью которого от коэффициента разложения первого порядка перейдем к коэффициенту нулевого порядка

$$\frac{\partial T_l^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} A_{l1}(z, Fo) + A_{l2}(z, Fo) R_{l1}(1) \right) = \Lambda \frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (4.2.32)$$

Отсюда с учетом (4.2.29) получим

$$A_{l1}(z, Fo) = 2\chi \frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - 2\text{Pev} \left(\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial z} - 1 + H \right) R_{l1}(1). \quad (4.2.33)$$

Подставив (4.2.33) в (4.2.27), получим уравнение, содержащее только нулевые коэффициенты разложения

$$\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial Fo} = 2\chi \frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - 2\text{Pev} \left(\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial z} - 1 + H \right) R_{l1}(1), \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad 0 < z < H. \quad (4.2.34)$$

Таким образом, окончательная математическая постановка задачи в нулевом приближении для нижнего участка трубы имеет вид

$$\frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad 0 < z < H, \quad (4.2.35)$$

$$\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial Fo} + 2\text{Pev} \left(\frac{\partial T_l^{(0)}}{\partial z} - 1 + H \right) R_{l1}(1) = 2\chi \frac{\partial T_{l1}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad (4.2.36)$$

$$0 < z < H,$$

$$T_l^{(0)} = T_{l1}^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (4.2.37)$$

$$T_l^{(0)}|_{Fo=0} = T_{l1}^{(0)}|_{Fo=0} = 0, \quad (4.2.38)$$

$$T_{l1}^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.2.39)$$

$$T_l^{(0)}|_{z=0} = T_0(Fo). \quad (4.2.40)$$

4.3. Решение задачи теплообмена в нижнем участке трубы в нулевом асимптотическом приближении

Задача (4.2.35)–(4.2.40) в пространстве изображений Лапласа – Карсона запишется как

$$pT_{l1}^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{l1}^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad 0 < z < H, \quad (4.3.1)$$

$$pT_l^{(0)u} + 2\text{Pe}_l \nu \left(\frac{\partial T_l^{(0)u}}{\partial z} - 1 + H \right) R_{l1}(1) = 2\chi \frac{\partial T_{l1}^{(0)u}}{\partial r} |_{r=1}, \quad r < 1, \quad 0 < z < H, \quad (4.3.2)$$

$$T_l^{(0)u} = T_{l1}^{(0)u} |_{r=1}, \quad (4.3.3)$$

$$T_{l1}^{(0)u} |_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.3.4)$$

$$T_l^{(0)u} |_{z=0} = T_0(p). \quad (4.3.5)$$

Решение уравнения (4.3.1) выражается через функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента. Аналогично предыдущим случаям с учетом (4.3.3) и (4.3.4) получим

$$\frac{\partial T_{l1}^{(0)u}}{\partial r} |_{r=1} = -\sqrt{p} \frac{K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T_l^{(0)u} = -\sqrt{p} k_l T_l^{(0)u}, \quad (4.3.6)$$

где $k_l = k_l(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$. С учетом последних равенств уравнение (4.3.2) для определения $T_l^{(0)u}$ можно представить как

$$\frac{dT_l^{(0)u}}{dz} + \left(\frac{p}{2R_1(1)\text{Pe}_l \nu} + \frac{\chi}{R_1(1)\text{Pe}_l \nu} \sqrt{p} k_l \right) T_l^{(0)u} = (1-H), \quad r < 1, \quad (4.3.7)$$

$$0 < z < H.$$

Решение уравнения (4.3.7) представится в форме

$$T_l^{(0)u} = T_0^u(p)e^{-\alpha_l z} + (1-H) \int_0^z e^{-\alpha_l(z-\xi)} d\xi, \quad r < 1, \quad 0 < z < H, \quad (4.3.8)$$

где

$$\alpha_l = \frac{p + 2\chi\sqrt{pk_l}}{2R_{l1}(1)Pe_l\nu}. \quad (4.3.9)$$

Для расчета зависимости средней по сечению скважины температуры необходимо перейти в пространство оригиналов. Формула для определения средней по сечению температуры в скважине для малых времен (больших значений параметра p) строится с учетом соотношения $k_l \approx 1$ и для температурных полей в скважине имеет вид

$$T_l^{(0)} = \Phi\left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_{l1}(1)Pe_l\nu}\right) \left\{ T_0 \text{erfc} \left(\frac{\chi z}{Pe_l\nu \sqrt{\text{Fo} - \frac{z}{R_{l1}(1)Pe_l\nu}}} \right) + \right. \\ \left. + \int_0^z (1-H) \text{erfc} \left(\frac{\chi(z-\xi)}{Pe_l\nu \sqrt{\text{Fo} - \frac{z-\xi}{R_{l1}(1)Pe_l\nu}}} \right) d\xi, \quad r < 1, \quad 0 < z < H. \right. \quad (4.3.10)$$

4.4. Определение асимптотически осредненной температуры в верхнем участке трубы

Аналогично предыдущему случаю для верхнего участка трубы имеем

$$T_h^{(0)} = T_h^{(0)}(\text{Fo}, z). \quad (4.4.1)$$

Полагая $\varepsilon = 0$, и воспользовавшись известной процедурой расцепления в (4.2.15)–(4.2.21), получим окончательную математическую постановку для нулевого коэффициента разложения температуры флюида в верхней трубе

$$\frac{\partial T_{hl}^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{hl}^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > r_{hl}, \quad \text{Fo} > 0, \quad z \geq H, \quad (4.4.2)$$

$$\frac{\partial T_h^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + \frac{2}{r_{hl}^2} \text{Pe}_h \nu \left(\frac{\partial T_h^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) R_{hl}(r_{hl}) = \frac{2}{r_{hl}} \chi \frac{\partial T_{hl}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=r_{hl}}, \quad r < r_{hl}, \quad (4.4.3)$$

$$\text{Fo} > 0, \quad z \geq H,$$

$$T_h^{(0)} = T_{hl}^{(0)} \Big|_{r=r_{hl}}, \quad (4.4.4)$$

$$T_h^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = T_{hl}^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (4.4.5)$$

$$T_{hl}^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.4.6)$$

$$T_h^{(0)} \Big|_{z=H} = T_l^{(0)} \Big|_{z=H}. \quad (4.4.7)$$

Используя преобразование Лапласа – Карсона, запишем задачу (4.4.2)–(4.4.7) в пространстве изображений

$$p T_{hl}^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{hl}^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > r_{hl}, \quad z \geq H, \quad (4.4.8)$$

$$p T_h^{(0)u} + \frac{2}{r_{hl}^2} R_{hl}(r_{hl}) \text{Pe}_h \nu \left(\frac{\partial T_h^{(0)u}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = \frac{2}{r_{hl}} \chi \frac{\partial T_{hl}^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=r_{hl}}, \quad r < r_{hl}, \quad (4.4.9)$$

$$z \geq H,$$

$$T_h^{(0)u} = T_{hl}^{(0)u} \Big|_{r=r_{hl}}, \quad (4.4.10)$$

$$T_{hl}^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.4.11)$$

$$T_h^{(0)u} \Big|_{z=H} = T_l^{(0)u} \Big|_{z=H}. \quad (4.4.12)$$

Аналогично предыдущим задачам решение уравнения (4.4.8) с учетом (4.4.10) и (4.4.11) выражается через функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента

$$\frac{\partial T_{hl}^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=r_{hl}} = -\sqrt{p} \frac{K_1(r_{lh}\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T_h^{(0)u} = -\sqrt{p} k_h T_h^{(0)u}. \quad (4.4.13)$$

где $k_h = k_h(p) = K_1(r_{lh}\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$. С учетом последних равенств уравнение (4.4.9) для определения $T_h^{(0)u}$ можно представить как

$$\frac{dT_h^{(0)u}}{dz} + \left(\frac{r_{lh}^2 p + 2r_{lh}\chi k_h \sqrt{p}}{2R_{hl}(r_{lh})\text{Pe}_h \nu} \right) T_h^{(0)u} = (1 - \text{H}), \quad r < r_{hl}, \quad z \geq H. \quad (4.4.14)$$

Решение уравнения (4.4.14) представится в форме

$$T_h^{(0)u} = C_h(p)e^{-\alpha z} + \int_H^z (1 - \text{H})e^{-\alpha_h(z-\xi)} d\xi, \quad r < r_{hl}, \quad z \geq H, \quad (4.4.15)$$

где

$$\alpha_h = \frac{r_{hl}^2 p + 2r_{hl}\chi k_h \sqrt{p}}{2R_1(r_{hl})\text{Pe}_h \nu}. \quad (4.4.16)$$

Переменная $C_h(p)$ может быть найдена из условия (4.4.12)

$$C_h(p) = T_0 e^{-\alpha z} + \int_0^h (1 - \text{H})e^{-\alpha_l(z-\xi) + \alpha_h H} d\xi, \quad r < r_{hl}, \quad z \geq H. \quad (4.4.17)$$

Окончательно решение задачи в нулевом приближении для верхней трубы в пространстве изображений запишется в виде

$$T_h^{(0)u} = T_0 e^{-(\alpha_l - \alpha_h)H - \alpha_h z} + \int_0^H (1 - \text{H})e^{-\alpha_l(H-\xi) - \alpha_h(z-H)} d\xi + \int_H^z (1 - \text{H})e^{-\alpha_h(z-\xi)} d\xi, \quad r < r_{hl}, \quad z \geq H. \quad (4.4.18)$$

Выражение (4.4.18) представляет решение исследуемой задачи в нулевом приближении в пространстве изображений.

Далее приведены формулы для описания «средней по сечению» температуры в скважине для малых времен

$$T_h^{(0)} = \Phi(\text{Fo} - S_l(H) - S_h(z-H))T_0 \text{erfc} \left[\frac{\chi(S_l(H) + S_h(z-h)/r_{hl})}{\sqrt{\text{Fo} - S_l(H) - S_h(z-H)}} \right] + (1 - \text{H}) \int_0^H \left\{ \Phi(\text{Fo} - S_l(H - \xi) - S_h(z-H)) \times \text{erfc} \left[\frac{\chi(S_l(H - \xi) - S_h(z-H)/r_{hl})}{\sqrt{\text{Fo} - S_l(H - \xi) - S_h(z-H)}} \right] \right\} d\xi + \quad (4.4.19)$$

$$+ (1 - H) \int_H^z \left\{ \Phi(\text{Fo} - S_h(z - \xi)) \operatorname{erfc} \left[\frac{\chi S_h(z - \xi)/r_{hl}}{\sqrt{\text{Fo} - S_h(z - \xi)}} \right] \right\} d\xi, \quad r < r_{hl}, \quad z \geq H,$$

где $S_l(z) = z/2R_l(1)\text{Pe}_l\nu$, $S_h(z) = r_{hl}^2 z/2R_{hl}(r_{hl})\text{Pe}_h\nu$.

При этом решение во всей трубе строится по формуле:

$$T^{(0)} = \begin{cases} T_l^{(0)}, & 0 < z < H, \\ T_h^{(0)}, & z \geq H. \end{cases} \quad (4.4.20)$$

Выражения (4.3.10), (4.4.19) представляют приближенные решения задачи для нулевого приближения задачи о температурном поле потока с изменяющимся диаметром.

Анализ графических зависимостей, построенных по полученным формулам, приведен в следующем разделе.

4.5. Расчет температурного поля в интервале изменения проходного сечения скважины

Оценка температурных аномалий, возникающих при изменении диаметра потока, произведена на основании формулы (4.4.20). Заметим, что при $r_l = r_h$, $\nu_l = \nu_h$, $R_l(r) = R_h(r)$ и одинаковых температурных сигналах решения (4.4.20) и (4.3.10) совпадают. Если $H \rightarrow 0$, то решение задачи с переменным проходным сечением стремится к решению с постоянным $r = r_h$, если $H \rightarrow D$, то – к решению с постоянным радиусом $r = r_l$.

На рисунке 4.2. *a* изображены зависимости средней температуры нефти в скважине от вертикальной координаты z_d для разных значений отношения радиуса верхнего участка трубы к радиусу нижнего $r_{hl} = r_h/r_l$: 1 – 0.7, 2 – 0.9, 3 – 1, 4 – 1.5, 5 – 2, 6 – 5. Другие расчетные параметры: дебит нефти $Q = 50 \text{ м}^3/\text{сут.}$ ($\text{Re} = 3223$), координата изменения радиуса $z_d = H = 40 \text{ м}$, время после начала отбора $t = 2 \text{ часа}$, теплофизические параметры наполняющего флюида $\lambda_n = 0.15 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $\eta_n = 1.37 \cdot 10^{-7} \text{ К}/\text{атм}$, $c_n = 2000 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг})$, $\rho_n = 900 \text{ кг}/\text{м}^3$ и окружающей среды (глина): $\lambda_r = 0.67 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $c_r = 950 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг})$, $\rho_r = 2000 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг})$, геотермический градиент $\Gamma = 0.04 \text{ К}/\text{м}$. Прерывистые линии соответствуют сигналу пласта в 0 К, непрерывные – 1 К. Точка измене-

ния радиуса потока находится в ПДЗТСП. Увеличение радиуса проходного сечения приближает температуру потока к геотермической, зона установления температуры становится меньше, это объясняется уменьшением скорости движения нефти при возрастании площади проходного сечения. На рисунке 4.2, б показана зависимость разности средней и геотермической температуры нефти в скважине от вертикальной координаты. Из рисунка видно, что кроме ПДКВ, верхняя граница которого рассчитывается из соотношения

$$Z = \begin{cases} v_l t, & t < H / v_l, \\ H(1 - v_{hl}) + v_h t, & t > H / v_l, \end{cases}$$

существует ПДЗТСП, размеры которого меньше ПДКВ. Точка I соответствует верхней границе ПДЗТСП, при этом учитывается вклад изменения диаметра сечения потока. Из рисунка 4.2, б видно, что положение этой границы смещается вверх с уменьшением диаметра нижней части трубы. Точка II является границей раздела двух зон: зоны стабилизации теплообмена $0 < z < Z$ и зоны постоянных градиентов $Z < z < D$ с учетом изменения площади проходного сечения.

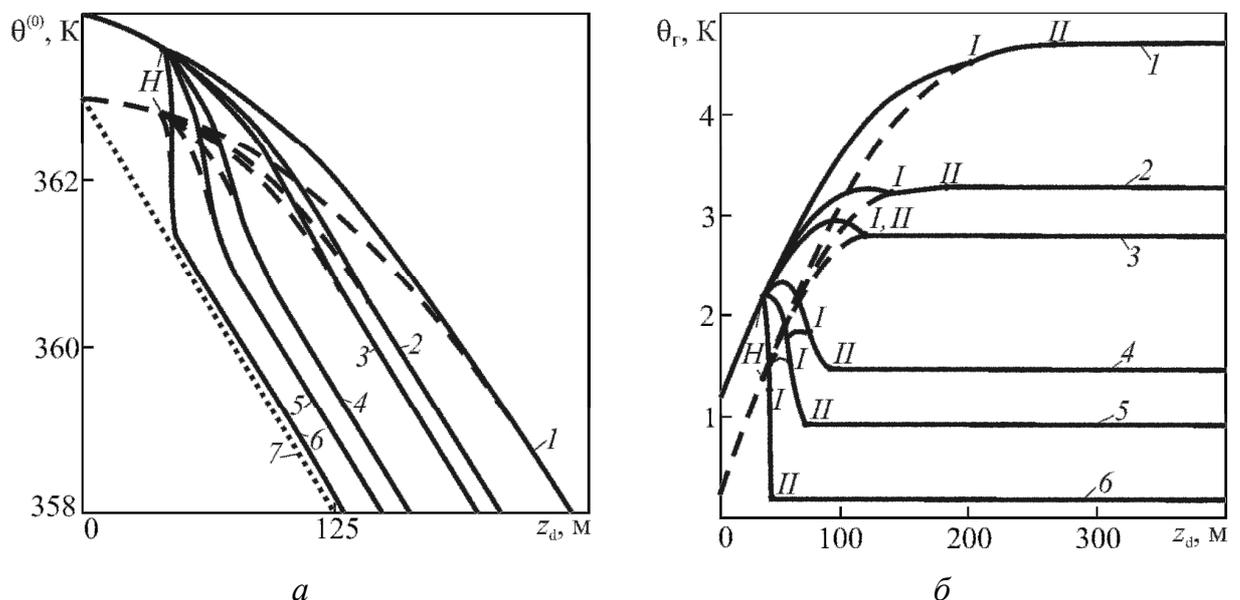


Рис. 4.2. Зависимость средней (а) и разности средней и геотермической (б) температуры нефти в скважине при дебите $50 \text{ м}^3/\text{сут.}$ от вертикальной координаты z_d для различных значений отношения радиуса проходного сечения верхнего участка трубы к радиусу нижнего $r_{lh} = r_h / r_l$: 1 – $r_{lh} = r_h / r_l = 0.7$, 2 – 0.9, 3 – 1, 4 – 1.5, 5 – 2, 6 – 5, 7 – геотерма. Координата изменения радиуса $z_d = H = 40 \text{ м}$

Диапазон глубин от точки изменения проходного сечения до точки *II* соответствует зоне экранирования температурного сигнала за счет изменения площади проходного сечения. Наличие этой зоны следует учитывать при выявлении интервалов заколонного движения жидкости. Отметим, что существование зоны от точки *I* до точки *II* объясняется только влиянием изменения площади проходного сечения. На кривой 3, где отношение радиусов проходных сечений равно единице, точки *I* и *II* совпадают. Выпуклость температурных кривых в зоне *I – II* при уменьшении диаметра потока и вогнутость при его увеличении объясняется изменением условий теплообмена при изменении скорости флюида.

На рисунке 4.3 представлены аналогичные кривые при тех же расчетных параметрах для случая положения точки изменения радиуса трубы вне зоны влияния температурного сигнала пласта. Здесь, в отличие от рисунка 4.2, положение точки *I* предшествует точке *H*. Прерывистые линии соответствуют сигналу пласта в 0 К, непрерывные – 1 К.

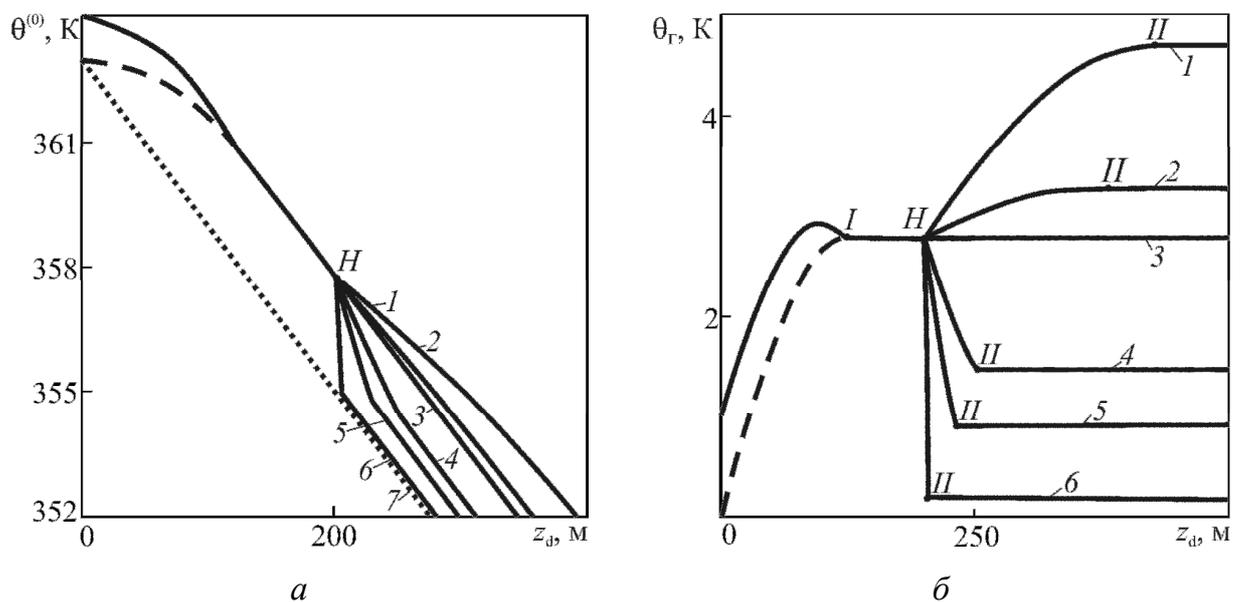


Рис. 4.3. Зависимость средней (*a*) и разности средней и геотермической (*б*) температуры нефти в скважине при дебите $50 \text{ м}^3/\text{сут.}$ от вертикальной координаты z_d для различных значений отношения радиуса проходного сечения верхнего участка трубы к радиусу нижнего $r_{lh} = r_h / r_l$: 1 – 0.7, 2 – 0.9, 3 – 1, 4 – 1.5, 5 – 2, 6 – 5, 7 – геотерма. Координата изменения радиуса $z_d = H = 200 \text{ м}$

Рисунок 4.4 иллюстрирует зависимость средней (*a*) и разности средней и геотермической (*б*) температуры нефти в скважине от вертикальной коор-

динаты z_d при том же дебите, значениях отношения r_{hl} и других расчетных параметрах, что и на рисунках 4.2, 4.3. Прерывистые линии соответствуют сигналу пласта в 0 К, непрерывные – 1 К. На расстоянии 10 м от забоя скважины зона экранирования температурного сигнала пласта (расстояние между точками I и II) практически отсутствует. При удалении точки изменения площади проходного сечения от забоя зона экранирования температурного сигнала увеличивается, что объясняется уменьшением влияния температурного сигнала пласта на верхнюю часть трубы.

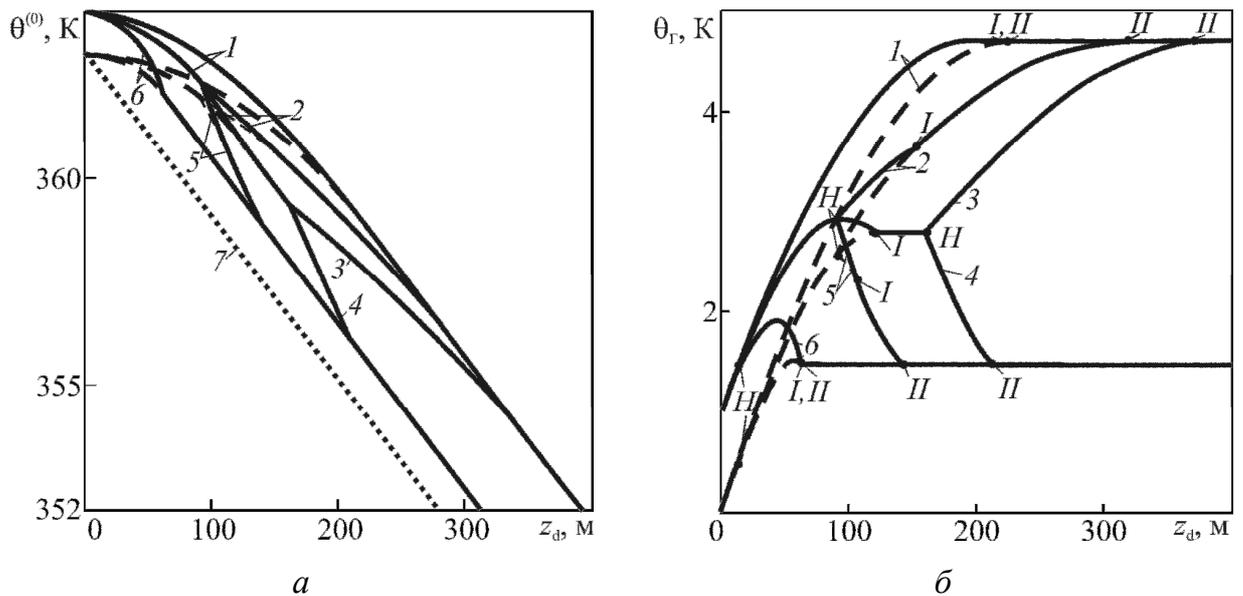


Рис. 4.4. Зависимость средней (а) и разности средней и геотермической (б) температуры нефти в скважине при дебите $50 \text{ м}^3/\text{сут.}$ от вертикальной координаты z_d для различных значений отношения радиуса проходного сечения верхнего участка трубы к радиусу нижнего $r_{lh} = r_{hl} / r_l$: 1, 2, 3 – 0.7, 4, 5, 6 – 1.5, 7 – геотерма. При различных значениях координаты изменения радиуса $z_d = H$: 1, 6 – 10 м, 2, 5 – 90 м, 3, 4 – 160 м

Рисунок 4.5 представляет зависимость средней (а) и разности средней и геотермической (б) температуры нефти в скважине от вертикальной координаты. Шифр кривых: 1, 2 – $Q = 40 \text{ м}^3/\text{сут.}$, 3, 4 – $20 \text{ м}^3/\text{сут.}$, 5, 6 – $10 \text{ м}^3/\text{сут.}$ Прерывистые линии соответствуют сигналу пласта в 0 К, непрерывные – 1 К.

Расчетные параметры те же, что и на рис. 4.2. Обращает внимание различное поведение сплошных температурных кривых 2, 4, 6 рис. 4.5, б: монотонное вогнутое при малых дебитах оно сменяется на выпукло-вогнутое – при больших, что обусловлено уменьшением времени достижения температурным сигналом соответствующих точек при увеличении дебита.

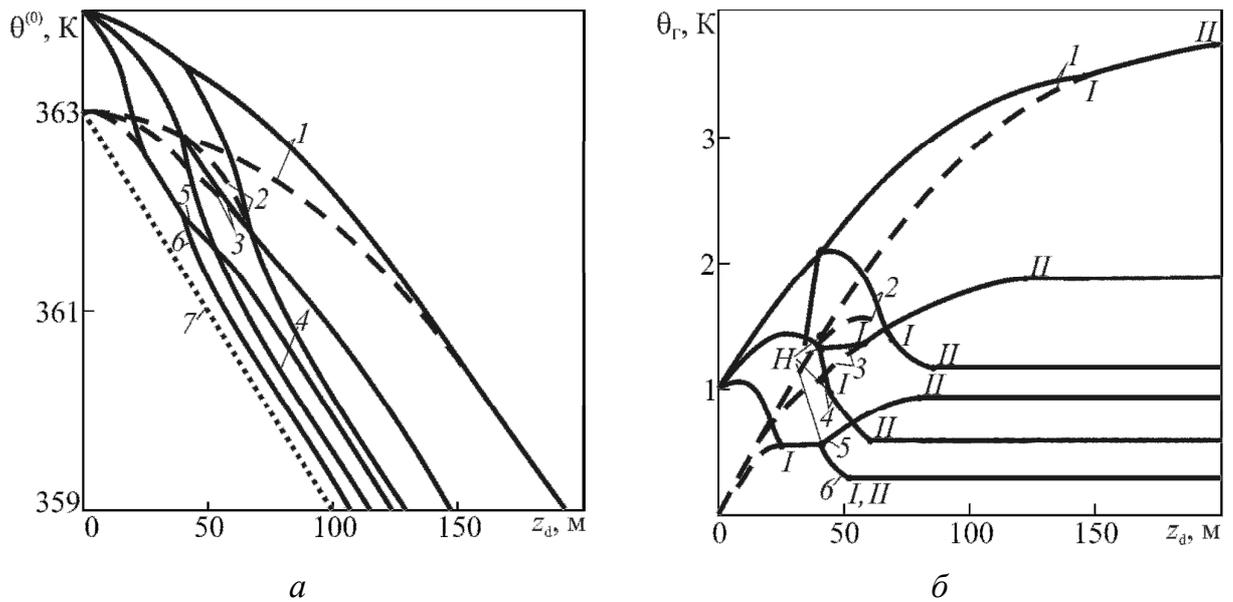


Рис. 4.5. Зависимость средней (а) и разности средней и геотермической (б) температуры нефти в скважине (координата изменения радиуса $z_d = H - 10$ м) от вертикальной координаты z_d для различных значений отношения радиуса проходного сечения верхнего участка трубы к радиусу нижнего $r_{lh} = r_h / r_l$: 1, 2, 3 – 0.7, 4, 5, 6 – 1.5, 7 – геотерма. При разных дебитах: 1, 2 – $Q = 40$ м³/сут., 3, 4 – 20 м³/сут., 5, 6 – 10 м³/сут.

Учет особенностей поведения кривых, отмеченных на рисунках 4.2–4.5, имеет важнейшее значение при определении интервалов заколонной циркуляции [211, 216].

4.6. Выводы по главе IV

На основе развитого метода найдено решение задачи о температурном поле в интервалах скважины с изменяющимся проходным сечением с учетом различных режимов течения жидкости. Выявлены закономерности формирования температурного поля в окрестности зоны изменения площади проходного сечения.

Расчетные формулы найдены с учетом изменения радиуса сечения трубы, теплообмена с окружающими скважину породами, произвольного вертикального градиента температуры, что выгодно отличает полученное решение от решений предыдущих исследователей.

Показано, в случае увеличения диаметра потока, температура нефти приближается к геотермической, зона установления температуры уменьшается, это объясняется уменьшением скорости движения нефти при возраста-

нии диаметра скважины. Анализ кривых показывает, что наряду с пространственным диапазоном затухания температурного сигнала пласта существует так называемая зона температурного экранирования, обусловленная лишь наличием изменения диаметра трубы.

Определена зависимость размеров зоны температурного экранирования от соотношения сечений участков трубы, глубины расположения границы изменения проходного сечения, теплофизических свойств жидкости и окружающих пород.

Глава V. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПЛАСТЕ

В пятой главе рассмотрено решение задачи о температурном поле в слоисто-неоднородной ортотропной пористой среде с учетом теплообмена с окружающими породами при отборе флюида из пласта (1.6.1)–(1.6.7), позволяющее оценить температурный сигнал пласта при заданных теплофизических и гидродинамических характеристиках флюида и коллектора. Для ее решения использован асимптотический метод «покоэффициентного пространственного осреднения». Получены аналитические решения для нулевого и первого приближений.

5.1. Параметризация задачи о температурном поле в анизотропном слое с источниками при отборе жидкости

С использованием соотношений

$$r = \frac{r_d}{h}, \quad z = \frac{z_d}{h}, \quad \text{Fo} = \frac{ta_{z1}}{h^2}, \quad \chi = \frac{c_1 \rho_1}{c\rho}, \quad u(z, r, \text{Fo}) = \frac{h}{a_{z1}} u_d(z_d, r_d, t),$$

$$\Lambda = \frac{\lambda_{z1}}{\lambda_z}, \quad Q(z, r, \text{Fo}) = \frac{h^2}{\theta_{11} a_{z1}} Q_d(z_d, r_d, t), \quad \lambda = \frac{\lambda_{z2}}{\lambda_{z1}}, \quad \alpha^{-2} = \frac{a_{z2}}{a_{z1}},$$

$$T_1 = \frac{\theta_1 - \theta_0 + \Gamma h + \Gamma_1(z_d - h)}{\theta_{11}}, \quad T = \frac{\theta - \theta_0 + \Gamma z_d}{\theta_{11}},$$

$$T_2 = \frac{\theta_2 - \theta_0 - \Gamma h + \Gamma_1(z_d + h)}{\theta_{11}}$$
(5.1.1)

задача (1.6.1)–(1.6.7) приводится к безразмерному виду

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad (5.1.2)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, \quad \text{Fo} > 0, \quad (5.1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} + u(z, r, \text{Fo}) \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q(z, r, \text{Fo}), \quad -1 < z < 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (5.1.4)$$

$$T|_{z=1} = T_1|_{z=1}, \quad T|_{z=-1} = T_2|_{z=-1}, \quad (5.1.5)$$

$$\varepsilon\Lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \lambda\Lambda\varepsilon \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (5.1.6)$$

$$T \Big|_{Fo=0} = T_1 \Big|_{Fo=0} = T_2 \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (5.1.7)$$

$$T_1 \Big|_{r+z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2 \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.1.8)$$

Задача (5.1.2)–(5.1.8) содержит скорость конвективного переноса тепла $u = u(z, r, Fo)$ и функцию источников $Q(z, r, Fo)$, зависящие от вертикальной координаты z , что приводит к появлению переменных коэффициентов, сильно затрудняющих решение задачи.

В рассматриваемой задаче (5.1.2)–(5.1.8) формально введен параметр асимптотического разложения ε перед первой и второй производными от T по z , путем замены Λ на $\varepsilon\Lambda$. При $\varepsilon = 1$ задача сводится к исходной. Физический смысл этого формального параметра в том, что устремление его к нулю $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствует возрастанию вертикальной компоненты теплопроводности до бесконечности $\lambda_z \rightarrow \infty$. Ниже показано, что это приводит к тому, что нулевое приближение в пласте не зависит от вертикальной координаты – «мгновенное выравнивание» – и определяет осредненные по толщине пласта значения температуры.

Представив решение задачи в виде асимптотической формулы по параметру ε

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \varepsilon^2 T_j^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T_j^{(n)} + \Theta_j^{(n)}, \quad (5.1.9)$$

получим

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad (5.1.10)$$

$$\frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial Fo} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial Fo} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad (5.1.11)$$

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \cdot \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + u(z, r, Fo) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} - Q(z, r, Fo) \right) + \quad (5.1.12)$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + u(z, r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \\
& T^{(0)} \Big|_{z=1} - T_1^{(0)} \Big|_{z=1} + \varepsilon \left(T^{(1)} \Big|_{z=1} - T_1^{(1)} \Big|_{z=1} \right) + \dots = 0, \\
& T^{(0)} \Big|_{z=-1} - T_2^{(0)} \Big|_{z=-1} + \varepsilon \left(T^{(1)} \Big|_{z=-1} - T_2^{(1)} \Big|_{z=-1} \right) + \dots = 0,
\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=1} + \dots = 0, \\
& \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} - \Lambda \lambda \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) +
\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} - \Lambda \lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \dots = 0,$$

$$T^{(i)} \Big|_{\text{Fo}=0} = T_1^{(i)} \Big|_{\text{Fo}=0} = T_2^{(i)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad i=0, 1, 2, \dots, \tag{5.1.15}$$

$$T^{(i)} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_1^{(i)} \Big|_{r+z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(i)} \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \tag{5.1.16}$$

5.2. Постановка задачи в нулевом асимптотическом приближении

Из (5.1.12) и (5.1.14) следует, что $T^{(0)}$ не зависит от z и является функцией только от r и Fo , то есть $T^{(0)} = T^{(0)}(r, \text{Fo})$. Приравнивая к нулю выражение перед сомножителем первого порядка по ε в (5.1.12), получим

$$\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + u(z, r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - Q(z, r, \text{Fo}) \right), \tag{5.2.1}$$

где $\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}}$ и $\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}$ не зависят от z , что упрощает процедуру интегрирования выражения (5.2.1).

Проинтегрировав (5.2.1), получим выражение для производной температуры в пласте в первом приближении

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(z \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + \int_0^z u(z', r, \text{Fo}) dz' \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \int_0^z Q(z', r, \text{Fo}) dz' \right) + B(r, \text{Fo}), \tag{5.2.2}$$

где $B(r, Fo)$ не зависит от z . Приравняв к нулю выражения перед сомножителем первого порядка по ε в (5.1.14), получим

$$\left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad \left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1} = \Lambda \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1}. \quad (5.2.3)$$

Запишем выражение (5.2.2) для градиента температуры $\partial T^{(1)}/\partial z$ при $z = 1$ и $z = -1$, затем воспользовавшись условиями (5.2.3), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + \int_0^1 u(z', r, Fo) dz' \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \int_0^1 Q(z', r, Fo) dz' \right) + \\ + B(r, Fo) = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \\ \frac{\Lambda}{\chi} \left(-\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + \int_0^{-1} u(z', r, Fo) dz' \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \int_0^{-1} Q(z', r, Fo) dz' \right) + \\ + B(r, Fo) = \Lambda \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1}. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Вычитая второе равенство из первого, имеем

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + \int_{-1}^1 u(z', r, Fo) dz' \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \int_{-1}^1 Q(z', r, Fo) dz' = \\ = \chi \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Если ввести обозначения

$$u(r, Fo) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(z', r, Fo) dz', \quad Q(z', r, Fo) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Q(z', r, Fo) dz', \quad (5.2.5)$$

уравнение (5.2.4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) = Q(r, Fo). \quad (5.2.6)$$

Итак, при наличии вертикальной неоднородности пластов в нулевом приближении в качестве скорости конвективного переноса функции источников следует принять средние значения, определяемые выражениями (5.2.5).

Так, скорость конвективного переноса тепла \vec{u} , в общем случае зависящая от координат и времени, предполагается имеющей только одну отличную от нуля радиальную составляющую, которая не зависит от вертикальной координаты z : $\vec{u} = (0, 0, u_r)$, $u_r = u_d(r_d, t)$.

При стационарном радиальном движении в направлении полярной оси несжимаемой жидкости радиальная координата вектора скорости конвективного переноса тепла с помощью уравнения неразрывности легко выражается через модуль той же скорости u_0 в фиксированной точке r_0 как $u_d = -u_{0d}r_{0d}/r_d$, или в безразмерном виде $u = -J/(2r)$, где $J = 2u_{0d}r_{0d}/a_{z1}$.

5.3. Осреднение исходной задачи для случая не зависящей от z скорости конвективного переноса тепла

Так как аналитическое решение исходной задачи (5.1.2)–(5.1.8) классическими методами затруднено, то в большинстве случаев при решении подобных задач отыскивают значения функции, осредненной по некоторому параметру. После осреднения температуры в задаче (5.1.2)–(5.1.8) по z в пределах от -1 до 1 по формуле $\langle T \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T dz$ получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, r > 0, Fo > 0, \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial Fo} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, r > 0, Fo > 0, \quad (5.3.2)$$

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = Q(r, Fo), \quad |z| < 1, r > 0, Fo > 0, \quad (5.3.3)$$

$$T_1|_{z=1} = T_2|_{z=-1} = \langle T \rangle, \quad (5.3.4)$$

$$\langle T \rangle \Big|_{Fo=0} = T_1 \Big|_{Fo=0} = T_2 \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (5.3.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle T \rangle = 0, \quad \lim_{r+z \rightarrow \infty} T_1 = 0, \quad \lim_{r+|z| \rightarrow \infty} T_2 = 0, \quad (5.3.6)$$

где для осреднения уравнения (5.1.4) использовано соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial z^2} dz = \frac{1}{2} \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \left(\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=1} - \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) = \frac{\chi}{2} \cdot \left(\left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=-1} \right). \quad (5.3.7)$$

Нетрудно заметить, что постановки задач (5.2.8)–(5.2.13) и (5.3.1)–(5.3.6) совпадают. Из единственности решения получим $T^{(0)} = \langle T \rangle$, то есть решения задач для нулевого коэффициента осредненных значений температуры совпадают. Отсюда следует, что процесс отыскания нулевого коэффициента разложения полностью соответствует процедуре построения осредненного решения. Этот факт важен для построения решений аналогичных задач с переменными коэффициентами или нелинейными уравнениями, возникающими, например, при фазовых переходах в рассматриваемом слое. Классическая процедура интегрального осреднения в этом случае не приводит к рациональному конечному выражению, а нахождение среднего значения путем решения задачи в асимптотическом нулевом приближении чаще возможно и приводит к приемлемому результату.

5.4. Предельный случай нулевого приближения

Он возникает из задачи (5.3.1)–(5.3.6) при условии, что вкладом теплоотдачи из слоя в сравнении с конвекцией можно пренебречь $\left[\left| \frac{\chi}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) \right] / \left| u(r, Fo) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right| \ll 1$. Это условие соответствует адиабатической изоляции пласта, поэтому большинство задач ранее рассмотрено именно в этом приближении. В данном случае имеем задачу

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad r > 0, \quad Fo > 0, \quad (5.4.1)$$

$$\frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial Fo} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, \quad r > 0, \quad Fo > 0, \quad (5.4.2)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = Q(r, Fo), \quad |z| < 1, \quad r > 0, \quad Fo > 0, \quad (5.4.3)$$

$$T_1^{(0)}|_{z=1} = T_2^{(0)}|_{z=-1} = T^{(0)}, \quad (5.4.4)$$

$$T^{(0)}|_{Fo=0} = T_1^{(0)}|_{Fo=0} = T_2^{(0)}|_{Fo=0} = 0, \quad (5.4.5)$$

$$T^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_1^{(0)}|_{r+z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(0)}|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.4.6)$$

Задача (5.4.1)–(5.4.6) уже не является взаимосвязанной и допускает решение уравнения (5.4.3) независимо от (5.4.1) и (5.4.2). Решение соответствующих задач для $T_1^{(0)}$ и $T_2^{(0)}$ находится методом интегральных преобразований и представляются в виде свертки с выражением для температуры в пласте $T^{(0)}$ следующим образом:

$$T_1^{(0)} = \frac{z-1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} T^{(0)}(r, Fo-s) \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{4s}\right) \frac{ds}{s\sqrt{s}}, \quad z > 1, r > 0, Fo > 0, \quad (5.4.7)$$

$$T_2^{(0)} = -\frac{\alpha(z+1)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} T^{(0)}(r, Fo-s) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4s}(z+1)^2\right) \frac{ds}{s\sqrt{s}}, \quad z < -1, r > 0, Fo > 0. \quad (5.4.8)$$

Функция $T^{(0)}$ является решением уравнения (5.4.3) и легко строится с использованием интегрального преобразования Лапласа – Карсона. Например, если скорость конвективного переноса и функция источников тепла зависят только от радиальной координаты $u(r, Fo) = u(r)$, $Q(r, Fo) = Q(r)$, то оно имеет следующий вид:

$$T^{(0)} = \int_{\infty}^r Q(r') \Phi\left(Fo - \int_r^r \frac{dr''}{u(r'')}\right) \frac{dr'}{u(r')}. \quad (5.4.9)$$

5.5. Нулевое приближение решения задачи о теплообмене при фильтрации углеводородов в слоистой среде

Предположим, что скорость конвективного переноса тепла не зависит от времени, то есть $u = u(r) = -J/2r < 0$, и трансформируем задачу (5.3.1)–(5.3.6) в пространство изображений Лапласа – Карсона

$$pT_1^{(0)u} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, r > 0, \quad (5.5.1)$$

$$pT_2^{(0)u} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(0)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, r > 0, \quad (5.5.2)$$

$$pT^{(0)u} + u(r) \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)u}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) = Q^u(r, p), \quad (5.5.3)$$

$$T_1^{(0)u} \Big|_{z=1} = T_2^{(0)u} \Big|_{z=-1} = T^{(0)u}, \quad (5.5.4)$$

$$T^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_1^{(0)u} \Big|_{r+z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(0)u} \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.5.5)$$

Решения уравнений (5.5.1) и (5.5.2) с учетом граничного условия (5.5.4) представляются как

$$T_1^{(0)u} = T^{(0)u} \exp(-\sqrt{p}(z-1)), \quad T_2^{(0)u} = T^{(0)u} \cdot \exp(\alpha\sqrt{p} \cdot (z+1)). \quad (5.5.6)$$

С учетом этого выражения (5.2.3) в пространстве изображений после нахождения в них частных производных от решений в первой и второй областях (5.5.6) можно записать в виде

$$A^u(r, p) = \frac{\Lambda}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)u}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) = -\frac{\Lambda}{2} (1 + \alpha\lambda) \sqrt{p} T^{(0)u} = -\Lambda \text{Fi}_+ \sqrt{p} T^{(0)u}, \quad (5.5.7)$$

$$B^u(r, p) = \frac{\Lambda}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial z} \right|_{z=1} + \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)u}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) = -\frac{\Lambda}{2} (1 - \alpha\lambda) \sqrt{p} T^{(0)u} = -\Lambda \text{Fi}_- \sqrt{p} T^{(0)u}, \quad (5.5.8)$$

где $\text{Fi}_+ = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \lambda \sqrt{\frac{a_{z1}}{a_{z2}}} \right)$ и $\text{Fi}_- = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \lambda \sqrt{\frac{a_{z1}}{a_{z2}}} \right)$ – коэффициенты асимметрии.

Уравнение (5.5.3) преобразуем к виду

$$(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+) T^{(0)u} + \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial \tau} = Q^u(\tau, p), \quad (5.5.9)$$

где

$$\tau = \int_a^r \frac{dr''}{u(r'')}. \quad (5.5.10)$$

Величина a является произвольной. Отсюда получаем аналитическое решение уравнения (5.5.9) в изображениях для средней области

$$\begin{aligned} T^{(0)u} &= \int_{\tau}^{\infty} Q^u(\tau', p) \cdot \exp\left[\left(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+\right) \cdot (\tau' - \tau)\right] d\tau' = \\ &= -\int_r^{\infty} Q^u(r', p) \cdot \exp\left[\left(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+\right) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')}\right] \frac{dr'}{u(r')}. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

С помощью (5.5.11) легко найти решение в изображениях для первой и второй областей

$$T_1^{(0)u} = -\int_r^\infty Q^u(r', p) \cdot \exp\left[\left(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+\right) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')} - \sqrt{p}(z-1)\right] \frac{dr'}{u(r')}, \quad (5.5.12)$$

$$T_2^{(0)u} = -\int_r^\infty Q^u(r', p) \cdot \exp\left[\left(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+\right) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')} + \alpha\sqrt{p}(z+1)\right] \frac{dr'}{u(r')}. \quad (5.5.13)$$

В частном случае $u(r) = -J/(2r)$ получим

$$T^{(0)u} = \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty Q^u(r', p) \cdot \exp\left(-\frac{p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+}{J} \cdot (r'^2 - r^2)\right) r' dr', \quad (5.5.14)$$

$$T_1^{(0)u} = \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty Q^u(r', p) \cdot \exp\left(-\frac{p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+}{J} \cdot (r'^2 - r^2) - \sqrt{p}(z-1)\right) r' dr', \quad (5.5.15)$$

$$T_2^{(0)u} = \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty Q^u(r', p) \cdot \exp\left(-\frac{p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+}{J} \cdot (r'^2 - r^2) + \alpha\sqrt{p}(z+1)\right) r' dr'. \quad (5.5.16)$$

Выполнив переход в пространство оригиналов, имеем

$$T^{(0)} = \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} Q(r', \text{Fo} - \tau) \text{erfc}\left(\frac{\chi\text{Fi}_+(r'^2 - r^2)}{2\sqrt{J(J \cdot \tau + r^2 - r'^2)}}\right) \Phi\left(\tau - \frac{r'^2 - r^2}{J}\right) r' d\tau dr', \quad (5.5.17)$$

$$T_1^{(0)} = \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} Q(r', \text{Fo} - \tau) \text{erfc}\left(\frac{\chi\text{Fi}_+(r'^2 - r^2) + J(z-1)}{2\sqrt{J(J \cdot \tau + r^2 - r'^2)}}\right) \Phi\left(\tau - \frac{r'^2 - r^2}{J}\right) r' d\tau dr', \quad (5.5.18)$$

$$T_2^{(0)} = \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} Q(r', \text{Fo} - \tau) \text{erfc}\left(\frac{\chi\text{Fi}_+(r'^2 - r^2) - \alpha J(z+1)}{2\sqrt{J(J \cdot \tau + r^2 - r'^2)}}\right) \Phi\left(\tau - \frac{r'^2 - r^2}{J}\right) r' d\tau dr', \quad (5.5.19)$$

где $\Phi(x)$ – единичная функция Хевисайда.

Выражения (5.5.17)–(5.5.19) могут быть использованы при построении формул для расчетов средней температуры в пласте и температуры в окружающих породах. Например, при постоянных источниках тепла $Q(r, \text{Fo}) = Q\Phi(R-r)$, сосредоточенных в области $r < R$, для больших времен получим простую формулу

$$T^{(0)} = \frac{QR^2}{J} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \Phi(R-r),$$

которую легко проверить с помощью энергетического баланса.

Для постоянно действующего цилиндрического источника с поверхностной плотностью σ , локализованного на расстоянии $R = R_d/h$ от оси,

$Q_d = \frac{\sigma}{c\rho h} \delta(r - R)$ получим

$$T^{(0)} = \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \operatorname{Fi}_+ (R^2 - r^2)}{2\sqrt{J(J \cdot \operatorname{Fo} - (R^2 - r^2))}} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{R^2 - r^2}{J} \right) \Phi(R - r), \quad (5.5.20)$$

$$T_1^{(0)} = \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \operatorname{Fi}_+ (R^2 - r^2) + J(z - 1)}{2\sqrt{J(J \cdot \operatorname{Fo} + r^2 - R^2)}} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{R^2 - r^2}{J} \right) \Phi(R - r), \quad (5.5.21)$$

$$T_2^{(0)} = \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \operatorname{Fi}_+ (R^2 - r^2) - \alpha J(z + 1)}{2\sqrt{J(J \cdot \operatorname{Fo} + r^2 - R^2)}} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{R^2 - r^2}{J} \right) \Phi(R - r), \quad (5.5.22)$$

где в качестве характерного перепада температуры выбрана величина $\theta_{11} = \sigma/(c\rho u_0)$.

В частном случае решение, построенное как нулевой коэффициент метода «покоэффициентного осреднения», совпадает со «схемой сосредоточенной емкости», принятой в большинстве предшествующих работ. Это означает, что даже в нулевом приближении описание температурных полей в нефтегазовых пластах осуществляется на более высоком уровне и более детально, нежели в предшествующих работах.

5.6. Оценка остаточного члена после первого коэффициента разложения по формальному параметру

Представим искомое решение в виде $T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \Theta$ и рассмотрим задачу для остаточного члена Θ

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \operatorname{Fo}} - \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad (5.6.1)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \operatorname{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial z^2} = 0, \quad (5.6.2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \operatorname{Fo}} + u(r) \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \operatorname{Fo}} + u(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right), \quad (5.6.3)$$

$$\Theta|_{z=1} = \Theta_1|_{z=1}, \quad \Theta|_{z=-1} = \Theta_2|_{z=-1}, \quad (5.6.4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial (\Theta_1 + \varepsilon T_1^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \varepsilon \Lambda \lambda \frac{\partial (\Theta_2 + \varepsilon T_2^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (5.6.5)$$

$$\Theta \Big|_{F_0=0} = T \Big|_{F_0=0} - T^{(0)} \Big|_{F_0=0} - \varepsilon T^{(1)} \Big|_{F_0=0}, \quad \Theta_1 \Big|_{F_0=0} = \Theta_2 \Big|_{F_0=0} = 0, \quad (5.6.6)$$

$$\Theta \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta_{1,2} \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.6.7)$$

Усредним задачу (5.6.1)–(5.6.7) по z в пределах от -1 до 1 по формуле

$$\langle \Theta \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Theta dz. \quad \text{Для осреднения уравнения (5.6.3) использовано соотношение,}$$

следующее из (5.6.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} dz &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \\ &= \frac{\Lambda \varepsilon}{2} \left(\frac{\partial (\Theta_1 + \varepsilon T_1^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial (\Theta_2 + \varepsilon T_2^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right). \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

Осредненная задача для остаточного члена имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial F_0} - \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad (5.6.9)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial F_0} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial z^2} = 0, \quad (5.6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial F_0} + u(r) \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = \\ = -\varepsilon \left(\frac{\partial \langle T \rangle^{(1)}}{\partial F_0} + u(r) \frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

$$\langle \Theta \rangle \Big|_{z=1} = \Theta_1 \Big|_{z=1}, \quad \langle \Theta \rangle \Big|_{z=-1} = \Theta_2 \Big|_{z=-1}, \quad (5.6.12)$$

$$\langle \Theta \rangle \Big|_{F_0=0} = -\varepsilon \langle T^{(1)} \rangle \Big|_{F_0=0}, \quad \Theta_1 \Big|_{F_0=0} = 0, \quad \Theta_2 \Big|_{F_0=0} = 0, \quad (5.6.13)$$

$$\langle \Theta \rangle \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta_{1,2} \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.6.14)$$

Усредняя аналогично уравнение для первого коэффициента разложения, следующее из (5.1.12) при множителе ε^2 , с учетом условий сопряжения (5.1.14), получим

$$\frac{\partial \langle T \rangle^{(1)}}{\partial F_0} + u(r) \frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial r} = \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right). \quad (5.6.15)$$

Последнее означает, что правая часть уравнения (5.6.11) тождественно равна нулю. Отсюда следует, что осредненный остаточный член $\langle \Theta \rangle$ и осредненный первый коэффициент $\langle T^{(1)} \rangle$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, в котором дифференциальная часть оператора дополняется следами производных из внешних областей. Такой же оператор со следами производных содержит уравнение для нулевого коэффициента (5.2.10).

Из (5.6.15) при дополнительном условии $\langle T^{(1)} \rangle|_{F_0=0} = 0$ следует, что усредненная задача для остаточного члена имеет только тривиальное решение. Учитывая (5.6.15), запишем (5.6.9)–(5.6.14) в пространстве изображений Лапласа – Карсона

$$p \Theta_1^u - \frac{\partial^2 \Theta_1^u}{\partial z^2} = 0, \quad (5.6.16)$$

$$p \Theta_2^u - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Theta_2^u}{\partial z^2} = 0, \quad (5.6.17)$$

$$p \langle \Theta \rangle^u + u(r) \frac{\partial \langle \Theta \rangle^u}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial \Theta_1^u}{\partial r} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial \Theta_2^u}{\partial r} \Big|_{z=-1} \right) = 0, \quad (5.6.18)$$

$$\langle \Theta \rangle^u \Big|_{z=1} = \Theta_1^u \Big|_{z=1} = \Theta_2^u \Big|_{z=-1}, \quad (5.6.19)$$

$$\langle \Theta \rangle^u \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta_{1,2}^u \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.6.20)$$

Решения уравнений (5.6.16) и (5.6.17) с учетом (5.6.19) имеют вид

$$\Theta_1^u = \langle \Theta \rangle^u \Big|_{z=1} \exp(-\sqrt{p}(z-1)), \quad \Theta_2^u = \langle \Theta \rangle^u \Big|_{z=1} \exp(-\alpha\sqrt{p}(z+1)), \quad (5.6.21)$$

откуда найдём

$$\frac{\partial \Theta_1^u}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\sqrt{p} \langle \Theta \rangle^u, \quad \frac{\partial \Theta_2^u}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \alpha\sqrt{p} \langle \Theta \rangle^u. \quad (5.6.22)$$

Тогда (5.6.18) запишется в виде

$$u(r) \frac{\partial \langle \Theta \rangle^u}{\partial r} + \left(p + \chi\sqrt{p} \text{Fi}_+ \right) \langle \Theta \rangle^u = 0, \quad (5.6.23)$$

или при $u(r) = -J/(2r)$

$$-\frac{J}{2r} \frac{\partial \langle \Theta \rangle^u}{\partial r} + (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \langle \Theta \rangle^u = 0. \quad (5.6.24)$$

Общие решения уравнений (5.6.23) и (5.6.24) представляются как

$$\langle \Theta \rangle^u = C \cdot \exp \left[- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \int \frac{dr}{u(r)} \right], \quad \langle \Theta \rangle^u = C \exp \left(\frac{p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+}{J} r^2 \right), \quad (5.6.25)$$

из которых в силу требования ограниченности решений (5.6.25) при $r \rightarrow \infty$ получаем, что $C = 0$. Отсюда следует, что $\langle \Theta \rangle^u = 0$. Поэтому Θ_1^u и Θ_2^u в силу (5.6.21) также равны нулю. Это означает, что осредненная задача для остаточного члена имеет только тривиальное решение.

Найденное асимптотическое разложение обладает важным свойством, заключающимся в том, что решение осредненной задачи для остаточного члена является тривиальным при любых значениях формального параметра ε . Это, естественно, повышает его практическую ценность, поскольку определен критерий близости точного решения и найденного асимптотического, нулевой коэффициент которого является решением осредненной задачи.

5.7. Первый коэффициент разложения температуры и вертикальный профиль в области осреднения

Запишем из условия равенства нулю вторых слагаемых порядка ε в (5.1.10)–(5.1.16) и третьего слагаемого порядка ε^2 в уравнении (5.1.12)

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, r > 0, \text{Fo} > 0, \quad (5.7.1)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2} = 0, \quad |z| < 1, r > 0, \text{Fo} > 0, \quad (5.7.2)$$

$$\frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, r > 0, \text{Fo} > 0, \quad (5.7.3)$$

$$T_1^{(1)}|_{z=1} = T^{(1)}|_{z=1}, \quad T_2^{(1)}|_{z=-1} = T^{(1)}|_{z=-1}, \quad (5.7.4)$$

$$\Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \lambda \Lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (5.7.5)$$

$$T^{(1)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad T_1^{(1)} \Big|_{Fo=0} = T_2^{(1)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (5.7.6)$$

$$T^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_1^{(1)} \Big|_{r+z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(1)} \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.7.7)$$

Осуществим «расщепление» уравнения теплопроводности для проницаемого пласта, содержащего коэффициенты разложения первого и второго порядков. Уравнение (5.7.2) представим в виде

$$\widehat{L}T^{(1)} = \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2}, \quad (5.7.8)$$

где \widehat{L} – оператор, который имеет вид

$$\widehat{L} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (5.7.9)$$

Воздействием оператора \widehat{L} на выражение (5.2.4), согласно (5.7.8), получим

$$\widehat{L}T^{(1)} = \frac{z^2}{2} \widehat{L}A(r, Fo) + z \widehat{L}B(r, Fo) + \widehat{L}E(r, Fo) = \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2}. \quad (5.7.10)$$

Уравнение (5.7.10) эквивалентно уравнению (5.7.2). Здесь $A(r, Fo)$ и $B(r, Fo)$ находятся согласно (5.2.6), а $E(r, Fo)$ – неизвестно. Для отыскания $\widehat{L}E(r, Fo)$ проинтегрируем по z выражение (5.7.10), получим

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} = \frac{z^3}{6} \widehat{L}A(r, Fo) + \frac{z^2}{2} \widehat{L}B(r, Fo) + z \widehat{L}E(r, Fo) + M(r, Fo). \quad (5.7.11)$$

Из (5.7.11) и (5.7.5) на границах $z = 1$ и $z = -1$ получим систему двух уравнений для определения $\widehat{L}E(r, Fo)$ и $M(r, Fo)$

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{6} \widehat{L}A(r, Fo) + \frac{1}{2} \widehat{L}B(r, Fo) + \widehat{L}E(r, Fo) + M(r, Fo) = \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad (5.7.12)$$

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{6} \widehat{L}A(r, Fo) + \frac{1}{2} \widehat{L}B(r, Fo) - \widehat{L}E(r, Fo) + M(r, Fo) = \lambda \Lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (5.7.13)$$

решение которой имеет вид

$$\widehat{L}E(r, \text{Fo}) = \frac{\Lambda}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) - \frac{1}{6} \widehat{L}A(r, \text{Fo}), \quad (5.7.14)$$

$$M(r, \text{Fo}) = \frac{\Lambda}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} + \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) - \frac{1}{2} \widehat{L}B(r, \text{Fo}). \quad (5.7.15)$$

Подставив в (5.7.10) выражения для $A(r, \text{Fo})$ и $B(r, \text{Fo})$ из (5.2.6), а также для $\widehat{L}E(r, \text{Fo})$ – из (5.7.14), сформулируем задачу для первых коэффициентов разложения

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, r > 0, \text{Fo} > 0, \quad (5.7.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) &= \chi \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) \widehat{L} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} \right) - \\ &- \chi \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) \widehat{L} \left(\lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right), \quad |z| < 1, r > 0, \text{Fo} > 0, \end{aligned} \quad (5.7.17)$$

$$\frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, r > 0, \text{Fo} > 0, \quad (5.7.18)$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{z=1} = T^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad T_2^{(1)} \Big|_{z=-1} = T^{(1)} \Big|_{z=-1}, \quad (5.7.19)$$

$$T^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_2^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (5.7.20)$$

$$T^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_1^{(1)} \Big|_{r+z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(1)} \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.7.21)$$

Отметим, что, в отличие от нулевого, задача для первого коэффициента не содержит явно функции источников $Q(r, \text{Fo})$. Тем не менее, решение зависит от этой функции через нулевое приближение.

Применяя преобразование Лапласа – Карсона по времени для случая $u(r, \text{Fo}) = u(r)$, перейдем в пространство изображений. Очевидно, что действие оператора \widehat{L} в пространстве изображений на некоторую функцию G определяется как

$$(\widehat{L}G)^u = \frac{\Lambda}{\chi} \left(pG^u - pG \Big|_{\text{Fo}=0} + u(r) \frac{\partial}{\partial r} G^u \right), \quad (5.7.22)$$

где через $G|_{Fo=0}$ обозначено значение функции G в начальный момент времени $Fo = 0$.

Задача в первом приближении в изображениях примет вид

$$pT_1^{(1)u} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (5.7.23)$$

$$pT^{(1)u} + u(r) \frac{\partial T^{(1)u}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) =$$

$$= \chi \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) \widehat{L}^u \left(\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) - \quad (5.7.24)$$

$$- \chi \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) \widehat{L}^u \left(\lambda \frac{\partial T_2^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + pT^{(1)} \Big|_{Fo=0}, \quad |z| < 1, \quad r > 0,$$

$$pT_2^{(1)u} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, \quad (5.7.25)$$

$$T_1^{(1)u} \Big|_{z=1} = T^{(1)u} \Big|_{z=1}, \quad T_2^{(1)u} \Big|_{z=-1} = T^{(1)u} \Big|_{z=-1}, \quad (5.7.26)$$

$$T^{(1)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_1^{(1)u} \Big|_{r+z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(1)u} \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.7.27)$$

Выражение (5.7.14) в пространстве изображений Лапласа – Карсона запишется как

$$(\widehat{L}E)^u = \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) - \frac{1}{6} \widehat{L}^u A^u(r, p). \quad (5.7.28)$$

Решение уравнений (5.7.23), (5.7.25) находится аналогично решению в нулевом приближении

$$T_1^{(1)u} = T^{(1)u} \Big|_{z=1} \exp(-\sqrt{p}(z-1)), \quad T_2^{(1)u} = T^{(1)u} \Big|_{z=-1} \exp(\alpha\sqrt{p}(z+1)). \quad (5.7.29)$$

Вид решения $T^{(1)u}$ определяется из соотношения (5.2.4)

$$T^{(1)u} = \frac{z^2}{2} A^u(r, p) + zB^u(r, p) + E^u(r, p) = -\Lambda \left(\frac{z^2}{2} \text{Fi}_+ + z\text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + E^u(r, p), \quad (5.7.30)$$

где учтено, что согласно (5.5.7), (5.5.8) $A^u(r, p) = -\Lambda \text{Fi}_+ \sqrt{p} T^{(0)u}$, $B^u(r, p) = -\Lambda \text{Fi}_- \sqrt{p} T^{(0)u}$. Для нахождения первого коэффициента разложения

температуры в виде (5.7.30) необходимо *определить* вид функции $E^u(r, p)$.

Используя (5.7.29) и (5.7.30), получим

$$\left. \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial z} \right|_{z=1} = -\sqrt{p} T^{(1)u} \Big|_{z=1} = -\sqrt{p} \left(\frac{1}{2} A^u(r, p) + B^u(r, p) + E^u(r, p) \right), \quad (5.7.31)$$

$$\left. \frac{\partial T_2^{(1)u}}{\partial z} \right|_{z=-1} = \alpha \sqrt{p} T^{(1)u} \Big|_{z=-1} = \alpha \sqrt{p} \left(\frac{1}{2} A^u(r, p) - B^u(r, p) + E^u(r, p) \right). \quad (5.7.32)$$

Подставляя (5.7.30)–(5.7.32) в (5.7.24), получим уравнение для $E^u(r, p)$

$$\begin{aligned} u(r) \frac{\partial E^u}{\partial r} + (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) E^u &= \\ &= pE(r, 0) + \frac{\Lambda \chi}{3} \text{Fi}_+^2 p T^{(0)u} + \frac{\Lambda \chi}{6} \text{Fi}_+ \sqrt{p} Q^u \equiv F^u(r, p), \end{aligned} \quad (5.7.33)$$

где $\text{Fi}^2 = \text{Fi}_+^2 + 3\text{Fi}_-^2$. Решение этого уравнения для случая $u(r) < 0$ с условием ограниченности на бесконечности можно представить в виде

$$E^u = - \int_r^\infty F^u(r', p) \cdot \exp \left[(p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')} \right] \frac{dr'}{u(r')}. \quad (5.7.34)$$

Из этого выражения следует, что $E(r, 0)$ равно нулю. Можно показать, что $A(r, 0) = B(r, 0) = 0$. Это означает, что $T^{(1)}(\text{Fo} = 0) = 0$, или $\langle T^{(1)} \rangle (\text{Fo} = 0) = 0$.

С помощью (5.7.30) легко найти решение в изображениях для центрального пласта

$$\begin{aligned} T^{(1)u} &= -\Lambda \left(\frac{z^2}{2} \text{Fi}_+ + z \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} - \\ &- \int_r^\infty F^u(r', p) \cdot \exp \left[(p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')} \right] \frac{dr'}{u(r')}, \end{aligned} \quad (5.7.35)$$

первой

$$\begin{aligned} T_1^{(1)u} &= - \left\{ \Lambda \left(\frac{1}{2} \text{Fi}_+ + \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + \right. \\ &+ \left. \int_r^\infty F^u(r', p) \cdot \exp \left[(p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')} \right] \frac{dr'}{u(r')} \right\} \exp[-\sqrt{p}(z-1)] \end{aligned} \quad (5.7.36)$$

и второй областей

$$T_2^{(1)u} = -\left\{ \Lambda \left(\frac{1}{2} \text{Fi}_+ - \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + \int_r^\infty F^u(r', p) \cdot \exp \left[\left(p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+ \right) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')} \right] \frac{dr'}{u(r')} \right\} \exp[\alpha \sqrt{p}(z+1)]. \quad (5.7.37)$$

В частном случае $u(r) = -J/2r$ получим

$$T^{(1)u} = -\Lambda \left(\frac{z^2}{2} \text{Fi}_+ + z \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty F^u(r', p) \cdot \exp \left(-\frac{p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+}{J} \cdot (r'^2 - r^2) \right) r' dr', \quad (5.7.38)$$

$$T_1^{(1)u} = -\left\{ \Lambda \left(\frac{1}{2} \text{Fi}_+ + \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} - \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty F^u(r', p) \cdot \exp \left(-\frac{p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+}{J} \cdot (r'^2 - r^2) \right) r' dr' \right\} \exp[-\sqrt{p}(z-1)], \quad (5.7.39)$$

$$T_2^{(1)u} = -\left\{ \Lambda \left(\frac{1}{2} \text{Fi}_+ - \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} - \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty F^u(r', p) \cdot \exp \left(-\frac{p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+}{J} \cdot (r'^2 - r^2) \right) r' dr' \right\} \exp[\alpha \sqrt{p}(z+1)]. \quad (5.7.40)$$

Вычисление оригиналов полученных выражений особых трудностей не представляет. В качестве примера приведем выражение для температурного профиля в центральном пласте для источника, сосредоточенного на цилиндрической поверхности в пространстве изображений

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}(z=1) = -\Lambda \left(\frac{z^2 - 1}{2} \text{Fi}_+ + (z-1) \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} \quad (5.7.41)$$

и оригиналов

$$T^{(1)} - T^{(1)}(z=1) = -\frac{\Lambda}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z^2 - 1}{2} \text{Fi}_+ + (z-1) \text{Fi}_- \right) \sqrt{\frac{J}{J\text{Fo} - R^2 + r^2}} \times \exp \left(-\frac{\chi^2 \text{Fi}_+^2 (R^2 - r^2)^2}{4J(J\text{Fo} - R^2 + r^2)} \right) \Phi(J\text{Fo} - R^2 + r^2) \Phi(R - r). \quad (5.7.42)$$

Нетрудно показать, что при $p \rightarrow \infty$ все выражения для первого коэффициента разложения обращаются в нуль. Согласно теореме о соответствии это означает, что первые коэффициенты разложения в начальный момент времени равны нулю. Отсюда следует, что погранслоем в окрестности точки $F_0 = 0$ отсутствует.

Окончательные решения в пространстве оригиналов в первом приближении запишутся в виде

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)}, T_1 = T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)}, T_2 = T_2^{(0)} + \varepsilon T_2^{(1)}. \quad (5.7.43)$$

Можно показать также, что полученные выражения для первого приближения совпадают с разложением точного решения в ряд Маклорена. Тем не менее, представленные выше выражения для первого коэффициента разложения соответствуют реальным профилям температуры только для достаточно больших времен.

В отличие от первого приближения, нулевое, как показано выше, всегда соответствует осредненным значениям температуры и применимо для любых значений времени.

5.8. Анализ результатов расчетов и оценка баротермического эффекта

На рисунках 5.1–5.6 представлены расчеты, осуществленные по формулам (5.5.20)–(5.5.22). В расчетах принято $c_\Gamma = 840$ Дж/(К*кг), $c_{\text{нп}} = 810$ Дж/(К*кг), $c_{\text{пг}} = 920$ Дж/(К*кг), $\rho_\Gamma = 3040$ кг/м³, $\rho_{\text{нп}} = 2060$ кг/м³, $\rho_{\text{пг}} = 2640$ кг/м³, $\lambda_\Gamma = 2.3$ Вт/(м*К), $\lambda_{\text{нп}} = 2.0$ Вт/(м*К), $\lambda_{\text{пг}} = 3.4$ Вт/(м*К), $a_\Gamma = 9 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $a_{\text{нп}} = 12 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $a_{\text{пг}} = 14 \cdot 10^{-7}$ м²/с (нижние индексы: Γ – глина, нп – нефтенасыщенный песчаник, пг – песчаник глинистый). В предположении, что нефтенасыщенный песчаник окружен глиной сверху и глинистым песчаником снизу, безразмерные параметры примут следующие значения: $\lambda = 1.5$, $\chi = 1.53$, $\Lambda = 1.15$, $\alpha = 0.87$, $Fi_+ = 0.88$, $Fi_- = 0.12$.

Рисунок 5.1. иллюстрирует зависимость безразмерной температуры в нулевом приближении от безразмерной вертикальной координаты при раз-

личных значениях безразмерного времени. Анализ кривых показывает, что с увеличением времени температурные возмущения распространяются как вдоль нефтенасыщенного пласта, так и в настиляющий и подстиляющий пласты. Асимметрия кривых на рисунке 5.1 и последующих объясняется различием теплофизических характеристик настиляющей и подстиляющей сред. Здесь $R = 1$, $r = 0.5$, $J = 1$.

На рисунке 5.2 представлены зависимости безразмерной температуры в нулевом приближении от безразмерной вертикальной координаты при различных значениях конвективного параметра. В расчетах принято $R = 1$, $r = 0.5$, $Fo = 1.5$. Из рисунка видно, что при увеличении конвективного параметра температура растет быстрее.

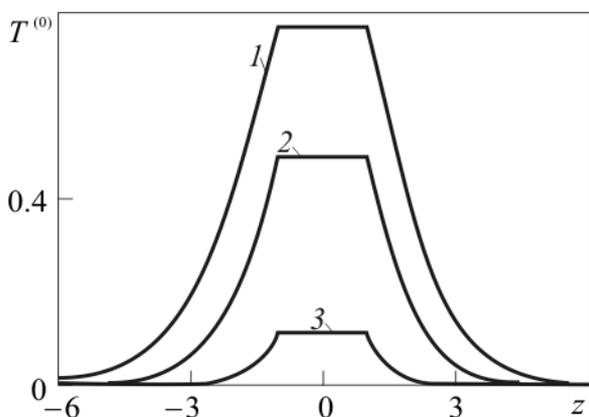


Рис. 5.1. Зависимость безразмерной температуры в нулевом приближении от безразмерной вертикальной координаты при различных значениях Fo : 1 – $Fo = 5.4$, 2 – 1.8 , 3 – 0.9

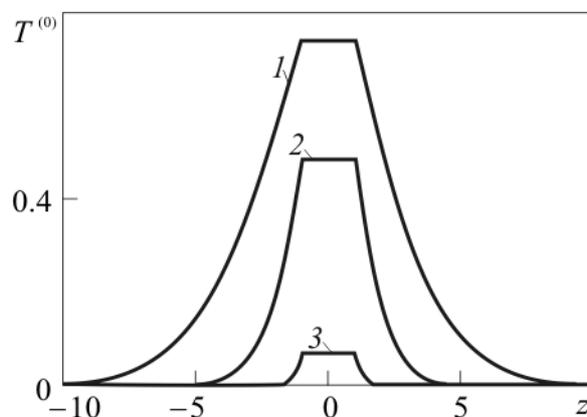


Рис. 5.2. Зависимость безразмерной температуры в нулевом приближении от безразмерной вертикальной координаты при различных значениях J : 1 – $J = 2$, 2 – 1 , 3 – 0.6

Рисунок 5.3 иллюстрирует радиальные распределения температуры источника, сосредоточенного на цилиндрической поверхности $R = 1$, в центральном (кривая 1), подстиляющем (кривая 2) и настиляющем (кривая 3) пластах.

На рисунке 5.4 представлены зависимости безразмерной температуры источника, сосредоточенного на цилиндрической поверхности $R = 1$, в нулевом приближении от безразмерного времени. Шифр кривых: 1 – центральный, 2 – подстиляющий и 3 – настиляющий пласты. Анализ кривых показывает, что при удалении от центра пласта безразмерная температура пород

уменьшается, а скорость роста температуры во всех точках пласта уменьшается с ростом числа Фурье. Последнее объясняется увеличением вклада теплообмена пласта с окружающими породами.

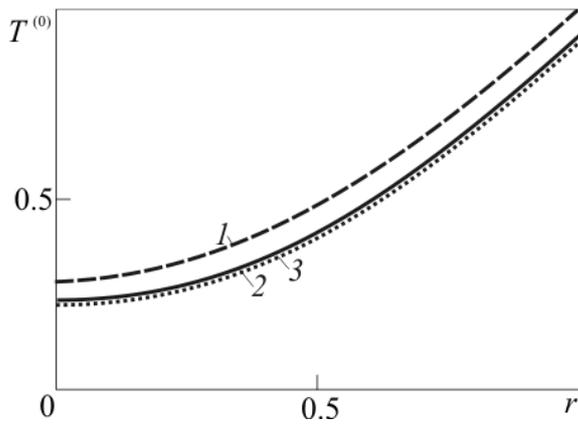


Рис. 5.3. Радиальные распределения температуры источника, сосредоточенного на цилиндрической поверхности $R = 1$, при различных значениях вертикальной координаты z : 1 – $z = 0.5$; 2 – $z = -1.2$; 3 – $z = 1.2$

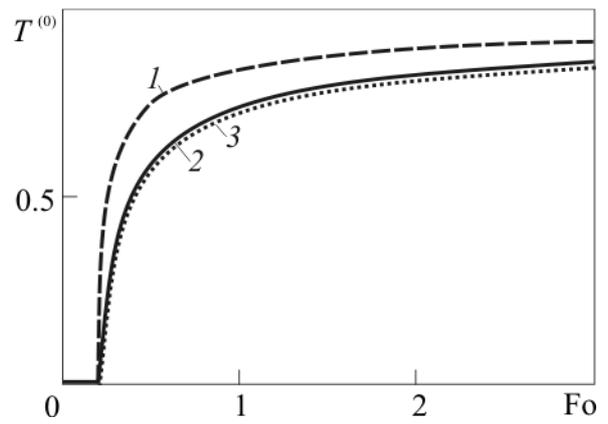


Рис. 5.4. Зависимости безразмерной температуры сосредоточенного на цилиндрической поверхности $R = 1$, от безразмерного времени при различных значениях вертикальной координаты z : 1 – $z = 0.5$; 2 – $z = -1.2$; 3 – $z = 1.2$

На рисунках 5.5–5.6 представлены кривые, рассчитанные по формуле (5.7.42). Температурный перепад уменьшается с течением времени (рис. 5.5) и с увеличением конвективного параметра (рис. 5.6).

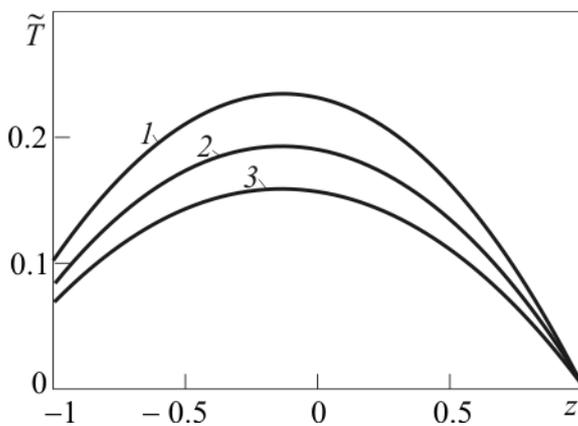


Рис. 5.5. Температурный профиль в центральном пласте при различных значениях параметра Фурье: 1 – $Fo = 1.8$, 2 – 3.6, 3 – 5.4

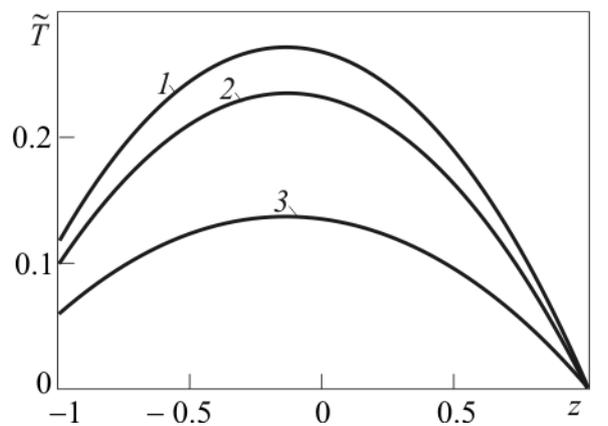


Рис. 5.6. Температурный профиль в центральном пласте при различных значениях конвективного параметра: 1 – $J = 1.2$, 2 – 1.0, 3 – 0.8

Согласно выражению (1.6.3) в уравнение теплопроводности центрального пласта входят функции, зависящие от распределения возмущения давления в пласте. Вид этих функций определяется в главе VI.

Важнейшим параметром, определяющим эволюцию температурного поля в пористой среде, является скорость конвективного переноса тепла. Согласно определению [177, 249] скорость конвективного переноса тепла равна

$$u = -\frac{c_l \rho_l}{c_s \rho_s} \frac{k}{\mu} \nabla P. \quad (5.8.1)$$

Выражение (5.8.1) определяет скорость движения изотерм, когда теплопроводностью среды можно пренебречь. При радиальном движении несжимаемой жидкости в направлении полярной оси выражение (5.8.1) примет вид

$$u_r = -\frac{c_l \rho_l}{c_s \rho_s} \frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P_d}{\partial r_d}. \quad (5.8.2)$$

В главе VI определены выражения, описывающие возмущение давления в слоисто-неоднородном анизотропном пористом пласте при фильтрации флюида и их производные по времени и радиальной координате.

Подставив формулу для градиента давления в (5.8.2) для скорости конвективного переноса тепла имеем

$$u_r = \frac{c_l \rho_l}{c_s \rho_s} \frac{Q \sqrt{m_1 \beta_1} \mu}{4\pi^{3/2} r_d \sqrt{t} k_{z1}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\zeta^2 h^2 \mu m_1 \beta_1}{4t k_{z1}}\right) \times \quad (5.8.3)$$

$$\times \exp\left(-\frac{r_d^2}{4h^2 \zeta} \frac{\sqrt{k_{z1}} (\sqrt{k_{z1} m_1 \beta_1} + \sqrt{k_{z2} m_2 \beta_2})}{2k_r \sqrt{m_1 \beta_1}}\right) d\zeta.$$

На рисунках 5.7–5.10 представлены кривые, иллюстрирующие динамику скорости конвективного переноса тепла. Расчеты произведены по формуле (5.8.3). В расчетах на рисунках 5.7–5.9 принято $c_l = 2000$ Дж/(К·кг), $c_s = 810$ Дж/(К·кг), $\rho_l = 900$ кг/м³, $\rho_s = 2060$ кг/м³, $k_{z1} = k_{z2} = 10^{-11}$ м², $k_r = 10^{-9}$ м², $Q = 6.4 \cdot 10^{-5}$ м³/с. Рисунок 5.7 иллюстрирует зависимость скорости конвективного переноса тепла от времени для флюида с различной вязкостью, фильтрующийся в проницаемом пласте с разной мощностью среднего пропластка на расстоянии 0.9 м от скважины.

Из рисунка следует, что установление скорости конвективного переноса тепла в рассматриваемой системе происходит в течение 0.03 с и далее

остается постоянной. Этот факт имеет важное значение и может быть использован при построении теории баротермического эффекта в пласте.

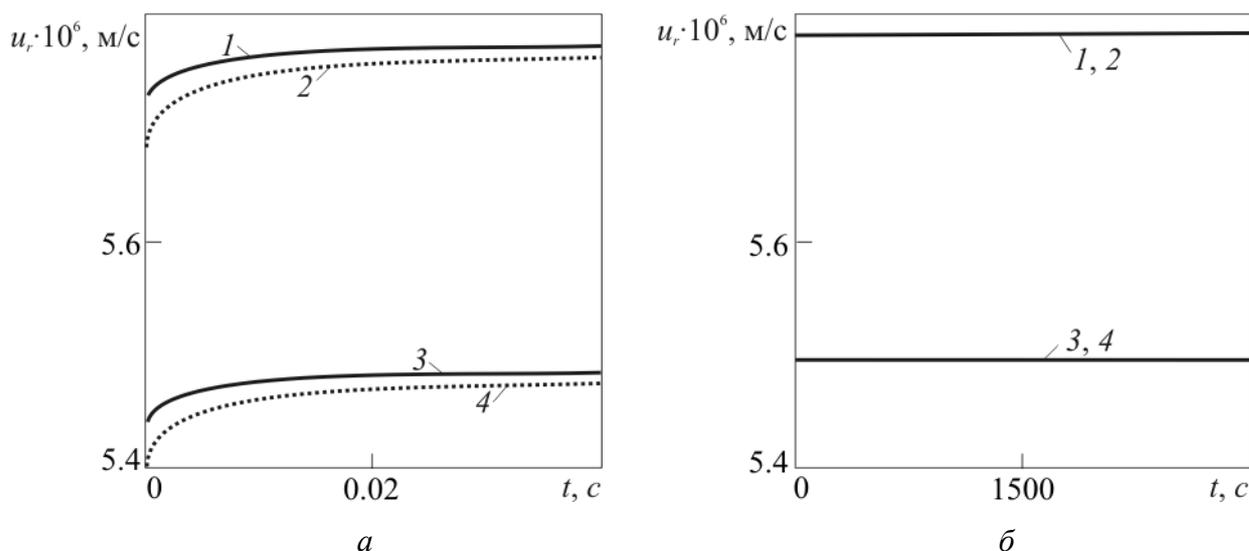


Рис. 5.7. Эволюция скорости конвективного переноса тепла для жидкостей с различной вязкостью 0.0016 Па·с (сплошные линии), 0.0064 Па·с (пунктирные линии) в пропластках разной толщины для малых (а) и больших (б) значений времени. Шифр кривых: 1, 2 – $h = 0.95$ м, 3, 4 – 1 м

На рисунке 5.8 показаны аналогичные зависимости на расстоянии 1.9 м от скважины.

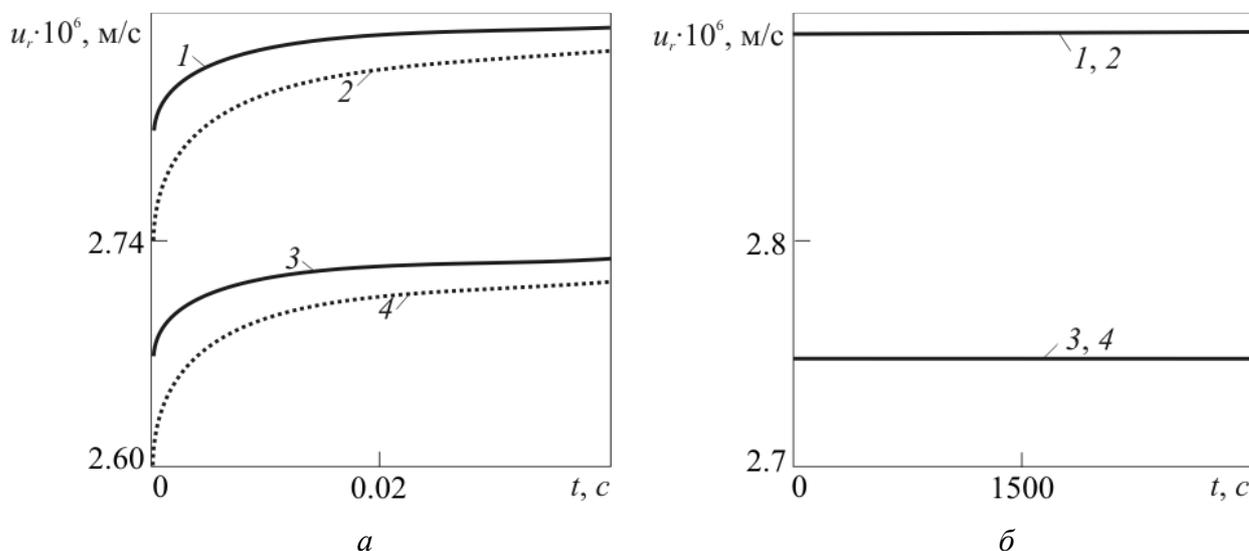


Рис. 5.8. Эволюция скорости конвективного переноса тепла для жидкостей с различной вязкостью 0.0016 Па·с (сплошные линии), 0.0064 Па·с (пунктирные линии) в пропластке разной толщины для малых (а) и больших (б) значений времени. Шифр кривых: 1, 2 – $h = 0.95$ м, 3, 4 – 1 м

Из сопоставления рисунков следует, что при удалении от скважины значение параметра u_r уменьшается, зависимость от значения полутолщины пласта становится менее заметной. Время установления стационарных значений при этом возрастает только на сотую долю секунды.

Динамика конвективного переноса тепла при значении радиальной координаты 2 м для флюида с вязкостью 0.0016 Па·с, фильтрующегося в пласте с полутолщиной центрального слоя 1 м и окружающими породами с различными пористостью и сжимаемостью, представлена на рисунке 5.9.

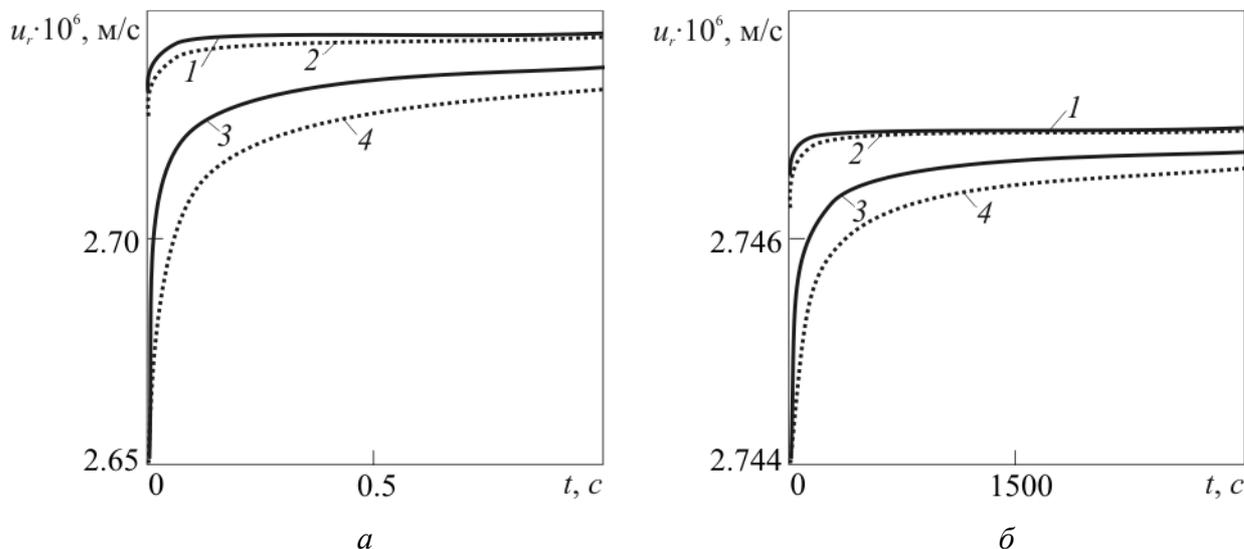


Рис. 5.9. Динамика конвективного переноса тепла при фильтрации в пропластке с различной пористостью и сжимаемостью окружающих пород для малых (*а*) и больших (*б*) значений времени. Шифр кривых: 1 – $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, $m_1 = m_2 = 0.1$; 2 – $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, $m_1 = m_2 = 0.3$, $m_2 = 0.3$; 3 – $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, $m_1 = m_2 = 0.1$; 4 – $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, $m_1 = m_2 = 0.3$

Зависимости конвективного параметра от времени при различных значениях дебита, полутолщины центральной области и радиальной координаты изображены на рисунке 5.10. Другие расчетные параметры те же, что и на рисунке 5.9. Анализ рисунков показывает, что основной величиной, от которой зависит скорость конвективного переноса тепла, является радиальная координата. Значение u_r выходит на стационарный режим в первые секунды после начала отбора, поэтому зависимостью скорости конвективного переноса тепла от времени в условиях длительной эксплуатации скважин можно пренебречь.

Рисунок 5.11 иллюстрирует зависимость скорости конвективного переноса тепла от радиальной координаты для разных значений времени (рис. 5.11, *а*), дебита и полутолщины центрального пропластка (рис. 5.11, *б*).

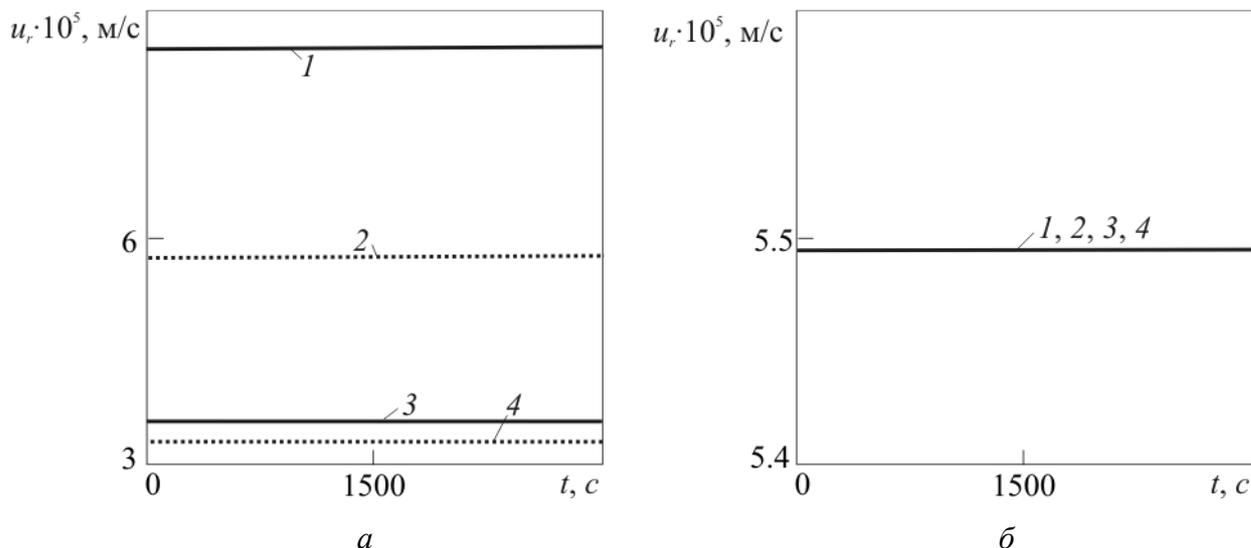


Рис. 5.10. Зависимости скорости конвективного переноса тепла от времени при различных значениях дебита:

a – на разных расстояниях от скважины. Шифр кривых: 1 – $Q = 12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, $h = 0.5 \text{ м}$; 2 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 0.5 м ; 3 – $12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 1 м ; 4 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 1 м ;

б – для различных значений полутолщины пласта. Шифр кривых: 1 – $Q = 12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, $h = 0.5 \text{ м}$; 2 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 0.5 м ; 3 – $12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 1 м ; 4 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 1 м

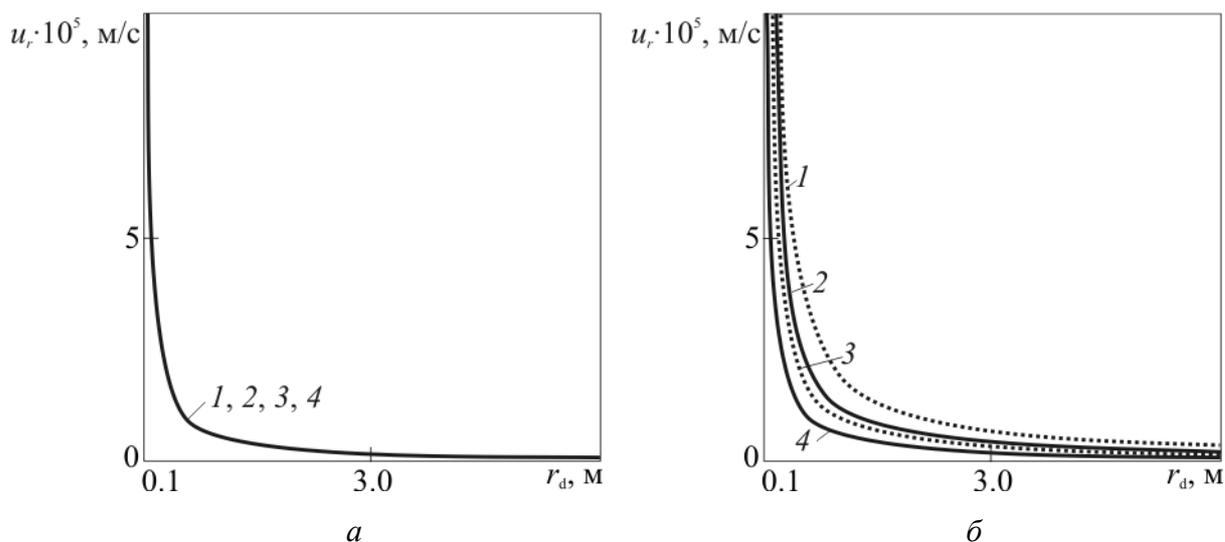


Рис. 5.11. Зависимость скорости конвективного переноса тепла от радиальной координаты

a – для разных значений времени при дебите $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ и полутолщине пласта 1 м . Шифр кривых: 1 – $t = 360 \text{ с}$, 2 – 3600 с , 3 – 36000 с , 4 – 360000 с ;

б – для разных значений дебита и полутолщины центрального пропластка в момент времени $t = 3600 \text{ с}$. Шифр кривых: 1 – $Q = 12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, $h = 0.6 \text{ м}$; 2 – $12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 1 м ; 3 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 0.6 м ; 4 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 1 м

Рисунок 5.11, *a*, как и рисунки 5.7–5.10 показывает, что зависимость u_r от времени в скважинных условиях можно пренебречь. Рисунок 5.11, *б* иллюстрирует уменьшение зависимости от дебита и полутолщины пласта с ростом радиальной координаты.

На рисунке 5.12 представлены зависимости произведения $u_r r_d$ от радиальной координаты для разных значений времени (рис. 5.12, а, б), дебита и полутолщины пласта (рис. 5.12, в). Расчетные параметры те же, что и на рисунке 5.7. Анализ рисунков показывает, что соотношение $u_r r_d$ можно считать не зависящим от времени в призабойной зоне. Для определения температурного поля в пористой среде можно использовать соотношение $u_r r_d = u_0 r_{0d}$, откуда $u_r = u_0 r_{0d} / r_d$.

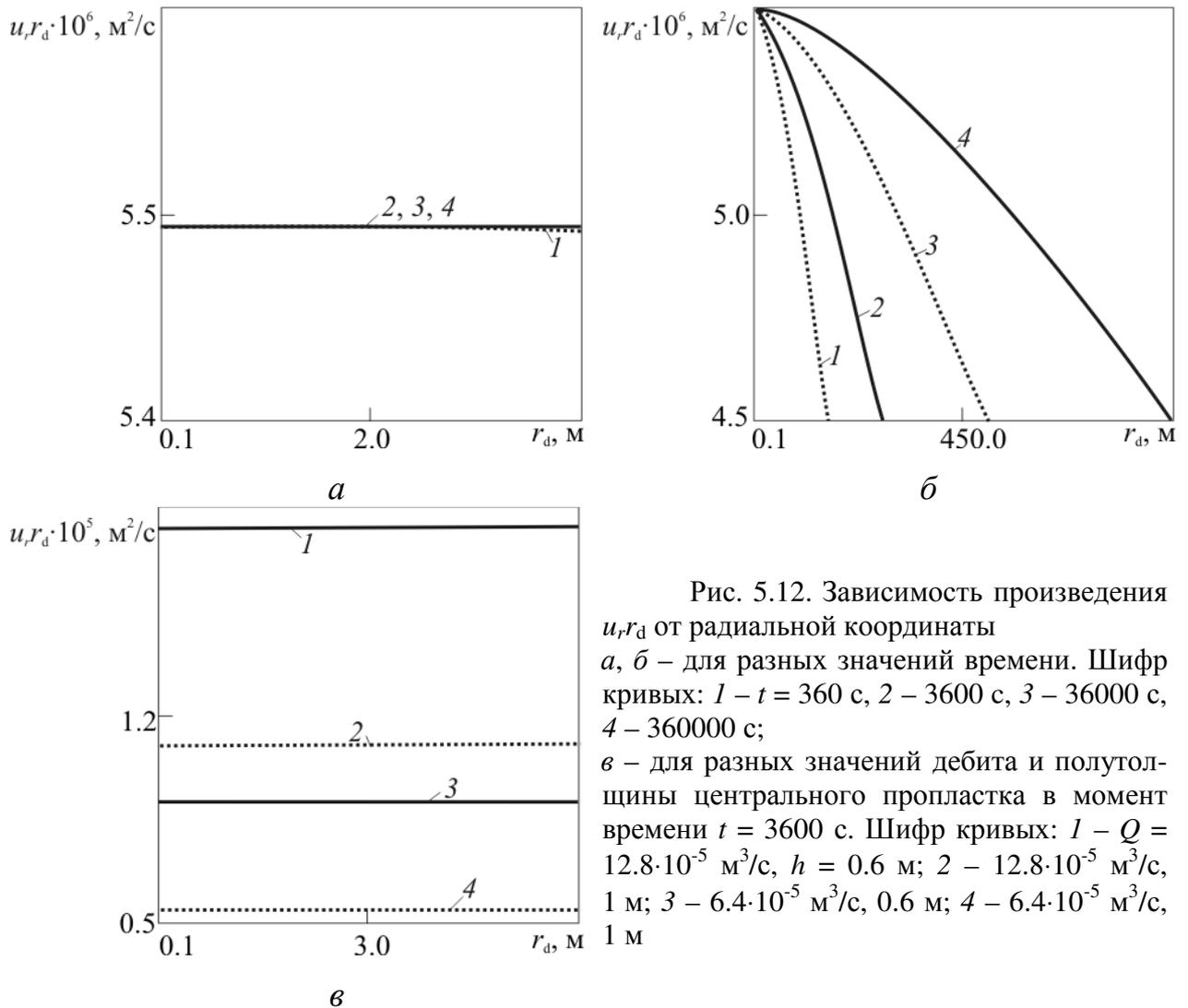


Рис. 5.12. Зависимость произведения $u_r r_d$ от радиальной координаты
а, б – для разных значений времени. Шифр кривых: 1 – $t = 360$ с, 2 – 3600 с, 3 – 36000 с, 4 – 360000 с;
в – для разных значений дебита и полутолщины центрального пропластка в момент времени $t = 3600$ с. Шифр кривых: 1 – $Q = 12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, $h = 0.6$ м; 2 – $12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 1 м; 3 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 0.6 м; 4 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 1 м

Итак, значение скорости конвективного переноса тепла зависит, в основном, от радиальной координаты. Зависимость u_r от времени пренебрежимо мала для малых r_d .

Выражение (5.4.9) в размерных переменных имеет вид

$$\hat{\theta} = -\frac{h^2}{u(r_0)r_0} \int_{\infty}^{r_d/h} r' Q_d(r') \Phi \left(\frac{t}{h^2} - \frac{h^2 r'^2 - r_d^2}{2u(r_0)r_0} \right) dr'. \quad (5.8.4)$$

В общем случае источник зависит от времени и радиальной координаты

$$Q_d = m \frac{c_l \rho_l}{c_s \rho_s} \eta \frac{\partial P_d}{\partial t} - u(r_d) \varepsilon \frac{\partial P_d}{\partial r_d}.$$

Производные от функции давления имеют вид (6.12.17), (6.12.18).

На рисунке 5.13. изображена динамика источника тепла на разных расстояниях от скважины, при различных значениях горизонтальной компоненты проницаемости. Расчетные параметры: коэффициент Джоуля – Томсона $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-7}$ К/Па, адиабатический коэффициент $\eta = 4 \cdot 10^{-8}$ К/Па, теплоемкость жидкости $c_l = 2000$ Дж/(К·кг), теплоемкость пласта $c_s = 810$ Дж/(К·кг), плотность жидкости $\rho_l = 900$ кг/м³, плотность пласта $\rho_s = 2060$ кг/м³, вертикальные компоненты проницаемости окружающих пропластков $k_{z1} = k_{z2} = 10^{-11}$ м², $m_1 = m_2 = 0.1$, $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-10}$ Па⁻¹, дебит $Q = 6.4 \cdot 10^{-5}$ м³/с, $h = 0.5$ м.

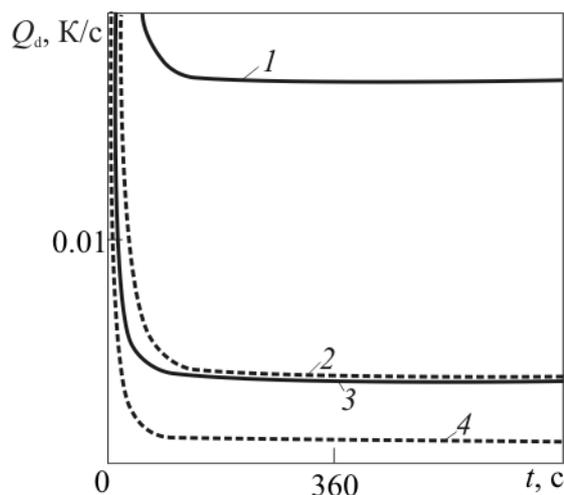


Рис. 5.13. Эволюция источника тепла на разных расстояниях от скважины, при различных значениях горизонтальной компоненты проницаемости. Шифр кривых: 1 – $k_r = 10^{-14}$ м², $r = 0.5$ м; 2 – 10^{-14} м², 1 м; 3 – $5 \cdot 10^{-14}$ м², 0.5 м; 4 – $5 \cdot 10^{-14}$ м², 1 м

Из рисунка 5.13 следует, что зависимостью источника от времени можно пренебречь, поскольку через несколько минут после начала отбора источник становится стационарным.

На рисунке 5.14 представлены зависимости баротермического эффекта в скважине от времени при фильтрации жидкости с различной вязкостью в пропластках с разными проницаемостями.

Анализ кривых показывает, что с увеличением вязкости фильтрующей нефти и уменьшением проницаемости нефтесодержащего пропластка температурный эффект растет.

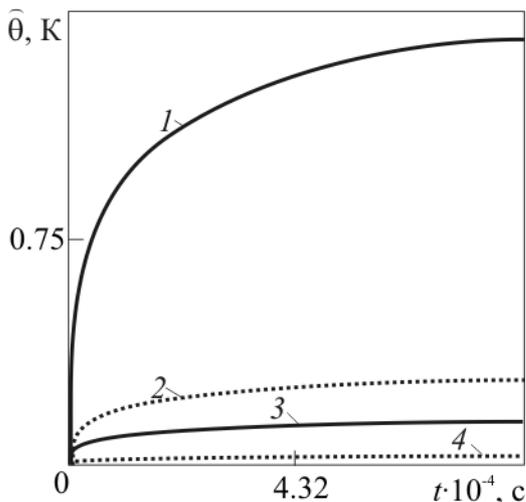


Рис. 5.14. Баротермический эффект в скважине от времени при фильтрации жидкости с различной вязкостью в пропластках с разными проницаемостями. Шифр кривых: 1 – $\mu = 0.064$ Па·с, $k_r = 10^{-14}$ м²; 2 – 0.064 Па·с, $5 \cdot 10^{-14}$ м²; 3 – 0.0064 Па·с, 10^{-14} м²; 4 – 0.0064 Па·с, $5 \cdot 10^{-14}$ м²

Зависимости температурного эффекта в скважине от времени для разных значений дебита и мощности проницаемого пропластка рассмотрены на рисунках 5.15, а, б.

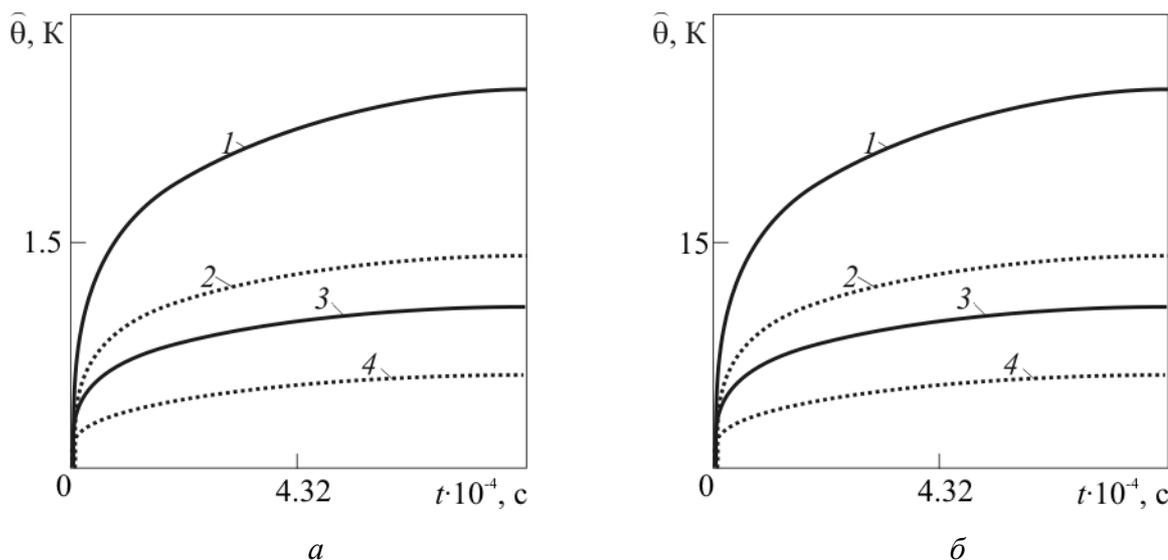


Рис. 5.15. Динамика температурного эффекта в скважине для разных значений дебита и мощности проницаемого пропластка.

а – $k_r = 10^{-13}$ м². Шифр кривых: 1 – $Q^* = 12.8$ м³/с, $h = 1$ м, 2 – 12.8 м³/с, 0.5 м, 3 – 6.4 м³/с, 1 м, 4 – 6.4 м³/с, 0.5 м;

б – $k_r = 10^{-14}$ м². Шифр кривых: 1 – $Q^* = 12.8$ м³/с, $h = 1$ м, 2 – 12.8 м³/с, 0.5 м, 3 – 6.4 м³/с, 1 м, 4 – 6.4 м³/с, 0.5 м

Кривые рисунка 5.15, б построены при значении горизонтальной компоненты проницаемости центрального пропластка в 10 раз большей, чем соответствующая компонента рисунка 5.15, а. Из анализа зависимостей следует, что температурный эффект растет с увеличением дебита нефти и полу-

толщины нефтесодержащего пласта. Из сопоставления рисунков видно, что уменьшение на порядок горизонтальной компоненты проницаемости приводит к росту температурного сигнала пласта на порядок.

Рисунок 5.16 иллюстрирует динамику баротермического эффекта для разных пористостей и сжимаемостей окружающих пород. Из рисунка следует незначительное влияние этих характеристик на температурный эффект, которое увеличивается с течением времени.

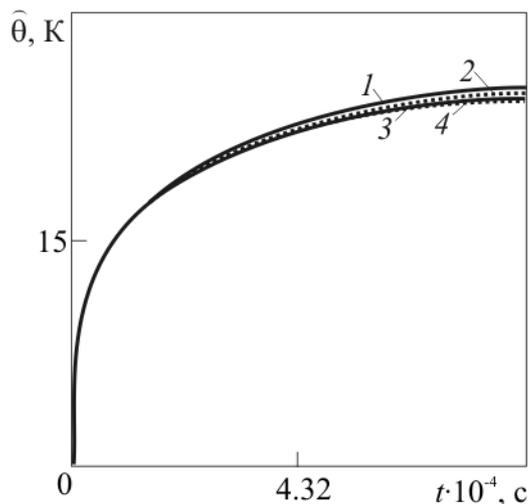


Рис. 5.16. Динамика баротермического эффекта для разных пористостей и сжимаемостей окружающих пород. Шифр кривых: 1 – $m_1 = m_2 = 0.1$, $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$; 2 – 0.3 , 10^{-10} Па^{-1} ; 3 – 0.1 , 10^{-9} Па^{-1} ; 4 – 0.1 , 10^{-9} Па^{-1}

Сопоставление динамики температурного эффекта для нефти и воды при различных значениях вертикальной компоненты проницаемости окружающей среды показано на рисунках 5.17.

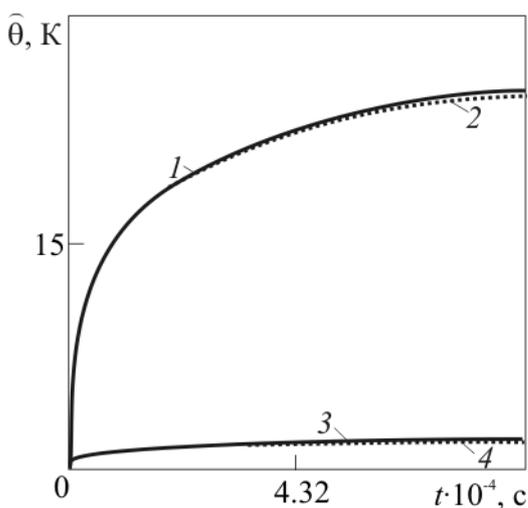


Рис. 5.17. Эволюция температурного эффекта для нефти и воды при различных значениях вертикальной компоненты проницаемости окружающей среды. Шифр кривых: 1, 2 – $c_l = 2000 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг})$, $\rho_l = 900 \text{ кг}/\text{м}^3$, $\mu = 0.0064 \text{ Па}\cdot\text{с}$ (нефть), 3, 4 – $4000 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг})$, $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, $0.004 \text{ Па}\cdot\text{с}$ (вода); $k_{z1} = k_{z2} = 10^{-15} \text{ м}^2$ (сплошные линии), 10^{-14} м^2 (пунктирные линии)

Анализ кривых показывает, что температурный эффект для воды больше чем для нефти, что связано ее большей теплоемкостью и меньшей вязкостью. Влияние проницаемости окружающей среды на исследуемый эффект мало.

Радиальное распределение температурного эффекта через 1.5 часа после начала отбора для разных значений дебита и мощности продуктивного пропластка показано на рисунке 5.18.

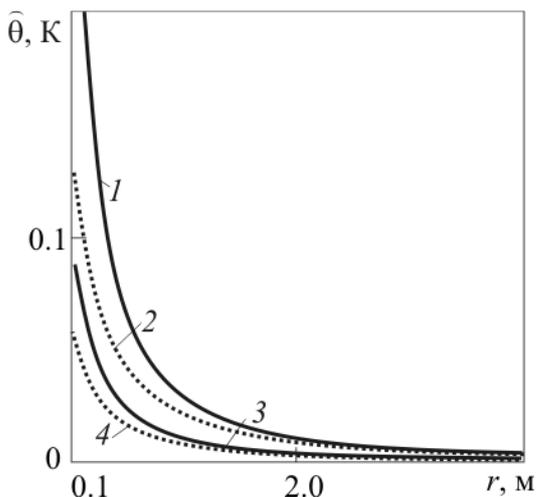


Рис. 5.18. Зависимость температурной аномалии, возникающей вследствие баротермического эффекта, от радиальной координаты для разных значений дебита и полутолщины центральной области. Шифр кривых: 1 – $Q = 12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, $h = 1.5 \text{ м}$; 2 – $12.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 0.5 м ; 3 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 1.5 м ; 4 – $6.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, 0.5 м

Здесь, как и на рисунке 5.15, отмечается увеличение температурного эффекта при увеличении дебита и полутолщины нефтеносного пласта.

Итак, температурный эффект, который обусловлен нестационарной фильтрацией в слоисто-неоднородном анизотропном пористом пласте, увеличивается с течением времени и уменьшается при удалении от скважины. Основными параметрами, оказывающими влияние на значение температурного сигнала пласта, являются: дебит, мощность нефтенасыщенной средней области, теплофизические характеристики фильтрующейся жидкости и окружающих пород, а также горизонтальная компонента проницаемости среднего пропластка. Гидродинамические характеристики окружающей среды на исследуемый температурный эффект влияют незначительно.

На рисунке 5.19 сопоставлены опытная [249] и теоретическая кривые изменения забойной температуры со временем. Опытная кривая зарегистрирована после пуска скважины 108 Шебелинского месторождения с постоянным отбором газа $5.45 \text{ м}^3/\text{с}$. Мощность основного продуктивного пласта 23 м , диаметр ствола скважины 25 см . Теоретические расчеты выполнены по формуле (5.4.9). В расчетах принято $Q = 5.45 \text{ м}^3/\text{с}$, $r_{0d} = 0.125 \text{ м}$, $h = 11.5 \text{ м}$, $m = m_1 = 0.1$, $\beta = \beta_1 = 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, $\mu = 13 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $k_z = 10^{-13} \text{ м}^2$, $k_r = 1.8 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$, $k_{z1} = 10^{-15} \text{ м}$.

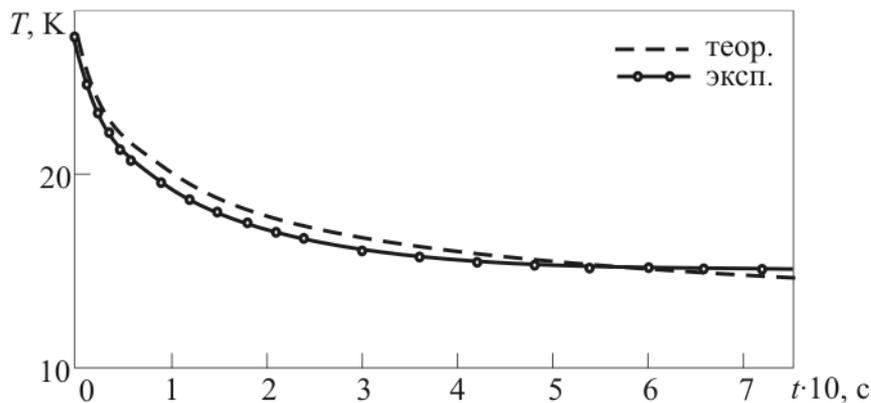


Рис. 5.19. Сопоставления экспериментальной [249] и теоретической кривых изменения забойной температуры со временем

Из рисунка видно хорошее согласие теоретической и экспериментальной зависимостей. Амплитудная погрешность теоретической кривой не превышает 1 К или 4 % в относительных единицах.

Рисунок 5.20 иллюстрирует сопоставление экспериментальной [183] и теоретической зависимостей баротермического эффекта от времени. Теоретические расчеты выполнены по формуле (5.8.4). Расчетные параметры: $\varepsilon = 10^{-7}$ К/Па, $\eta = 6 \cdot 10^{-6}$ К/Па, $Q = 15 \cdot 10^{-5}$ м³/с, $r_{\text{од}} = 0.125$ м, $h = 2.4$ м, $m = m_1 = 0.1$, $\beta = \beta_1 = 10^{-9}$ Па⁻¹, $\mu = 0.08$ Па·с, $k_r = 10^{-13}$ м², $k_{z1} = k_{z2} = 10^{-15}$ м.

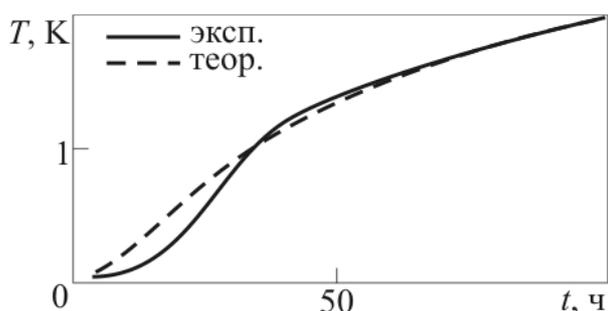


Рис. 5.20. Сопоставление экспериментальной [183] и теоретической зависимостей баротермического эффекта от времени

Анализ кривых показывает удовлетворительное согласие теоретической и экспериментальной зависимостей. Максимальная погрешность теоретической кривой наблюдается при значении времени 20 часов и составляет 0.2 К или 10 %. При увеличении времени погрешность моделирования уменьшается и при $t > 60$ часов не превышает 1 %. Расхождение между теоретической и экспериментальной кривыми при t около 20 часов объясняется влиянием кольцевой неоднородности призабойной зоны пласта, которая в развитой теории не учитывается.

5.9. Выводы по главе V

Найдены аналитические решения ряда задач о температурных полях и полях давления в пласте, из которых в частных случаях следуют известные результаты, полученные по «схеме сосредоточенной емкости», а также в приближении последовательной смены стационарных состояний, автоматического метода, квазистационарного подхода.

Показано, что процесс отыскания нулевого коэффициента разложения соответствует процедуре построения решения задачи для асимптотически осредненной по толщине пласта температуры, а первый коэффициент уточняет решение в нулевом приближении.

Впервые доказано, что при описании температурного поля баротермического эффекта в слоисто неоднородном пласте в нулевом асимптотическом приближении достаточно в качестве скорости конвективного переноса и функции источников использовать средние интегральные по толщине пласта значения.

Найденные в данной главе формулы позволили определить величину температурного сигнала пласта, определяющего граничное условие в задаче о температурном поле в стволе действующей скважины. Показано, что в зависимости от условий фильтрации баротермический эффект может иметь порядок от 0.1 до 10 К.

Из представленного решения следует также, что, для определения баротермического эффекта в пласте и корректного расчета температурного сигнала пласта, необходимо определить поле давления в вертикально неоднородном пласте, что является целью следующей главы.

Глава VI. ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ЗАДАННОМ ОТБОРЕ

В шестой главе представлено решение гидродинамической задачи (1.8.1)–(1.8.8). Найдены простые аналитические формулы для нестационарных полей давления при заданном отборе из неоднородных анизотропных пластов в нулевом и первом асимптотических приближениях в предположении радиального течения на основе модификации асимптотического метода. Приведены результаты расчетов полей по полученным формулам.

Определены производные от функции давления по времени и радиальной координате, необходимые для расчета температурного сигнала пласта по формулам, полученным в главе V.

6.1. Приведение задачи к безразмерным координатам

С использованием соотношений

$$P = \frac{P_d - P_0}{P_0}, r = \frac{r_d}{h}, r_0 = \frac{r_{d0}}{h}, z = \frac{z_d}{h}, \tau = \frac{\chi_{z1} t}{h^2}, {}_2\chi_z = \frac{\chi_{z2}}{\chi_{z1}}, {}_0\chi_z = \frac{\chi_z}{\chi_{z1}}, \quad (6.1.1)$$

$${}_1\chi_r = \frac{\chi_{r1}}{\chi_{z1}}, {}_2\chi_r = \frac{\chi_{r2}}{\chi_{z1}}, {}_0\chi_r = \frac{\chi_r}{\chi_{z1}}, k_1 = \frac{k_{z1}}{k_z}, k_2 = \frac{k_{z2}}{k_z}, q = \frac{Q\mu}{4\pi k_r h P_0},$$

задача (1.8.1)–(1.8.8) запишется в виде

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} - {}_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \tau > 0, r > 0, z > 1, \quad (6.1.2)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \tau} - {}_2\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) - {}_2\chi_z \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} = 0, \tau > 0, r > 0, z < -1, \quad (6.1.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - {}_0\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) - {}_0\chi_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \tau > 0, r > 0, |z| < 1, \quad (6.1.4)$$

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, P_2|_{z=-1} = P|_{z=-1}, \quad (6.1.5)$$

$$k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=1}, k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (6.1.6)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -q, \quad -1 < z < 1, \quad (6.1.7)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad |z| > 1, \quad (6.1.8)$$

$$P|_{\tau=0} = P_1|_{\tau=0} = P_2|_{\tau=0} = 0. \quad (6.1.9)$$

6.2. Разложение по формальному параметру

В задаче (6.1.2)–(6.1.9) введен произвольный асимптотический параметр ε путем формальной замены коэффициента проницаемости k_z на k_z/ε . В соответствии с принятыми обозначениями. Это осуществлено заменой ${}_1^0\chi_z$ на ${}_1^0\chi_z/\varepsilon$, k_1 на εk_1 и k_2 на εk_2 . Отсюда следует, что уменьшение параметра ε соответствует возрастанию вертикальной проницаемости центральной области k_z .

Иначе говоря, нулевые значения асимптотического параметра $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствуют бесконечной вертикальной проницаемости пласта $k_z \rightarrow \infty$. Это означает, что давление по толщине пласта в нулевом приближении как бы мгновенно выравнивается и не зависит от вертикальной координаты z при $|z| < 1$. В этом заключается физический смысл реализованной параметризации задачи.

Отметим, что решение исходной задачи может быть получено из решения параметризованной задачи при $\varepsilon = 1$. Задача (6.1.2)–(6.1.9) является, таким образом, частным случаем следующей более общей задачи, содержащей параметр асимптотического разложения как в уравнении для центрального слоя (пласта), так и в условиях сопряжения

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} - {}_1^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z > 1, \quad (6.2.1)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \tau} - {}_2^2\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) - {}_2^2\chi_z \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z < -1, \quad (6.2.2)$$

$$\varepsilon \frac{\partial P}{\partial \tau} - \varepsilon^0 {}_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) - {}^0_1\chi_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1, \quad (6.2.3)$$

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, \quad P_2|_{z=-1} = P|_{z=-1}, \quad (6.2.4)$$

$$\varepsilon k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \varepsilon k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (6.2.5)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -q, \quad -1 < z < 1, \quad (6.2.6)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad |z| > 1, \quad (6.2.7)$$

$$P|_{\tau=0} = P_1|_{\tau=0} = P_2|_{\tau=0} = 0. \quad (6.2.8)$$

Будем искать решение задачи (6.2.1)–(6.2.8), представляя функцию давления P каждой из областей асимптотической формулой по параметру ε [2]

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \dots + \varepsilon^n P^{(n)} + \theta^{(n)}, \quad P_1 = P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \dots + \varepsilon^n P_1^{(n)} + \theta_1^{(n)}, \quad (6.2.9)$$

$$P_2 = P_2^{(0)} + \varepsilon P_2^{(1)} + \dots + \varepsilon^n P_2^{(n)} + \theta_2^{(n)}.$$

Подставив выражения (6.2.9) в (6.2.1)–(6.2.8) и сгруппировав слагаемые по степеням параметра разложения ε , получим

$$\left(\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial \tau} - {}_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} \right) + \quad (6.2.10)$$

$$+ \varepsilon \left(\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial \tau} - {}_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z > 1,$$

$$\left(\frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial \tau} - {}_2\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial r} \right) - {}_2\chi_z \frac{\partial^2 P_2^{(0)}}{\partial z^2} \right) + \quad (6.2.11)$$

$$+ \varepsilon \left(\frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \tau} - {}_2\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} \right) - {}_2\chi_z \frac{\partial^2 P_2^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z < -1,$$

$$\begin{aligned}
& - {}^0_1\chi_z \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial P^{(0)}}{\partial \tau} - {}^0_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) - {}^0_1\chi_z \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \\
& + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \tau} - {}^0_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) - {}^0_1\chi_z \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1,
\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

$$\left. \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} + \varepsilon \left(\left. \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} - k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} \right) + \dots = 0, \tag{6.2.13}$$

$$\left. \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} + \varepsilon \left(\left. \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1} - k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) + \dots = 0,$$

$$\left(P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=1} = \left(P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=1}, \tag{6.2.14}$$

$$\left(P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=-1} = \left(P_2^{(0)} + \varepsilon P_2^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=-1},$$

$$\left(\left. \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} + \varepsilon \left. \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} + \dots \right) = -q, \quad -1 < z < 1, \tag{6.2.15}$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \left(\left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} + \varepsilon \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} + \dots \right) = 0, \tag{6.2.16}$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \left(\left. \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} + \varepsilon \left. \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} + \dots \right) = 0, \quad |z| > 1,$$

$$P^{(0)} \Big|_{\tau=0} + \varepsilon P^{(1)} \Big|_{\tau=0} + \dots = 0, \quad P_1^{(0)} \Big|_{\tau=0} + \varepsilon P_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} + \dots = 0, \tag{6.2.17}$$

$$P_2^{(0)} \Big|_{\tau=0} + \varepsilon P_2^{(1)} \Big|_{\tau=0} + \dots = 0.$$

Анализ задачи показывает, что сомножители при степенях ε в (6.2.12) и (6.2.13) содержат соседние коэффициенты разложения и в этом смысле являются сцепленными. Для решения соответствующих уравнений осуществлена процедура расцепления.

6.3. Нулевое приближение

Формально устремим ε к нулю в уравнении (6.2.12), получим

$\partial^2 P^{(0)}/\partial z^2 = 0$. Результат интегрирования $\partial P^{(0)}/\partial z = A(r, \tau)$, с учетом граничных условий (6.2.13), позволяет установить, что $A(r, \tau) = 0$. Таким образом, в нулевом приближении давление является функцией только от r и τ : $P^{(0)} = P^{(0)}(r, \tau)$. Следовательно, в нулевом приближении давление в каждом цилиндрическом сечении центральной области с осью z одинаково по высоте несущего пласта. Далее приравняв к нулю коэффициенты при ε в уравнении (6.2.12), получим

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial \tau} - {}^0_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) - {}^0_1\chi_z \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2} = 0. \quad (6.3.1)$$

Так как $P^{(0)}(r, \tau)$ не зависит от переменной z , вспомогательная функция $E(r, \tau)$, составленная из слагаемых уравнения (6.3.1), содержащих $P^{(0)}$

$$E(r, \tau) = \frac{1}{{}^0_1\chi_z} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) = \widehat{L}P^{(0)}, \quad (6.3.2)$$

также не зависит от z . Заметим, что в (6.3.2) и далее для удобства использован дифференциальный оператор

$$\widehat{L} = \frac{1}{{}^0_1\chi_z} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (6.3.3)$$

С учетом этого (6.3.1) можно представить как

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2} = E(r, \tau). \quad (6.3.4)$$

Проинтегрировав последовательно, найдем выражения для первой производной от первого коэффициента $P^{(1)}$ по переменной z

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} = z E(r, \tau) + F(r, \tau) \quad (6.3.5)$$

и первого коэффициента разложения в виде квадратного трехчлена

$$P^{(1)} = \frac{z^2}{2} E(r, \tau) + z F(r, \tau) + Q(r, \tau) \quad (6.3.6)$$

с функциональными коэффициентами $E(r, \tau)$, $F(r, \tau)$ и $Q(r, \tau)$, подлежащими определению. Из граничных условий (6.2.13) при сомножителе ε в первой степени с учетом (6.3.5) имеем

$$k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} = E(r, \tau) + F(r, \tau), \quad k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} = -E(r, \tau) + F(r, \tau). \quad (6.3.7)$$

Отсюда получим выражения для функциональных коэффициентов $E(r, \tau)$ и $F(r, \tau)$ через следы производных из внешних областей

$$E(r, \tau) = \frac{1}{2} \left(k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right), \quad (6.3.8)$$

$$F(r, \tau) = \frac{1}{2} \left(k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} + k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right). \quad (6.3.9)$$

Подставив выражение (6.3.8) в (6.3.2), получим искомое уравнение для определения нулевого приближения поля давления в пласте

$$\frac{1}{{}_0^1 \chi_z} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{{}_0^1 \chi_r}{{}_0^1 \chi_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right). \quad (6.3.10)$$

Уравнение (6.3.10) определяет некоторый фундаментальный оператор \widehat{L}_f исходной задачи, включающий следы производных из внешних областей

$$\widehat{L}_f P^{(0)} \equiv \frac{1}{{}_0^1 \chi_z} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{{}_0^1 \chi_r}{{}_0^1 \chi_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} \left(k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right). \quad (6.3.11)$$

Все дальнейшее решение связано со свойствами этого оператора. Главное его свойство может быть установлено интегральным усреднением

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P dz \text{ исходного уравнения (6.2.3) с учетом (6.2.5)}$$

$$\widehat{L}_f \langle P \rangle \equiv \frac{1}{{}_0^1 \chi_z} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \tau} - \frac{{}_0^1 \chi_r}{{}_0^1 \chi_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} \left(k_1 \left. \frac{\partial P_1}{\partial z} \right|_{z=1} - k_2 \left. \frac{\partial P_2}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) = 0. \quad (6.3.12)$$

Это означает, что асимптотически осредненное решение исходной задачи доставляют нулевые значения фундаментальному оператору $\widehat{L}_f \langle P \rangle = 0$. С помощью дифференциального оператора (6.3.3) уравнение (6.3.10) можно записать как

$$\widehat{L}P^{(0)} = \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right), \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1. \quad (6.3.13)$$

Окончательная постановка задачи в нулевом приближении включает также уравнения в покрывающих и подстилающих породах

$$\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial \tau} - {}^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2}, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z > 1, \quad (6.3.14)$$

$$\frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial \tau} - {}^2\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial r} \right) - {}^2\chi_z \frac{\partial^2 P_2^{(0)}}{\partial z^2}, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z < -1, \quad (6.3.15)$$

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial \tau} - {}^0\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{{}^0\chi_z}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = 0, \quad (6.3.16)$$

$$\tau > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1,$$

а также соответствующие граничные условия

$$P^{(0)} = P_1^{(0)} \Big|_{z=1} = P_2^{(0)} \Big|_{z=-1}, \quad (6.3.17)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -q, \quad -1 < z < 1, \quad (6.3.18)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad |z| > 1, \quad (6.3.19)$$

$$P^{(0)} \Big|_{\tau=0} = P_1^{(0)} \Big|_{\tau=0} = P_2^{(0)} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (6.3.20)$$

Выражения (6.3.14)–(6.3.20) представляют краевую задачу для нулевого коэффициента разложения $P^{(0)}$ или нулевого приближения. Отметим, что в отличие от исходной задачи, которая представляет задачу сопряжения для уравнений параболического типа, она является смешанной, поскольку урав-

нение для пласта не является параболическим. Кроме того, это уравнение содержит следы производных из внешних областей.

Непосредственным интегральным усреднением исходной задачи не трудно убедиться, что (6.3.14)–(6.3.20) представляет задачу для асимптотически осредненных по толщине центральной зоны значений давления.

6.4. Решение задачи о нестационарном поле давления в нулевом приближении

Для решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа – Карсона [67] по переменной τ

$$f(p) = p \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) f(\tau) d\tau, \quad (6.4.1)$$

и интегральным преобразованием Бесселя-Фурье [38] по переменной r

$$f^s = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(sr) dr. \quad (6.4.2)$$

Математическая постановка гидродинамической задачи в нулевом приближении (6.3.14)–(6.3.20) в пространствах изображений Лапласа – Карсона и Бесселя – Фурье запишется как

$$\frac{\partial^2 P_1^{(0)us}}{\partial z^2} - (p+1\chi_r s^2) P_1^{(0)us} = 0, \quad z > 1, \quad (6.4.3)$$

$$\frac{\partial^2 P_2^{(0)us}}{\partial z^2} - \frac{p+1\chi_r s^2}{1\chi_z} P_2^{(0)us} = 0, \quad z < -1, \quad (6.4.4)$$

$$\frac{p+1\chi_r s^2}{0\chi_z} P^{(0)us} - \frac{0\chi_r}{0\chi_z} q = \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(0)us}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(0)us}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right), \quad |z| < 1, \quad (6.4.5)$$

$$P^{(0)us} = P_1^{(0)us} \Big|_{z=1} = P_2^{(0)us} \Big|_{z=-1}. \quad (6.4.6)$$

Решения уравнений (6.4.3), (6.4.4) с учетом граничных условий (6.4.6) представляются через $P^{(0)us}$ в следующем виде:

$$P_1^{(0)us} = P^{(0)us} \exp\left(-\sqrt{p+1\chi_r s^2} (z-1)\right) = P^{(0)us} \exp\left(-\frac{\Lambda_1}{k_1} (z-1)\right), \quad (6.4.7)$$

$$P_2^{(0)us} = P^{(0)us} \exp\left(\sqrt{\frac{p+{}^2_1\chi_r s^2}{{}^2_1\chi_z}}(z+1)\right) = P^{(0)us} \exp\left(\frac{\Lambda_2}{k_2}(z+1)\right). \quad (6.4.8)$$

В полученных решениях и ниже использованы обозначения

$$\Lambda_1 = k_1 \sqrt{p+{}^1_1\chi_r s^2}, \quad \Lambda_2 = k_2 \sqrt{\frac{p+{}^2_1\chi_r s^2}{{}^2_1\chi_z}}, \quad \Lambda^2 = \frac{p+{}^0_1\chi_r s^2}{{}^0_1\chi_z}. \quad (6.4.9)$$

С помощью выражений (6.4.7) и (6.4.8) найдем следы производных из внешних областей для правой части уравнения (6.4.5)

$$\left. \frac{\partial P_1^{(0)us}}{\partial z} \right|_{z=1} = -\frac{\Lambda_1}{k_1} P^{(0)us}, \quad \left. \frac{\partial P_2^{(0)us}}{\partial z} \right|_{z=-1} = \frac{\Lambda_2}{k_2} P^{(0)us}. \quad (6.4.10)$$

С учетом (6.4.10) выражения для функциональных коэффициентов (6.3.8) и (6.3.9) в пространствах изображений представляются как

$$E(s, p) = -\frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)P^{(0)us}, \quad F(s, p) = -\frac{1}{2}(\Lambda_1 - \Lambda_2)P^{(0)us}. \quad (6.4.11)$$

Подставляя выражения (6.4.10) в уравнение (6.4.5), после простых преобразований получим обыкновенное алгебраическое уравнение для определения $P^{(0)us}$

$$\Lambda^2 P^{(0)us} - \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} q = -\frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)P^{(0)us}, \quad |z| < 1, \quad (6.4.12)$$

откуда окончательно имеем

$$P^{(0)us} = \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \frac{2q}{2\Lambda^2 + \Lambda_1 + \Lambda_2}, \quad |z| < 1. \quad (6.4.13)$$

С помощью (6.4.7), (6.4.8) получим выражения для вмещающих пористых пластов

$$P_1^{(0)us} = \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \frac{2q}{2\Lambda^2 + \Lambda_1 + \Lambda_2} \exp(-k_1 \Lambda_1 (z-1)), \quad z > 1, \quad (6.4.14)$$

$$P_2^{(0)us} = \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \frac{2q}{2\Lambda^2 + \Lambda_1 + \Lambda_2} \exp(k_2 \Lambda_2 (z+1)), \quad z < -1. \quad (6.4.15)$$

В исходных обозначениях решение для центрального пласта имеет вид

$$P^{(0)us} = \frac{{}_0^0\chi_r q}{{}_1^0\chi_z} \left/ \left(\frac{p+{}_1^0\chi_r s^2}{{}_1^0\chi_z} + \frac{1}{2} \left(k_1 \sqrt{p+{}_1^1\chi_r s^2} + k_2 \sqrt{p+{}_1^2\chi_r s^2} \right) \right) \right. \quad (6.4.16)$$

Выражения (6.4.13)–(6.4.15) представляют искомое решение задачи для нулевого коэффициента разложения в пространствах преобразований Лапласа – Карсона и Фурье – Бесселя.

6.5. Первое приближение

Из (6.2.10)–(6.2.17) следуют выражения для первого коэффициента разложения

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial \tau} - {}_1^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z > 1, \quad (6.5.1)$$

$$\frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \tau} - {}_2^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} \right) - {}_2^1\chi_z \frac{\partial^2 P_2^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z < -1, \quad (6.5.2)$$

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \tau} - {}_0^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) - {}_0^1\chi_z \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1, \quad (6.5.3)$$

$$\left. \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=1} = k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad \left. \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=-1} = k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1}, \quad (6.5.4)$$

$$P^{(1)} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad P^{(1)} \Big|_{z=-1} = P_2^{(1)} \Big|_{z=-1}, \quad (6.5.5)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \left. \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad -1 < z < 1, \quad (6.5.6)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad z > 1, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \left. \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad z < -1, \quad (6.5.7)$$

$$P^{(1)} \Big|_{\tau=0} = P_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} = P_2^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (6.5.8)$$

Уравнение (6.5.3) и выражения (6.5.4) содержат коэффициенты первого и второго порядков разложения, поэтому соответствующая задача также является зацепленной. Для расцепления используем выражение для первого ко-

эффицента разложения, полученного в разделе 6.3. Выражение для $P^{(1)}$ имеет вид (6.3.6), в котором два первых функциональных коэффициента определяются выражениями (6.3.8), (6.3.9) через найденное выше нулевое приближение, а третий – $Q(r, \tau)$ – функция, подлежащая определению. Получим уравнение для ее определения. Для этого подставим в (6.5.3) выражение (6.3.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial z^2} &= \frac{1}{{}_0^1\chi_z} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{{}_0^1\chi_r}{{}_0^1\chi_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) = \widehat{L}P^{(1)} = \\ &= \frac{z^2}{2} \widehat{L}E(r, \tau) + z \widehat{L}F(r, \tau) + \widehat{L}Q(r, \tau), \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

где дифференциальный оператор \widehat{L} , определяемый выражением (6.3.3). Из (6.5.9) найдем выражение для производной второго коэффициента разложения

$$\frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} = \frac{z^3}{6} \widehat{L}E(r, \tau) + \frac{z^2}{2} \widehat{L}F(r, \tau) + z \widehat{L}Q(r, \tau) + R(r, \tau). \quad (6.5.10)$$

Воспользовавшись (6.5.4), получим систему уравнений для определения $\widehat{L}Q(r, \tau)$ и $R(r, \tau)$

$$\left. \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=1} = \frac{1}{6} \widehat{L}E(r, \tau) + \frac{1}{2} \widehat{L}F(r, \tau) + \widehat{L}Q(r, \tau) + R(r, \tau) = k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad (6.5.11)$$

$$\left. \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=-1} = -\frac{1}{6} \widehat{L}E(r, \tau) + \frac{1}{2} \widehat{L}F(r, \tau) - \widehat{L}Q(r, \tau) + R(r, \tau) = k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1}. \quad (6.5.12)$$

Отсюда получим

$$R(r, \tau) = \frac{1}{2} \left(k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} + k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) - \frac{1}{2} \widehat{L}F(r, \tau), \quad (6.5.13)$$

$$\widehat{L}Q(r, \tau) = \frac{1}{2} \left(k_1 \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} - k_2 \left. \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) - \frac{1}{6} \widehat{L}E(r, \tau). \quad (6.5.14)$$

Далее, выразив $Q(r, \tau)$ из (6.3.6)

$$Q(r, \tau) = P^{(1)} - \frac{z^2}{2} E(r, \tau) - z F(r, \tau) \quad (6.5.15)$$

и подставив его в (6.5.14), получим уравнение для первого коэффициента разложения $P^{(1)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{{}_0^1\chi_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{{}_0^1\chi_z}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \widehat{L}E(r, \tau) + z \widehat{L}F(r, \tau). \end{aligned} \quad (6.5.16)$$

Задача для первого коэффициента $P^{(1)}$ включает также следующие уравнения и соотношения:

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial \tau} - {}_1^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z > 1, \quad (6.5.17)$$

$$\frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \tau} - {}_2^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} \right) - {}_2^1\chi_z \frac{\partial^2 P_2^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z < -1, \quad (6.5.18)$$

$$P^{(1)} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad P^{(1)} \Big|_{z=-1} = P_2^{(1)} \Big|_{z=-1}, \quad (6.5.19)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z > 1, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z < -1, \quad (6.5.20)$$

$$P^{(1)} \Big|_{\tau=0} = P_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} = P_2^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (6.5.21)$$

Задача (6.5.16)–(6.5.21) с учетом (6.5.6) имеет множество решений. Однако если к ней добавить условие (6.5.6), то задача имеет только тривиальное решение. Ниже показано, что для получения единственного решения задачи для первого коэффициента разложения условие (6.5.6) следует ослабить и заменить нелокальным средне интегральным. Это обосновывается наличием погранслоя на линии $r = 0$, $-1 < z < 1$. Выполнение же граничного условия (6.5.6) может быть достигнуто построением погранслойных функций.

Аналогично предыдущим главам, требуемое средне интегральное условие найдено путем осреднения задачи для остаточного члена.

6.6. Оценка остаточного члена и получение дополнительного условия

Подставив асимптотические формулы, следующие из (6.2.9)

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \theta, \quad P_1 = P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \theta_1, \quad P_2 = P_2^{(0)} + \varepsilon P_2^{(1)} + \theta_2, \quad (6.6.1)$$

в (6.2.1)–(6.2.8), и воспользовавшись соотношениями для нулевого и первого коэффициентов (6.3.1), (6.5.3) и другими аналогичными, получим задачу для остаточного члена в виде

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - {}_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z > 1, \quad (6.6.2)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} - {}_2\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right) - {}_2\chi_z \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z < -1, \quad (6.6.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - {}_0\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{{}_0\chi_z}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \\ & = -\varepsilon \left[\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \tau} - {}_0\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) \right], \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1, \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

$$\theta_1|_{z=1} = \theta|_{z=1}, \quad \theta_2|_{z=-1} = \theta|_{z=-1}, \quad (6.6.5)$$

$$k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} + \varepsilon k_1 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad (6.6.6)$$

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} + \varepsilon k_2 \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (6.6.7)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\varepsilon \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad -1 < z < 1, \quad (6.6.8)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z > 1, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z < -1, \quad (6.6.9)$$

$$\theta|_{\tau=0} = \theta_1|_{\tau=0} = \theta_2|_{\tau=0} = 0. \quad (6.6.10)$$

Поскольку задача (6.6.2)–(6.6.10) не содержит переменных коэффициентов, то нет необходимости представлять остаточный член в виде асимптотической последовательности. Усредним исходную задачу в интервале центрального пласта, применив интегральную процедуру

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \theta dz. \quad (6.6.11)$$

С учетом результатов интегрирования

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right), \end{aligned} \quad (6.6.12)$$

которое осуществлено с использованием (6.6.6) и (6.6.7), получим следующую осредненную по толщине центрального пласта задачу для остаточного члена:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - {}_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z > 1, \quad (6.6.13)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} - {}_2\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right) - {}_2\chi_z \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z < -1, \quad (6.6.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \tau} - {}_0\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial r} \right) - \frac{{}_0\chi_z}{2} \left(k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = \\ = \frac{\partial \langle P^{(1)} \rangle}{\partial \tau} - {}_0\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle P^{(1)} \rangle}{\partial r} \right) - \frac{{}_0\chi_z}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right), \end{aligned} \quad (6.6.15)$$

$$\theta_1|_{z=1} = \theta|_{z=1}, \quad \theta_2|_{z=-1} = \theta|_{z=-1}, \quad (6.6.16)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\varepsilon \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \langle P^{(1)} \rangle}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad -1 < z < 1. \quad (6.6.17)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z > 1, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z < -1, \quad (6.6.18)$$

$$\theta|_{\tau=0} = \theta_1|_{\tau=0} = \theta_2|_{\tau=0} = 0. \quad (6.6.19)$$

Заметим, что уравнение (6.6.15) может быть записано также через фундаментальный оператор как $\widehat{L}_f \langle \theta \rangle = -\varepsilon \widehat{L}_f \langle P^{(1)} \rangle$.

Необходимым условием тривиального решения задачи (6.6.13)–(6.6.19) является обращение в нуль правых частей уравнения (6.6.15) и условия (6.6.17)

$$\begin{aligned} \widehat{L}_f \langle P^{(1)} \rangle = & \frac{1}{{}^0_1\chi_z} \frac{\partial \langle P^{(1)} \rangle}{\partial \tau} - \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle P^{(1)} \rangle}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.6.20)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \langle P^{(1)} \rangle}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad -1 < z < 1. \quad (6.6.21)$$

Выполнение условия (6.6.20) обусловлено соотношением (6.5.16). Усреднив его, можно убедиться, что правая часть (6.6.15) действительно равна нулю $\widehat{L}_f \langle P^{(1)} \rangle = 0$.

Условие (6.6.21) может быть использовано в качестве граничного в задаче для первого коэффициента разложения. Ниже показано, что при добавлении этого условия задача для первого коэффициента разложения имеет единственное решение. При этом осредненная задача для остаточного члена имеет только нулевое решение.

6.7. Определение первого коэффициента разложения

При добавлении средне интегрального условия (6.6.21) вместо условия (6.5.6) задача для первого коэффициента разложения приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \widehat{L}_f P^{(1)} = & \frac{1}{{}^0_1\chi_z} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \widehat{L}E(r, \tau) + z \widehat{L}F(r, \tau), \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1, \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial \tau} - {}^1_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z > 1, \quad (6.7.2)$$

$$\frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \tau} - {}_2^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} \right) - {}_2^1\chi_z \frac{\partial^2 P_2^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad z < -1, \quad (6.7.3)$$

$$P^{(1)} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad P^{(1)} \Big|_{z=-1} = P_2^{(1)} \Big|_{z=-1}, \quad (6.7.4)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \langle P^{(1)} \rangle}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad -1 < z < 1, \quad (6.7.5)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z > 1, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z < -1, \quad (6.7.6)$$

$$P^{(1)} \Big|_{\tau=0} = P_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} = P_2^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (6.7.7)$$

Поскольку решение этой задачи отыскивается в виде (6.3.6), в котором только коэффициент $Q(r, \tau)$ является неизвестным, то предельное условие (6.7.5) представляется как

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial Q(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{6} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial E(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad -1 < z < 1. \quad (6.7.8)$$

В пространстве изображения Лапласа – Карсона [67] задача (6.7.1)–(6.7.7) записывается в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{{}_1^0\chi_z} p P^{(1)u} - \frac{{}_0^1\chi_r}{{}_1^0\chi_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(1)u}}{\partial r} \right) &= \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \widehat{L}E^u(r, p) + z \widehat{L}F^u(r, p), \quad r > 0, \quad |z| < 1, \end{aligned} \quad (6.7.9)$$

$$p P_1^{(1)u} - {}_1^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 P_1^{(1)u}}{\partial z^2} = 0, \quad r > 0, \quad z > 1, \quad (6.7.10)$$

$$p P_2^{(1)u} - {}_2^1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2^{(1)u}}{\partial r} \right) - {}_2^1\chi_z \frac{\partial^2 P_2^{(1)u}}{\partial z^2} = 0, \quad r > 0, \quad z < -1, \quad (6.7.11)$$

$$P^{(1)u} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)u} \Big|_{z=1}, \quad P^{(1)u} \Big|_{z=-1} = P_2^{(1)u} \Big|_{z=-1}, \quad (6.7.12)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial \langle P^{(1)u} \rangle}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad -1 < z < 1, \quad (6.7.13)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z > 1, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P_2^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad z < -1. \quad (6.7.14)$$

Применение преобразования Фурье – Бесселя [38] по радиальной координате с учетом результатов интегрирования

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) J_0(sr) r dr &= r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} J_0(sr) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} r J_1(sr) dr = \\ &= \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - s^2 \int_0^\infty P^{(1)} r J_0(sr) dr \end{aligned} \quad (6.7.15)$$

позволяет свести задачу (6.7.9)–(6.7.14) к решению обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{\chi_z} + \frac{\chi_r}{\chi_z} s^2 \right) P^{(1)us} - \frac{\chi_r}{\chi_z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(1)us}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(1)us}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \left[\left(\frac{p}{\chi_z} + \frac{\chi_r}{\chi_z} s^2 \right) E(s, p) - \frac{\chi_r}{\chi_z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial E(s, p)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right] &+ \\ + z \left[\left(\frac{p}{\chi_z} + \frac{\chi_r}{\chi_z} s^2 \right) F(s, p) - \frac{\chi_r}{\chi_z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial F(s, p)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right], \end{aligned} \quad (6.7.16)$$

$$\left(p + \chi_r s^2 \right) P_1^{(1)us} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)us}}{\partial z^2} = 0, \quad r > 0, \quad z > 1, \quad (6.7.17)$$

$$\left(p + \chi_r s^2 \right) P_2^{(1)us} - \chi_z \frac{\partial^2 P_2^{(1)us}}{\partial z^2} = 0, \quad r > 0, \quad z < -1, \quad (6.7.18)$$

$$P^{(1)us} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)us} \Big|_{z=1}, \quad P^{(1)us} \Big|_{z=-1} = P_2^{(1)us} \Big|_{z=-1}. \quad (6.7.19)$$

Решения уравнений (6.7.17) и (6.7.18) с учетом (6.7.19) представляются как

$$P_1^{(1)us} = P^{(1)us} \Big|_{z=1} \exp(-k_1 \Lambda_1 (z-1)), \quad (6.7.20)$$

$$P_2^{(1)us} = P^{(1)us} \Big|_{z=-1} \exp(k_2 \Lambda_2 (z+1)). \quad (6.7.21)$$

Следы производных из внешних областей мультипликативно выражаются через граничные значения решения в центральном пласте

$$\frac{\partial}{\partial z} P_1^{(1)us} \Big|_{z=1} = -k_1 \Lambda_1 P^{(1)us} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial}{\partial z} P_2^{(1)us} \Big|_{z=-1} = k_2 \Lambda_2 P^{(1)us} \Big|_{z=-1}. \quad (6.7.22)$$

Поэтому уравнение (6.5.14) в пространствах обоих изображений

$$(\hat{L}Q)^{us} = \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(1)us}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(1)us}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) - \frac{1}{6} (\hat{L}E)^{us} \quad (6.7.23)$$

с учетом соотношений

$$(\hat{L}Q)^{us} \Rightarrow \left(\frac{p}{\frac{0}{1}\chi_z} + \frac{\frac{0}{1}\chi_r}{\frac{0}{1}\chi_z} s^2 \right) Q(s, p) - \frac{\frac{0}{1}\chi_r}{\frac{0}{1}\chi_z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial Q(r, p)}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad (6.7.24)$$

$$(\hat{L}E)^{us} \Rightarrow \left(\frac{p}{\frac{0}{1}\chi_z} + \frac{\frac{0}{1}\chi_r}{\frac{0}{1}\chi_z} s^2 \right) E(s, p) - \frac{\frac{0}{1}\chi_r}{\frac{0}{1}\chi_z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial E(r, p)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \quad (6.7.25)$$

предельного равенства (6.7.8) и выражений (6.4.11) в пространстве преобразований Лапласа – Карсона преобразуется к алгебраическому

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{\frac{0}{1}\chi_z} + \frac{\frac{0}{1}\chi_r}{\frac{0}{1}\chi_z} s^2 \right) Q &= \frac{1}{8} \left([(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 + 2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2] P^{(0)us} \right) - \\ &- \frac{1}{2} (\Lambda_1 + \Lambda_2) Q(s, p) + \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{12} \left(\frac{p}{\frac{0}{1}\chi_z} + \frac{\frac{0}{1}\chi_r}{\frac{0}{1}\chi_z} s^2 \right) P^{(0)us}, \end{aligned}$$

решение которого записывается в виде

$$Q = \frac{1}{12} \left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{2(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 + 6(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{2\Lambda^2 + \Lambda_1 + \Lambda_2} \right) P^{(0)us}. \quad (6.7.26)$$

Выражение (6.3.6) в пространствах обоих изображений представляется как

$$\begin{aligned} P^{(1)us} &= \frac{z^2}{2} E(s, p) + z F(s, p) + Q(s, p) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - z^2 \right) (\Lambda_1 + \Lambda_2) - z(\Lambda_1 - \Lambda_2) + \frac{1}{3} \left(\frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 + 3(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{2\Lambda^2 + \Lambda_1 + \Lambda_2} \right) \right] P^{(0)us}. \end{aligned} \quad (6.7.27)$$

В соответствии с (6.7.20), (6.7.21) решение для вмещающих сред имеет вид

$$P_1^{(1)us} = \frac{1}{6} \left[2\Lambda_2 - 4\Lambda_1 + \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 + 3(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{2\Lambda^2 + \Lambda_1 + \Lambda_2} \right] P^{(0)us} \exp(-k_1 \Lambda_1 (z-1)), \quad (6.7.28)$$

$$P_2^{(1)us} = \frac{1}{6} \left[2\Lambda_1 - 4\Lambda_2 + \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 + 3(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{2\Lambda^2 + \Lambda_1 + \Lambda_2} \right] P^{(0)us} \exp(k_2 \Lambda_2 (z+1)). \quad (6.7.29)$$

Выражения (6.7.27)–(6.7.29) представляют искомое решение задачи для первого коэффициента разложения в пространствах преобразований Лапласа – Карсона и Фурье – Бесселя.

6.8. Нахождение погранслойных поправок

Из (6.7.27) следует, что предельное выражение для радиальной производной первого коэффициента асимптотического разложения предельного условия не обращается в нуль при $r = 0$ вопреки требованиям исходной задачи (6.5.6). Указанный недостаток решения устраняется построением погранслойной функции. Для этого в задаче для остаточного члена (6.6.2)–(6.6.10) введем растянутую переменную $y = r/\sqrt{\varepsilon}$, вид которой устанавливается на основании анализа размерностей [118].

Обозначив $f(r, \tau) = \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{{}_0^0 \chi_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right)$, вместо (6.6.4) получим

$$\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{{}_0^0 \chi_r}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - {}_1^0 \chi_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -\varepsilon^2 f(\varepsilon, y, \tau), \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1. \quad (6.8.1)$$

Записывая остаточный член в виде асимптотической формулы

$$\theta = \Pi^{(0)} + \varepsilon \Pi^{(1)} + \dots, \quad \theta_1 = \Pi_1^{(0)} + \varepsilon \Pi_1^{(1)} + \dots, \quad \theta_2 = \Pi_2^{(0)} + \varepsilon \Pi_2^{(1)} + \dots \quad (6.8.2)$$

представим (6.6.2)–(6.6.10) в виде задач для коэффициентов разложения различных порядков

$$-\frac{{}_1\chi_r}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial y} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{{}_1\chi_r}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \Pi_1^{(0)}}{\partial z^2} \right] + \dots = 0, \quad (6.8.3)$$

$$\tau > 0, \quad y > 0, \quad z > 1,$$

$$-\frac{{}_2\chi_r}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi_2^{(0)}}{\partial y} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial \Pi_2^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{{}_2\chi_r}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi_2^{(1)}}{\partial y} \right) - \frac{{}_2\chi_z}{y} \frac{\partial^2 \Pi_2^{(0)}}{\partial z^2} \right] + \dots = 0, \quad (6.8.4)$$

$$\tau > 0, \quad y > 0, \quad z < -1,$$

$$\begin{aligned} & -\frac{{}_0\chi_r}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial y} \right) - \frac{{}_0\chi_z}{y} \frac{\partial^2 \Pi^{(0)}}{\partial z^2} + \\ & + \varepsilon \left[\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{{}_0\chi_r}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial y} \right) - \frac{{}_0\chi_z}{y} \frac{\partial^2 \Pi^{(1)}}{\partial z^2} \right] + \dots = 0, \quad \tau > 0, \quad y > 0, \quad |z| < 1, \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

$$\Pi_1^{(0)} \Big|_{z=1} - \Pi^{(0)} \Big|_{z=1} + \varepsilon (\Pi_1^{(1)} \Big|_{z=1} - \Pi^{(1)} \Big|_{z=1}) + \dots = 0,$$

$$(6.8.6)$$

$$\Pi_2^{(0)} \Big|_{z=-1} - \Pi^{(0)} \Big|_{z=-1} + \varepsilon (\Pi_2^{(1)} \Big|_{z=-1} - \Pi^{(1)} \Big|_{z=-1}) + \dots = 0,$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} + k_1 \frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} +$$

$$+ \varepsilon \left(k_1 \frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{\partial \Pi^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=1} + k_1 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) + \dots = 0,$$

$$(6.8.7)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} + k_2 \frac{\partial \Pi_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} - \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} +$$

$$+ \varepsilon \left(k_2 \frac{\partial \Pi_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} - \frac{\partial \Pi^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} + k_2 \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \dots = 0,$$

$$(6.8.8)$$

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0 \frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} + \varepsilon \left(\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0 \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} + \varepsilon \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right) \dots = 0, \quad (6.8.9)$$

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0 \frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} + \varepsilon \lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0 \frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} + \dots = 0, \quad z > 1, \quad (6.8.10)$$

$$\begin{aligned} \lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0 \frac{\partial \Pi_2^{(0)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} + \varepsilon \lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0 \frac{\partial \Pi_2^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} + \dots = 0, \quad z < -1, \\ \Pi^{(0)} \Big|_{\tau=0} + \varepsilon \Pi^{(1)} \Big|_{\tau=0} + \dots = 0, \quad \Pi_1^{(0)} \Big|_{\tau=0} + \varepsilon \Pi_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} + \dots = 0, \\ \Pi_2^{(0)} \Big|_{\tau=0} + \varepsilon \Pi_2^{(1)} \Big|_{\tau=0} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6.8.11)$$

Полагая $\varepsilon = 0$, из (6.8.3) получим $\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial y} \right) = 0$, или $\left(y \frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial y} \right) = C$.

Согласно (6.8.10) постоянная C равна нулю $C = 0$, поэтому $(\partial \Pi_1^{(0)} / \partial y) = 0$ или $\Pi_1^{(0)}$ не зависит от y , а является функцией переменных z и τ : $\Pi_1^{(0)} = \Pi_1^{(0)}(z, \tau)$. Далее сомножитель при ε в первой степени в (6.8.3) приводит к уравнению

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial y} \right) = \frac{1}{{}_1\chi_r} \frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{1}{{}_1\chi_r} \frac{\partial^2 \Pi_1^{(0)}}{\partial z^2}, \quad (6.8.12)$$

правая часть которого не зависит от переменной y . Результат интегрирования этого уравнения представляется как

$$y \frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial y} = \left(\frac{1}{{}_1\chi_r} \frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{1}{{}_1\chi_r} \frac{\partial^2 \Pi_1^{(0)}}{\partial z^2} \right) \frac{y^2}{2} + C, \quad (6.8.13)$$

в котором постоянная равна нулю согласно предельному соотношению (6.8.10), поэтому выражение для производной имеет вид

$$\frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial y} = \left(\frac{1}{{}_1\chi_r} \frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{1}{{}_1\chi_r} \frac{\partial^2 \Pi_1^{(0)}}{\partial z^2} \right) \frac{y}{2}. \quad (6.8.14)$$

Условие регулярности на бесконечности может быть выполнено только путем обращения в нуль сомножителя в скобках в последнем соотношении, поэтому уравнение для нулевого коэффициента разложения представляется как

$$\frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Pi_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad (6.8.15)$$

т.е. $(\partial \Pi_1^{(1)} / \partial y) = 0$. Отсюда следует, что $\Pi_1^{(1)}$ также не зависит от переменной

y , а является функцией переменных z и τ : $\Pi_1^{(1)} = \Pi_1^{(1)}(z, \tau)$. Рассуждая аналогично, для второго коэффициента имеем $\Pi_1^{(2)} = \Pi_1^{(2)}(z, \tau)$ и уравнение для первого коэффициента

$$\frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Pi_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0. \quad (6.8.16)$$

Аналогично получим, что $\Pi_2^{(1)}$ также не зависит от переменной y , а является функцией переменных z и τ : $\Pi_2^{(1)} = \Pi_2^{(1)}(z, \tau)$, а $\Pi_2^{(0)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Pi_2^{(0)}}{\partial \tau} - {}_2^1\chi_z \frac{\partial^2 \Pi_2^{(0)}}{\partial z^2} = 0 \text{ и т. д.} \quad (6.8.17)$$

Нетрудно убедиться, что задача для погранслоевых коэффициентов нулевого порядка разделяется на три. Задача для центрального слоя включает квазистационарное уравнение в пласте и условий на границах

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial y} \right) + \frac{{}_0^1\chi_z}{{}_0^1\chi_r} \frac{\partial^2 \Pi^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad y > 0, |z| < 1, \quad (6.8.18)$$

$$\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} = 0, \quad (6.8.19)$$

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0 \frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = 0. \quad (6.8.20)$$

Из тривиального решения задачи для нулевого коэффициента и (6.8.6) получаем равенство нулю нулевого коэффициента на границах раздела сред в двух независимых задачах для окружающих сред

$$\frac{\partial \Pi_1^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{1}{{}_1^1\chi_r} \frac{\partial^2 \Pi_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, z > 1, \quad \Pi_1^{(0)} \Big|_{z=1} = \Pi^{(0)} \Big|_{z=1} = 0, \quad (6.8.21)$$

$$\Pi_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_2^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{{}_2^1\chi_z}{{}_2^1\chi_r} \frac{\partial^2 \Pi_2^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, z < -1, \quad \Pi_2^{(0)} \Big|_{z=-1} = \Pi^{(0)} \Big|_{z=-1} = 0, \quad (6.8.22)$$

$$\Pi_2^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Отсюда следует, что задача для погранслойных коэффициентов нулевого порядка имеет только тривиальное решение $\Pi^{(0)} = 0$ и $\Pi_1^{(0)} = 0$, $\Pi_2^{(0)} = 0$.

В соответствии с этим краевая задача для первого коэффициента также разделяется на три. Задача для центрального слоя включает квазистационарное уравнение в пласте и условия на границах

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial y} \right) + \frac{{}_0^0 \chi_z}{{}_0^0 \chi_r} \frac{\partial^2 \Pi^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad y > 0, |z| < 1, \quad (6.8.23)$$

$$\frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} = 0, \quad (6.8.24)$$

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0 \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = -\varepsilon \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad -1 < z < 1. \quad (6.8.25)$$

Решение этой задачи можно строить независимо от задачи в окружающей среде и использовать как заданное граничное значение $\Pi^{(1)} \Big|_{z=1}$ и $\Pi^{(1)} \Big|_{z=-1}$ в задачах для покрывающей

$$\frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{{}_1^1 \chi_r} \frac{\partial^2 \Pi_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, z > 1, \quad \Pi_1^{(1)} \Big|_{z=1} = \Pi^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad \Pi_1^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (6.8.26)$$

и подстилающей

$$\frac{\partial \Pi_2^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{{}_2^2 \chi_z}{{}_2^2 \chi_r} \frac{\partial^2 \Pi_2^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad (6.8.27)$$

$$\tau > 0, \quad z < -1, \quad \Pi_2^{(1)} \Big|_{z=-1} = \Pi^{(1)} \Big|_{z=-1}, \quad \Pi_2^{(1)} \Big|_{\tau=0} = 0$$

сред. Из (6.7.27) и (6.8.25) следует предельное соотношение для левой границы

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(y_0 \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} \right) = - \lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(y_0 \frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} \right) = - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) = P(z). \quad (6.8.28)$$

Решение задачи (6.8.23)–(6.8.25) строится методом разделения переменных и выражается через функцию Кельвина $K_0(x)$

$$\Pi^{(1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{\pi n}{2} \sqrt{\frac{0}{1}\chi_z} \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \int_{-1}^1 P(x) \cos \left(\frac{\pi n}{2} (x-z) \right) dx, \quad -1 < z < 1. \quad (6.8.29)$$

Решение задач (6.8.26), (6.8.27) с учетом (6.8.29) отыскивается с помощью преобразования Лапласа – Карсона и представляется в пространстве изображений как

$$\Pi_1^{(1)u} = -\sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{\pi n}{2} \sqrt{\frac{0}{1}\chi_z} \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \int_{-1}^1 P^u(x) \exp \left[-\sqrt{\frac{p}{1}\chi_z} (z-1) \right] \cos \left(\frac{\pi n}{2} (x-1) \right) dx, \quad (6.8.30)$$

$$\Pi_2^{(1)u} = -\sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{\pi n}{2} \sqrt{\frac{0}{1}\chi_z} \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \int_{-1}^1 P^u(x) \exp \left[\sqrt{\frac{p}{2}\chi_z} (z+1) \right] \cos \left(\frac{\pi n}{2} (x+1) \right) dx.$$

Выражения (6.8.29), (6.8.30) представляют искомые погранслойные функции и вместе с нулевыми (6.4.14), (6.4.15) и первыми (6.7.27)–(6.7.29) коэффициентами определяют искомое асимптотическое «в среднем точное» решение исходной задачи в пространствах изображений. В пространство оригиналов выражения (6.8.30) трансформируются с помощью соответствий [67]

$$p \exp(-\alpha\sqrt{p}) \Rightarrow \frac{\alpha}{2t\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right), \quad \frac{1}{p} f(p)g(p) \Rightarrow \int_0^t \varphi(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (6.8.31)$$

и окончательно записываются как

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(1)u} = & -\sqrt{\frac{1}{1}\chi_z} \frac{z-1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{\pi n}{2} \sqrt{\frac{0}{1}\chi_z} \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \int_{-1}^1 \cos \left(\frac{\pi n}{2} (x-1) \right) dx \times \\ & \times \int_0^{\tau} P(x) \exp \left(-\frac{(z-1)^2}{4(t-\tau')} \right) \frac{d\tau'}{(t-\tau')^{3/2}}, \quad z > 1, \end{aligned} \quad (6.8.32)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(1)u} = & -\sqrt{\frac{1}{{}^2_1\chi_z}} \frac{|z+1|}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{\pi n}{2} \sqrt{\frac{{}^0_1\chi_z}{{}^0_1\chi_r} \frac{r}{\sqrt{\epsilon}}} \right) \int_{-1}^1 \cos \left(\frac{\pi n}{2} (x+1) \right) dx \times \\ & \times \int_0^{\tau} P(x) \exp \left(-\frac{1}{{}^2_1\chi_z} \frac{(z+1)^2}{4(t-\tau')} \right) \frac{d\tau'}{(t-\tau')^{3/2}}, \quad z < -1. \end{aligned}$$

Практическое значение погранслойных решений заключается в том, что они описывают стабилизацию или эволюцию стационарного или квази-стационарного профиля давления в центральном пласте.

6.9. Точное решение задачи

Параметризованная задача (6.2.1)–(6.2.7) запишется с использованием преобразований Лапласа – Карсона по переменной τ ($\Rightarrow p$) и Фурье – Бесселя по координате r ($\Rightarrow s$) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 P_1^{us}}{\partial z^2} - (p+{}^1_1\chi_r s^2) P_1^{us} = 0, \quad z > 1, \quad (6.9.1)$$

$$\frac{\partial^2 P_2^{us}}{\partial z^2} - \frac{p+{}^2_1\chi_r s^2}{{}^2_1\chi_z} P_2^{us} = 0, \quad z < -1, \quad (6.9.2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{p+{}^0_1\chi_r s^2}{{}^0_1\chi_z} \epsilon P^{us} = -\frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \epsilon q, \quad |z| < 1, \quad (6.9.3)$$

с граничными условиями

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, \quad P_2|_{z=-1} = P|_{z=-1}, \quad (6.9.4)$$

$$\epsilon k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \epsilon k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-1}. \quad (6.9.5)$$

Решения уравнений (6.9.1), (6.9.2) с учетом граничных условий (6.9.4) представляются через P^{us} в следующем виде:

$$P_1^{us} = P^{us} \Big|_{z=1} \exp \left(-\sqrt{p+{}^1_1\chi_r s^2} (z-1) \right) = P^{us} \Big|_{z=1} \exp(-k_1 \Lambda_1 (z-1)), \quad (6.9.6)$$

$$P_2^{us} = P^{us} \Big|_{z=-1} \exp \left(\sqrt{\frac{p+{}^2_1\chi_r s^2}{{}^2_1\chi_z}} (z+1) \right) = P^{us} \Big|_{z=-1} \exp(k_2 \Lambda_2 (z+1)). \quad (6.9.7)$$

С помощью выражений (6.9.6) и (6.9.7) найдем следы производных из внешних областей для правой части соотношений (6.9.5)

$$\left. \frac{\partial P_1^{us}}{\partial z} \right|_{z=1} = -k_1 \Lambda_1 P^{us} \Big|_{z=1}, \quad \left. \frac{\partial P_2^{(0)us}}{\partial z} \right|_{z=-1} = k_2 \Lambda_2 P^{(0)us} \Big|_{z=-1}. \quad (6.9.8)$$

Решение уравнения (6.9.3) представляется как

$$P^{us} = \frac{{}_0^0 \chi_r q}{{}_0^1 \chi_z \Lambda^2} + C_1 \operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon} z) + C_2 \operatorname{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon} z). \quad (6.9.9)$$

С помощью (6.9.5) получаем систему уравнений для определения постоянных

$$\begin{aligned} C_1 \left[\operatorname{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon} \frac{\Lambda_1}{\Lambda} \operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) \right] + C_2 \left[\operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon} \frac{\Lambda_1}{\Lambda} \operatorname{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) \right] &= -\sqrt{\varepsilon} \frac{{}_0^0 \chi_r q \Lambda_1}{{}_0^1 \chi_z \Lambda^3}, \\ C_1 \left[\operatorname{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon} \frac{\Lambda_2}{\Lambda} \operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) \right] - C_2 \left[\operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon} \frac{\Lambda_2}{\Lambda} \operatorname{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) \right] &= \sqrt{\varepsilon} \frac{{}_0^0 \chi_r q \Lambda_2}{{}_0^1 \chi_z \Lambda^3}. \end{aligned} \quad (6.9.10)$$

Отсюда находим выражения для констант

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{{}_0^0 \chi_r}{{}_0^1 \chi_z} \frac{q(\Lambda_2 - \Lambda_1) \operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon})}{(\Lambda_2 + \Lambda_1) \Lambda^2 \operatorname{ch}(2\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + \left(\Lambda^3 + \varepsilon \Lambda \Lambda_2 \Lambda_1 \right) \frac{\operatorname{sh}(2\Lambda \sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}}}, \\ C_2 &= -q \frac{{}_0^0 \chi_r}{{}_0^1 \chi_z} \frac{(\Lambda_2 + \Lambda_1) \operatorname{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + 2 \frac{\Lambda_1 \Lambda_2}{\Lambda} \sqrt{\varepsilon} \operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon})}{(\Lambda_2 + \Lambda_1) \Lambda^2 \operatorname{ch}(2\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + \left(\Lambda^3 + \varepsilon \Lambda \Lambda_2 \Lambda_1 \right) \frac{\operatorname{sh}(2\Lambda \sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}}} \end{aligned} \quad (6.9.11)$$

и решения в изображениях для центрального пласта

$$\begin{aligned} P^{us} &= \frac{{}_0^0 \chi_r q}{{}_0^1 \chi_z \Lambda^2} \left[\frac{(\Lambda_2 - \Lambda_1) \operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) \operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon} z) - (\Lambda_2 + \Lambda_1) \operatorname{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) \operatorname{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon} z)}{(\Lambda_2 + \Lambda_1) \operatorname{ch}(2\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + \left(\Lambda + \varepsilon \frac{\Lambda_2 \Lambda_1}{\Lambda} \right) \frac{\operatorname{sh}(2\Lambda \sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \frac{\Lambda_1 \Lambda_2}{\Lambda} \sqrt{\varepsilon} \operatorname{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) \operatorname{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon} z)}{(\Lambda_2 + \Lambda_1) \operatorname{ch}(2\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + \left(\Lambda + \varepsilon \frac{\Lambda_2 \Lambda_1}{\Lambda} \right) \frac{\operatorname{sh}(2\Lambda \sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}}} + 1 \right], \end{aligned} \quad (6.9.12)$$

покрывающей

$$P_1^{us} = \frac{{}_0^0\chi_r q}{{}_0^0\chi_z \Lambda^2} \left[1 - \frac{\Lambda_1 \operatorname{ch}(2\Lambda\sqrt{\varepsilon}) + \Lambda_2 \left(1 + \frac{\Lambda_1}{\Lambda} \sqrt{\varepsilon} \operatorname{sh}(2\Lambda\sqrt{\varepsilon}) \right)}{(\Lambda_2 + \Lambda_1) \operatorname{ch}(2\Lambda\sqrt{\varepsilon}) + \left(\Lambda + \varepsilon \frac{\Lambda_2 \Lambda_1}{\Lambda} \right) \frac{\operatorname{sh}(2\Lambda\sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right] \times \exp(-k_1 \Lambda_1 (z-1)) \quad (6.9.13)$$

и подстилающей

$$P_2^{us} = \frac{{}_0^0\chi_r q}{{}_0^0\chi_z \Lambda^2} \left[1 - \frac{\Lambda_2 \operatorname{ch}(2\Lambda\sqrt{\varepsilon}) + \Lambda_1 \left(1 + \frac{\Lambda_2}{\Lambda} \sqrt{\varepsilon} \operatorname{sh}(2\Lambda\sqrt{\varepsilon}) \right)}{(\Lambda_2 + \Lambda_1) \operatorname{ch}(2\Lambda\sqrt{\varepsilon}) + \left(\Lambda + \varepsilon \frac{\Lambda_2 \Lambda_1}{\Lambda} \right) \frac{\operatorname{sh}(2\Lambda\sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right] \times \exp(k_2 \Lambda_2 (z+1)) \quad (6.9.14)$$

областей.

Учитывая значение для предела $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{sh}(\Lambda\sqrt{\varepsilon})/\sqrt{\varepsilon} = \Lambda$, из (6.9.12) полу-

чим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P^{us} = \frac{{}_0^0\chi_r q}{{}_0^0\chi_z \Lambda^2} \left(1 - \frac{\Lambda_2 + \Lambda_1}{\Lambda_2 + \Lambda_1 + 2\Lambda^2} \right) = \frac{{}_0^0\chi_r}{{}_0^0\chi_z} \frac{2q}{\Lambda_2 + \Lambda_1 + 2\Lambda^2}. \quad (6.9.15)$$

Выражение (6.9.15) представляет нулевой коэффициент разложения точного решения (6.9.12) по формальному параметру и совпадает с полученным асимптотическим решением (6.4.13).

Аналогично вычислив производную по формальному параметру и устремив его к нулю в полученном выражении, путем довольно громоздких вычислений получим выражение, совпадающее с (6.7.27). Такое совпадение нулевого и первого коэффициентов свидетельствует о корректности асимптотического решения исходной задачи, представленного выше. Полученные выше результаты также дают основание полагать, что использованный метод, обеспечивая четкий физический смысл каждого из коэффициентов разложения, составит основу асимптотических подходов в линейных и нелинейных краевых задачах сопряжения теплофизики.

Нахождение оригиналов полученного решения представляет самостоя-

тельную проблему или может быть осуществлено численными методами.

Ниже рассмотрен частный случай $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda = \sqrt{p + \chi_r s^2 / \chi_z}$ однородной анизотропной среды

$$P^{us} = \frac{{}_0^0 \chi_r q}{{}_0^1 \chi_z \Lambda^2} \left[1 - \frac{\text{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon} z)}{\text{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + (\text{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon})) / \sqrt{\varepsilon}} \right],$$

$$P_1^{us} = \frac{{}_0^0 \chi_r q}{{}_0^1 \chi_z \Lambda^2} \left[1 - \frac{\text{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon})}{\text{ch}(\Lambda \sqrt{\varepsilon}) + (\text{sh}(\Lambda \sqrt{\varepsilon})) / \sqrt{\varepsilon}} \right] \exp(-\Lambda(z-1)),$$
(6.9.16)

когда оригинал решения с учетом соотношений

$$p \frac{\exp(-\alpha \sqrt{p+a})}{p+a} \Rightarrow \exp(-at) \text{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right), \quad \frac{f(p)}{p} \Rightarrow \int_0^t \varphi(\tau) d\tau,$$

$$\frac{\exp(-\alpha \sqrt{p+a})}{p+a} \Rightarrow \int_0^t \exp(-a\tau) \text{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}}\right) d\tau,$$
(6.9.17)

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{{}_0^0 \chi_r}{{}_0^1 \chi_z} s^2 \tau\right) s J_0(sr) ds = \frac{{}_0^1 \chi_z}{2 \cdot {}_0^1 \chi_r \tau} \exp\left(-\frac{r^2}{{}_0^1 \chi_r \tau} \frac{{}_0^0 \chi_z}{4}\right)$$

при $\varepsilon = 1$ может быть представлен в компактной форме

$$P = \frac{q}{4} \int_0^\tau \exp\left(-\frac{r^2}{{}_0^1 \chi_r \tau'} \frac{{}_0^0 \chi_z}{4}\right) \left[2 - \text{erfc}\left(\frac{1-z}{2\sqrt{\tau'}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{z+1}{2\sqrt{\tau'}}\right) \right] \frac{d\tau'}{\tau'},$$

$$P_1 = \frac{q}{4} \int_0^\tau \exp\left(-\frac{r^2}{{}_0^1 \chi_r \tau'} \frac{{}_0^0 \chi_z}{4}\right) \left[\text{erfc}\left(\frac{z-1}{2\sqrt{\tau'}}\right) - \text{erfc}\left(\frac{z+1}{2\sqrt{\tau'}}\right) \right] \frac{d\tau'}{\tau'}.$$
(6.9.18)

Выражение P_2 здесь опущено, поскольку решение симметрично относительно плоскости $z = 0$. Решение (6.9.18) описывает поле давления в анизотропном пласте с ограниченной областью стока и поэтому даже простейший случай рассматриваемой задачи представляет большой интерес, например, для исследования влияния степени вскрытия пластов перфорацией на приток жидкости или газа, что подчеркивает практическую важность рассматриваемой задачи.

Поскольку в однородном анизотропном пласте выделенные границы отсутствуют, то процедура построения нулевого коэффициента, приведенная

в разделах 6.3 и 6.4, соответствует формальному усреднению искомого решения в интервале $-1 < z < 1$ с результатом осреднения (6.5.17) в изображениях и (6.5.19) – в пространстве оригиналов. Построение первого коэффициента соответствует отысканию поправок результатов осреднения и квазистационарного поля давления в указанной области. Погранслойные решения описывают стабилизацию квазистационарного профиля давления в зоне усреднения. Все эти результаты представляют самостоятельный интерес, поскольку отвечают на главные вопросы формирования полей давления, чаще всего интересующие исследователей.

6.10. Переход в пространство оригиналов для асимптотических решений

Для нулевого приближения в случае однородной анизотропной среды $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda = \sqrt{(p + {}^0_1\chi_r s^2) / {}^0_1\chi_z}$, $k_1 = k_2 = 1$, ${}^0_1\chi_z = 1$ в пространстве изображений

$$P^{(0)us} = \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \frac{q}{\Lambda^2 + \Lambda}, \quad |z| < 1, \quad P_1^{(0)us} = \frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} \frac{q}{\Lambda^2 + \Lambda} \exp(-\Lambda(z-1)), \quad z > 1. \quad (6.10.1)$$

С учетом соотношений

$$\begin{aligned} \frac{p}{p+a+\sqrt{p+a}} &\Rightarrow \exp(t-at)\operatorname{erfc}(\sqrt{t}), \quad \frac{f(p)}{p} \Rightarrow \int_0^t \varphi(\tau) d\tau, \\ \frac{1}{p+a+\sqrt{p+a}} &\Rightarrow \int_0^t \exp(\tau-a\tau)\operatorname{erfc}(\sqrt{\tau}) d\tau, \\ \frac{p \exp(-\alpha\sqrt{p+a})}{\sqrt{p+a}(b+\sqrt{p+a})} &\Rightarrow \exp(b\alpha+b^2t-at)\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right), \\ \frac{\exp(-\alpha\sqrt{p+a})}{\sqrt{p+a}(1+\sqrt{p+a})} &\Rightarrow \int_0^t \exp(\alpha+\tau-a\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}}+\sqrt{\tau}\right) d\tau, \\ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{{}^0_1\chi_r}{{}^0_1\chi_z} s^2 \tau\right) s J_0(sr) ds &= \frac{{}^0_1\chi_z}{2 {}^0_1\chi_r \tau} \exp\left(-\frac{{}^0_1\chi_z r^2}{4 {}^0_1\chi_r \tau}\right) \end{aligned} \quad (6.10.2)$$

(6.10.1) представляется в пространстве оригиналов с учетом симметрии относительно плоскости $z = 0$ в виде

$$P^{(0)} = \frac{q}{2} \int_0^{\tau} \exp\left(\tau' - \frac{{}_0^0\chi_z r^2}{4 {}_1^0\chi_r \tau'}\right) \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau'}) \frac{d\tau'}{\tau'}, \quad 0 < z < 1, \quad (6.10.3)$$

$$P_1^{(0)} = \frac{q}{2} \int_0^{\tau} \exp\left(\tau' - \frac{{}_0^0\chi_z r^2}{4 {}_1^0\chi_r \tau'} + z - 1\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z-1}{2\sqrt{\tau'}} + \sqrt{\tau'}\right) \frac{d\tau'}{\tau'}, \quad z > 1.$$

В более общем случае для несимметричной сильноанизотропной среды из (6.4.16) в пространстве оригиналов получим

$$P^{(0)} = q {}_1^0\chi_r \int_0^{\infty} s \left[\frac{1}{a(s)b(s)} - \frac{\exp(a^2(s)\tau) \operatorname{erfc}(a(s)\sqrt{\tau})}{a(s)(b(s) - a(s))} + \frac{\exp(b^2(s)\tau) \operatorname{erfc}(b(s)\sqrt{\tau})}{b(s)(b(s) - a(s))} \right] J_0(sr) ds, \quad (6.10.4)$$

где $a(s)$, $b(s)$ определяются из следующей системы

$$a(s) + b(s) = \frac{{}_0^0\chi_z}{2} \left(k_1 + \frac{k_2}{{}_2^0\chi_z} \right), \quad a(s)b(s) = {}_1^0\chi_r s^2. \quad (6.10.5)$$

Для квазистационарного случая при одинаковых гидродинамических параметрах настилающего и подстилающего пластов, пренебрегая радиальной составляющей пьезопроводности окружающих пород, имеем решение задачи о поле давления в нулевом приближении в виде [204]

$$P^{(0)} = \frac{q}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau'^2}{4t}\right) d\tau' \int_{r^2 k_1 {}_1^0\chi_z / 4}^{\infty} \exp(-u) \frac{du}{u}, \quad (6.10.6)$$

$$P_1^{(0)} = \frac{q}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{z-1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau'^2}{4\tau}\right) d\tau' \int_{r^2 k_1 {}_1^0\chi_z / 4}^{\infty} \exp(-u) \frac{du}{u}. \quad (6.10.7)$$

В частном случае однородной анизотропной среды $k_1 = k_2 = 1$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda = \sqrt{p + \chi_r s^2 / \chi_z}$ выражение для первого приближения в пространстве изображений

$$P^{(1)us} = q \frac{{}_0^0\chi_r}{{}_1^0\chi_z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - z^2 \right) \frac{1}{\Lambda + 1} + \frac{1}{3(\Lambda + 1)^2} \right], \quad |z| < 1, \quad (6.10.8)$$

$$P_1^{(1)us} = \frac{q}{{}_1^0\chi_z} \left[\frac{1}{(\Lambda + 1)^2} - \frac{1}{\Lambda + 1} \right] \exp(-\Lambda(z-1)), \quad z > 1,$$

с учетом соотношений

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{b + \sqrt{p+a}} \Rightarrow \exp(-at) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - b \exp(b^2 t) \operatorname{erfc}(b\sqrt{t}) \right], \\
& \frac{1}{1 + \sqrt{p + {}^0_1\chi_r s^2 / {}^0_1\chi_z}} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{{}^0_1\chi_z}{2 {}^0_1\chi_r} \int_0^t \exp\left(-\frac{r^2 {}^0_1\chi_z}{4 {}^0_1\chi_r \tau}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} - \exp(\tau) \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau}) \right] \frac{d\tau}{\tau} = \frac{{}^0_1\chi_z}{2 {}^0_1\chi_r} g(t), \\
& \frac{1}{\left(1 + \sqrt{p + {}^0_1\chi_r s^2 / {}^0_1\chi_z}\right)^2} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{{}^0_1\chi_z}{2 {}^0_1\chi_r} \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} - \exp(\tau) \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau}) \right] d\tau \int_0^{t-\tau} \exp\left(-\frac{r^2 {}^0_1\chi_z}{4 {}^0_1\chi_r (x+\tau)}\right) \times \\
& \quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - \exp(x) \operatorname{erfc}(\sqrt{x}) \right] \frac{dx}{x+\tau} = \frac{{}^0_1\chi_z}{2 {}^0_1\chi_r} g_1(t), \\
& \frac{p \exp(-\alpha \sqrt{p+a})}{b + \sqrt{p+a}} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \exp(-at) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right) - b \exp(b\alpha + b^2 t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right) \right], \\
& \frac{\exp(-\alpha \sqrt{p+a})}{b + \sqrt{p+a}} \Rightarrow \int_0^{\text{Fo}} \exp(-a\tau) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\tau}\right) - \right. \\
& \quad \left. - b \exp(b\alpha + b^2 \tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}} + b\sqrt{\tau}\right) \right] d\tau, \\
& \frac{\exp\left(- (z-1) \sqrt{p + {}^0_1\chi_r s^2 / {}^0_1\chi_z}\right)}{1 + \sqrt{p + {}^0_1\chi_r s^2 / {}^0_1\chi_z}} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{{}^0_1\chi_z}{2 {}^0_1\chi_r} \int_0^t \exp\left(-\frac{r^2 {}^0_1\chi_z}{4 {}^0_1\chi_r \tau}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{4\tau}\right) - \right. \\
& \quad \left. - \exp(\alpha + \tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{z-1}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \right] \frac{d\tau}{\tau} = \frac{{}^0_1\chi_z}{2 {}^0_1\chi_r} G(t),
\end{aligned} \tag{6.10.9}$$

$$\frac{\exp\left(-\sqrt{p+{}^0_1\chi_r s^2/{}^0_1\chi_z}(z-1)\right)}{\left(\sqrt{p+{}^0_1\chi_r s^2/{}^0_1\chi_z}+1\right)^2} \Rightarrow \frac{{}^0_1\chi_z}{2} \int_0^t \int_0^{t-\tau} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - \exp(x) \operatorname{erfc}(\sqrt{x}) \right] dx \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{r^2}{4} \frac{{}^0_1\chi_z}{{}^0_1\chi_r}(\tau+x)\right) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{4\tau}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp(z-1+\tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{z-1}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \right] \times \frac{d\tau}{\tau+x} = \frac{{}^0_1\chi_z}{2} \frac{G_1(t)}{{}^0_1\chi_r}$$

представляется в пространстве оригиналов с учетом симметрии относительно плоскости $z = 0$ в виде

$$P^{(1)} = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - z^2 \right) g(\tau) + \frac{g_1(\tau)}{3} \right], \quad |z| < 1, \quad P_1^{(1)} = \frac{q}{6} (G_1(\tau) - G(\tau)), \quad (6.10.10)$$

$$0 < z < 1.$$

В квазистационарном случае при совпадающих гидродинамических параметрах настиляющего и подстиляющего пластов, в пренебрежении радиальной составляющей пьезопроводности окружающих пород, решение задачи о поле давления для первого коэффициента разложения имеет вид [204]

$$P^{(1)} = \frac{q}{4\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \left[k_1 \left(\frac{1}{3} - z^2 \right) - \frac{{}^0_1\chi_z \left({}^0_1\chi_z - 3{}^0_1\chi_r \right) r^2 k_1^2}{12 {}^0_1\chi_r^2} \frac{r^2 k_1^2}{\tau'} \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\tau'^2}{4\tau} - \frac{{}^0_1\chi_z k_1 r^2}{4 {}^0_1\chi_r \tau'}\right) \frac{d\tau'}{\tau'}, \quad (6.10.11)$$

$$P_1^{(1)} = \frac{q}{6\sqrt{\pi\tau}} \int_{z-1}^\infty \left(\frac{{}^0_1\chi_z \left(3{}^0_1\chi_r - {}^0_1\chi_z \right) k_1^2}{8 {}^0_1\chi_r^2} \frac{r^2}{\tau' - z + 1} - k_1 \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\tau'^2}{4\tau} - \frac{{}^0_1\chi_z k_1 r^2}{4 {}^0_1\chi_r (\tau' - z + 1)}\right) \frac{d\tau'}{\tau' - z + 1}. \quad (6.10.12)$$

Вид оригиналов для общего случая опущен из-за чрезмерной громоздкости.

6.11. Анализ результатов расчетов поля давления

На рисунках 6.1–6.3 представлены расчеты пространственно-временных распределений давления для квазистационарного частного слу-

чая, выполненные по формулам (6.10.6), (6.10.7), (6.10.11) и (6.10.12) в нулевом и первом приближениях. Значения параметров в расчетных формулах приняты равными $q = 1$, $k_1 = 1$, ${}^0\chi_r = {}^0\chi_z = 1$.

Эти рисунки иллюстрируют относительный вклад (в безразмерных переменных) первого коэффициента асимптотического разложения в поля давления в неоднородном анизотропном пласте при различных значениях пространственных координат и времени как в центральном пласте, так и в окружающей его анизотропной пористой среде. На рисунках 6.1–6.3 приняты следующие обозначения по вертикальной оси:

$$P^0 = \begin{cases} P^{(0)}, & z < 1, \\ P_1^{(0)}, & z \geq 1, \end{cases} \quad P^1 = \begin{cases} P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)}, & z < 1, \\ P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)}, & z \geq 1. \end{cases}$$

Рисунок 6.1, *а*, *б* иллюстрирует вертикальные распределения относительного давления в пласте в нулевом (*пунктирные кривые*) и первом (*сплошные кривые*) приближении.

При расчетах кривых, представленных на рис. 6.1, *а*, принято одинаковым значение безразмерного времени $\tau = 1$. Кривые 1, 2 рассчитаны при значении радиальной безразмерной координаты $r = 1$, а 3, 4 – при $r = 2$.

Кривые на рис. 6.1, *б* построены при одинаковых значениях безразмерной радиальной координаты $r = 2$. Кривые 1, 2 соответствуют значению безразмерного времени $\tau = 2$, а 3, 4 – значению $\tau = 1$.

Эти рисунки иллюстрируют общие особенности распределения давления в нулевом и первом приближениях. Нулевое приближение (*пунктирные кривые*) представляет асимптотически усредненные значения давления, которые в интервале пласта не зависят от вертикальной координаты, т.е. остаются постоянными. Представление о зависимости давления от вертикальной координаты дает первое приближение (*сплошные кривые*). Из рисунков видно, что основные значения возмущений представляет нулевое приближение, а первое – уточняет поле давления, детализируя его.

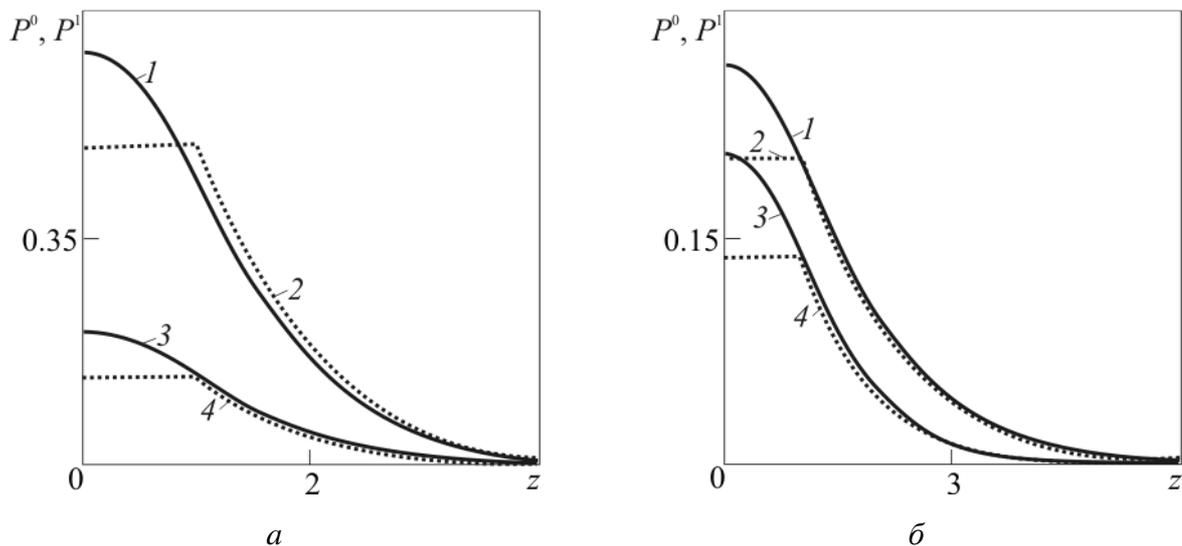


Рис. 6.1. Сопоставление вертикальных распределений относительного давления в нулевом (пунктирные линии) и первом приближении (сплошные линии):

a – при безразмерном времени $\tau = 1$ при различных значениях горизонтальной безразмерной координаты. Шифр кривых: 1, 2 – $r = 1$, 3, 4 – $r = 2$;

б – при заданной безразмерной горизонтальной координате $r = 2$ и различных значениях безразмерного времени. Шифр кривых 1, 2 – $\tau = 2$, 3, 4 – $\tau = 1$

Рис. 6.2 иллюстрирует зависимости относительного давления от радиальной безразмерной координаты в пласте при $z = 0$ (*a*) и окружающей среде при $z = 2$ (*б*) в нулевом (пунктирные кривые) и первом (сплошные кривые) приближениях.

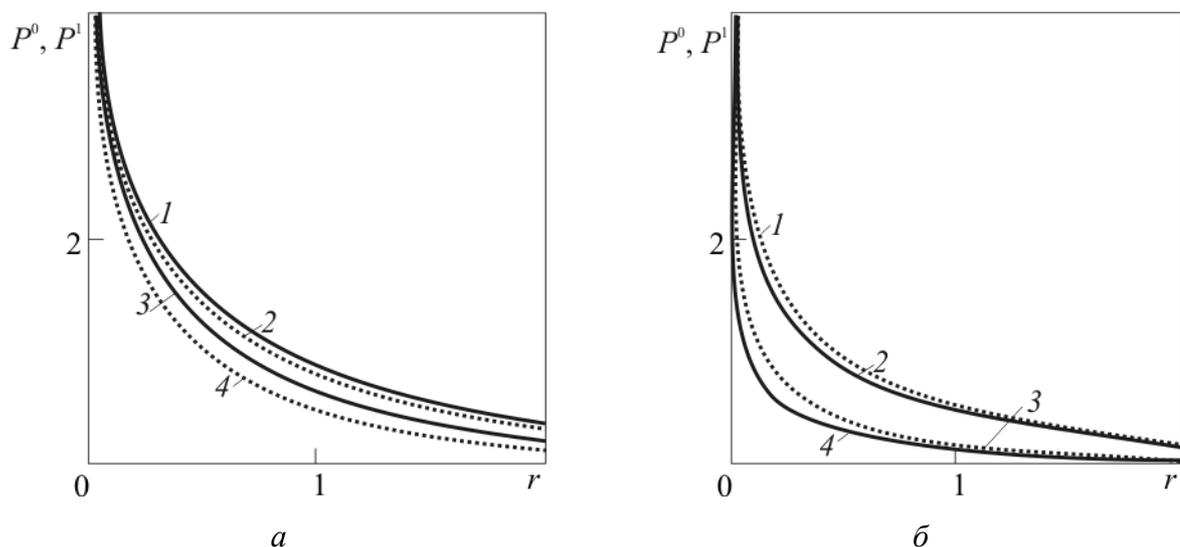


Рис. 6.2. Зависимости относительного давления в пласте от радиальной безразмерной координаты в нулевом (пунктирные кривые) и в первом (сплошные кривые) приближении:

a – в среднем пласте ($z = 0$) при различных значениях безразмерного времени:

1, 2 – $\tau = 5$ и 3, 4 – $\tau = 1$;

б – в покрывающей пористой среде ($z = 2$) для тех же значений времени

Значения безразмерного времени приняты равными $\tau = 1$ для кривых 3, 4 и $\tau = 5$ – для кривых 1, 2.

На рисунке 6.3 представлены зависимости относительного давления в пласте в нулевом и первом приближениях от безразмерного времени при различных значениях горизонтальной координаты.

Кривые, приведенные на рисунке, иллюстрируют темпы нарастания возмущений в пласте, их спад и запаздывание процессов при удалении от скважины в радиальном направлении.

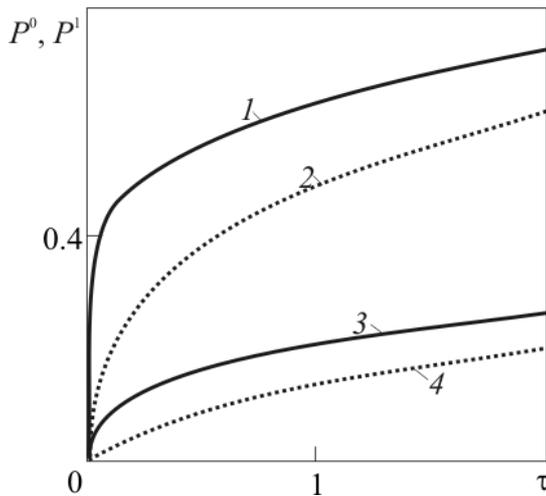


Рис. 6.3. Зависимости относительного давления в пласте ($z = 0$) в нулевом (пунктирные кривые) и в первом (сплошные кривые) приближении от безразмерного времени τ при различных значениях горизонтальной координаты:
1, 2 – $r = 1$,
3, 4 – $r = 2$

Нулевое и первое приближение, в целом, обеспечивают достаточное для практических целей пространственно-временное представление о поле давления в пласте при отборе жидкости из пласта.

Кривые на рисунках 6.4–6.10 построены по формулам (6.10.3) для $P^{(0)}$ при $0 \leq z_d \leq h$ и для $P_1^{(0)}$ при $z_d > h$. Приняты следующие значения расчетных параметров: $Q = 5 \text{ м}^3/\text{сут.}$, $\mu = 0.0016 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $h = 1 \text{ м}$, $r_d = 1 \text{ м}$, $k_r = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$.

На рисунке 6.4, а сопоставлены графики для разных значений времени t в среде с компонентами пьезопроводностей сред (нижние индексы: 1 – окружающая пласт-коллектор пористая среда, r и z – направления) $\chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$ и радиальной компонентой проницаемости $k_r = 10^{-10} \text{ м}^2$. Из анализа кривых видно, что при постоянном отборе с ростом времени величина возмущения давления в пористом нефтесодержащем пласте и размеры зоны возмущения увеличиваются. На рисунке 6.4, б приведено сравнение зависимостей возмущения давления от вертикальной координаты для сред с разной

проницаемостью, и, соответственно, пьезопроводностью. Из анализа кривых следует, что возмущение давления в нефтегазовом коллекторе возрастает с уменьшением его проницаемости.

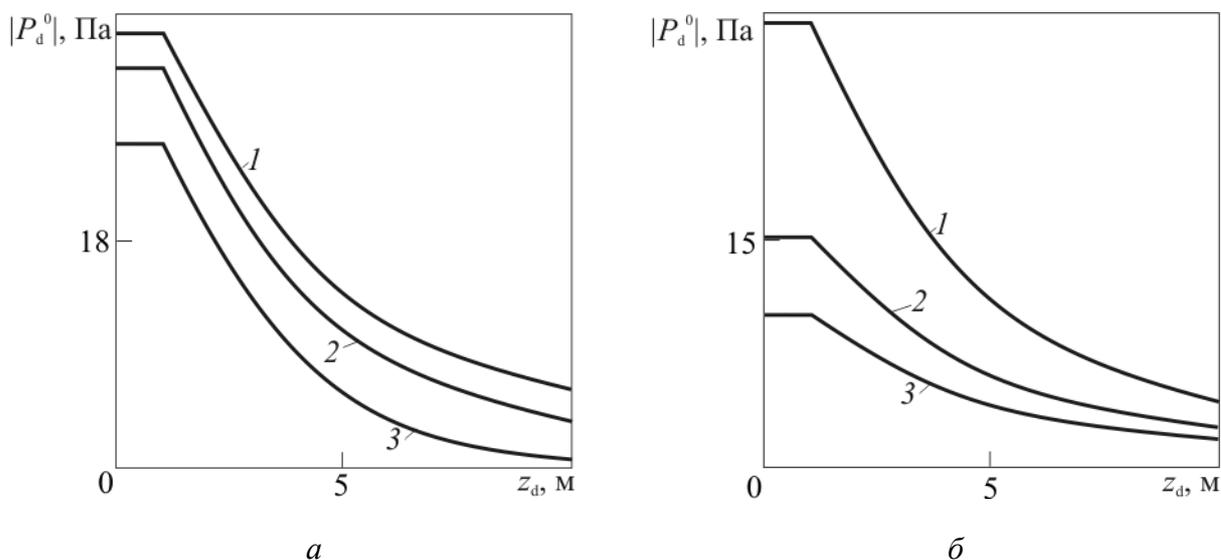


Рис. 6.4. Сопоставление возмущений давления в среде от вертикальной координаты:

а – для разных моментов времени. Шифр кривых: 1 – $t = 3.5$ ч, 2 – 0.5 ч, 3 – 10 мин.;

б – в момент времени $t = 2$ ч для разных сред. Шифр кривых: 1 – $\chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 10^{-10} \text{ м}^2$; 2 – $\chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.1 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$; 3 – $\chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.15 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$

Для уточнения зависимости возмущения давления от вертикальной координаты в области осреднения $0 < z_d < 1$ расчеты необходимо проводить по формулам для первого асимптотического приближения.

На рисунке 6.5 представлены кривые затухания возмущений давления при удалении от скважины для $t = 0.5$ ч при разных значениях вертикальной координаты при тех же значениях Q , μ , h , что и на рисунке 6.4. Из рисунка видно, что при удалении от источника возмущения, величина возмущений убывает и выравнивается по вертикальной координате. Из сопоставления рисунков 6.5, *а* и 6.5, *б* видно, что большее отклонение давления от равновесного соответствует меньшему значению пьезопроводности ($\chi = k / (\mu \cdot m \cdot \beta)$), если она меняется вследствие изменения проницаемости (рис. 6.5, *а*), и большему значению пьезопроводности, если она меняется вследствие изменения пористости и сжимаемости (рис. 6.5, *б*).

На рисунке 6.6 изображены вертикальные перепады давления, рассчи-

танные по формуле:

$$\tilde{P} = P^1 - P^1(z=1) = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{2} (1 - z^2) \int_0^t \exp\left(-\frac{r^2}{4} \frac{\chi_z}{\chi_r} \tau\right) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - \exp(\tau) \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau}) \right] \frac{d\tau}{\tau} \right].$$

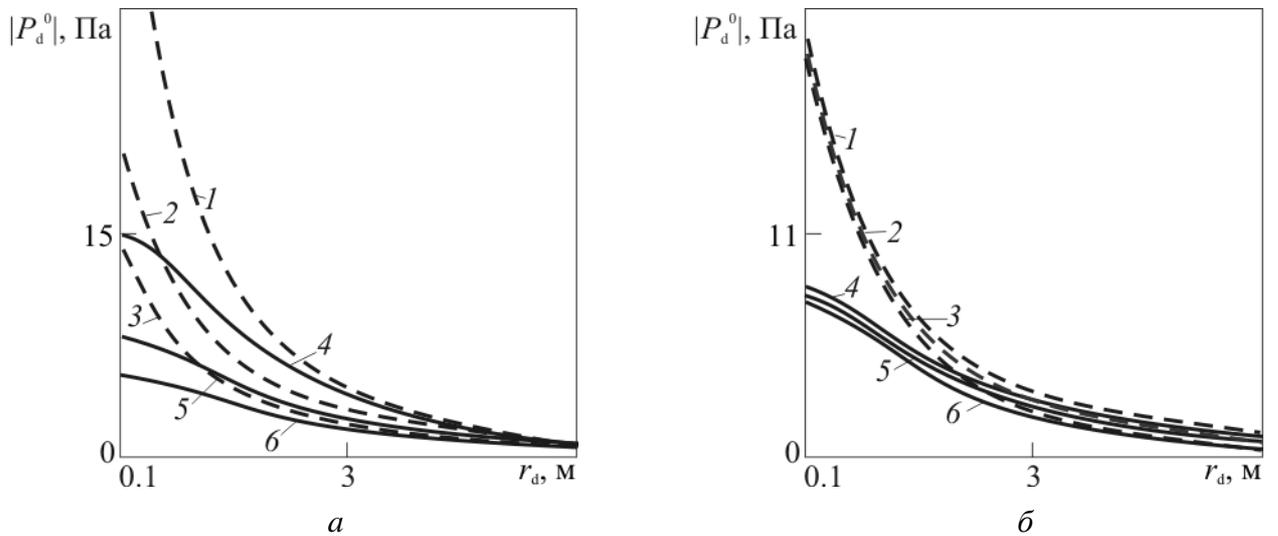


Рис. 6.5. Затухание возмущений давления на линии $z_d = 2$ м, (штриховые линии) и $z_d = 4$ м (сплошные линии) в средах с различными гидродинамическими характеристиками: $a - 1, 4 - \chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}, k_r = 10^{-10} \text{ м}^2$; $2, 5 - 0.1 \text{ м}^2/\text{с}, k_r = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$; $3, 6 - 0.15 \text{ м}^2/\text{с}, k_r = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$;

$b - 1, 4 - \chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.15 \text{ м}^2/\text{с}, 2, 5 - 0.1 \text{ м}^2/\text{с}, 3, 6 - 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$, на всех кривых $k_r = 10^{-10} \text{ м}^2$

В расчетах принято $\chi_z = \chi_r = 0.5 \text{ м}^2, \chi_{r1} = \chi_{z1} = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}, k_r = 2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$.

Другие расчетные параметры те же, что и на рисунках 6.4, 6.5.

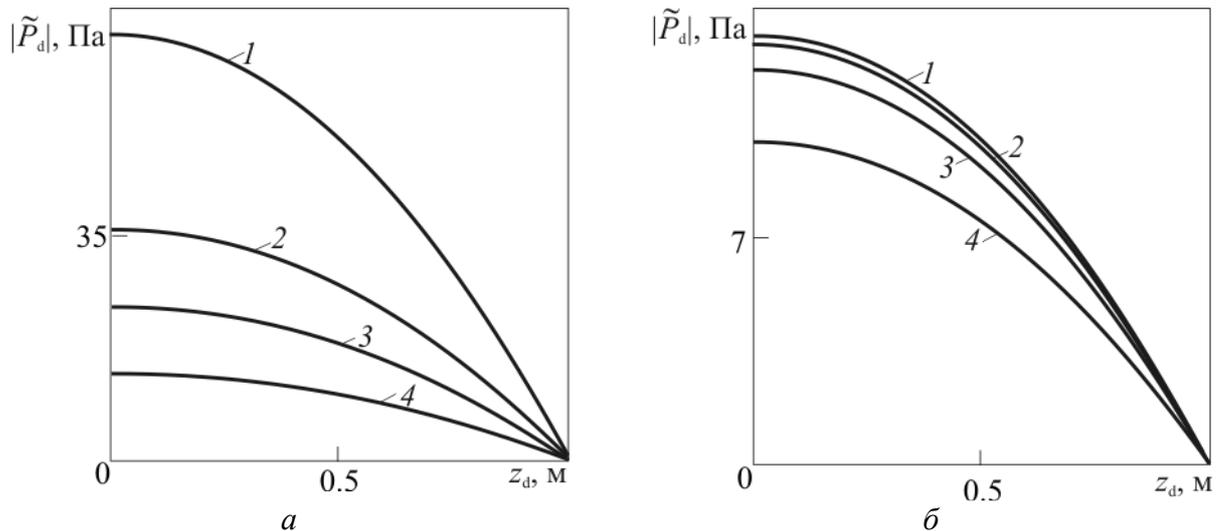


Рис. 6.6. Вертикальные перепады возмущения давления в центральном пласте $a -$ на расстояниях от скважины: $1 - r_d = 1$ м, $2 - 2$ м, $3 - 3$ м, $4 - 5$ м, при $t = 360$ с; $b -$ для значений времени $1 - t = 180000$ с, $2 - 18000$ с, $3 - 1800$ с, $4 - 180$ с, при $r_d = 6$ м

На рисунке 6.6, a представлены кривые для разных значений горизонтальной координаты. Рисунок 6.6, b иллюстрирует зависимости для разных

значений времени. Анализ кривых показывает, что при малых временах и на больших расстояниях от скважины перепад давления между $z_d = 0$ и $z_d = h$ уменьшается. Таким образом, из приведенных графических зависимостей следует, что отклонение давления от равновесного уменьшается при удалении от источника возмущений.

Рисунок 6.7 иллюстрирует эволюцию отклонения от равновесного давления в средах с различными гидродинамическими характеристиками. В расчетах (рис. 6.7–6.9) принято $Q = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, $\mu = 0.0016 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $r_d = 1 \text{ м}$, $h = 1 \text{ м}$. Из рисунка видно, что при удалении от источника возмущения, величина возмущений убывает. На рисунке 6.7 видны те же особенности формирования поля давления в зависимости от физических свойств пласта, что и на рисунке 6.5. Из анализа кривых видно, что быстрый рост значений изменения давления при малых временах сменяется стабилизацией давления – при больших.

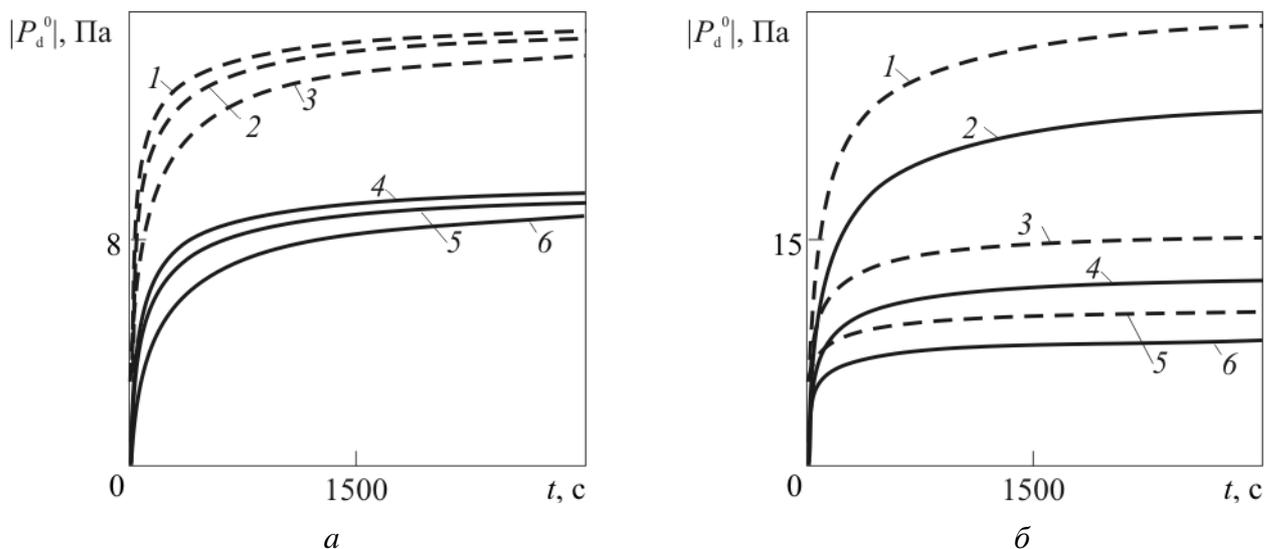


Рис. 6.7. Эволюция отклонения от равновесного давления в средах с различными гидродинамическими характеристиками:

а – в точках $z_d = 0 \text{ м}$, $r_d = 1 \text{ м}$ (штриховые линии) и $z_d = 3 \text{ м}$, $r_d = 1 \text{ м}$ (сплошные линии). Шифр кривых: 1, 4 – $\chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.15 \text{ м}^2/\text{с}$, 2, 5 – $0.1 \text{ м}^2/\text{с}$, 3, 6 – $0.05 \text{ м}^2/\text{с}$, на всех кривых $k_r = 10^{-10} \text{ м}^2$;

б – в точках $z_d = 0 \text{ м}$, $r_d = 1 \text{ м}$ (штриховые линии) и $z_d = 2 \text{ м}$, $r_d = 1 \text{ м}$ (сплошные линии). Шифр кривых: 1, 4 – $\chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 10^{-10} \text{ м}^2$; 2, 5 – $0.1 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$; 3, 6 – $0.15 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$

Зависимости, представленные на рисунке 6.8, аналогичны рисунку 6.7. Основное различие в расчетных параметрах заключается в том, что верти-

кальная компонента пьезопроводности окружающей среды не равна аналогичной компоненте пьезопроводности пласта-коллектора.

Из сопоставления рисунков 6.7, а, 6.8, а и 6.8, б можно заметить, что при равенстве горизонтальной и вертикальной компонент проницаемости пласта-коллектора, основной вклад в величину возмущения поля давления вносит вертикальная составляющая пьезопроводности пород, окружающих нефтеносный пласт и горизонтальная составляющая проницаемости нефтеносного пласта. Сравнивая рисунки 6.7, а и 6.7, б можно сделать вывод, что изменение горизонтальной проницаемости пласта вызывает более заметный эффект. Изменения возмущений давления с течением времени в случае анизотропного среднего пропластка представлены на рисунке 6.9. Значение вертикальной компоненты пьезопроводности приняты $\chi_{z1} = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$. Сопоставление рисунков 6.9, а и 6.8, а показывает, что эффект независимости величины возмущения давления от проницаемости среды наблюдается только в случае изотропного среднего пропластка.

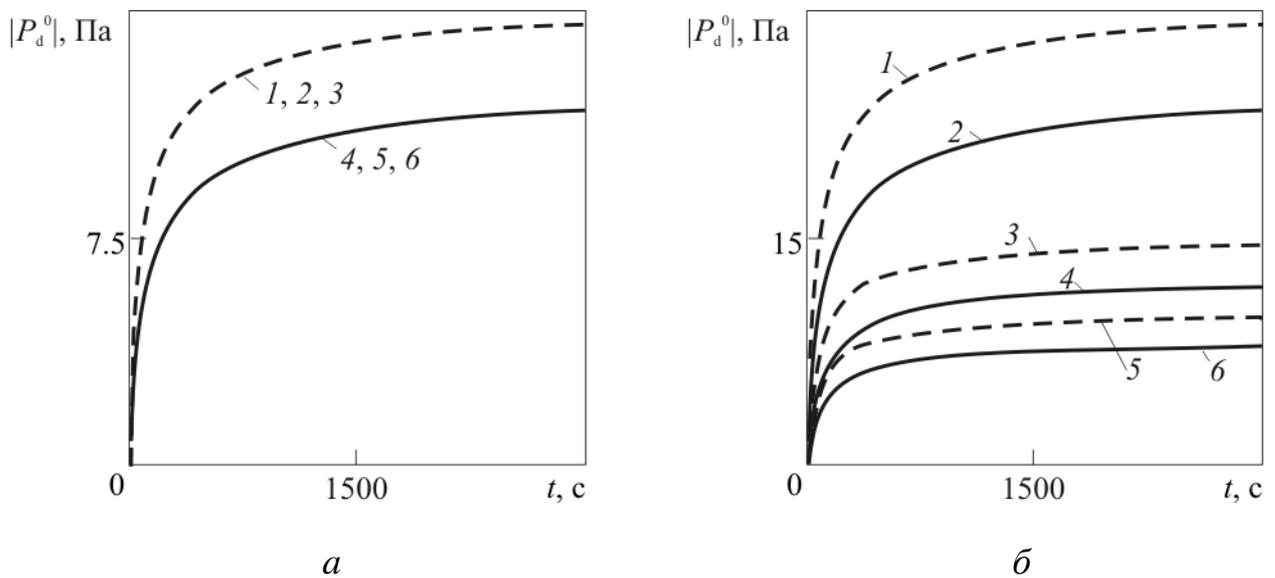


Рис. 6.8. Эволюция отклонения от равновесного давления в средах с различными гидродинамическими характеристиками в точках $z_d = 0 \text{ м}$, $r_d = 1 \text{ м}$ (штриховые линии) и $z_d = 2 \text{ м}$, $r_d = 1 \text{ м}$ (сплошные линии):

а – 1, 4 – $\chi_z = \chi_r = 0.15 \text{ м}^2/\text{с}$, 2, 5 – $0.1 \text{ м}^2/\text{с}$, 3, 6 – $0.05 \text{ м}^2/\text{с}$, на всех кривых $\chi_{z1} = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 10^{-10} \text{ м}^2$;

б – 1, 2 – $\chi_z = \chi_r = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 10^{-10} \text{ м}^2$; 3, 4 – $0.1 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$; 5, 6 – $0.15 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_r = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$, на всех кривых $\chi_{z1} = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$

Из анализа кривых на рисунках 6.9, а и 6.9, в видно, что увеличение радиальной (уменьшении вертикальной) компоненты пьезопроводности за счет

уменьшения проницаемости или сжимаемости проницаемого пропластка приводит к увеличению возмущения давления как в среднем пропластке, так и в окружающей среде.

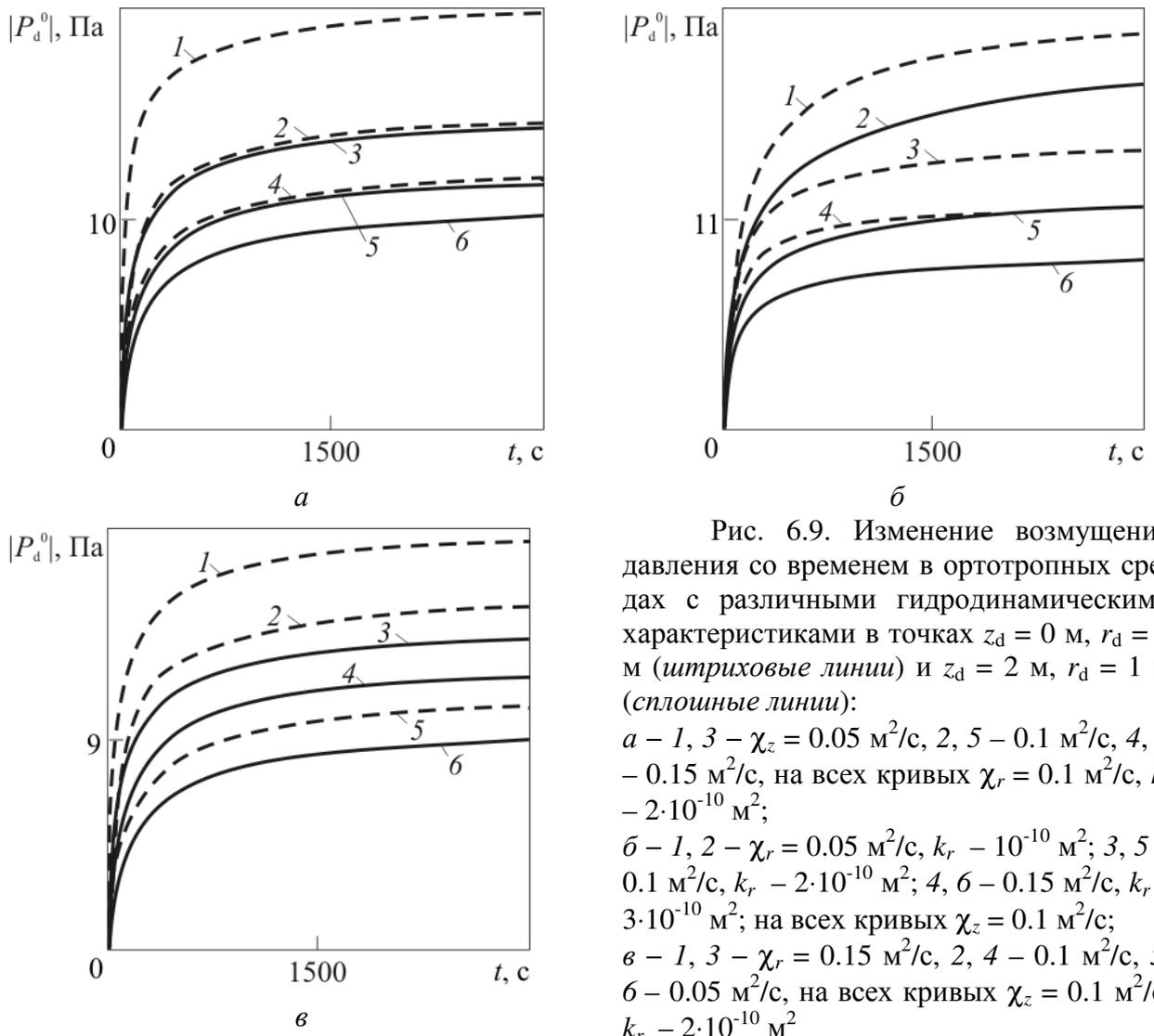


Рис. 6.9. Изменение возмущения давления со временем в ортотропных средах с различными гидродинамическими характеристиками в точках $z_d = 0$ м, $r_d = 1$ м (штриховые линии) и $z_d = 2$ м, $r_d = 1$ м (сплошные линии):

а – 1, 3 – $\chi_z = 0.05$ м²/с, 2, 5 – 0.1 м²/с, 4, 6 – 0.15 м²/с, на всех кривых $\chi_r = 0.1$ м²/с, $k_r = 2 \cdot 10^{-10}$ м²;

б – 1, 2 – $\chi_r = 0.05$ м²/с, $k_r = 10^{-10}$ м²; 3, 5 – 0.1 м²/с, $k_r = 2 \cdot 10^{-10}$ м²; 4, 6 – 0.15 м²/с, $k_r = 3 \cdot 10^{-10}$ м²; на всех кривых $\chi_z = 0.1$ м²/с;

в – 1, 3 – $\chi_r = 0.15$ м²/с, 2, 4 – 0.1 м²/с, 5, 6 – 0.05 м²/с, на всех кривых $\chi_z = 0.1$ м²/с, $k_r = 2 \cdot 10^{-10}$ м²

На рисунке 6.10 сопоставлена динамика возмущения давления в ортотропных средах с различными гидродинамическими характеристиками в тех же точках, что и на рисунке 6.9, для разных значений пьезопроводностей сред и вязкости фильтрующегося флюида. Из рисунка видно, что уменьшение пьезопроводности вследствие изменения вязкости отбираемых углеводородов приводит к необходимости увеличения отклонения давления от равновесного для сохранения постоянной величины отбора. При фильтрации жидкостей с меньшей вязкостью поле давления стабилизируется быстрее.

Итак, уменьшение проницаемости, пористости или сжимаемости пористой среды, а также увеличение вязкости фильтрующейся жидкости требу-

ет большего отклонения давления от равновесного для сохранения постоянного значения отбора извлекаемых углеводородов.

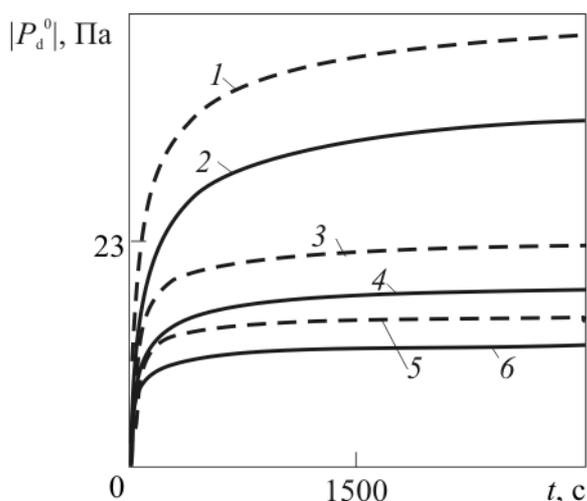


Рис. 6.10. Динамика возмущения различными давления в ортотропных средах с гидродинамическими характеристиками в точках $z_d = 0$ м, $r_d = 1$ м (штриховые линии) и $z_d = 2$ м, $r_d = 1$ м (сплошные линии). Шифр кривых: 1, 2 – $\mu = 48 \cdot 10^{-4}$ Па·с, $\chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.05$ м²/с; 3, 4 – $\mu = 24 \cdot 10^{-4}$ Па·с, $\chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.1$ м²/с; 5, 6 – $\mu = 16 \cdot 10^{-4}$ Па·с, $\chi_{z1} = \chi_z = \chi_r = 0.1$ м²/с

На рис. 6.11, 6.12 приведены кривые, рассчитанные по формуле (6.10.4). В расчетах принято $Q = 5.8 \cdot 10^{-5}$ м³/с, $\mu = 68 \cdot 10^{-4}$ Па·с, $z_d = 3$ м, $h = 0.5$ м. Рис. 6.11 иллюстрирует динамику возмущения давления для пород с разными свойствами, при различных значениях горизонтальной координаты. Анализ кривых показывает, что при удалении от скважины изменения давления уменьшаются. Породам с меньшей проницаемостью соответствуют большие значения давлений.

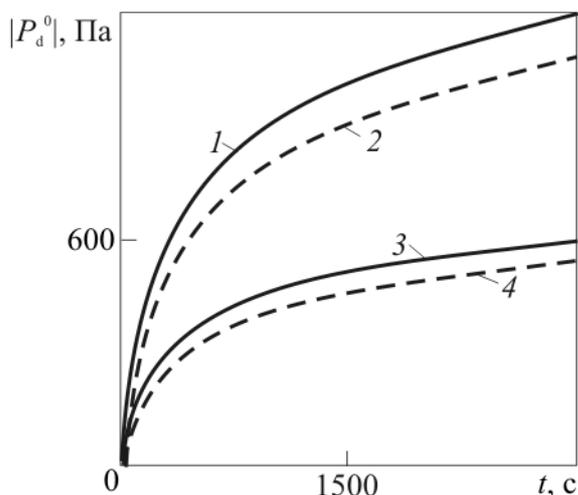


Рис. 6.11. Динамика возмущения давления при различных значениях горизонтальной координаты $r_d = 5$ м (сплошные кривые) и $r_d = 6$ м (штриховые кривые) для разных сред. Шифр кривых: 1, 2 – $\chi_z = \chi_{z1} = \chi_{z2} = \chi_r = \chi_{r1} = 0.1$ м²/с, $k_r = k_z = k_{z1} = k_{z2} = 10^{-10}$ м²; Шифр кривых: 3, 4 – $\chi_z = \chi_{z1} = \chi_{z2} = \chi_r = \chi_{r1} = 0.2$ м²/с, $k_r = k_z = k_{z1} = k_{z2} = 2 \cdot 10^{-10}$ м²

На рис. 6.12 сопоставлены зависимости давления от горизонтальной координаты для сред с разной проницаемостью и при разных значениях полутолщины пласта в момент времени 360 с. Для всех кривых $\chi_z = \chi_{z2} = 0.5$ м², $\chi_r = \chi_{r1} = \chi_{z1} = 0.05$ м²/с, $k_{z1} = k_{z2} = 2 \cdot 10^{-12}$ м², другие расчетные параметры те же, что и для рис. 6.11. Из рисунка видно, что давления уменьшается при

удалении от скважины. Для меньшей полутолщины пласта характерно затухание возмущения давления на меньших расстояниях. Анализ кривых показывает, что при малых временах и на больших расстояниях от скважины перепад давления между $z_d = 0$ и $z_d = h$ уменьшается.

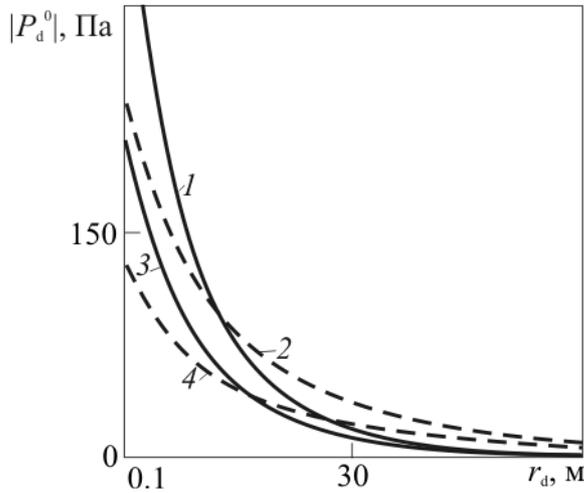


Рис. 6.12. Затухание значений давления при разных значениях полутолщины пласта $h = 1$ м (сплошные кривые) и $h = 2$ м (штриховые кривые) для сред с разной проницаемостью. Шифр кривых: 1, 2 — $k_z = k_r = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$; 3, 4 — $4 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$

Таким образом, из приведенных графических зависимостей следует, что возмущение давления уменьшается при удалении от источника возмущений. Чем меньше проницаемость среды и полутолщина проницаемого пропластка, тем больший градиент давления необходимо создать для сохранения постоянного отбора. Для расчета поля давления в малых временах и на больших расстояниях от источника возмущения достаточно использовать нулевое асимптотическое приближение.

На рисунке 6.13 представлено сопоставление экспериментальной [249] и теоретической кривых изменения забойного давления со временем.

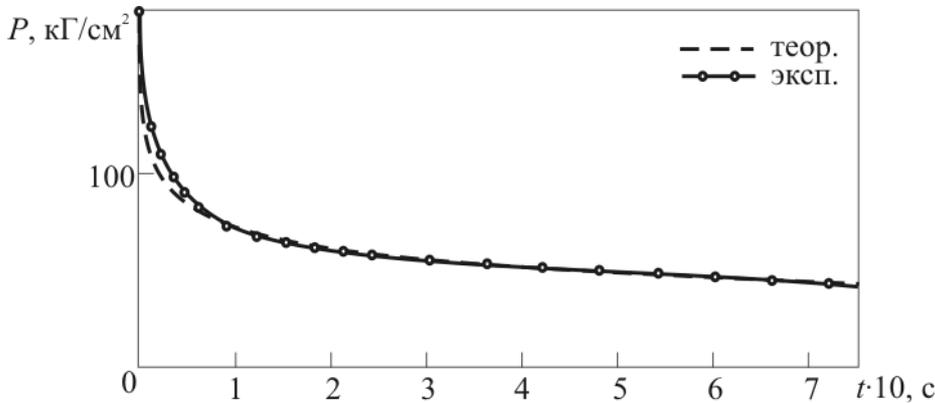


Рис. 6.13. Сопоставление экспериментальной [249] и теоретической кривых изменения забойного давления со временем

Экспериментальная кривая зарегистрирована после пуска скважины № 108 Шебелинского месторождения с постоянным отбором газа $5.45 \text{ м}^3/\text{с}$.

Мощность основного продуктивного пласта 23 м, диаметр ствола скважины 25 см. Теоретические расчеты произведены по формуле (6.10.3). Компоненты пьезопроводности определены по формуле $\chi=k/(m\mu\beta)$. Расчетные параметры: $Q = 5.45 \text{ м}^3/\text{с}$, $r_{0d} = 0.125 \text{ м}$, $h = 11.5 \text{ м}$, $m = m_1 = 0.1$, $\beta = \beta_1 = 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, $\mu = 13 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $k_z = 10^{-13} \text{ м}^2$, $k_r = 1.8 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$, $k_{z1} = 10^{-15} \text{ м}$. Из анализа кривых видно, что при временах $t > 10 \text{ с}$ теоретическая и экспериментальная кривые практически совпадают. Относительное максимальное расхождение между кривыми наблюдается при $t \approx 3 \text{ с}$ и составляет 6 %.

6.12. Производные от функции давления по r и t

Для определения температурного эффекта, наблюдаемого вследствие нестационарной фильтрации флюида в слоисто-неоднородном пористом пласте, необходимо определить производные от функции давления по времени и радиальной координате (см. формулу 1.6.3). В качестве примера рассмотрим квазистационарный частный случай задачи (6.1.2)–(6.1.9), в котором окружающая среда является анизотропной настолько, что можно пренебречь производными по радиальной координате вследствие того, что радиальная компонента пьезопроводности мала. В этих предположениях обезразмеренная постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad z > 1, \quad \frac{\partial P_2}{\partial \tau} - {}_2\chi_z \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} = 0, \quad \tau > 0, \quad z < -1, \quad (6.12.1)$$

$${}_0\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) - {}_0\chi_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1, \quad (6.12.2)$$

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, \quad P_2|_{z=-1} = P|_{z=-1}, \quad (6.12.3)$$

$$k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (6.12.4)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -q, \quad -1 < z < 1, \quad P_1|_{\tau=0} = P_2|_{\tau=0} = 0. \quad (6.12.5)$$

Постановка задачи для нулевого коэффициента разложения в пространстве изображений Лапласа – Карсона, следующая из (6.12.1)–(6.12.5),

запишется как

$$pP_1^{(0)u} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)u}}{\partial z^2}, \quad z > 1, \quad pP_2^{(0)u} - {}^2_1\chi_z \frac{\partial^2 P_2^{(0)u}}{\partial z^2}, \quad z < -1, \quad (6.12.6)$$

$${}^0_1\chi_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^{(0)u}}{\partial r} \right) - \frac{{}^0_1\chi_z}{2} \left(k_1 \frac{\partial P_1^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = 0, \quad (6.12.7)$$

$$r > 0, \quad |z| < 1,$$

$$P^{(0)u} = P_1^{(0)u} \Big|_{z=1} = P_2^{(0)u} \Big|_{z=-1}, \quad (6.12.8)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \frac{\partial P^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -q, \quad -1 < z < 1. \quad (6.12.9)$$

Решения уравнений (6.12.6) с учетом условий (6.12.8) представляются следующим образом

$$P_1^{(0)u} = P^{(0)u} \exp(-\sqrt{p}(z-1)), \quad P_2^{(0)u} = P^{(0)u} \exp\left(\sqrt{\frac{p}{{}^2_1\chi_z}}(z+1)\right). \quad (6.12.10)$$

Производные от $P_1^{(0)u}$ и $P_2^{(0)u}$, входящие в уравнение (6.12.7), имеют вид

$$\frac{\partial P_1^{(0)u}}{\partial z} = -\sqrt{p}P^{(0)u}, \quad P_2^{(0)u} = \sqrt{\frac{p}{{}^2_1\chi_z}}P^{(0)u}. \quad (6.12.11)$$

С учетом (6.12.11) решение уравнения (6.12.7) запишется как

$$P^{(0)u} = qK_0 \left(\sqrt[4]{p} \sqrt{\frac{{}^0_1\chi_z}{2{}^0_1\chi_r} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{{}^2_1\chi_z}} \right) r} \right). \quad (6.12.12)$$

Из выражения (6.12.12), используя асимптотику $K_0(x)$, при малых x можно получить логарифмическую зависимость от радиуса, представленную в работах предыдущих исследователей [34, 35, 81, 249] с точностью до константы.

В пространстве изображений Лапласа – Карсона производная выражения (6.12.12) от поля давления по радиальной координате имеет вид

$$\frac{\partial P^{(0)u}}{\partial r} = -q\sqrt[4]{p} \sqrt{\frac{{}_0^1\chi_z}{2{}_1^0\chi_r} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{{}_1^2\chi_z}}\right)} K_1 \left(\sqrt[4]{p} \sqrt{\frac{{}_0^1\chi_z}{2{}_1^0\chi_r} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{{}_1^2\chi_z}}\right)} r \right). \quad (6.12.13)$$

Отыскание производной по времени в пространстве изображений Лапласа – Карсона соответствует умножению на параметр p

$$pP^{(0)u} = qpK_0 \left(\sqrt[4]{p} \sqrt{\frac{{}_0^1\chi_z}{2{}_1^0\chi_r} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{{}_1^2\chi_z}}\right)} r \right). \quad (6.12.14)$$

С использованием известных соотношений [67] оригиналы выражений (6.12.13) и (6.12.14) представятся как

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} = -\frac{q}{r\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\tau}\right) \exp\left(\frac{{}_0^1\chi_z r^2}{8{}_1^0\chi_r \zeta} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{{}_1^2\chi_z}}\right)\right) d\zeta. \quad (6.12.15)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial \tau} &= \frac{q}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\tau}\right) \exp\left(\frac{{}_0^1\chi_z r^2}{8{}_1^0\chi_r \zeta} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{{}_1^2\chi_z}}\right)\right) \times \\ &\times \frac{1}{2\zeta^2} \left(\frac{{}_0^1\chi_z r^2}{8{}_1^0\chi_r \zeta} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{{}_1^2\chi_z}}\right) - 1 \right) d\zeta \end{aligned} \quad (6.12.16)$$

соответственно.

В размерных переменных эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_d}{\partial r_d} &= -\frac{Q\mu\sqrt{m_1\beta_1\mu}}{4\pi^{3/2}k_r r_d \sqrt{t k_{z1}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\zeta^2 h^2 \mu m_1 \beta_1}{4t k_{z1}}\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{r_d^2}{4h^2 \zeta} \frac{\sqrt{k_{z1}}(\sqrt{k_{z1}m_1\beta_1} + \sqrt{k_{z2}m_2\beta_2})}{2k_r \sqrt{m_1\beta_1}}\right) d\zeta, \end{aligned} \quad (6.12.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_d}{\partial t} &= -\frac{Q\mu\sqrt{m_1\beta_1\mu}}{4\pi^{3/2}k_r \sqrt{t k_{z1}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\zeta^2 h^2 \mu m_1 \beta_1}{4t k_{z1}}\right) \frac{1}{2\zeta^2} \frac{r_d^2}{4h^2 \zeta} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{r_d^2}{4h^2 \zeta} \frac{\sqrt{k_{z1}}(\sqrt{k_{z1}m_1\beta_1} + \sqrt{k_{z2}m_2\beta_2})}{2k_r \sqrt{m_1\beta_1}}\right) \frac{\sqrt{k_{z1}}(\sqrt{k_{z1}m_1\beta_1} + \sqrt{k_{z2}m_2\beta_2})}{2k_r \sqrt{m_1\beta_1}} d\zeta. \end{aligned} \quad (6.12.18)$$

Анализ выражений для производных от функции поля давления (6.12.17), (6.12.18) в слоисто-неоднородной среде осредненного по толщине

нефтяного пласта показывает, что величина температурного эффекта при фильтрации флюида не зависит от вертикальной составляющей проницаемости, а зависит от проницаемостей настилающего и подстилающего пластов и горизонтальной составляющей проницаемости этого пласта.

6.13. Выводы по главе VI

Применение асимптотического метода позволило существенно уточнить развитые ранее модели фильтрации в неоднородных пластах и уточнить усредненные по толщине пласта значения давления аналитическими поправками, учитывающими вертикальные распределения полей. Показано, что построенные на основе развитой модификации асимптотического метода нулевой и первый коэффициенты асимптотического разложения совпадают с соответствующими коэффициентами формального разложения точного решения аксиально-симметричной задачи фильтрации в ряд Маклорена.

Использованная параметризация обеспечивает построение коэффициентов разложения, обладающих простым физическим смыслом: нулевой коэффициент описывает асимптотически осредненные по толщине центральной зоны значения давления, первый – обеспечивает расчеты детального распределения давления по толщине и при больших временах позволяет определить стационарные или квазистационарные поля. Решения возникающих при таком введении формального параметра погранслоевых задач описывают стабилизацию профиля давления в зоне усреднения. Решение каждой из указанных задач по этой причине представляет самостоятельный практический интерес.

Получены аналитические зависимости пространственно-временных распределений давления в слоисто-неоднородной анизотропной пористой среде, которые можно широко использовать для практических расчетов полей давления в природных коллекторах и уточнения представлений о процессах нефтеотдачи неоднородных и анизотропных пластов, которыми реальные природные коллекторы нефти и газа чаще всего являются.

При уменьшении проницаемости k_r , пористости, сжимаемости или

мощности пласта-коллектора, а также при увеличении вязкости фильтрующейся жидкости требуется больший градиент давления для сохранения постоянного значения отбора извлекаемых углеводородов.

Для изотропного пласта-коллектора, окруженного средой с меньшей или равной пьезопроводностью, наблюдается независимость возмущения давления от сжимаемости и пористости пласта-коллектора.

Анализируя содержание глав 5 и 6 настоящей работы, можно утверждать, что создана принципиально новая математическая модель взаимосвязанных полей давления и температуры в реальных коллекторах нефти. Эта модель обеспечивает определение температурных возмущений и величины баротермического эффекта при фильтрации флюида от периферии к скважине и тем самым обеспечивает определение температурного сигнала пласта в развитой в главах 1–4 модели температурного поля в скважине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования заложены основы нового научного направления в скважинной теплофизике – «Асимптотическое представление физических полей давления и температуры, описывающихся задачами сопряжения для уравнений подземной гидродинамики с переменными коэффициентами». Развита метод решения соответствующих задач, заключающийся в представлении исходной задачи более простыми для коэффициентов асимптотического разложения искомого решения по формальному параметру. Применение развитого метода к задачам подземной термо- гидродинамики позволило найти новое решение о взаимосвязанных полях температуры и давления в пласте и скважине. Полученные решения задач о полях температуры и давления в пласте и скважине составляют основу новой объединенной математической модели нестационарного тепло- массообмена потоков жидкости или газа.

Основные результаты и выводы работы заключаются в следующем.

1. Систематизирована и развита модификация асимптотического метода, позволяющая решать задачи о взаимосвязанных полях температуры и давления в пласте и действующей скважине. Наиболее существенным достижением в направлении развития метода является разработка процедуры, позволившая осуществить корректно подход в реализации асимптотического метода для задач с переменными коэффициентами. В центре этого подхода лежит применение метода формального параметра к задаче для остаточного члена.

2. Показано, что задачи для коэффициентов разложения остаточного члена по формальному параметру не содержат переменных коэффициентов и позволяют реализовать процедуру интегрального осреднения корректно. Это достижение позволило построить решение задач о температурном поле ламинарного и турбулентного потоков в нулевом и первом асимптотических приближениях, а также аналитически исследовать поля давления в

неоднородных пластах с произвольным распределением проницаемостей по толщине пласта.

3. Развитие указанного метода позволило также создать обобщенную процедуру построения стационарных решений задач теплопроводности и пьезопроводности в ограниченных пространственных подобластях области определения задач.

4. На основании решений ряда конкретных задач сопряжения математической физики получены асимптотические формулы для расчета реальных радиальных перепадов температуры ламинарных и турбулентных потоков между любой точкой внутри скважины и ее стенкой как для случая постоянных вертикальных градиентов температуры, так и для более общего случая, в котором вертикальные градиенты определяются на основе решения соответствующих краевых задач.

5. Для описания температурного поля в скважине вблизи интервала перфорации на основе применения асимптотического метода развита модель температурного поля, индуцированного нестационарными полями давления упругого режима течения в нефтяных пластах. В итоге созданы новые способы расчетов переходных температурных полей, возникающих в скважинах и пластах при фильтрации флюида.

6. Расчеты, выполненные на основе полученных асимптотических формул, позволили уточнить представления о динамике температурных аномалий, обусловленных вкладом температурного сигнала пласта с учетом полученных радиальных распределений. В частности показано, что зона влияния температурных сигналов пласта существенно зависит от состава жидкости в скважине, теплофизических свойств окружающих пород и практически не зависит от положения термометра относительно оси скважины. Установлена зависимость времени подхода температурного сигнала пласта от глубины расположения термометра, дебита скважины, теплофизических свойств флюида и окружающей среды.

7. Определен критерий для оценки интервала Z влияния температурного сигнала на входе в интервал измерений и его зависимости от времени, связы-

вающий числа Пекле Pe , Фурье Fo и относительный радиус v , и средние значения функции радиального распределения скорости

$$R_1(1) = \int_0^1 r'R(r')dr' = \frac{1}{2} \langle R(r) \rangle \text{ для различных профилей } R(r):$$

$$R_1(1)Pev\sqrt{Fo - Z/2R_1(1)Pev} = 0.42\chi Z, Fo > Z/2R_1(1)Pev.$$

Размеры этого интервала значительно меньше пространственного диапазона конвективного влияния $Z_f = 2R_1(1)PevFo$ и не зависят от распределения коэффициента теплопроводности по радиусу в турбулентном потоке;

8. Исследованы особенности эволюции температурного поля в окрестности зоны изменения проходного сечения скважины, а также зависимости размеров зоны температурного влияния от соотношения площадей и расположения точки изменения проходного сечения, теплофизических свойств жидкости и окружающих пород.

9. Показано, что наряду с пространственным диапазоном конвективного влияния пласта, верхняя граница которого рассчитывается из соотношения $Z = Pev \cdot Fo$ ($Z_d = vt$), существует пространственный диапазон затухания температурного сигнала пласта. Положение верхней границы этого диапазона существенно зависит от величины температурного сигнала пласта, состава жидкости в скважине и теплофизических свойств окружающих пород.

10. Поле давления в слоисто-неоднородной среде, осредненное по толщине нефтяного пласта, (а также величина баротермического эффекта) не зависит от вертикальной составляющей проницаемости, а зависит от проницаемостей настилающего и подстилающего пластов и горизонтальной составляющей проницаемости этого пласта.

Полученные в диссертации результаты представляют новое эффективное направление использования асимптотических методов в теплофизике, решении задач сопряжения математической физики, подземной гидродинамике и физике нефтяного пласта и открывают перспективы для новых исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Анализ зависимостей теплофизических свойств нефти и осадочных пород от температуры

Свойства добываемой нефти различаются в пределах эксплуатационных объектов. Температурные условия определяют вязкость, теплопроводность и температуропроводность углеводородов. Поскольку наибольшие изменения наблюдаются в величине вязкости, то вопрос о влиянии зависимости вязкости нефти от ее температуры на формирование поля температуры в скважине является первостепенным.

При изучении температурного поля в скважине важную роль играет учет распределения скорости, которая является определяющим фактором влияния вязкости. Поле скоростей жидкости в скважине имеет одну ненулевую составляющую, направленную вдоль оси z_d и задано вектором $\vec{v} = (0, 0, \langle v \rangle R(r_d/r_0))$.

Для установившегося течения уравнения гидродинамики позволяют определить некоторый формальный радиальный профиль скорости не зависящий от вертикальной координаты z : $v(r) = \langle v \rangle R(r)$, где $\langle v \rangle$ – средняя скорость потока по сечению, а $R(r)$ – некоторая функция, в которую вынесена зависимость от координаты r [171, 175, 187, 206]. На самом деле, в эту же функцию включается зависимость профиля скорости от размеров и геометрии полости течения и т.д.

При стационарном течении уравнение баланса массы имеет вид $\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$, откуда получим, что вдоль ствола скважины $v = \rho_0 v_0 / \rho$. То есть, значения скорости определяются ее граничным значением на входе в скважину v_0 и отношением плотностей на входе ρ_0 и в точке наблюдения ρ , т.е. сжимаемостью флюида, и не зависят от вязкости. Этот факт является следствием закона сохранения массы.

При ламинарном течении распределение поля скорости $v = \langle v \rangle R(r_d)$, построенное Пуазейлем на основе решения уравнения Навье – Стокса, записывается следующим образом:

$$v = 2\langle v \rangle \left[1 - \left(\frac{r_d}{r_0} \right)^2 \right].$$

Функция $R(r_d)$ в этом случае имеет вид

$$R(r_d) = 2 \left[1 - \left(\frac{r_d}{r_0} \right)^2 \right].$$

Отсюда следует, что поле скорости не зависит от вязкости и определяется геометрией течения. Такое утверждение справедливо и для турбулентного течения. Оно является следствием уравнения движения или закона сохранения импульса.

Согласно уравнению неразрывности, средняя скорость $\langle v \rangle$ от вязкости не зависит. Кажущаяся зависимость скорости от вязкости, следующая из выражения для средней скорости потока: $\langle v \rangle = -\Delta P r_0^2 / (8l\mu)$, где ΔP – перепад давления на участке трубы длиной l , μ – вязкость жидкости, просто означает постоянство величины $\Delta P/\mu$ при изменении вязкости вследствие температурного фактора. Физически этот факт означает, что *изменение вязкости влечет за собой изменение поля давления*.

Поскольку в постановку задач о нестационарных температурных полях осесимметричных потоков входят $\langle v \rangle$ и $R(r_d)$, то в сделанных предположениях, *температурное поле в скважине от вязкости не зависит*.

В настоящем приложении представлены также результаты аппроксимации экспериментальных данных по теплопроводности и теплоемкости из работы [7] линейной зависимостью вида $\lambda(\theta) = a\theta + b$, $c(\theta) = k\theta + n$, осуществленной методом наименьших квадратов. На графиках точками представлены экспериментальные данные из таблиц А1 – А4 настоящего приложения, сплошные линии представляют аппроксимационные зависимости.

Погрешность аппроксимации экспериментальных данных линейной функцией определена по формуле [10]

$$e^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f(\theta)_{\text{экс}} - f(\theta)_{\text{теор}})^2}{n(n-1)}}.$$

Значения погрешностей приведены в последней колонке таблиц А1 – А4.

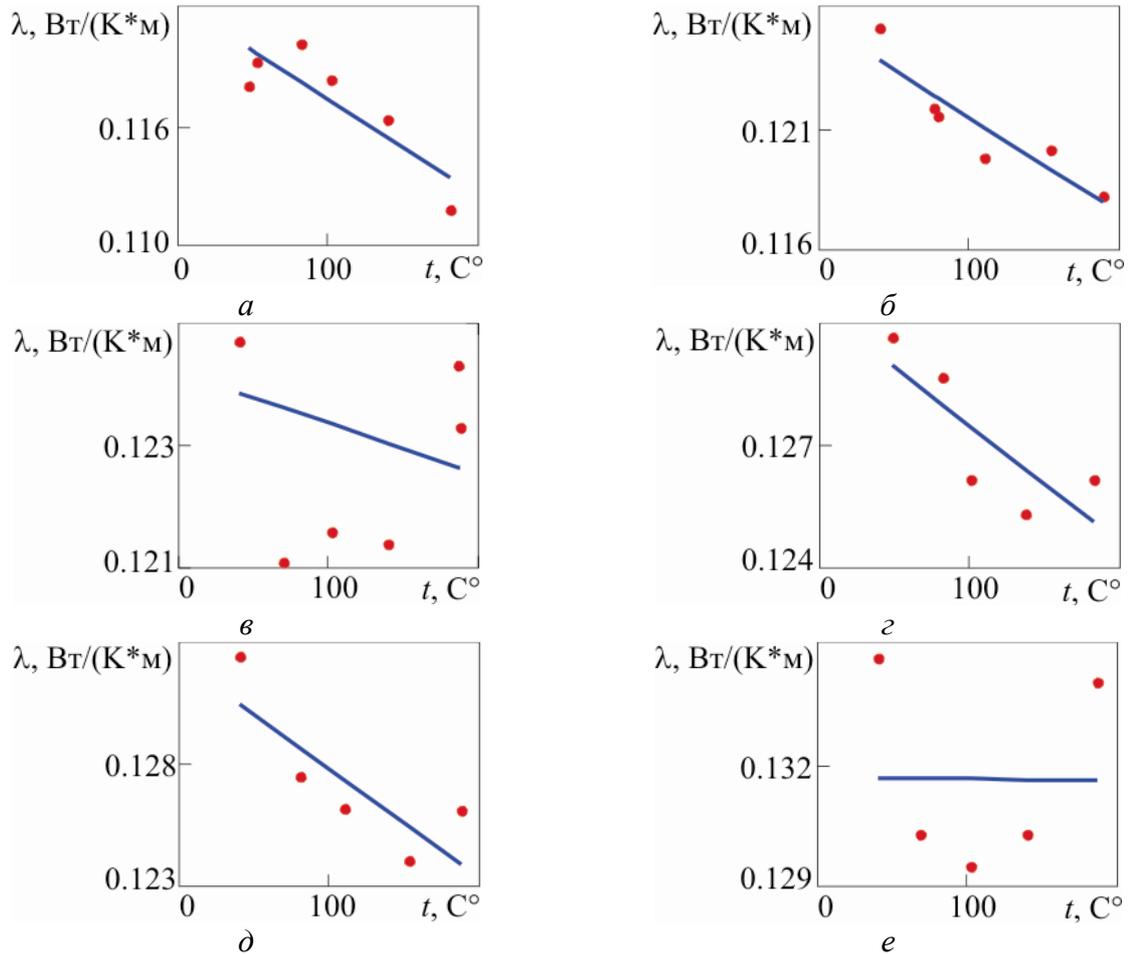


Рис. А.1. Зависимость коэффициента теплопроводности нефти от температуры: *а, г* – участок Ново-Кипячий, *б, д* – Кумский горизонт, *в, е* – участок Южно-Карский, при значениях давления *а, б, в* – 0,1 МПа, *г, д, е* – 19,6 МПа

Анализ результатов аппроксимации показывает, что в указанном температурном диапазоне зависимости теплоемкости и коэффициента теплопроводности от температуры могут быть с высокой точностью представлены в виде первых двух слагаемых рядов Тейлора

$$c(\theta) = c(\theta - \theta^* + \theta^*) = c(\theta^*) + \left. \frac{dc}{d\theta} \right|_{\theta=\theta^*} (\theta - \theta^*) = c^* (1 + \zeta^* (\theta - \theta^*)),$$

$$\lambda(\theta) = \lambda(\theta - \theta^* + \theta^*) = \lambda(\theta^*) + \left. \frac{d\lambda}{d\theta} \right|_{\theta=\theta^*} (\theta - \theta^*) = \lambda^* (1 + \gamma^* (\theta - \theta^*)),$$

где ζ^* , γ^* – температурные коэффициенты теплоемкости и теплопроводности соответственно, а θ^* – температура в точке линеаризации.

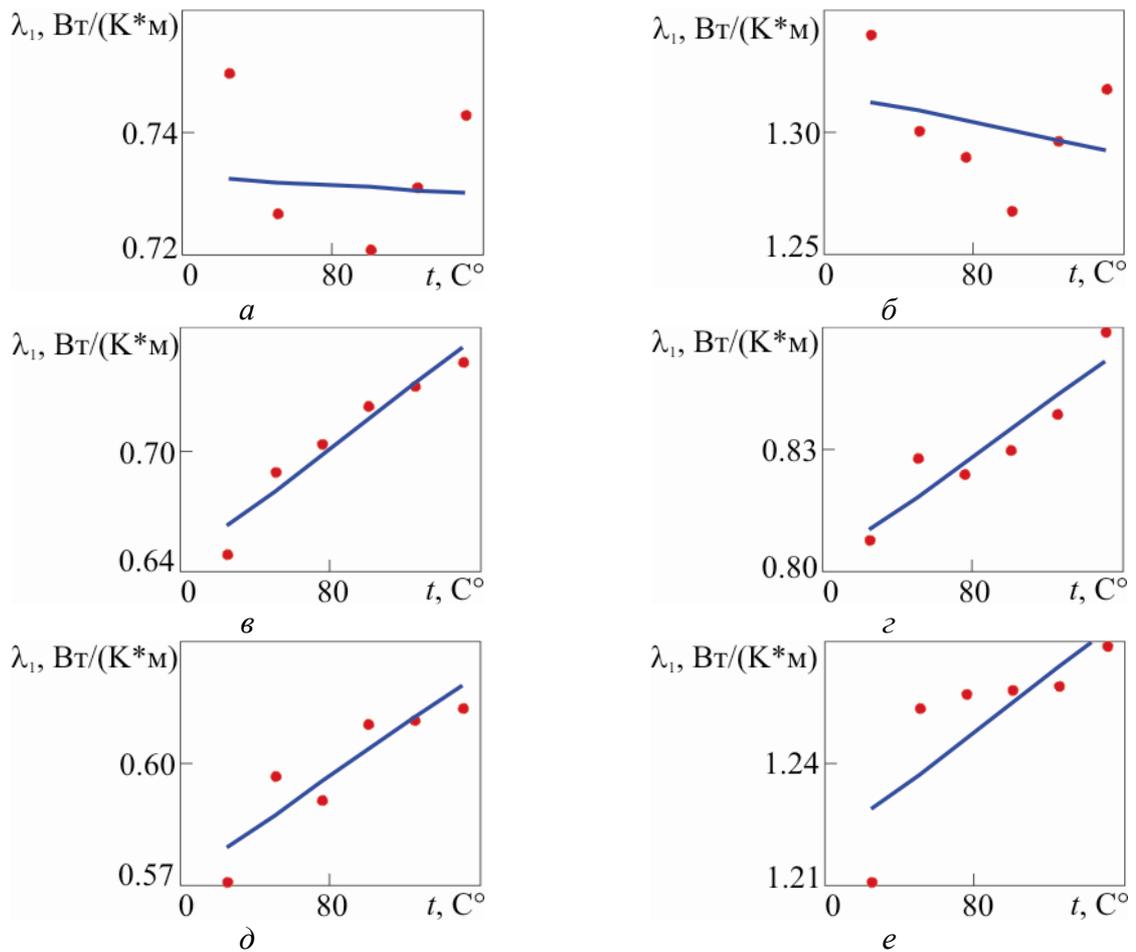


Рис. А.2. Зависимость коэффициента теплопроводности окружающей скважину среды от температуры для образцов: *а* – алевролит глинистый (интервал отбора керна 648 – 655 м), *б* – алевролит песчанистый слабонефтенасыщенный (648 – 655 м), *в* – алевролит плитчатый (622 – 669 м), *г* – алевролит глинистый (732 – 746 м), *д* – алевролит слабонефтенасыщенный (262 – 269 м), *е* – мергель (1080 – 1087 м)

Параметры γ^* и ζ^* получены из равенств

$$c^*(1 + \zeta^*(\theta - \theta^*)) = n\theta + k, \quad \lambda^*(1 + \gamma^*(\theta - \theta^*)) = a\theta + b$$

и определяются соотношениями $\gamma^* = a/(a\theta^* + b)$, $\lambda^* = a/\gamma^* = a\theta^* + b$,

$\zeta^* = n/(n\theta^* + k)$, $c^* = n\theta^* + k$. В представленных зависимостях температура

точки линеаризации θ^* является свободным параметром. Она не определяется однозначно и может удовлетворять дополнительным требованиям.

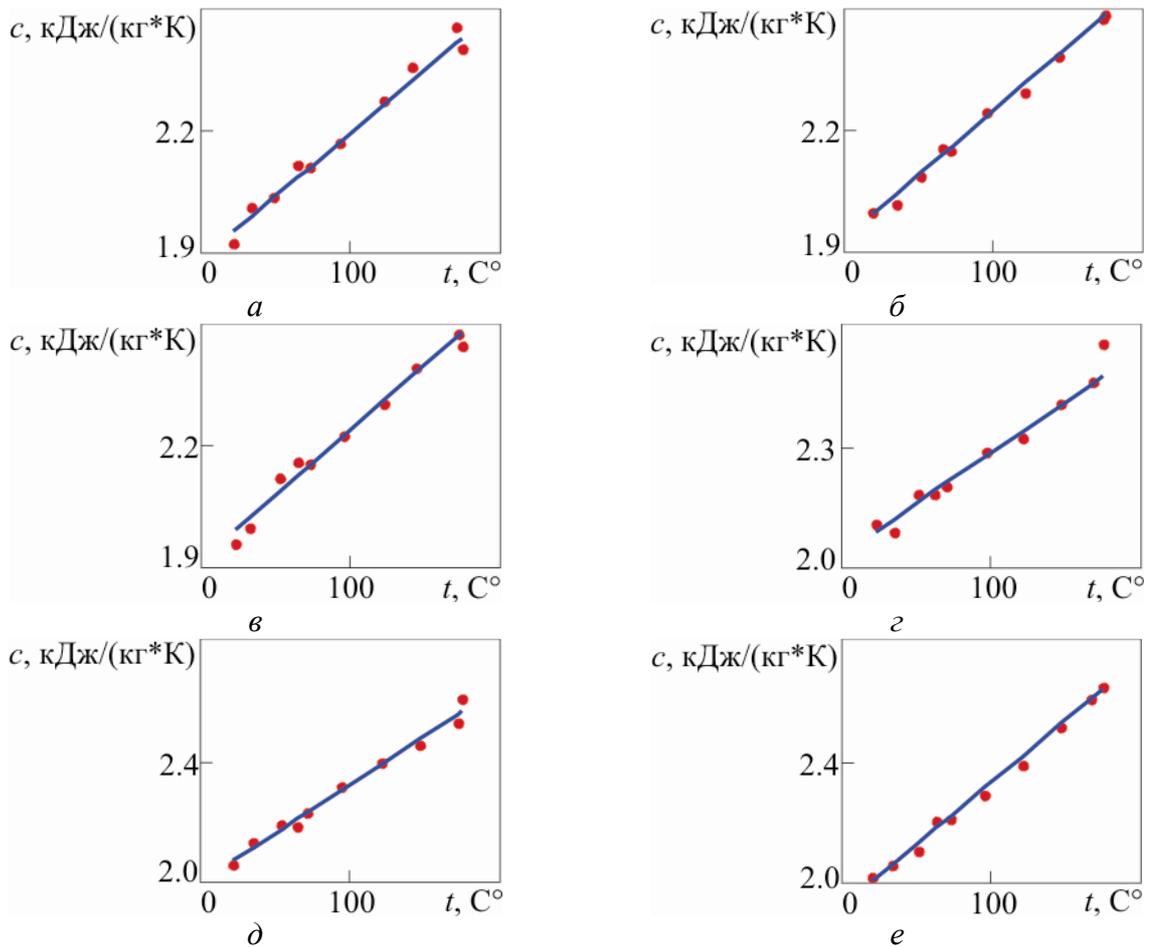


Рис. А.3. Зависимость теплоемкости флюида от температуры: *а, г* – участок Ново-Кипячий, *б, д* – Кумский горизонт, *в, е* – участок Южно-Карский, при значениях давления *а, б, в* – 0,1 МПа, *г, д, е* – 19,6 МПа

Выбор температуры линеаризации осуществлен следующим образом. Параметры γ^* и ζ^* , согласно данным из таблиц А1 – А4 малы и могут быть использованы в качестве малого параметра задачи. Согласно теории метода малого параметра [145], выбор температуры линеаризации должен обеспечивать минимальное по модулю значение соответствующего температурного коэффициента. Из приведенных зависимостей следует, что величина γ^* и ζ^* может быть уменьшена за счет выбора температуры точки линеаризации θ^* . Поскольку зависимость параметров от температуры точки линеаризации является монотонной, то в качестве точки линеаризации θ^* следует выбрать начало или конец температурного диапазона, в зависимости от того является ли температурный соответствующий коэффициент отрицательным или положительным. Такой выбор точки линеаризации обеспечивает увеличение точности математической модели.

Таблица А.1.

Результаты аппроксимации зависимостей коэффициентов теплопроводности нефти от температуры

Участок Ново-Кипячий, 0.1 МПа						
θ , К	320.36	325.41	355.15	375.36	412.82	453.64
λ , Вт/(К*м)	0.1180	0.1192	0.1201	0.1183	0.1163	0.1118
λ^* , Вт/(К*м)	a , Вт/(К ² *м)	b , Вт/(К*м)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.120	$-4.9*10^{-5}$	0.135	320.36	$-0.4*10^{-3}$	0.54	
Кумский горизонт, 0.1 МПа						
θ , К	312.75	349.69	352.34	383.32	427.49	462.23
λ , Вт/(К*м)	0.1251	0.1218	0.1215	0.1198	0.1201	0.1182
λ^* , Вт/(К*м)	a , Вт/(К ² *м)	b , Вт/(К*м)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.124	$-3.9*10^{-5}$	0.136	312.75	$-0.3*10^{-3}$	0.33	
Участок Южно-Карский, 0.1 МПа						
θ , К	313.63	342.60	375.38	413.23	459.86	460.92
λ , Вт/(К*м)	0.1274	0.1211	0.1216	0.1214	0.1243	0.1233
λ^* , Вт/(К*м)	a , Вт/(К ² *м)	b , Вт/(К*м)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.124	$-8.3*10^{-6}$	0.126	313.63	$-0.7*10^{-4}$	0.78	
Участок Ново-Кипячий, 19.6 МПа						
θ , К	321.50	354.74	374.17	410.12	454.90	
λ , Вт/(К*м)	0.1287	0.1279	0.1258	0.1251	0.1258	
λ^* , Вт/(К*м)	a , Вт/(К ² *м)	b , Вт/(К*м)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.128	$-2.4*10^{-5}$	0.124	321.5	$-0.2*10^{-3}$	0.32	
Кумский горизонт, 19.6 МПа						
θ , К	313.27	353.29	383.41	426.69	461.13	
λ , Вт/(К*м)	0.1324	0.1275	0.1262	0.1241	0.1261	
λ^* , Вт/(К*м)	a , Вт/(К ² *м)	b , Вт/(К*м)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.130	$-4.4*10^{-5}$	0.144	313.27	$-0.3*10^{-3}$	0.63	
Участок Южно-Карский, 19.6 МПа						
θ , К	313.20	341.90	374.96	412.69	459.14	
λ , Вт/(К*м)	0.1346	0.1303	0.1295	0.1303	0.1340	
λ^* , Вт/(К*м)	a , Вт/(К ² *м)	b , Вт/(К*м)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.132	$5.2*10^{-7}$	0.131	459.14	$-0.4*10^{-5}$	0.80	

Таблица А.2.

Результаты аппроксимации зависимостей коэффициента теплопроводности горных пород от температуры

θ_1 , К	298	323	348	373	398	423
Алевролит глинистый (интервал отбора керна 648 – 655 м)						
λ_1 , Вт/(К*м)	0.750	0.727	0.715	0.721	0.731	0.743
λ_1^* , Вт/(К*м)	a , Вт/(К ² *м)	b , Вт/(К*м)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.732	$-1.9*10^{-5}$	0.738	298	$-0.3*10^{-4}$	0.74	

Алевролит песчанистый слабонефтенасыщенный (648 – 655 м)						
λ_1 , Вт/(К*М)	1.340	1.301	1.290	1.268	1.297	1.318
λ_1^* , Вт/(К*М)	a , Вт/(К ² *М)	b , Вт/(К*М)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
1.313	$-1.6*10^{-4}$	1.361	298	$-0.1*10^{-3}$	0.73	
Алевролит плитчатый (622 – 669 м)						
λ_1 , Вт/(К*М)	0.649	0,689	0.703	0.722	0.731	0.743
λ_1^* , Вт/(К*М)	a , Вт/(К ² *М)	b , Вт/(К*М)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.750	$0.7*10^{-4}$	0.453	423	$0.1*10^{-2}$	0.51	
Алевролит глинистый (732 – 746 м)						
λ_1 , Вт/(К*М)	0.808	0.828	0.824	0.830	0.839	0.859
λ_1^* , Вт/(К*М)	a , Вт/(К ² *М)	b , Вт/(К*М)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.852	$0.3*10^{-4}$	0.710	423	$0.4*10^{-3}$	0.31	
Алевролит слабонефтенасыщенный (262 – 269 м)						
λ_1 , Вт/(К*М)	0.571	0.597	0.591	0.610	0.611	0.614
λ_1^* , Вт/(К*М)	a , Вт/(К ² *М)	b , Вт/(К*М)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.618	$0.3*10^{-4}$	0.485	423	$0.5*10^{-3}$	0.49	
Мергель (1080 – 1087 м)						
λ_1 , Вт/(К*М)	1.211	1.254	1.257	1.258	1.259	1.269
λ_1^* , Вт/(К*М)	a , Вт/(К ² *М)	b , Вт/(К*М)	θ^* , К	γ^* , К ⁻¹	e^* , %	
1.273	$0.3*10^{-4}$	1.125	423	$0.3*10^{-3}$	0.40	

Таблица А.3.

Результаты аппроксимации зависимостей
теплоемкости нефти от температуры

Участок Ново-Кипячий, 0.1 МПа						
θ , К	294.3	306.0	321.4	337.3	345.0	
c , кДж/(кг*К)	1.925	2.011	2.037	2.115	2.111	
θ , К	365.5	395.6	414.2	443.4	448.0	
c , кДж/(кг*К)	2.171	2.276	2.359	2.458	2.401	
c^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %	
2.445	$0.3*10^{-2}$	1.013	448.0	$0.1*10^{-2}$	0.34	
Кумский горизонт, 0.1 МПа						
θ , К	292.2	307.6	324.4	338.4	343.6	
c , кДж/(кг*К)	2.0	2.02	2.088	2.155	2.15	
θ , К	368.3	394.4	416.0	445.5	448.0	
c , кДж/(кг*К)	2.245	2.295	2.382	2.475	2.483	
c^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %	
2.482	$0.3*10^{-2}$	1.071	448.0	$0.1*10^{-2}$	0.17	
Участок Южно-Карский, 0.1 МПа						
θ , К	296.0	305.3	325.3	337.1	345.4	
c , кДж/(кг*К)	1.958	2.0	2.121	2.163	2.157	
θ , К	368.2	395.0	416.7	444.6	448.0	
c , кДж/(кг*К)	2.223	2.302	2.391	2.477	2.446	
c^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %	

2.478	$0.3 \cdot 10^{-2}$	1.052	448.0	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.36
Участок Ново-Кипячий, 19.6 МПа					
θ , К	295.3	307.5	324.1	335.4	343.3
c , кДж/(кг*К)	2.106	2.09	2.18	2.183	2.201
θ , К	369.4	393.7	418.9	440.2	448.0
c , кДж/(кг*К)	2.284	2.322	2.404	2.458	2.459
c^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %
2.470	$0.2 \cdot 10^{-2}$	1.354	448.0	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.21
Кумский горизонт, 19.6 МПа					
θ , К	294.5	308.0	326.1	337.4	343.8
c , кДж/(кг*К)	2.061	2.13	2.189	2.183	2.228
θ , К	366.4	394.2	419.0	444.3	448.0
c , кДж/(кг*К)	2.317	2.369	2.453	2.526	2.601
c^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %
2.560	$0.3 \cdot 10^{-2}$	1.131	448.0	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.30
Участок Южно-Карский, 19.6 МПа					
θ , К	293.4	306.2	324.2	336.8	345.4
c , кДж/(кг*К)	2.019	2.062	2.104	2.206	2.21
θ , К	368.1	393.3	419.7	439.5	448.0
c , кДж/(кг*К)	2.291	2.387	2.513	2.605	2.643
c^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %
2.630	$0.4 \cdot 10^{-2}$	0.817	448.0	$0.2 \cdot 10^{-2}$	0.23

Таблица А.4.

Зависимость теплоемкости горных пород
от температуры и результаты аппроксимации

θ_1 , К	298	323	348	373	398	423
Алевролит глинистый (интервал отбора керна 648 – 655 м)						
c_1 , кДж/(кг*К)	0.869	0.916	0.923	0.885	1.024	1.080
c_1^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %	
1.045	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.396	423	$0.1 \cdot 10^{-2}$	1.86	
Алевролит песчанистый слабонефтенасыщенный (648 – 655 м)						
c_1 , кДж/(кг*К)	0.846	0.892	0.910	0.920	0.967	0.991
c_1^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.986	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.525	423	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.42	
Алевролит плитчатый (622 – 669 м)						
c_1 , кДж/(кг*К)	0.852	0.922	0.953	0.985	1.012	1.037
c_1^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %	
1.048	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.454	423	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.57	
Алевролит глинистый (732 – 746 м)						
c_1 , кДж/(кг*К)	0.820	0.949	0.970	1.031	1.058	1.060
c_1^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %	
1.095	$0.2 \cdot 10^{-2}$	0.327	423	$0.2 \cdot 10^{-2}$	1.41	
Алевролит слабонефтенасыщенный (262 – 269 м)						
c_1 , кДж/(кг*К)	0.802	0.894	0.939	0.934	0.958	0.970

c_1^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %	
0.986	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.493	423	$0.1 \cdot 10^{-2}$	1.25	
Мергель (1080 – 1087 м)						
c_1 , кДж/(кг*К)	0.896	0.942	0.972	1.005	1.032	1.070
c_1^* , кДж/(кг*К)	n , кДж/(кг*К ²)	k , кДж/(кг*К)	θ^* , К	ζ^* , К ⁻¹	e^* , %	
1.070	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.503	423	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.19	

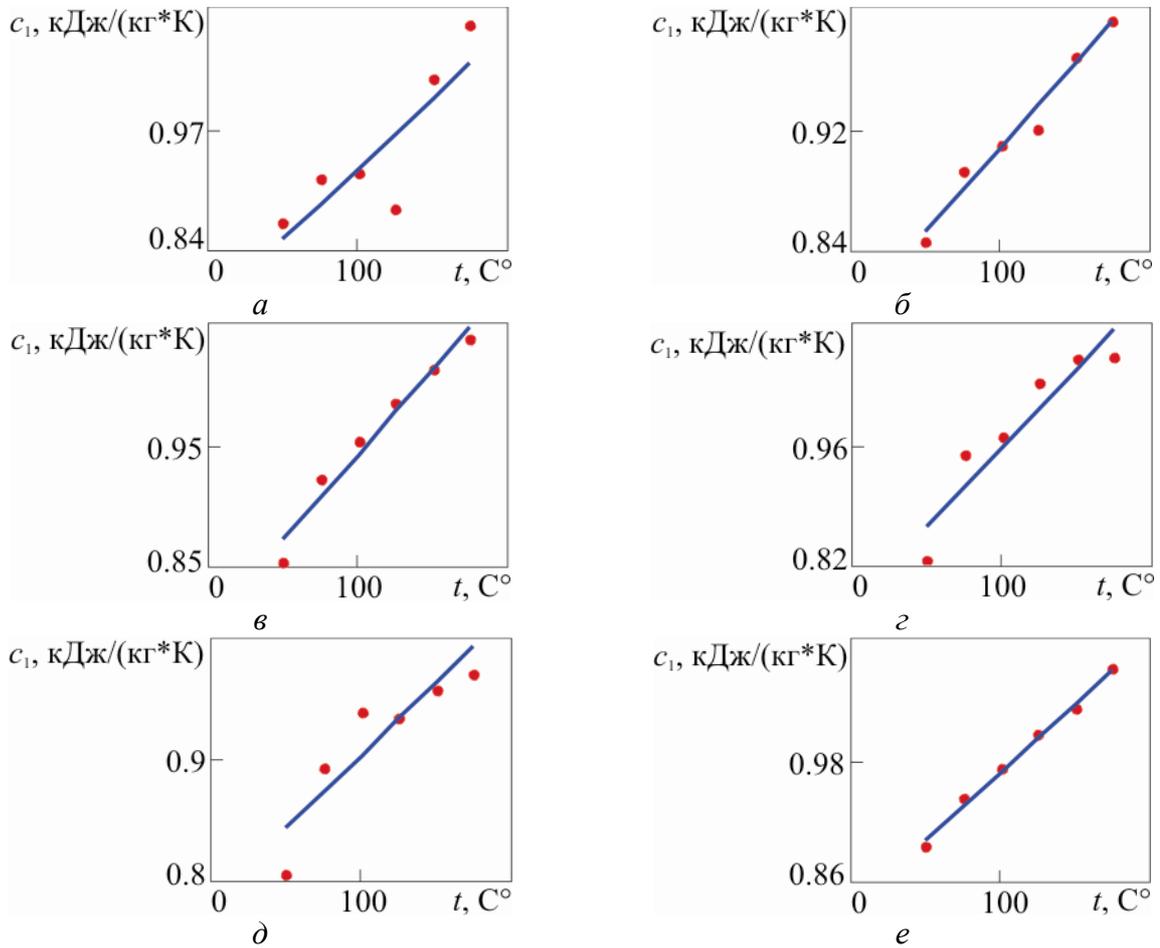


Рис. А.4. Зависимость теплоемкости окружающей среды от температуры для образцов: *а* – алевролит глинистый (интервал отбора керна 648 – 655 м), *б* – алевролит песчанистый слабонефтенасыщенный (648 – 655 м), *в* – алевролит плитчатый (622 – 669 м), *г* – алевролит глинистый (732 – 746 м), *д* – алевролит слабонефтенасыщенный (262 – 269 м), *е* – мергель (1080 – 1087 м)

Анализ экспериментальных данных [7] показывает, что коэффициент теплопроводности нефтей в температурном диапазоне 40 – 190°C лежит в пределах 0.112 – 0.135 Вт/(К*м), относительное изменение его составляет 2 – 5 %. Результаты аппроксимации зависимостей теплофизических свойств от температуры, представленные в таблицах и на рисунках А1 – А4 показывает, что зависимость коэффициента теплопроводности от температуры с высокой точностью представляется линейной функцией. Погрешность аппроксимации

при этом не превышает 1%. Величина температурного коэффициента теплопроводности лежит в пределах от $0.2 \cdot 10^{-3}$ до $0.4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ и представляется маленькой величиной, которая может быть принята в качестве малого параметра задачи.

Теплоемкости нефти в температурном диапазоне $20 - 175 \text{ }^\circ\text{C}$ изменяется в пределах $1.9 - 2.7 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$.

Температурный коэффициент теплоемкости нефти в температурном диапазоне $20 - 175 \text{ }^\circ\text{C}$ изменяется от $0.1 \cdot 10^{-2}$ до $0.2 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$, при этом рост теплоемкости составляет от 14% до 24% [7].

Для окружающих скважину осадочных пород коэффициент теплопроводности в диапазоне температур $25 - 150 \text{ }^\circ\text{C}$ лежит в пределах $0.57 - 1.34 \text{ Вт}/(\text{K} \cdot \text{м})$ и изменяется от 1% до 12% в зависимости от типа пород. Величина температурного коэффициента теплопроводности также является малой величиной и лежит в пределах от $0.2 \cdot 10^{-3}$ до $0.4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Погрешность аппроксимации также не превышает 1%.

В том же температурном диапазоне теплоемкость рассмотренных пород варьируется в пределах $0.82 - 1.07 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$, и растет с повышением температуры на 15 – 26%. Величина температурного коэффициента теплоемкости составляет $0.1 \cdot 10^{-3} - 0.4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Погрешность аппроксимации не более 2%.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Асимптотическое решение задачи о поле давления в слоисто-неоднородном анизотропном пористом пласте

В приложении иллюстрируются асимптотическое и точное решения задачи о поле давления, содержащей уравнения пьезопроводности и условия сопряжения. Показано, что коэффициенты разложения точного решения в ряд Маклорена совпадают с коэффициентами асимптотического разложения.

Б.1. Математическая постановка и параметризация модельной задачи в безразмерных переменных

Постановка задачи для линейного течения при постоянной депрессии, обсуждаемая в приложении следует из (1.9.6) – (1.9.9) при $k_x(z) = k_z(z) = P_0 = 1$.

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad t > 0, \quad (\text{Б.1.1})$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (\text{Б.1.2})$$

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{z=1} = \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.1.3})$$

$$P|_{x=0} = P_0, \quad P_1|_{x+z \rightarrow \infty} = P|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad P_1|_{t=0} = 0. \quad (\text{Б.1.4})$$

Аналогично (1.9.6) – (1.9.9) предполагается, что решение является регулярным на бесконечности, т.е. при устремлении пространственных координат в бесконечность искомое решение, а при необходимости и его производная, обращается в нуль. Задача параметризуется путем добавления множителя $1/\varepsilon$ перед первой и второй производными по z как в уравнении, так и в граничном условии задачи

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad t > 0, \quad (\text{Б.1.5})$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (\text{Б.1.6})$$

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z}|_{z=1} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial z}|_{z=1}, \quad (\text{Б.1.7})$$

$$P|_{x=0} = P_0, \quad P_1|_{x+z \rightarrow \infty} = P|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad P_1|_{t=0} = 0. \quad (\text{Б.1.8})$$

Б.2. Асимптотическое решение задачи

Решение задачи (Б.1.5) – (Б.1.8) отыскивается в виде асимптотической формулы по параметру ε [11, 13]

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \dots + \varepsilon^n P^{(n)} + \theta^{(n)}, \quad P_1 = P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \dots + \varepsilon^n P_1^{(n)} + \theta_1^{(n)}. \quad (\text{Б.2.1})$$

Подставив выражения (Б.2.1) в (Б.1.5) – (Б.1.8) и сгруппировав слагаемые по степеням параметра разложения ε , получим

$$\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (\text{Б.2.2})$$

$$-\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (\text{Б.2.3})$$

$$\left(P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=1} = \left(P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=1},$$

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=0} + \varepsilon \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} + \dots = 0, \quad (\text{Б.2.4})$$

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) + \dots = 0,$$

$$P_1^{(0)} \Big|_{F_0=0} + \varepsilon P_1^{(1)} \Big|_{F_0=0} + \dots = 0, \quad \left(P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \dots \right) \Big|_{x=0} = 1, \quad 0 < z < 1. \quad (\text{Б.2.5})$$

Анализ задачи показывает, что сомножители при степенях ε в (Б.2.3) и (Б.2.4) содержат соседние коэффициенты разложения и в этом смысле являются «зацепленными». Для решения соответствующих уравнений осуществлена процедура расщепления, аналогичная рассмотренной в п. 1.9.2. При осуществлении этой процедуры показано, что в нулевом приближении давление является функцией только от координаты x и времени t : $P^{(0)} = P^{(0)}(x, t)$, т.е. одинаково в каждой точке любого сечения, параллельно-

го оси z . Получен вид функции для первого коэффициента асимптотического разложения

$$P^{(1)} = \frac{z^2}{2} E(x, t) + z F(x, t) + Q(x, t), \quad (\text{Б.2.6})$$

где $F(x, t) = 0$, $E(x, t) = \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1}$, а $Q(x, t)$ функциональный коэффициент,

подлежащий определению.

Окончательная постановка задачи для нулевого коэффициента асимптотического разложения после «расщепления» имеет вид

$$\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad t > 0, \quad (\text{Б.2.7})$$

$$\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} + \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (\text{Б.2.8})$$

$$P^{(0)} = P_1^{(0)} \Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.2.9})$$

$$P^{(0)} \Big|_{x=0} = 1, \quad P_1^{(0)} \Big|_{t=0} = 0. \quad (\text{Б.2.10})$$

Непосредственным интегральным усреднением исходной задачи нетрудно убедиться, что (Б.2.7) – (Б.2.10) представляет задачу для осредненных по толщине центральной зоны значений давления. Это определяет физический смысл нулевого коэффициента разложения или нулевого приближения и практическую важность его определения, поскольку поиском осредненных значений в подобного рода задачах чаще всего и ограничиваются.

Для решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа – Карсона по переменной t [66, 67]

$$f(p) = p \int_0^{\infty} \exp(-pFo) f(Fo) dFo. \quad (\text{Б.2.11})$$

Математическая постановка гидродинамической задачи в нулевом приближении (Б.2.7) – (Б.2.10) в пространстве изображений Лапласа – Карсона по переменной t запишется в виде

$$pP_1^{(0)u} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (\text{Б.2.12})$$

$$\frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (\text{Б.2.13})$$

$$P^{(0)u} = P_1^{(0)u} \Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.2.14})$$

$$P^{(0)u} \Big|_{x=0} = 1, \quad 0 < z < 1. \quad (\text{Б.2.15})$$

Решение уравнения (Б.2.12) с учетом граничного условия (Б.2.14) представляется через $P^{(0)u}$ в следующем виде:

$$P_1^{(0)u} = P^{(0)u} \exp(-\sqrt{p}(z-1)). \quad (\text{Б.2.16})$$

С помощью выражения (Б.2.16) найдем след производной из внешней области для уравнения (Б.2.13)

$$\frac{\partial P_1^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\sqrt{p} P^{(0)u}. \quad (\text{Б.2.17})$$

Подставляя выражение (Б.2.17) в уравнение (Б.2.13), после простых преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $P^{(0)u}$

$$\frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} - \sqrt{p} P^{(0)u} = 0, \quad (\text{Б.2.18})$$

откуда окончательно имеем следующие выражения для решения задачи в пространстве изображений Лапласа – Карсона

$$P^{(0)u} = \exp(-\sqrt[4]{p}x), \quad (\text{Б.2.19})$$

$$P_1^{(0)u} = \exp(-\sqrt[4]{p}x - \sqrt{p}(z-1)). \quad (\text{Б.2.20})$$

Применяя обратное преобразование Лапласа – Карсона, с использованием соотношений [67]

$$\exp(-\alpha\sqrt{p}) \Rightarrow \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right), \quad (\text{Б.2.21})$$

$$f(\sqrt{p}) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \varphi(\tau) d\tau, \quad (\text{Б.2.22})$$

$$\exp(-ap) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \Rightarrow \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-a}}\right) \Phi(t-a) \quad (\text{Б.2.23})$$

получим следующие выражения для точного решения задачи в нулевом приближении (Б.2.7) – (Б.2.10):

$$P^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4Fo}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) d\tau, \quad (\text{Б.2.24})$$

$$P_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \int_{z-1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4Fo}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau-z+1}}\right) d\tau. \quad (\text{Б.2.25})$$

В справедливости полученных выражений нетрудно убедиться прямой подстановкой выражений в указанную задачу.

Из (Б.2.2) – (Б.2.5) следуют выражения для первого коэффициента разложения

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (\text{Б.2.26})$$

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial z^2} = 0, \quad x > 0, \quad |z| < 1, \quad (\text{Б.2.27})$$

$$P^{(1)} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.2.28})$$

$$P_1^{(1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad P^{(1)} \Big|_{x=0} = 0. \quad (\text{Б.2.29})$$

Для расщепления уравнения (Б.2.27) используем выражение для первого коэффициента разложения, полученное из (Б.2.6) и условие (Б.2.28) выражение для $P^{(1)}$ можно записать в виде

$$P^{(1)} = -\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} \frac{z^2}{2} + Q(x, Fo), \quad (\text{Б.2.30})$$

где $Q(x, Fo)$ – функция, подлежащая определению. Расщепление осуществляется аналогично п. 1.9.2, задача для первого коэффициента разложения имеет вид

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (\text{Б.2.31})$$

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4}, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (\text{Б.2.32})$$

$$P^{(1)} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.2.33})$$

$$P_1^{(1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad P^{(1)} \Big|_{x=0} = 0. \quad (\text{Б.2.34})$$

Задача (Б.2.31) – (Б.2.34) с учетом условия при $x = 0$ имеет только тривиальное решение. Ниже показано, что для получения единственного решения задачи для первого коэффициента разложения это условие ослаблено и заменено нелокальным средне интегральным. Это обосновывается наличием погранслоя на линии $x = 0$, $0 < z < 1$. Выполнение же граничного условия при $x = 0$ может быть достигнуто построением погранслойных функций. Требуемое средне интегральное условие найдено ниже путем осреднения задачи для остаточного члена.

Подставив в (Б.1.5) – (Б.1.8) асимптотические формулы, следующие из (Б.2.1),

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \theta, \quad P_1 = P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \theta_1, \quad (\text{Б.2.35})$$

и, воспользовавшись соотношениями для нулевого и первого коэффициентов и другими аналогичными, получим

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (\text{Б.2.36})$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -\varepsilon \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2}, \quad 0 < z < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad (\text{Б.2.37})$$

$$\theta_1 \Big|_{z=1} = \theta \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} + \varepsilon \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.2.38})$$

$$\theta \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \theta \Big|_{x=0} = -\varepsilon P \Big|_{x=0}. \quad (\text{Б.2.39})$$

Задача (Б.2.36) – (Б.2.39) по сложности сопоставима с исходной. Поскольку она не содержит переменных коэффициентов, применяется упро-

щенная процедура нахождения среднеинтегрального условия – «в среднем точная» модификация асимптотического метода. Исходная задача в интервале центрального пласта усредняется с применением интегральной процедуры

$$\langle \theta \rangle = \int_0^1 \theta dz. \quad (\text{Б.2.40})$$

С учетом результатов интегрирования

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_0^1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} + \varepsilon \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.2.41})$$

которое осуществлено с использованием (Б.2.38), получим следующую осредненную по толщине центрального пласта задачу для остаточного члена:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad t > 0, \quad (\text{Б.2.42})$$

$$\frac{\partial^2 \langle \theta \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \langle P^{(1)} \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (\text{Б.2.43})$$

$$\theta_1 \Big|_{z=1} = \theta \Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.2.44})$$

$$\theta \Big|_{Fo=0} = 0, \quad \langle \theta \rangle \Big|_{x=0} = -\varepsilon \langle P^{(1)} \rangle \Big|_{x=0}. \quad (\text{Б.2.45})$$

Необходимым условием тривиального решения задачи (Б.2.42) – (Б.2.45) является обращение в нуль правых частей уравнения (Б.2.43) и условия (Б.2.45)

$$\frac{\partial^2 \langle P^{(1)} \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad (\text{Б.2.46})$$

$$\langle P^{(1)} \rangle \Big|_{x=0} = 0. \quad (\text{Б.2.47})$$

Выполнение условия (Б.2.46) обусловлено соотношением (Б.2.27). Усреднив его, можно убедиться, что правая часть (Б.2.46) действительно равна нулю.

Условие (Б.2.47) может быть использовано в качестве граничного в задаче для первого коэффициента разложения. В [11] показано, что при добавлении этого условия задача для первого коэффициента разложения имеет

единственное решение. При этом осредненная задача для остаточного члена имеет только нулевое решение. Поскольку осредненное значение остаточного члена при этом равно нулю, то построенное решение является в некотором смысле «в среднем точным» асимптотическим решением.

При добавлении средне интегрального условия задача для первого коэффициента разложения приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (\text{Б.2.48})$$

$$\left. \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} = -\frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4}, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (\text{Б.2.49})$$

$$P^{(1)} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.2.50})$$

$$P_1^{(1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad \left\langle P^{(1)} \right\rangle \Big|_{x=0} = \int_0^1 P^{(1)} dz \Big|_{x=0} = 0. \quad (\text{Б.2.51})$$

Решение этой задачи отыскивается в пространстве изображения Лапласа – Карсона задача (Б.2.48) – (Б.2.51) записывается как

$$\left. \frac{\partial^2 P^{(1)u}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial z} \right|_{z=1} = -\frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 P^{(0)u}}{\partial x^4}, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (\text{Б.2.52})$$

$$p P_1^{(1)u} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (\text{Б.2.53})$$

$$P^{(1)u} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)u} \Big|_{z=1}, \quad (\text{Б.2.54})$$

$$\left\langle P^{(1)u} \right\rangle \Big|_{x=0} = \int_0^1 P^{(1)u} dz \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{Б.2.55})$$

со структурой решения вида

$$P^{(1)u} = -\frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} \frac{z^2}{2} + Q^u(x, p). \quad (\text{Б.2.56})$$

Решение уравнения (Б.2.53) и его производная записываются как

$$P_1^{(1)u} = P^{(1)u} \Big|_{z=1} \exp(-\sqrt{p}(z-1)), \quad \frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\sqrt{p} P^{(1)u} \Big|_{z=1}. \quad (\text{Б.2.57})$$

Подставляя выражения (Б.2.57) и (Б.2.56) в уравнение (Б.2.52), после простых преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения Q^u

$$\frac{\partial^2 Q^u}{\partial x^2} - \sqrt{p} Q^u = \frac{1}{6} \frac{\partial^4 P^{(0)u}}{\partial x^4} - \frac{\sqrt{p}}{2} \frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} = -\frac{p}{3} P^{(0)u} = -\frac{p}{3} \exp(-\sqrt[4]{px}). \quad (\text{Б.2.58})$$

Общее решение уравнения (Б.2.58) имеет вид

$$Q^u = \frac{p^{3/4}}{6} x \exp(-\sqrt[4]{px}) + C \exp(-\sqrt[4]{px}) + C_1 \exp(\sqrt[4]{px}). \quad (\text{Б.2.59})$$

Из условия регулярности на бесконечности получаем $C_1 = 0$. Постоянная C определяется из нелокального интегрального условия (Б.2.55).

Подставив (Б.2.59) в (Б.2.56), имеем

$$\begin{aligned} P^{(1)u} &= -\frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} \frac{z^2}{2} + \frac{p^{3/4}}{6} x \exp(-\sqrt[4]{px}) + C \exp(-\sqrt[4]{px}) = \\ &= \left(-\sqrt{p} \frac{z^2}{2} + \frac{p^{3/4}}{6} x + C \right) \exp(-\sqrt[4]{px}). \end{aligned} \quad (\text{Б.2.60})$$

Поскольку среднее интегральное значение (Б.2.60) по z в промежутке от 0 до 1 равно нулю при $x = 0$, а экспоненциальный множитель всегда отличен от нуля, то для определения C_1 получаем алгебраическое уравнение, решением которого служит выражение $C = \sqrt{p}/6$. Окончательное выражение для первого коэффициента имеет вид

$$P^{(1)u} = \left(-\sqrt{p} \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{p^{3/4}}{6} x \right) \exp(-\sqrt[4]{px}). \quad (\text{Б.2.61})$$

Для окружающей среды с помощью (Б.2.57) получим

$$P_1^{(1)u} = \frac{1}{3} \left(\frac{p^{3/4}}{2} - \sqrt{p} \right) \exp(-\sqrt[4]{px} - \sqrt{p}(z-1)). \quad (\text{Б.2.62})$$

Нахождение оригиналов осуществлено с использованием следующих соответствий:

$$p \exp(-\alpha\sqrt{p}) \Rightarrow \frac{\alpha}{2t\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right), \quad (\text{Б.2.63})$$

$$p(\sqrt{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right) \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \frac{\alpha^2}{4t^2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}^{3/2}} \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t^2}\right) = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \left(\frac{\alpha^2}{2t} - 1 \right) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t^2}\right). \quad (\text{Б.2.64})$$

Точное решение задачи для первого коэффициента разложения (Б.2.52) – (Б.2.55) имеет вид

$$P^{(1)} = \frac{x}{4\pi\sqrt{\text{Fo}}} \left[\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{6\tau} - z^2 \right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4\text{Fo}} - \frac{x^2}{4\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}} \right], \quad (\text{Б.2.65})$$

$$P_1^{(1)} = \frac{x}{24\pi\sqrt{\text{Fo}}} \left[\int_{z-1}^\infty \left(\frac{x^2}{\tau-z+1} - 6 \right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4\text{Fo}} - \frac{x^2}{4(\tau-z+1)}\right) \frac{d\tau}{(\tau-z+1)^{3/2}} \right]. \quad (\text{Б.2.66})$$

В справедливости полученных выражений нетрудно убедиться прямой постановкой выражений в указанную задачу.

Выражение (Б.2.65) обеспечивает детальную зависимость поля давления от вертикальной координаты в зоне осреднения. Однако главное значение первого коэффициента разложения или его физический смысл заключается в том, что он позволяет получить стационарные или квазистационарные вертикальные профили давления, если таковые реализуются в рассматриваемой задаче. Построение погранслойных функций для этого частного случая рассмотрено в п.1.9.2.

Б.3. Точное решение квазистационарной задачи

Точное решение задачи (Б.1.5) – (Б.1.8) можно построить, если воспользоваться преобразованием Лапласа – Карсона по переменной t ($\Rightarrow p$) и синус-преобразованием Фурье по координате x ($\Rightarrow s$), тогда параметризованная задача запишется как

$$p\tilde{P}_1^u - \frac{\partial^2 \tilde{P}_1^u}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (\text{Б.3.1})$$

$$s - s^2 \tilde{P}^u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{P}^u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (\text{Б.3.2})$$

$$\tilde{P}_1^u \Big|_{z=1} = \tilde{P}^u \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{P}_1^u}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{P}^u}{\partial z} \Big|_{z=1}. \quad (\text{Б.3.3})$$

Решение этой задачи в пространстве изображений имеет вид

$$\tilde{P}^u = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\sqrt{p} \operatorname{ch}(sz\sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{p} \operatorname{ch}(s\sqrt{\varepsilon}) + \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon})} \right], \quad (\text{Б.3.4})$$

$$\tilde{P}_1^u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon}) \exp(-\sqrt{p}(z-1))}{\sqrt{p} \operatorname{ch}(s\sqrt{\varepsilon}) + \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon})}. \quad (\text{Б.3.5})$$

Б.4. Сопоставление точного и асимптотического решений

Выражение (Б.3.4) позволяет определить нулевой и первый коэффициенты разложения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{P}^u = \frac{s}{\sqrt{p} + s^2}, \quad (\text{Б.4.1})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \tilde{P}^u &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}s} \left[-\frac{sz\sqrt{p} \operatorname{sh}(sz\sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{p} \operatorname{ch}(s\sqrt{\varepsilon}) + \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon})} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{p} \operatorname{ch}(sz\sqrt{\varepsilon}) \left[s\sqrt{p} \operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon}) + \frac{s^2}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{ch}(s\sqrt{\varepsilon}) - \frac{s}{\varepsilon} \operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon}) \right]}{\left[\sqrt{p} \operatorname{ch}(s\sqrt{\varepsilon}) + \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{sh}(s\sqrt{\varepsilon}) \right]^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{s\sqrt{p}}{\sqrt{p} + s^2} \left(\frac{1}{3} - z^2 \right) + \frac{sp}{3(\sqrt{p} + s^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{Б.4.2})$$

Нетрудно убедиться, что выражение (Б.4.1) является синус-преобразованием нулевого коэффициента (Б.2.19), а (Б.4.2) – первого (Б.2.65). Такое совпадение нулевого и первого коэффициентов свидетельствует о корректности концепции «в среднем точного» асимптотического решения исходной задачи, представленного выше.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Построение решения задачи о турбулентном теплообмене в скважине при постоянных вертикальных градиентах температуры

В приложении иллюстрируется использование метода покоефициентного осреднения на примере задачи о нестационарном теплообмене в скважине при турбулентном течении в режиме постоянных градиентов.

Соответствующая задача следует из (2.2.16) – (2.2.22), если положить $\partial T_1 / \partial z = \partial T / \partial z = 0$. Постановка задачи при этом запишется как

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \quad (B.1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right) - R(r) \text{Pev}(1 - H) = Q(r, z, Fo), \quad (B.1.2)$$

$$r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0,$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad (B.1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (B.1.4)$$

$$T|_{Fo=0} = 0, \quad T_1|_{Fo=0} = 0, \quad (B.1.5)$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (B.1.6)$$

Решение задачи (B.1.1) – (B.1.6) осуществляется с использованием метода покоефициентного пространственного осреднения, описанного в п.1.9.2 и аналогично решению задачи (2.2.16) – (2.2.22).

1⁰. *Параметризация.* Параметризованная задача имеет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \quad (B.1.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right) - R(r) \text{Pev}(1 - H) = Q(r, Fo), \quad (B.1.8)$$

$$r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0,$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad (B.1.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (B.1.10)$$

$$T|_{\text{Fo}=0}=0, \quad T_1|_{\text{Fo}=0}=0, \quad (\text{B.1.11})$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty}=0. \quad (\text{B.1.12})$$

Заметим, что в постановке задачи для случая постоянных градиентов, так же как и в общем случае, присутствуют два переменных коэффициента $\lambda(r)$ и $R(r)$, которые для турбулентного потока рассчитываются из уравнений Сполдинга. Наличие двух переменных коэффициентов затрудняет построение решения задачи по сравнению с другими течениями, поскольку для их описания достаточно одного переменного коэффициента (ламинарный режим для несжимаемой жидкости) или не нужно вовсе (выровненный профиль скорости) [171, 175, 182, 186].

2⁰. Для разложения задачи по асимптотическому параметру представив искомое решение задачи в виде асимптотической формулы по ε

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \varepsilon^2 T_j^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T_j^{(n)} + \Theta_j^{(n)}, \quad (\text{B.1.13})$$

где нижние индексы у безразмерной температуры T относятся к номеру области, а верхние соответствуют порядковому номеру приближения.

Подставляя (B.1.13) в (B.1.7) – (B.1.12), запишем

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (\text{B.1.14})$$

$$r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$-\frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) +$$

$$+ \left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) - R(r) \text{Pev}(1 - \text{H}) - Q(r, z, \text{Fo}) \right] + \quad (\text{B.1.15})$$

$$+ \varepsilon \left[\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$(T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \dots)|_{r=1} = (T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \dots)|_{r=1}, \quad (\text{B.1.16})$$

$$\left. \frac{\partial (T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \dots)}{\partial r} \right|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial (T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \dots)}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (\text{B.1.17})$$

$$(T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \dots) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \dots) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{B.1.18})$$

$$(T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \dots) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{B.1.19})$$

Из задачи видно, что в множителях при одинаковой степени ε в (B.1.15) и (B.1.15) содержатся коэффициенты различных порядков разложения.

3⁰. *Расцепление* уравнений для нулевого коэффициента осуществляется как и в главе II. Уравнение для нулевого коэффициента разложения для $T_1^{(0)}$

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{B.1.20})$$

Выражение для определения нулевого коэффициента разложения для температуры турбулентного потока жидкости в трубе

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - R(r) \text{Pev}(1 - \text{H}) - Q(r, \text{Fo}). \quad (\text{B.1.21})$$

С учетом того, что нулевой коэффициент является только функцией времени $T^{(0)} = T^{(0)}(\text{Fo})$ запишем

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = A_1(\text{Fo}) - R(r) A_2 - Q(r, \text{Fo}), \quad (\text{B.1.22})$$

где

$$A_1(\text{Fo}) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}}, \quad A_2 = \text{Pev}(1 - \text{H}). \quad (\text{B.1.23})$$

Радиальная производная первого коэффициента асимптотического разложения из (B.1.22) имеет вид

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r A_1(\text{Fo})}{2\lambda(r)} - \frac{R_1(r) A_2}{r\lambda(r)} - \frac{Q_1(r, \text{Fo})}{r\lambda(r)} \right). \quad (\text{B.1.24})$$

В выражении (B.1.24) введены моментные функции

$$R_1(r) = \int_0^r r' R(r') dr', \quad Q_1(r, z, Fo) = \int_0^r r' Q(r', z, Fo) dr'. \quad (\text{B.1.25})$$

Используя (1.1.17) и равенство $\lambda(1) = 1$, из (B.1.24) получим

$$\left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{A_1(Fo)}{2} - R_1(1)A_2 - Q_1(1, Fo) \right) = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}. \quad (\text{B.1.26})$$

Из (B.1.23) и (B.1.26), расцепленное уравнение для нулевого коэффициента имеет вид

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} - 2R_1(1)\text{Pe}\nu(1-H) = 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} + 2Q_1(1, Fo). \quad (\text{B.1.27})$$

4⁰. *Расцепленная постановка задачи для нулевого коэффициента разложения имеет вид*

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad (\text{B.1.28})$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} - 2R_1(1)\text{Pe}\nu(1-H) = 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} + 2Q_1(1, Fo), \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad (\text{B.1.29})$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{B.1.30})$$

$$T^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad T_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (\text{B.1.31})$$

$$T_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{B.1.32})$$

Покажем, что нулевой коэффициент разложения совпадает с решением представленной далее интегрально усредненной задачи.

Усредненная интегрально по r в пределах $0 < r < 1$ задача (B.1.7) – (B.1.12) запишется как

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0,$$

$$\frac{\partial \langle T \rangle_a}{\partial Fo} - 2R_1(1)\text{Pe}\nu(1-H) = 2\chi \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=1} + 2Q_1(1, Fo), \quad r < 1, \quad Fo > 0,$$

$$\langle T \rangle_a = T_1 \Big|_{r=1},$$

$$\langle T \rangle_a \Big|_{F_0=0} = 0, \quad T_1 \Big|_{F_0=0} = 0,$$

$$T_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0.$$

При осреднении уравнения (В.1.8) использовано соотношение

$$\frac{2}{\varepsilon_0} \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr = 2\Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}.$$

установленное путем прямого интегрирования.

5⁰. Для решения задачи в нулевом приближении трансформируем задачу (В.1.28) – (В.1.32) в пространство изображений

$$pT_1^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad (\text{В.1.33})$$

$$pT^{(0)u} - 2R_1(1)\text{Pev}(1-H) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} + 2Q_1(1, p), \quad r < 1, \quad (\text{В.1.34})$$

$$T^{(0)u} = T_1^{(0)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{В.1.35})$$

$$T_1^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{В.1.36})$$

Решение уравнения (В.1.33) с учетом условия (В.1.35) имеет вид

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}. \quad (\text{В.1.37})$$

С учетом этого равенства уравнение (В.1.34) для определения $T^{(0)u}$ можно представить как

$$pT^{(0)u} - 2(R_1(1)\text{Pev}(1-H) + Q_1(1, p)) = -2\chi k \sqrt{p} T^{(0)u} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \quad (\text{В.1.38})$$

где $k = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$. Решение уравнения (В.1.38) представится в форме

$$T^{(0)u} = \frac{2R_1(1)\text{Pev}(1-H) + 2Q_1(1, p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}}, \quad r < 1. \quad (\text{В.1.39})$$

Подставив (В.1.39) в (В.1.37), получим решение для внешней области

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left(\frac{2R_1(1)\text{Pev}(1-H) + 2Q_1(1, p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}} \right), \quad r > 1. \quad (\text{В.1.40})$$

Выражения (В.1.39) и (В.1.40) представляют решение задачи в нулевом приближении в пространстве изображений.

6⁰. Постановка задачи для первого коэффициента разложения включает уравнения

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad (\text{B.1.41})$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r < 1, \quad \text{Fo} > 0. \quad (\text{B.1.42})$$

Для «расщепления» уравнения (B.1.42) подставим в него выражение первого коэффициента асимптотического разложения $T^{(1)}$, полученное из (B.1.24)

$$T^{(1)} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_1(r) A_1(\text{Fo}) - A_2 R_2(r) - Q_2(r, \text{Fo}) \right) + B_1(\text{Fo}), \quad (\text{B.1.43})$$

где введены обозначения

$$\lambda_1(r) = \int_0^r \frac{r'}{\lambda(r')} dr', \quad R_2(r) = \int_0^r \frac{1}{r' \lambda(r')} R_1(r') dr', \quad (\text{B.1.44})$$

$$Q_2(r, z, \text{Fo}) = \int_0^r \frac{1}{r' \lambda(r')} Q_1(r', z, \text{Fo}) dr'.$$

Проинтегрировав полученное после указанной подстановки уравнение

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_1(r) \frac{\partial A_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial Q_2(r, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right) + \frac{\partial B_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}}$$

по радиальной координате, с учетом симметрии получим выражение для радиальной производной от второго коэффициента асимптотического разложения

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda_2(r)}{r \lambda(r)} \frac{\partial A_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r \lambda(r)} \frac{\partial Q_3(r, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right) + \frac{\Lambda}{2\chi} \frac{r}{\lambda(r)} \frac{\partial B_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}}. \quad (\text{B.1.45})$$

Здесь и ниже использованы следующие выражения для моментных функций:

$$R_3(r) = \int_0^r r' R_2(r') dr', \quad R_4(r) = \int_0^r r' R(r') R_2(r') dr', \quad R_5(r) = \int_0^r \lambda_1(r') r' R(r') dr',$$

$$Q_3(r, z, \text{Fo}) = \int_0^r r' Q_2(r', z, \text{Fo}) dr', \quad Q_R(r, z, \text{Fo}) = \int_0^r r' R(r') Q_2(r', z, \text{Fo}) dr'.$$

Воспользовавшись далее условием (B.1.17), имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=1} &= \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{1}{2} \lambda_2(1) \frac{\partial A_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial Q_3(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right) + \\ &+ \frac{\Lambda}{2\chi} \frac{\partial B_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.46})$$

Последнее равенство представляет уравнение для определения $B_1(\text{Fo})$

$$\frac{\partial B_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = 2 \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_2(1) \frac{\partial A_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial Q_3(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right).$$

Заметим, что $B_1(\text{Fo})$ является единственным неизвестным коэффициентом в (B.1.46), поэтому его нахождение является завершающим этапом для определения первого коэффициента разложения $T^{(1)}$. Коэффициент $B_1(\text{Fo})$ определяется с помощью уравнения (B.1.46). Однако для нахождения коэффициента $B_1(\text{Fo})$ предварительно необходимо сформулировать полную краевую задачу для первого коэффициента разложения $T^{(1)}$.

Для этого подставим выражение $B_1(\text{Fo})$ через $T^{(1)}$, найденное из (B.1.43), в (B.1.46) и определим искомое уравнение для первого коэффициента разложения, содержащее след производной в окружающей среде

$$\left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2\lambda_2(1) - \lambda_1(r)}{2} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{\Lambda}{\chi} \left(2 \frac{\partial Q_3(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial Q_2(r, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right), \quad (\text{B.1.47})$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0.$$

Математическая постановка задачи для первых коэффициентов разложения наряду с (B.1.47) включает также уравнение и условия

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, \quad (\text{B.1.48})$$

$$T^{(1)} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{B.1.49})$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{B.1.50})$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{B.1.51})$$

В процессе решения возникает необходимость видоизменения начального условия (В.1.50), поскольку при наличии его задача имеет только тривиальное решение.

7⁰. Для построения задачи для остаточного члена обозначим сумму слагаемых после первого коэффициента разложения за остаточный член Θ , тогда решение задачи (В.1.7) – (В.1.12) строится в виде асимптотической формулы по параметру ε с остаточным членом (1.1.11).

Воспользовавшись выражениями для нулевого и первого коэффициентов (В.1.21), (В.1.28), (В.1.30) – (В.1.32) и (В.1.41), (В.1.42), (В.1.49) – (В.1.51) соответственно, из (В.1.7) – (В.1.12) получим

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{В.1.52})$$

$$\varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Fo}, \quad (\text{В.1.53})$$

$$\Theta|_{r=1} = \Theta_1|_{r=1}, \quad (\text{В.1.54})$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial (\Theta_1 + \varepsilon (\Theta_1) T_1^{(1)})}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (\text{В.1.55})$$

$$\left(\Theta + \varepsilon T^{(1)} \right) \Big|_{Fo=0} = 0, \quad \Theta_1 \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (\text{В.1.56})$$

$$\Theta_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{В.1.57})$$

8⁰. *Нахождение нелокального среднеинтегрального условия.* Заметим, что в постановке для остаточного члена также присутствуют переменные коэффициенты, обусловленные турбулентным режимом потока жидкости.

Для нахождения дополнительных условий представим остаточный член также в виде асимптотических рядов

$$\Theta_1 = \Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2 \Theta_1^{(2)} + \dots, \quad \Theta = \Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + \varepsilon^2 \Theta^{(2)} + \dots \quad (\text{В.1.58})$$

Подставляя (В.1.58) в задачу для остаточного члена, получим

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (\text{В.1.59})$$

$$\varepsilon^0 \left[-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r)r \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial r} \right) \right] + \varepsilon^1 \left[\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial F_0} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r)r \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \quad (B.1.60)$$

$$+ \varepsilon^2 \left[\frac{\partial (\Theta^{(1)} + T^{(1)})}{\partial F_0} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r)r \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0,$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{r=1} - \Theta_1^{(0)} \Big|_{r=1} + \varepsilon (\Theta^{(1)} \Big|_{r=1} - \Theta_1^{(1)} \Big|_{r=1}) + \dots = 0, \quad (B.1.61)$$

$$\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial (\Theta_1^{(1)} + T_1^{(1)})}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \dots = 0, \quad (B.1.62)$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{F_0=0} + \varepsilon (\Theta^{(1)} + T^{(1)}) \Big|_{F_0=0} + \dots = 0, \quad \Theta_1^{(0)} \Big|_{F_0=0} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} \Big|_{F_0=0} + \dots = 0, \quad (B.1.63)$$

$$\Theta_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \dots = 0. \quad (B.1.64)$$

Как и для нулевого коэффициента разложения температуры, определим, что нулевой коэффициент разложения остаточного члена не зависит от радиальной координаты $\Theta^{(0)} = \Theta^{(0)}(z, F_0)$. Расцепление уравнения

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r)r \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial F_0} \quad (B.1.65)$$

осуществлено аналогично нулевому приближению для температуры

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial F_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial F_0} = 2\chi \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1},$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{F_0=0} = 0, \quad \Theta_1^{(0)} \Big|_{F_0=0} = 0,$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{r=1} = \Theta_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad \Theta_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что задача для нулевого коэффициента разложения имеет тривиальное решение $\Theta^{(0)} = 0$. Отсюда согласно (B.1.65) следует, что первый коэффициент разложения остаточного члена также не зависит от радиальной координаты $\Theta^{(1)} = \Theta^{(1)}(z, F_0)$.

Из (B.1.59) – (B.1.64) получим задачу для первого коэффициента разложения. Для исключения $\Theta^{(2)}$ из уравнения

$$\frac{\partial(T^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r)r \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{B.1.66})$$

умножим его на $\Lambda r/\chi$ и проинтегрируем от нуля до r

$$\lambda(r)r \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial r} = \frac{\Lambda}{\chi} \int_0^r r' \frac{\partial (T^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial Fo} dr'. \quad (\text{B.1.67})$$

Далее воспользуемся условием сопряжения (B.1.62)

$$\frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \int_0^1 r' \frac{\partial (T^{(1)} + \Theta^{(1)})}{\partial Fo} dr' = \Lambda \frac{\partial (T_1^{(1)} + \Theta_1^{(1)})}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (\text{B.1.68})$$

Согласно (B.1.42) и (B.1.46) все слагаемые, содержащие $T^{(1)}$ в (B.1.68), сокращаются, а уравнение для $\Theta^{(1)}$ представляется как

$$\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial Fo} = 2\chi \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}.$$

Математическая постановка задачи для первого коэффициента разложения остаточного члена имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \right) &= 0, \\ \Theta_1^{(1)} \Big|_{r=1} &= \Theta_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \\ (T^{(1)} + \Theta^{(1)}) \Big|_{Fo=0} &= 0, \quad \Theta_1^{(1)} \Big|_{Fo=0} = 0, \\ \Theta_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} &= 0. \end{aligned}$$

Нелокальные среднеинтегральные условия находятся из требования тривиального решения осредненной интегрально задачи для $\Theta^{(1)}$

$$\frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{B.1.69})$$

$$\frac{\partial \langle \Theta^{(1)} \rangle}{\partial Fo} = 2\chi \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{B.1.70})$$

$$\langle \Theta^{(1)} \rangle \Big|_{r=1} = \Theta_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{B.1.71})$$

$$\langle \Theta^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = -\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0}, \quad (\text{B.1.72})$$

$$\Theta_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{B.1.73})$$

Тривиальное решение задачи для первого коэффициента остаточного члена возможно при равенстве нулю правой части (B.1.72). Таким образом, условие

$$\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = 0 \quad (\text{B.1.74})$$

может быть использовано при решении задачи для первого коэффициента разложения искомого решения $T^{(1)}$, при этом задача для первого коэффициента разложения имеет единственное решение.

9⁰. *Решение задачи для первого коэффициента разложения.* С учетом вышеизложенного математическая постановка задачи для первого коэффициента разложения примет вид

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, \quad (\text{B.1.75})$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2\lambda_2(1) - \lambda_1(r)}{2} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \text{Fo}^2} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \quad (\text{B.1.76})$$

$$+ \frac{\Lambda}{\chi} \left(2 \frac{\partial Q_3(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial Q_2(r, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right), \quad r < 1, \text{Fo} > 0,$$

$$T^{(1)} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{B.1.77})$$

$$\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{B.1.78})$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{B.1.79})$$

Задача для первых коэффициентов разложения (B.1.75) – (B.1.79) в пространстве изображений Лапласа – Карсона запишется как

$$pT_1^{(1)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad (\text{B.1.80})$$

$$p \left(T^{(1)u} - T^{(1)}(\text{Fo} = 0) \right) + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2\lambda_2(1) - \lambda_1(r)}{2} p \left(pT^{(0)u} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}}(\text{Fo} = 0) \right) = \quad (\text{B.1.81})$$

$$= 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \frac{\Lambda}{\chi} p (2Q_3^u(1,p) - 2Q_3(1,0) - Q_2^u(r,p) + Q_2(r,0)), \quad r < 1,$$

$$T^{(1)u} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{B.1.82})$$

$$\langle T^{(1)} \rangle_a \Big|_{\text{Fo}=0} = \lim_{p \rightarrow \infty} \langle T^{(1)u} \rangle_a = 0, \quad (\text{B.1.83})$$

$$T_1^{(1)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{B.1.84})$$

Решение уравнения (В.1.80) выражается через функции Бесселя

$$T_1^{(1)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(1)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{B.1.85})$$

Учитывая (В.1.43), получим

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_1(r) p T^{(0)u} - R_2(r) \text{Pev}(1-H) - Q_2^u(r,p) \right) + B_1^u(p), \quad (\text{B.1.86})$$

$$T^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = \frac{\Lambda}{\chi} \lambda_1(r) [R_1(1) \text{Pev}(1-H) + Q_1(1,0)] -$$

$$- \frac{\Lambda}{\chi} [R_2(r) \text{Pev}(1-H) + Q_2(r,0)] + B_1(0), \quad (\text{B.1.87})$$

$$T^{(1)u} \Big|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_1(1) p T^{(0)u} - R_2(1) \text{Pev}(1-H) - Q_2^u(1,p) \right) + B_1^u(p), \quad (\text{B.1.88})$$

скорость изменения температуры в начальный момент времени равна

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} \Big|_{\text{Fo}=0} = 2R_1(1) \text{Pev}(1-H) + 2Q_1(1,0). \quad (\text{B.1.89})$$

Подставляя (В.1.86) – (В.1.88) в (В.1.81), получим выражение, определяющее константу $B_1^u(p)$

$$B_1^u(p) = \frac{\sqrt{p} B(0)}{\sqrt{p} + 2\chi k} + \frac{\Lambda \text{Pev}(1-H)}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p} R_1(1) (\lambda_1(r) - \lambda_2(1))}{4\chi} + 2k R_2(1) \right) +$$

$$+ \frac{\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p} Q_1(1,0) (\lambda_1(r) - \lambda_2(1))}{\chi} + 2k Q_2^u(1,p) \right) -$$

$$- \frac{\Lambda R_1(1) \text{Pev}(1-H) + Q_1^u(1,p)}{(\sqrt{p} + 2\chi k)^2} \times \quad (\text{B.1.90})$$

$$\times \left(\frac{\lambda_1(1)}{\chi} p + 2\lambda_1(1)k\sqrt{p} \right) + \frac{2\Lambda}{\chi} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + 2\chi k} (Q_3^u(1, p) - Q_3(1, 0)).$$

Величину $B_1(0)$, входящую в выражение (В.1.90), можно найти из соотношения (В.1.83)

$$B_1(0) = 2\frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev}(1 - \text{H})(R_3(1) - \lambda_2(1)R_1(1)) + \frac{\Lambda}{\chi} (2Q_3(1, 0) - \lambda_2(1)Q_1(1, 0)). \quad (\text{В.1.91})$$

Учитывая (В.1.91) запишем выражение (В.1.90) в виде

$$B_1^u(p) = 2\Lambda \frac{\text{Pev}(1 - \text{H})}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left[\frac{\sqrt{p}}{\chi} R_3(1) + kR_2(1) \right] + \quad (\text{В.1.92})$$

$$+ \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left[\frac{\sqrt{p}}{\chi} Q_3^u(1, p) + kQ_2^u(1, p) \right] - \frac{\Lambda}{2\chi} \lambda_1(1) \frac{\sqrt{p} + 2\chi k}{\sqrt{p} + 2\chi k} pT^{(0)u}.$$

Подставив (В.1.92) в (В.1.90), получим решение для первого коэффициента разложения в скважине

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_1(1) p T^{(0)u} - R_2(r) \text{Pev}(1 - \text{H}) - Q_2^u(r, p) \right) + \quad (\text{В.1.93})$$

$$+ \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left[\text{Pev}(1 - \text{H}) \left(\frac{\sqrt{p} R_3(1)}{\chi} + kR_2(1) \right) + \frac{\sqrt{p}}{\chi} Q_3(1, 0) + kQ_2^u(1, p) \right] -$$

$$- \frac{\Lambda}{2\chi} \lambda_1(1) \frac{\sqrt{p} + 1}{\sqrt{p} + 2\chi k} p T^{(0)u},$$

$$T_1^{(1)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left\{ \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{2} \lambda_1(1) p T^{(0)u} - R_2(1) \text{Pev}(1 - \text{H}) - Q_2^u(1, p) \right) + \quad (\text{В.1.94}) \right.$$

$$+ \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left[\text{Pev}(1 - \text{H}) \left(\frac{\sqrt{p} R_3(1)}{\chi} + kR_2(1) \right) + \frac{\sqrt{p}}{\chi} Q_3(1, 0) + kQ_2^u(1, p) \right] -$$

$$\left. - \frac{\Lambda}{2\chi} \lambda_1(1) \frac{\sqrt{p} + 1}{\sqrt{p} + 2\chi k} p T^{(0)u} \right\}.$$

10⁰. *Нахождение первого асимптотического приближения.* Решение в первом асимптотическом приближении получается подстановкой в формулы $T^{1u} = T^{(0)u} + \varepsilon T^{(1)u}$, $T_1^{1u} = T_1^{(0)u} + \varepsilon T_1^{(1)u}$ выражений для нулевого (В.1.39), (В.1.40) и первого (В.1.93), (В.1.94) коэффициентов асимптотического разложения.

Из (В.1.93) получим выражение для профиля температуры $\tilde{T}^u = T^{1u} - T^{1u}|_{r=1}$ в скважине

$$\tilde{T}^u = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} p T^{(0)u} - [R_2(r) - R_2(1)] \text{Pev}(1 - \text{H}) + Q_2^u(1, p) - Q_2^u(r, p) \right). \quad (\text{В.1.95})$$

Отметим, что выражения для расчета температурных полей, полученные в данном параграфе, следуют также из решений общей задачи о турбулентном потоке жидкости в трубе (см. гл. II) в предположении постоянства вертикального градиента температур, для которого $\partial T / \partial z = 0$.

11⁰. *Стационарное решение.* Из (В.1.95) также следуют стационарные распределения

$$\tilde{T}^u = \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \text{Pev}(1 - \text{H}) \frac{1 - r^2}{4} + Q_2(1, \infty) - Q_2(r, \infty) \right\}. \quad (\text{В.1.96})$$

Из (В.1.96) получим, что в отсутствие источников и при постоянной по сечению скорости течения жидкости профиль температуры в скважине параболически зависит от радиальной координаты.

12⁰. *Построение погранслойной функции.* Решение рассматриваемой задачи содержит погранслой при $\text{Fo} = 0$, который обусловлен наличием источников тепла [233]. Действительно, значения первого приближения в начальный момент отличаются от нуля

$$T^{(1)}|_{\text{Fo}=0} = \frac{\Lambda \text{Pev}(1 - \text{H})}{\chi} \left[R_1(1) \frac{r^2 - 1}{2} + 2R_3(1) - R_2(1) \right] \neq 0, \quad (\text{В.1.97})$$

то есть, построенное выше решение не удовлетворяет условию $T^{(1)}|_{\text{Fo}=0} = 0$.

Для устранения этого недостатка построено погранслойное решение.

Решение исходной параметризованной задачи представляется в виде

$$\hat{T}_j = T_j + \Pi_j, \quad (\text{В.1.98})$$

где $T = T(r, \text{Fo})$ – регулярная, а $\Pi = \Pi(r, \tau')$ – погранслойная часть разложения решения по ε , $\tau' = \text{Fo}/\varepsilon$ – растянутая переменная.

Подставив (В.1.98) в (В.1.7) – (В.1.12) получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial F_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{В.1.99})$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial F_0} - \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \text{Pev}(1 - \text{H})R(r) \right] + \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \tau'} - \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) \right] = 0, \quad (\text{В.1.100})$$

$$(T + \Pi)|_{r=1} = (T_1 + \Pi_1)|_{r=1}, \quad (\text{В.1.101})$$

$$\frac{\partial (T + \Pi)}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial (T_1 + \Pi_1)}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{В.1.102})$$

$$(T_1 + \Pi_1)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{В.1.103})$$

$$(T + \Pi)|_{F_0=0} = 0, \quad (T_1 + \Pi_1)|_{F_0=0} = 0. \quad (\text{В.1.104})$$

Из (В.1.99) – (В.1.104) следует, что погранслоиные функции являются решением следующей задачи:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau'} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} \right), \quad (\text{В.1.105})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau'} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right), \quad (\text{В.1.106})$$

$$\Pi|_{r=1} = \Pi_1|_{r=1}, \quad (\text{В.1.107})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{В.1.108})$$

$$\Pi|_{\tau'=0} = -T|_{F_0=0}, \quad \Pi_1|_{\tau'=0} = -T_1|_{F_0=0}, \quad (\text{В.1.109})$$

$$\Pi_1|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{В.1.110})$$

Далее погранслои представим Π_j в виде асимптотической формулы

$\Pi_j = \Pi_j^{(0)} + \varepsilon \Pi_j^{(1)} + \dots$. Задача для нулевых коэффициентов разложения имеет

только тривиальное решение

$$\Pi^{(0)} = \Pi_1^{(0)} = 0. \quad (\text{B.1.111})$$

Задача для первых коэффициентов разложения примет следующий вид:

$$\frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial r} \right), \quad (\text{B.1.112})$$

$$\frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial r} \right), \quad (\text{B.1.113})$$

$$\Pi^{(1)}|_{r=1} = \Pi_1^{(1)}|_{r=1}, \quad (\text{B.1.114})$$

$$\frac{\partial \Pi^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{B.1.115})$$

$$\frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad (\text{B.1.116})$$

$$\Pi|_{\tau'=0} = -T|_{F_0=0}, \quad \Pi_1|_{\tau'=0} = -T_1|_{F_0=0}, \quad (\text{B.1.117})$$

$$\Pi_1^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{B.1.118})$$

Соответствующая задача решена методом разделения переменных

$$\Pi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{-\mu_n^2 \chi F_0}{\Lambda}\right) J_0(\mu_n r), \quad (\text{B.1.119})$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ корни уравнения Бесселя $J_1(\mu) = 0$. Константа C_0 равна 0, поскольку $\langle T^{(1)} \rangle|_{F_0=0} = 0$. Константы C_n определяются выражениями

$$C_n = -\frac{2}{J_0^2(\mu_n)_0} \int_0^1 T^{(1)}|_{F_0=0} J_0(\mu_n r) dr. \quad (\text{B.1.120})$$

Подставляя (B.1.120) в (B.1.119), получим

$$\Pi^{(1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n)} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{\chi}{\Lambda} F_0\right) \int_0^1 r (-T^{(1)})|_{F_0=0} J_0(\mu_n r) dr. \quad (\text{B.1.121})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Решение задачи о нестационарном теплообмене ламинарного потока

В приложении проиллюстрировано решение задачи о нестационарном теплообмене восходящего потока при ламинарном режиме течения. Найдены аналитические пространственно-временные аналитические зависимости в нулевом и первом асимптотических приближениях. Получены формулы для погранслоиных (в математическом смысле) функций, уточняющие решение задачи на границах $z = 0$ и $Fo = 0$.

Г.1. Математическая формулировка задачи теплообмена ламинарного потока

Постановка задачи о теплообмене ламинарного потока запишется как

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \lambda_{1z} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2} + \lambda_{1r} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \right), \quad r_d > r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0, \quad (\text{Г.1.1})$$

$$c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} + \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right) - c_p v_0 R(r) \frac{\partial \theta}{\partial z_d} + q_d, \quad (\text{Г.1.2})$$

$$r_d < r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0,$$

где функция $R(r)$ определена в п. 1.1, а плотность источников q_d определяется выражением (1.2.2).

$$\theta \Big|_{r_d=r_0} = \theta_1 \Big|_{r_d=r_0}, \quad (\text{Г.1.3})$$

$$\lambda_r \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0} = \lambda_{1r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0}. \quad (\text{Г.1.4})$$

$$\theta \Big|_{t=0} = \theta_1 \Big|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad (\text{Г.1.5})$$

$$\theta_1 \Big|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \quad (\text{Г.1.6})$$

В точке $z_d = 0$ температура потока изменяется по заданному закону, определяемому величиной баротермического эффекта, формулы для расчета которого, получены в главе V

$$\theta|_{z_d=0} = \theta_{10}(t). \quad (\text{Г.1.7})$$

Задача (Г.1.1) – (Г.1.7) может быть получена из (1.4.1) – (1.4.7) при γ^0 и σ^0 , с учетом $\lambda(r)=1$, поскольку в случае ламинарного течения теплопроводность от радиальной координаты не зависит. Аналогично предыдущему случаю вторыми производными по z в задаче можно пренебречь.

Соотношения для обезразмеривания имеют вид (2.1.1). Обезразмеренная задача в пренебрежении вторыми производными по z представится как

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (\text{Г.1.8})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \text{Pev} R(r) \left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) + Q(r, z, \text{Fo}), \quad (\text{Г.1.9})$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad (\text{Г.1.10})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r}|_{r=1}, \quad (\text{Г.1.11})$$

$$T|_{\text{Fo}=0} = T_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Г.1.12})$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Г.1.13})$$

$$T|_{z=0} = \frac{\theta_{10}(t) - \theta_{01} + \Gamma z_d}{\theta_0} = T_0(\text{Fo}). \quad (\text{Г.1.14})$$

Задача (Г.1.8) – (Г.1.14) содержит переменный коэффициент $R(r)$, описывающий зависимость профиля скорости от радиальной координаты, перед производной по координате z в уравнении (Г.1.9). Решение этой задачи также отыскивается с использованием асимптотического метода по коэффициентно-го осреднения, основное преимущество которого заключается в возможности построения приближенных решений задач с переменными коэффициентами.

Г.2. Асимптотическое разложение задачи

Аналогично п. 2.2 задача (Г.1.8) – (Г.1.14) параметризуется путем формальной замены Λ на $\varepsilon \cdot \Lambda$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (\Gamma.2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \text{Pev} R(r) \left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = Q(r, z, \text{Fo}), \quad (\Gamma.2.2)$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad (\Gamma.2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\Gamma.2.4)$$

$$T|_{\text{Fo}=0} = T_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\Gamma.2.5)$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\Gamma.2.6)$$

$$T|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (\Gamma.2.7)$$

Заметим, что при $\varepsilon = 1$ параметризованная задача (Г.2.1) – (Г.2.7) совпадает с исходной.

Подставляя (2.2.23) в (Г.2.1) – (Г.2.7) получим

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \left[\frac{\partial T_1^{(i)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(i)}}{\partial r} \right) \right] = 0, \quad (\Gamma.2.8)$$

$$r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0.$$

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \left[\frac{\partial T^{(i-1)}}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} R(r) \frac{\partial T^{(i-1)}}{\partial z} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(i)}}{\partial r} \right) - \right. \quad (\Gamma.2.9)$$

$$\left. - [\text{Pev}(1 - \text{H})R(r) + Q(r, z, \text{Fo})] \delta_{i-1,0} \right] = 0, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0.$$

$$T^{(0)}|_{r=1} - T_1^{(0)}|_{r=1} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i (T^{(i)}|_{r=1} - T_1^{(i)}|_{r=1}) = 0, \quad (\Gamma.2.10)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \left(\frac{\partial T^{(i)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(i-1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) = 0, \quad (\Gamma.2.11)$$

$$T^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i T^{(i)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_1^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i T_1^{(i)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\Gamma.2.12)$$

$$T_1^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i T_1^{(i)}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\Gamma.2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i T^{(i)}|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (\text{Г.2.14})$$

Г.2.1. Постановка задачи для нулевого коэффициента разложения

Как и в п. 2.3. заключаем, что в нулевом приближении температура не зависит от радиальной координаты r и является функцией только координаты z и времени Fo . Процедура «расщепления» уравнения, следующего из (Г.2.9) происходит так же, как в п. 2.3. Формула первого коэффициента асимптотического разложения имеет вид

$$T^{(1)} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} A_1(z, \text{Fo}) + A_2(z, \text{Fo}) R_2(r) - Q_2(r, z, \text{Fo}) \right) + B(z, \text{Fo}), \quad (\text{Г.2.15})$$

где $A_1(z, \text{Fo}) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}}$, $A_2(z, \text{Fo}) = \text{Pev} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right)$, а $B(z, \text{Fo})$ – функциональный коэффициент, подлежащий определению. В выражении (Г.2.15) введены обозначения для вспомогательных функций

$$R_1(r) = \int_0^r r' R(r') dr', \quad R_2(r) = \int_0^r \frac{1}{r'} R_1(r') dr', \quad Q_1(r, z, \text{Fo}) = \int_0^r r' Q(r', z, \text{Fo}) dr',$$

$$Q_2(r, z, \text{Fo}) = \int_0^r r'^{-1} Q_1(r', z, \text{Fo}) dr'. \quad (\text{Г.2.16})$$

Расщепленная постановка задачи для нулевого коэффициента асимптотического разложения имеет вид

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \quad (\text{Г.2.17})$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + 2\text{Pev} R_1(1) \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + 2Q_1(1, z, \text{Fo}), \quad (\text{Г.2.18})$$

$$r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0,$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Г.2.19})$$

$$T^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = T_1^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Г.2.20})$$

$$T_1^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Г.2.21})$$

$$T^{(0)}|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (\text{Г.2.22})$$

Решение этой задачи в пространстве изображений Лапласа – Карсона получено в разделе Г.3.1.

Г.2.2. Краевая задача для первых коэффициентов разложения

Уравнения (Г.2.8), (Г.2.9) для первого коэффициента разложения представляются в следующем виде:

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (\text{Г.2.23})$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} R(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right), \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0. \quad (\text{Г.2.24})$$

В (Г.2.24) введем операторы

$$\hat{L}_1 = \frac{\partial}{\partial \text{Fo}}, \quad \hat{L}_2 = \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{Г.2.25})$$

Тогда уравнение (Г.2.24) представится в следующем виде:

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) = \hat{L}_1 T^{(1)} + R(r) \hat{L}_2 T^{(1)}, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0. \quad (\text{Г.2.26})$$

Для «расщепления» (Г.2.26) используем выражение для $T^{(1)}$ из (Г.2.15). Поскольку операторы \hat{L}_1 и \hat{L}_2 не действуют на радиальную координату r , то выражение (Г.2.26) с учетом (Г.2.15), запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) &= \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} \hat{L}_1 A_1(z, \text{Fo}) + R_2(r) \hat{L}_1 A_2(z, \text{Fo}) - \hat{L}_1 Q_2(r, z, \text{Fo}) \right) + \\ &+ \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2 R(r)}{4} \hat{L}_2 A_1(z, \text{Fo}) + R(r) R_2(r) \hat{L}_2 A_2(z, \text{Fo}) - R(r) \hat{L}_2 Q_2(r, z, \text{Fo}) \right) + \\ &+ \hat{L}_1 B(z, \text{Fo}) + R(r) \hat{L}_2 B(z, \text{Fo}). \end{aligned} \quad (\text{Г.2.27})$$

Интегрируя (Г.2.27), получим выражение для производной второго коэффициента разложения по радиальной координате

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = & \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{r^3}{16} \widehat{L}_1 A_1(z, Fo) + \frac{R_3(r)}{r} \widehat{L}_1 A_2(z, Fo) - \widehat{L}_1 Q_3(r, z, Fo) \right) + \\ & + \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{R_{32}(r)}{4r} \widehat{L}_2 A_1(z, Fo) + \frac{R_{12}(r)}{r} \widehat{L}_2 A_2(z, Fo) - \widehat{L}_2 Q_R(r, z, Fo) \right) + \\ & + \frac{\Lambda r}{2\chi} \widehat{L}_1 B(z, Fo) + \frac{\Lambda R_1(r)}{r\chi} \widehat{L}_2 B(z, Fo), \end{aligned} \quad (\text{Г.2.28})$$

которое, согласно условию на границе (Г.2.11), равно

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = & \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{1}{16} \widehat{L}_1 A_1(z, Fo) + R_3(1) \widehat{L}_1 A_2(z, Fo) - \widehat{L}_1 Q_3(1, z, Fo) \right) + \\ & + \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{R_{32}(1)}{4} \widehat{L}_2 A_1(z, Fo) + R_{12}(1) \widehat{L}_2 A_2(z, Fo) - \widehat{L}_2 Q_R(1, z, Fo) \right) + \\ & + \frac{\Lambda}{2\chi} \widehat{L}_1 B(z, Fo) + \frac{\Lambda R_1(1)}{\chi} \widehat{L}_2 B(z, Fo) = \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}. \end{aligned} \quad (\text{Г.2.29})$$

С помощью операторов (Г.2.25) и

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{30} = & \frac{\partial}{\partial Fo} + 2R_1(1) \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \widehat{L}_{31} = \frac{\partial}{\partial Fo} + \frac{R_{12}(1)}{R_3(1)} \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \widehat{L}_{32} = & \frac{\partial}{\partial Fo} + 4R_{32}(1) \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

уравнение (Г.2.29) можно записать в более компактной форме

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{30} B(z, Fo) - 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = & -\frac{\Lambda}{8\chi} \widehat{L}_{32} A_1(z, Fo) - \\ & - 2\frac{\Lambda}{\chi} R_3(1) \widehat{L}_{31} A_2(z, Fo) + 2\frac{\Lambda}{\chi} \left(\text{Pev} \frac{\partial}{\partial z} Q_R(1, z, Fo) + \frac{\partial}{\partial Fo} Q_3(1, z, Fo) \right). \end{aligned}$$

Уравнение (Г.2.29) эквивалентно уравнению (Г.2.32), где $A_1(z, Fo)$ и $A_2(z, Fo)$ определяются согласно (Г.2.21), а $B(z, Fo)$ неизвестно

$$\left(\frac{\partial}{\partial Fo} + 2R_1(1) \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z} \right) B(z, Fo) - 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial \text{Fo}} Q_3(1, z, \text{Fo}) + \text{Pe} \nu \frac{\partial}{\partial z} Q_R(1, z, \text{Fo}) \right) - \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \text{Fo}^2} - \\
&- \frac{\Lambda}{2\chi} (4R_3(1) + R_{32}(1)) \text{Pe} \nu \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z \partial \text{Fo}} - 2 \frac{\Lambda}{\chi} R_{12}(1) \text{Pe}^2 \nu^2 \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Найдя аналитическое выражение $B(z, \text{Fo})$, получим решение задачи в первом приближении. Из (Г.2.22) имеем выражение для $B(z, \text{Fo})$

$$B(z, \text{Fo}) = T^{(1)} - \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} A_1(z, \text{Fo}) + R_2(r) A_2(z, \text{Fo}) - Q_2(r, z, \text{Fo}) \right). \quad (\text{Г.2.30})$$

Подставляя (Г.2.30), (Г.2.33), (Г.2.21) в (Г.2.29), найдем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + 2 \text{Pe} \nu R_1(1) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} + \frac{2\Lambda \text{Pe}^2 \nu^2}{\chi} (R_{12}(1) - R_1(1) R_2(r)) \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2} + \\
&+ \frac{\Lambda}{\chi} \frac{1 - 2r^2}{8} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{\Lambda}{2\chi} [4R_3(1) - 2R_2(r) + R_{32}(1) - r^2 R_1(1)] \text{Pe} \nu \times \\
&\times \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z \partial \text{Fo}} + \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial \text{Fo}} + 2 \text{Pe} \nu R_1(1) \frac{\partial}{\partial z} \right) Q_2(r, z, \text{Fo}) - 2 \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} Q_3(1, z, \text{Fo}) - \\
&- 2 \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pe} \nu \frac{\partial}{\partial z} Q_R(1, z, \text{Fo}) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0,
\end{aligned} \quad (\text{Г.2.31})$$

где

$$\begin{aligned}
R_{12}(r) &= \int_0^r r' R(r') R_2(r') dr', \quad R_{32}(r) = \int_0^r r'^3 R(r') dr', \quad R_3(r) = \int_0^r r' R_2(r') dr', \\
Q_3(r, z, \text{Fo}) &= \frac{1}{r} \int_0^r r' Q_2(r', z, \text{Fo}) dr', \quad Q_R(r, z, \text{Fo}) = \frac{1}{r} \int_0^r r' R(r') Q_2(r', z, \text{Fo}) dr'.
\end{aligned} \quad (\text{Г.2.32})$$

Математическая постановка задачи для первых коэффициентов разложения включает также уравнение и условия для окружающей среды

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \quad (\text{Г.2.33})$$

$$T^{(1)} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Г.2.34})$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Г.2.35})$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0. \quad (\text{Г.2.36})$$

Решение рассматриваемой задачи отыскивается в виде (Г.2.22). При решении задачи для первого приближения удовлетворить условиям $T^{(1)}|_{Fo=0}=0$ и $T^{(1)}|_{z=0}=0$ при любых r без погранслойных решений не представляется возможным. Это приводит к необходимости видоизменения соответствующих условий в момент времени $Fo = 0$ и при $z = 0$.

Г.2.3. Задача для остаточного члена

Обозначим сумму слагаемых после первого коэффициента разложения как остаточный член Θ , тогда решение задачи (Г.2.1) – (Г.2.7) строится в виде ряда по параметру ε с остаточным членом

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \Theta_j. \quad (\text{Г.2.37})$$

С учетом того, что нулевой коэффициент разложения и радиальная производная первого коэффициента удовлетворяют задачам (Г.2.25) – (Г.2.30) и (Г.2.31) – (Г.2.36) соответственно, из (Г.2.1) – (Г.2.7) получим

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{Г.2.38})$$

$$\varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \varepsilon R(r) \text{Pev} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial Fo} - R(r) \text{Pev} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right), \quad (\text{Г.2.39})$$

$$\Theta|_{r=1} = \Theta_1|_{r=1}, \quad (\text{Г.2.40})$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial (\Theta_1 + \varepsilon T_1^{(1)})}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Г.2.41})$$

$$(\Theta + \varepsilon T^{(1)}) \Big|_{Fo=0} = 0, \quad \Theta_1 \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (\text{Г.2.42})$$

$$\Theta_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Г.2.43})$$

$$(\Theta + \varepsilon T^{(1)}) \Big|_{z=0} = 0. \quad (\text{Г.2.44})$$

Для нахождения дополнительных условий представим остаточный член также в виде асимптотических рядов (2.6.1). Подставляя (2.6.1) в (Г.2.38) – (Г.2.44), получим задачу, разбитую по степеням параметра ε . Ана-

логично п.2.5 убедимся, что задача для $\Theta^{(0)} = \Theta^{(0)}(z, Fo)$ имеет только тривиальное решение. А из осреднения задачи для первого коэффициента разложения остаточного члена получим нелокальные среднеинтегральные условия

$$\langle T^{(1)} \rangle_{Fo=0} = 0 \text{ и } \langle T^{(1)} \rangle_{z=0} = 0, \quad (\text{Г.2.45})$$

которые могут быть использованы вместо $T^{(1)}|_{Fo=0}=0$ и $T^{(1)}|_{z=0}=0$. Возможность такой замены граничных условий оправдана наличием погранслоев, как показано ниже, в окрестностях точек $Fo = 0$, $z = 0$.

Таким образом, математическая постановка задачи для первого коэффициента разложения представится как

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \quad (\text{Г.2.46})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Fo} + 2Pe\nu R_1(1) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} - 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} &= \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2r^2 - 1}{8} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial Fo^2} - \frac{2\Lambda Pe^2 \nu^2}{\chi} \times \\ &\times (R_{12}(1) - R_1(1)R_2(r)) \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2} - \frac{\Lambda}{2\chi} [4R_3(1) - 2R_2(r) + R_{32}(1) - r^2 R_1(1)] \times \end{aligned} \quad (\text{Г.2.47})$$

$$\begin{aligned} &\times Pe\nu \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z \partial Fo} - \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial Fo} + 2Pe\nu R_1(1) \frac{\partial}{\partial z} \right) Q_2(r, z, Fo) + \\ &+ 2 \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial Fo} Q_3(1, z, Fo) + Pe\nu \frac{\partial}{\partial z} Q_R(1, z, Fo) \right), \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad z > 0, \end{aligned}$$

$$T^{(1)}|_{r=1} = T_1^{(1)}|_{r=1}, \quad (\text{Г.2.48})$$

$$\langle T^{(1)} \rangle_{Fo=0} = 0, \quad (\text{Г.2.49})$$

$$T_1^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Г.2.50})$$

$$\langle T^{(1)} \rangle_{z=0} = 0. \quad (\text{Г.2.51})$$

Задача (Г.2.46) – (Г.2.51) относится к неклассическим задачам математической физики, поскольку содержит нелокальные граничные условия (Г.2.49), (Г.2.51).

**Г.3.1. Аналитическое решение общей задачи
в нулевом приближении**

С помощью преобразования Лапласа – Карсона (2.4.1) запишем задачу (Г.2.28) – (Г.2.33) в пространстве изображений

$$pT_1^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad z > 0, \quad (\text{Г.3.1})$$

$$pT^{(0)u} + 2\text{Pev}R_1(1) \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} + 2Q_1^u(1, z, p), \quad (\text{Г.3.2})$$

$$r < 1, \quad z > 0,$$

$$T^{(0)u} = T_1^{(0)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Г.3.3})$$

$$T_1^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Г.3.4})$$

$$T^{(0)u} \Big|_{z=0} = T_0(p). \quad (\text{Г.3.5})$$

Как и в рассмотренных выше задачах для нулевого приближения, решение (Г.3.1)

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}. \quad (\text{Г.3.6})$$

Полученное выражение (Г.3.6) позволяет определить радиальную производную температуры в среде, окружающей скважину, в виде

$$\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} = -\sqrt{p} \frac{K_1(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}, \quad (\text{Г.3.7})$$

откуда следует выражение для следа производной из окружающей среды

$$\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\sqrt{p} \frac{K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u} = -\sqrt{p} k T^{(0)u}, \quad (\text{Г.3.8})$$

где $k = k(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$. С учетом последних равенств уравнение (Г.3.2) для определения $T^{(0)u}$ можно представить как

$$\frac{dT^{(0)u}}{dz} + \frac{p + 2\chi\sqrt{p}k}{2R_1(1)\text{Pev}} T^{(0)u} = 1 - \text{H} + \frac{1}{R_1(1)\text{Pev}} Q_1^u(1, z, p), \quad (\text{Г.3.9})$$

$$r < 1, z > 0.$$

Решение уравнения (Г.3.9) с учетом условия (Г.3.5) примет вид

$$T^{(0)u} = T_0^u(p) \exp(-\alpha z) + \int_0^z \left(1 - H + \frac{Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}R_1(1)} \right) \exp[-\alpha(z-\xi)] d\xi, \quad r < 1, z > 0, \quad (\text{Г.3.10})$$

где

$$\alpha = \frac{p + 2\chi\sqrt{pk}}{2R_1(1)\text{Pev}}. \quad (\text{Г.3.11})$$

Температура в изображениях в нулевом приближении в скважине и окружающей среде представляется как

$$T^{(0)u} = T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \int_0^z \left(1 - H + \frac{Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}R_1(1)} \right) e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi, \quad r < 1, z > 0, \\ T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[T_0^u(p) \exp(-\alpha z) + \int_0^z \left(1 - H + \frac{Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}R_1(1)} \right) \exp[-\alpha(z-\xi)] d\xi \right], \quad r > 1, z > 0. \quad (\text{Г.3.12})$$

Выражения (Г.3.10) и (Г.3.12) представляют точное решение задачи в нулевом приближении в пространстве изображений.

Г.3.2. Решение задачи в первом приближении

В пространстве изображений Лапласа – Карсона задача для первых коэффициентов разложения (Г.2.65) – (Г.2.70) примет вид

$$pT_1^{(1)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, z > 0, \quad (\text{Г.3.13})$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} \left(pT^{(1)u} - T^{(0)}(\text{Fo} = 0) \right) + 2\text{Pev}R_1(1) \frac{\partial T^{(1)u}}{\partial z} - 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \\ = \frac{\Lambda}{8\chi} (2r^2 - 1) p \left(pT^{(0)u} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}}(\text{Fo} = 0) \right) \times \quad (\text{Г.3.14})$$

$$\begin{aligned}
& \times -\frac{2\Lambda\text{Pe}^2\nu^2}{\chi} (R_{12}(1) - R_1(1)R_2(r)) \frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial z^2} - \\
& -\frac{\Lambda\text{Pev}}{2\chi} [4R_3(1) - 2R_2(r) + R_{32}(1) - r^2 R_1(1)] p \times \\
& \times \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} (\text{Fo} = 0) \right) - \\
& -\frac{\Lambda}{\chi} p (Q_2^u(r, z, p) - Q_2(r, z, 0)) - 2\text{Pev}R_1(1) \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_2^u(r, z, p)}{\partial z} + \\
& + 2\frac{\Lambda}{\chi} p (Q_3^u(1, z, p) - Q_3(1, z, 0)) + 2\text{Pev}R_1(1) \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_R^u(1, z, p)}{\partial z} \quad r < 1, \quad z > 0,
\end{aligned}$$

$$T^{(1)u}|_{r=1} = T_1^{(1)u}|_{r=1}, \quad (\text{Г.3.15})$$

$$T_1^{(1)u}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Г.3.16})$$

$$\langle T^{(1)} \rangle|_{z=0} = 0, \quad (\text{Г.3.17})$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle T^{(1)u} \rangle = 0. \quad (\text{Г.3.18})$$

Решение уравнения (Г.3.13) и его производная на границе $r = 1$ имеет вид

$$T_1^{(1)u} = T^{(1)u}|_{r=1} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}, \quad \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\sqrt{p} k T^{(1)u}|_{r=1}. \quad (\text{Г.3.19})$$

Далее найдем выражение для первого коэффициента в пространстве изображений

$$\begin{aligned}
T^{(1)u} &= \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} A_1^u(z, \text{Fo}) + A_2^u(z, \text{Fo}) R_2(r) - Q_2^u(r, z, p) \right) + B^u(z, p) = \\
&= \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} p T^{(0)u} + \text{Pev} R_2(r) \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - Q_2^u(r, z, p) \right) + B^u(z, p).
\end{aligned} \quad (\text{Г.3.20})$$

и его выражения в начальный момент времени в пространстве оригиналов

$$T^{(1)}(\text{Fo} = 0) = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\text{Pev} \left(R_1(1) \frac{r^2}{2} - R_2(r) \right) (T_0(0) \delta(z) + 1 - \text{H}) + \right. \quad (\text{Г.3.21})$$

$$+ \frac{r^2}{2} Q_1(1, z, 0) - Q_2(r, z, 0) + B(z, 0),$$

поскольку

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pT^{(0)u} = 2\text{Pev}R_1(1)T_0(0)\delta(z) + 2\text{Pev}R_1(1)(1 - \text{H}) + 2Q_1^u(1, z, 0),$$

$$pT^{(0)u} = T_0^u(p)p \exp(-\alpha z) + \int_0^z \left(1 - \text{H} + \frac{Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}R_1(1)} \right) p \exp[-\alpha(z - \xi)] d\xi,$$

$$\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} = -\alpha T^{(0)u} + 1 - \text{H} + \frac{Q_1^u(1, z, p)}{\text{Pev}R_1(1)},$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} (\text{Fo} = 0) = -T_0(0)\delta(z).$$

Средние по сечению значения первого коэффициента представляются как

$$\begin{aligned} \langle T^{(1)u} \rangle &= \frac{\Lambda}{\chi} \left[\left(\frac{1}{8} - \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \right) p - 2 \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \chi \sqrt{pk} \right] T^{(0)u} + \\ &+ \frac{2\Lambda}{\chi} \left(\frac{R_3(1)}{R_1(1)} Q_1^u(1, z, p) - Q_3^u(1, z, p) \right) + B^u(z, p). \end{aligned} \quad (\text{Г.3.22})$$

Отсюда согласно условию (Г.3.18) получим выражение для $B(z, 0)$

$$\begin{aligned} B(z, 0) &= \frac{2\Lambda}{\chi} Q_3(1, z, 0) - \frac{\Lambda}{4\chi} Q_1^u(1, z, 0) - \\ &- \frac{2\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{8} - \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \right) \left(\text{Pev}R_1(1)T_0(0)\delta(z) + \text{Pev}R_1(1)(1 - \text{H}) \right). \end{aligned} \quad (\text{Г.3.23})$$

Подставив полученное выражение для первого коэффициента и его производной (Г.3.20) в уравнение (Г.3.14), получим уравнение для $B^u(z, p)$ в пространстве изображений

$$\begin{aligned} p(B^u(z, p) - B(z, 0)) + 2\text{Pev}R_1(1) \frac{\partial B^u(z, p)}{\partial z} - 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \\ = 2 \frac{\Lambda}{\chi} p(Q_3^u(1, z, p) - Q_3(1, z, 0)) + 2\text{Pev}R_1(1) \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_R^u(1, z, p)}{\partial z} - \frac{\Lambda}{8\chi} \times \end{aligned} \quad (\text{Г.3.24})$$

$$\begin{aligned} & \times p \left(pT^{(0)u} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} (Fo = 0) \right) - \frac{2\Lambda Pe^2 v^2}{\chi} R_{12}(1) \frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial z^2} - \\ & - \frac{\Lambda Pev}{2\chi} [4R_3(1) + R_{32}(1)] p \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} (Fo = 0) \right) \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & \frac{dB^u(z, p)}{dz} + \frac{p + 2\chi k \sqrt{p}}{2Pe\nu R_1(1)} B^u(z, p) = \frac{p}{2Pe\nu R_1(1)} B(z, 0) - 2\Lambda k \sqrt{p} \times \\ & \times \left(\frac{1}{8Pe\nu R_1(1)} pT^{(0)u} + \frac{R_2(1)}{2R_1(1)} \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + H \right) - \frac{Q_2^u(1, z, p)}{2Pe\nu R_1(1)} \right) + \\ & + \frac{\Lambda p}{Pe\nu R_1(1)\chi} (Q_3^u(1, z, p) - Q_3(1, z, 0)) + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_R^u(1, z, p)}{\partial z} - \frac{\Lambda}{16\chi Pe\nu R_1(1)} \times \\ & \times p \left(pT^{(0)u} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} (Fo = 0) \right) - \frac{\Lambda Pev}{R_1(1)\chi} R_{12}(1) \frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial z^2} + \\ & - \frac{\Lambda}{4R_1(1)\chi} [4R_3(1) + R_{32}(1)] p \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} (Fo = 0) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение для $B^u(z, p)$

$$\frac{dB^u(z, p)}{dz} + \frac{p + 2\chi k \sqrt{p}}{2Pe\nu R_1(1)} B^u(z, p) = \Sigma_1(z, p), \quad (\Gamma.3.25)$$

где выражение для источников имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma_1(z, p) = & \frac{p}{2Pe\nu R_1(1)} B(z, 0) - \\ & - 2\Lambda k \sqrt{p} \left[\frac{1}{8Pe\nu R_1(1)} pT^{(0)u} + \frac{R_2(1)}{2R_1(1)} \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + H \right) - \frac{Q_2^u(1, z, p)}{2Pe\nu R_1(1)} \right] + \\ & + \frac{\Lambda p}{Pe\nu R_1(1)\chi} (Q_3^u(1, z, p) - Q_3(1, z, 0)) + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_R^u(1, z, p)}{\partial z} - \frac{\Lambda}{16\chi Pe\nu R_1(1)} \times \\ & \times p \left(pT^{(0)u} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} (Fo = 0) \right) - \frac{\Lambda Pev}{R_1(1)\chi} R_{12}(1) \frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial z^2} + \end{aligned} \quad (\Gamma.3.26)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Lambda}{4R_1(1)\chi} \left[4R_3(1) + R_{32}(1) \right] p \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} (\text{Fo} = 0) \right), \\
\Sigma(z, p) &= \frac{2\Lambda}{\text{Pev}} \sqrt{pk} Q_2^u(1, z, p) - \frac{\Lambda}{8\text{Pev}} (\widehat{L}_3^u + 4\sqrt{pk}) A_2^u(z, p) + \frac{2\Lambda}{\text{Pev}} \widehat{L}_3^u Q_3^u(1, z, p) + \\
& + \frac{p\Lambda}{\text{Pev}\chi} \left(2Q_3(1, z, 0) - \frac{Q_1(1, z, 0)}{4} \right) = \frac{2\Lambda}{\text{Pev}} \sqrt{pk} Q_2^u(1, p, z) - \frac{\Lambda}{8\text{Pev}\chi} (p + 4\chi\sqrt{pk}) \times \\
& \times A_2^u(z, p) - \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\partial}{\partial z} A_2^u(z, p) + \frac{2\Lambda p}{\text{Pev}\chi} Q_3^u(1, z, p) + \frac{2\Lambda}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} Q_3^u(1, z, p) = \\
& = \frac{2\Lambda}{\text{Pev}} \sqrt{pk} Q_2^u(1, z, p) + \frac{\Lambda}{4} \sqrt{pk} (1 - \text{H}) + \frac{\Lambda}{2\text{Pev}} \chi k^2 p T^{(0)u} - \\
& - \frac{\Lambda}{4\chi} \left[\frac{1}{\text{Pev}} (p + 2\chi\sqrt{pk}) + \frac{d}{dz} \right] Q_1^u(1, p, z) + \frac{2\Lambda}{\chi} \left[\frac{1}{\text{Pev}} p + \frac{d}{dz} \right] Q_3^u(1, z, p).
\end{aligned}$$

$$B(z, 0) = \frac{2\Lambda}{\chi} Q_3(1, z, 0) - \frac{\Lambda}{4\chi} Q_1^u(1, z, 0) -$$

(Г.3.27)

$$- \frac{2\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{8} - \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \right) (\text{Pev} R_1(1) T_0(0) \delta(z) + \text{Pev} R_1(1) (1 - \text{H})).$$

В преобразованиях (Г.3.26) учтены следующие равенства:

$$p T^{(0)u} + 2\text{Pev} R_1(1) \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} = -2\chi k \sqrt{p} T^{(0)u} + \text{Pev} (1 - \text{H}) + 2Q_1^u(1, z, p).$$

Решение уравнения (Г.3.25) имеет вид

$$B^u(z, p) = B^u(0, p) e^{-\alpha z} + \int_0^z \Sigma(\xi, p) \exp[-\alpha(z - \xi)] d\xi. \quad (\text{Г.3.28})$$

С учетом равенства (Г.3.23) из условия (Г.3.17) определяется выражение для $B^u(0, p)$

$$\begin{aligned}
B^u(0, p) &= \left(2\Lambda \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \sqrt{pk} - \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{8} - \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \right) p \right) T_0^u - \\
& - \frac{2\Lambda}{\chi} \left(Q_3^u(1, 0, p) - \frac{R_3(1)}{R_1(1)} Q_1^u(1, 0, p) \right).
\end{aligned} \quad (\text{Г.3.29})$$

Тогда искомое решение с учетом выражения

$$\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} = -\alpha T^{(0)u} + 1 - H + \frac{Q_1^u(1, z, p)}{\text{Pev}R_1(1)},$$

для первого коэффициента имеет вид

$$\begin{aligned} T^{(1)u} = & \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{R_2(r)}{2R_1(1)} \right) p T^{(0)u} - \Lambda \sqrt{pk} \frac{R_2(r)}{R_1(1)} T^{(0)u} + \\ & + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{R_2(r)}{R_1(1)} Q_1^u(1, z, p) - \frac{\Lambda}{\chi} Q_2^u(r, z, p) + B^u(z, p). \end{aligned} \quad (\text{Г.3.30})$$

где выражение $B^u(z, p)$ определяется согласно (Г.3.28), (Г.3.29). Эти соотношения решают поставленную задачу для первого коэффициента в пространстве изображений. Построение расчетных соотношений в пространстве оригиналов целесообразно для конкретных функций источников, возникающих в практических задачах.

Для случая отсутствия источников получим

$$\begin{aligned} \Sigma_1(z, p) = & \frac{p}{2\text{Pev}R_1(1)} B(z, 0) - \frac{2\Lambda k \sqrt{p}}{8\text{Pev}R_1(1)} p T^{(0)u} - \\ & - \Lambda k \sqrt{p} \frac{R_2(1)}{R_1(1)} \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + H \right) - \frac{\Lambda}{16\chi \text{Pev}R_1(1)} p \left(p T^{(0)u} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} (\text{Fo} = 0) \right) - \\ & - \frac{\Lambda \text{Pev}}{R_1(1)\chi} R_{12}(1) \frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial z^2} - \frac{\Lambda}{4R_1(1)\chi} [4R_3(1) + R_{32}(1)] p \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} (\text{Fo} = 0) \right), \\ & (p + 2\chi k \sqrt{p}) T^{(0)u} + 2\text{Pev}R_1(1) \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + H \right) = 0, \end{aligned}$$

$$B(z, 0) = -\frac{2\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{8} - \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \right) \left(\text{Pev}R_1(1) T_0(0) \delta(z) + \text{Pev}R_1(1) (1 - H) \right),$$

$$\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} = -\alpha T^{(0)u} + 1 - H,$$

$$\frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial z^2} = \alpha^2 T^{(0)u} - \alpha(1 - H),$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} (\text{Fo} = 0) = -T_0(0) \delta(z),$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pT^{(0)u} = 2\text{Pev}R_1(1)T_0(0)\delta(z) + 2\text{Pev}R_1(1)(1 - \text{H}),$$

$$B^u(0, p) = \left(2\Lambda \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \sqrt{pk} - \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{8} - \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \right) p \right) T_0^u, \quad (\text{Г.3.31})$$

$$\Sigma(z, p) = \frac{\Lambda}{4} \sqrt{pk}(1 - \text{H}) + \frac{\Lambda\chi}{2\text{Pev}} k^2 pT^{(0)u}, \quad B^u(0, p) = \frac{1}{4} \Lambda \sqrt{pk} T_0^u(p). \quad (\text{Г.3.32})$$

С учетом (Г.3.26) решение запишется в виде

$$B^u(z, p) = B^u(0, p)e^{-\alpha z} + \int_0^z \Sigma(\xi, p) \exp[-\alpha(z - \xi)] d\xi. \quad (\text{Г.3.33})$$

Это позволяет записать искомое решение для первого коэффициента разложения (Г.3.30) в виде

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{R_2(r)}{2R_1(1)} \right) pT^{(0)u} - \Lambda \sqrt{pk} \frac{R_2(r)}{R_1(1)} T^{(0)u} + B^u(z, p), \quad (\text{Г.3.34})$$

$$T_1^{(1)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})\Lambda}{K_0(\sqrt{p})} \left[\left(\frac{\Lambda}{2\chi} \left(\frac{1}{2} - \frac{R_2(1)}{R_1(1)} \right) p - \Lambda \sqrt{pk} \frac{R_2(1)}{R_1(1)} \right) T^{(0)u} + B^u(z, p) \right]. \quad (\text{Г.3.35})$$

Заметим, что в найденное решение входит коэффициент нулевого разложения, который определяется согласно выражению (Г.3.10).

Полученные решения для первого коэффициента необходимы, в первую очередь, для определения радиальных профилей температуры

$$T^{(1)u} - T_w^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\left(\frac{r^2 - 1}{4} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) p - \chi \sqrt{pk} \frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} \right] \times \quad (\text{Г.3.36})$$

$$\times T^{(0)u} + \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} Q_1^u(1, z, p) + Q_2^u(1, z, p) - Q_2^u(r, z, p) \right).$$

В частном случае выровненного профиля скорости $R(r) = 1$ полученное выражение сводится к аналогичному, в Приложении Е. Решение (Г.3.36) при отсутствии источников приводит к следующему выражению:

$$T^{(1)u} - T_w^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2 - 1}{4} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) pT^{(0)u} - \quad (\text{Г.3.37})$$

$$- \Lambda k \frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} \sqrt{p} T^{(0)u}.$$

Выражение для нулевого коэффициента без источников имеет вид

$$T^{(0)u} = T_0^u(p) \exp\left(-\frac{z}{2R_1(1)\text{Pev}}(p + 2\chi k\sqrt{p})\right) + \frac{2R_1(1)(1-H)\text{Pev}}{p + 2\chi k\sqrt{p}} \left[1 - \exp\left(-\frac{z}{2R_1(1)\text{Pev}}(p + 2\chi k\sqrt{p})\right)\right]. \quad (\text{Г.3.38})$$

Поскольку при малых $p \rightarrow 0$ ($\text{Fo} \rightarrow \infty$) имеет место асимптотическое соотношение $k\sqrt{p} = \sqrt{p} K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p}) \approx -\{[C + \ln(\sqrt{p}/2)]\}^{-1}$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{p} k T^{(0)u} = \frac{R_1(1)\text{Pev}(1-H)}{\chi}.$$

С учетом этого из (Г.3.36) следует формула для стационарного профиля температуры

$$T - T(r=1) = \text{Pev}(1-H) \frac{\Lambda}{\chi} (R_2(1) - R_2(r)). \quad (\text{Г.3.39})$$

совпадающее с выражением, полученным в предположении постоянного вертикального градиента температуры.

Уравнение для нахождения функционального коэффициента $B^u(z, p)$ запишется как

$$\begin{aligned} \frac{dB^u(p, z)}{dz} + \alpha B^u(p, z) &= \frac{p}{2\text{Pev}R_1(1)} B(0, z) - T^{(0)u} \frac{\Lambda p}{4\chi} \frac{p + 4\chi\sqrt{p}k}{4\text{Pev}R_1(1)} - \\ &\quad - \frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial z^2} \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\text{Pev}R_{12}(1)}{R_1(1)} - \\ &\quad - \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} \frac{\Lambda}{\chi R_1(1)} \left(pR_3(1) + p \frac{R_{32}(1)}{4} - \chi\sqrt{p}kR_2(1) \right) + \\ &\quad + \frac{\Lambda\sqrt{p}(1-H)}{4\chi R_1(1)} \left(4\chi kR_2(1) - \frac{\sqrt{p}}{2} \right), \quad r < 1, z > 0. \end{aligned} \quad (\text{Г.3.40})$$

Решая уравнение (Г.3.40) найдем для $B^u(p, z)$

$$\begin{aligned}
B^u(p, z) = & \frac{p}{2\text{Pev}R_1(1)\alpha} B(0, z) - \frac{\Lambda p}{4\chi} \frac{p + 4\sqrt{pk}\chi}{4\text{Pev}R_1(1)} \left(T_0^u(p) - \frac{1-H}{2\alpha R_1(1)} \right) z e^{-\alpha z} - \\
& - \frac{\Lambda p(1-H)}{8\chi\alpha^2 R_1(1)} \frac{p + 4\chi\sqrt{pk}}{4\text{Pev}R_1(1)} + \frac{\Lambda\sqrt{p}(1-H)}{4\chi R_1(1)} \left(4\chi\sqrt{pk}R_2(1) + \frac{\sqrt{p}}{2} \right) - \\
& + \frac{\Lambda z e^{-\alpha z}}{\chi R_1(1)} \left(\alpha T_0^u(p) - \frac{1-H}{2R_1(1)} \right) \times \\
& \times \left(\alpha\text{Pev}R_{12}(1) + pR_3(1) + p\frac{R_{32}(1)}{4} + \chi\sqrt{pk}R_2(1) \right) + C_1 e^{-\alpha z}, \quad r < 1, \quad z > 0.
\end{aligned} \tag{Г.3.41}$$

Подставляя известные формулы для функций $A_1^u(z, p)$, $A_2^u(z, p)$ и $B^u(p, z)$ (Г.3.41) в (Г.2.23) получим выражение для нахождения первого коэффициента разложения с точностью до констант $B(0, z)$ и C_1

$$\begin{aligned}
T^{(1)u} = & T_0^u(p) \frac{\Lambda e^{-\alpha z}}{\chi} \left(\frac{r^2 p}{4} - R_2(r)\text{Pev}\alpha \right) + \\
& + \frac{\Lambda(1-H)}{4\chi R_1(1)} \left[\frac{r^2 p}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha z}) - 2R_2(r)\text{Pev}(e^{-\alpha z} + 2R_1(1)) \right] + F^u(z, p),
\end{aligned} \tag{Г.3.42}$$

где

$$\begin{aligned}
F^u(z, p) = & T_0^u(p) z \frac{\Lambda e^{-\alpha z}}{\chi R_1(1)} \left[\alpha p \left(R_3(1) + \frac{R_{32}(1)}{4} \right) + \alpha (\chi\sqrt{pk}R_2(1) - \alpha\text{Pev}R_{12}(1)) - \right. \\
& - p \frac{p + 4\chi k\sqrt{p}}{16\text{Pev}} \left. \right] + \frac{\Lambda z e^{-\alpha z}}{2\chi R_1^2(1)} \left[\frac{p + 4\chi k\sqrt{p}}{16\text{Pev}\alpha} - \frac{\text{Pev}\alpha R_{12}(1)}{p} + \right. \\
& + R_3(1) + \frac{R_{32}(1)}{4} + \frac{\chi k R_2(1)}{\sqrt{p}} \left. \right] + \frac{\Lambda(1-H)}{4\chi R_1(1)} \left(\frac{p}{2} + 4\chi k\sqrt{p}R_2(1) - \right. \\
& \left. - \frac{p}{2\alpha^2} \frac{p + 4\chi k\sqrt{p}}{4\text{Pev}R_1(1)} \right) + C_1 e^{-\alpha z} + \frac{p}{2\alpha\text{Pev}R_1(1)} B(0).
\end{aligned} \tag{Г.3.43}$$

Согласно начальному условию (Г.3.18), константа $B(0, z)$ определяется выражением

$$B(0, z) = \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev}(1-H) \left(\frac{1}{8} R_1(1) - 2R_3(1) \right). \tag{Г.3.44}$$

Константа C_1 определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \frac{pB(0,0)}{2\text{Pev}R_1(1)\alpha} - \frac{\Lambda(1-H)}{2R_1(1)\alpha} \left(2\sqrt{pk}R_2(1) + p\frac{R_1(1)}{4\chi} \right) + \\
 & + \frac{\Lambda}{\chi} \left(T_0^u(p) + \frac{1-H}{\alpha} \right) \left[2R_3(1)\text{Pev}\alpha - \frac{1}{8}p + \right. \\
 & \left. + \frac{p + 4\chi k\sqrt{p}}{16\text{Pev}R_1(1)} + 2p + \frac{pR_1^3(1) - 2\chi\sqrt{pk}R_2(1) + 2\text{Pev}R_{12}(1)\alpha^2}{R_1(1)} \right].
 \end{aligned} \tag{Г.3.45}$$

Подставив выражение (Г.3.42) в (Г.3.19) получим выражение для температурного поля во внешней среде

$$\begin{aligned}
 T_1^{(1)u} = & \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left\{ \frac{\Lambda r^2}{4\chi} pT^{(0)u} + \frac{\Lambda R_2(r)}{\chi} \left[\text{Pev} \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + H \right) \right] - \frac{pB(z,0)}{2\text{Pev}R_1(1)\alpha} + \right. \\
 & + \frac{\Lambda pT^{(0)u}}{2\text{Pev}R_1(1)} \left(\frac{p}{8\chi} + \frac{\sqrt{pk}}{4} \right) + \frac{\Lambda(1-H)}{2R_2(1)\alpha} \left(2\sqrt{pk}R_2(1) + p\frac{R_1(1)}{4\chi} \right) - \\
 & \left. - \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} \left(2pR_1(1) + pR_1^3(1) - 2\chi\sqrt{pk}R_2(1) \right) - \frac{\Lambda}{\chi} \frac{2\text{Pev}R_{12}(1)}{R_1(1)} \frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial z^2} + C_1 e^{-\alpha z} \right\}.
 \end{aligned} \tag{Г.3.46}$$

Напомним, что в найденные решение входят константы, определяемые выражениями (Г.3.44), (Г.3.45) для среднего значения температурного поля и для фиксированного значения координаты r соответственно.

Г.3.3. Решение задачи в пространстве оригиналов

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа – Карсона запишем решения задачи в пространстве оригиналов. Выражение (Г.3.42) в пространстве оригиналов можно представить в виде

$$T^{(0)} = \Phi \left(\text{Fo} - \frac{z}{2\text{Pev}R_1(1)} \right) T_0 \text{erfc} \left(\frac{\chi z}{2\text{Pev}R_1(1) \sqrt{\text{Fo} - \frac{z}{2\text{Pev}R_1(1)}}} \right) + \tag{Г.3.47}$$

$$\begin{aligned}
& + \Phi \left(\text{Fo} - \frac{z}{2\text{Pev}R_1(1)} \right) (1-H) \int_0^z \text{erfc} \left(\frac{\chi(z-\xi)}{2\text{Pev}R_1(1) \sqrt{\text{Fo} - \frac{z-\xi}{2\text{Pev}R_1(1)}}} \right) d\xi, \\
& \quad r < 1, \quad z > 0, \\
T^{(1)} = & \frac{\Lambda}{2\chi} \left[\frac{T_0}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R_2(r)}{R_1(1)} \right) \frac{2\sqrt{2}\chi z \sqrt{2\text{Pev}R_1(1)}}{(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)^{3/2}} \times \right. \\
& \times \exp \left(\frac{\chi z}{\sqrt{2\text{Pev}R_1(1)(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)}} \right)^2 - \\
& - \frac{T_0 2\chi \sqrt{2\text{Pev}R_1(1)}}{2\sqrt{\pi}(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)} \exp \left(- \frac{\chi z}{2\sqrt{2\text{Pev}R_1(1)(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)}} \right) - \\
& - \frac{1-H}{R_1(1)} R_2(r) \text{Pev} \text{erfc} \left(\frac{\chi z}{\sqrt{2\text{Pev}R_1(1)(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)}} \right) - \\
& - \frac{r^2(1-H)}{8} \text{Pev} \exp(4\chi^2 \text{Fo}) \text{erfc} \left(2\chi \sqrt{\text{Fo} - \frac{z}{2\text{Pev}R_1(1)}} + \right. \\
& \left. + \frac{\chi z}{\sqrt{2\text{Pev}R_1(1)(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)}} \right) \left. \right] \Phi \left(\text{Fo} - \frac{z}{2\text{Pev}R_1(1)} \right) + \\
& + \frac{\text{Pev}\Lambda(1-H)}{4\chi} \left(\frac{r^2}{4} \exp(4\chi^2 \text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) - 4(1-H)R_2(r) \right) + F(z, \text{Fo}),
\end{aligned} \tag{Г.3.48}$$

где функция $F(z, \text{Fo})$ представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
F(z, \text{Fo}) = & C_1(z, \text{Fo}) + \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev}(1-H)R_2(1) - \frac{\Lambda(1-H)}{4\chi} \frac{\sqrt{\text{Fo} + \chi}}{\sqrt{\pi\text{Fo}}} + \\
& + \frac{\Lambda(1-H)R_2(1)}{\chi} (1 - \exp(4\chi^2 \text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}})) + \\
& + \Phi \left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)\text{Pev}} \right) \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \exp \left(- \frac{\chi^2 z^2}{2\text{Pev}R_1(1)(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - \text{я})} \right) \times \right. \\
& \times \left[\frac{2(1-H)(R_1^3(1) - 2R_1(1))}{\sqrt{\pi}} + \frac{2R_{12}(1)(1-H)}{\chi(R_1(1))^2 \sqrt{\pi}} - \right.
\end{aligned} \tag{Г.3.49}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{T_0}{8\chi R_1(1)\text{Pev}} \left(\frac{\chi^2 z^2}{\sqrt{\pi}\text{Pev}R_1(1)(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)} + \right. \\
& \left. + \frac{2\chi}{\sqrt{\pi}(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)^{\frac{3}{2}}} \frac{\chi^2 z^2}{(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)} \right) + \\
& \left. + \frac{\chi^3 z^2(1-H)}{16\text{Pe}^2\nu^2(R_1(1))^2 \sqrt{\pi}(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)} \right] + \\
& + \frac{\sqrt{2\text{Pev}R_1(1)}}{\sqrt{\pi}(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)} \left(\frac{2\text{Pev}R_{12}(1)(1-H)}{\chi R_1(1)} + 2\chi(1-H)R_1(1) \right) \times \\
& \times \exp\left(- \frac{\chi z}{2(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)} \right) + \frac{T_0\text{Pev}R_1(1)}{\chi} (2R_1(1) + R_1^3(1)) \times \\
& \times \exp\left(\frac{z}{2\text{Pev}R_1(1)} + \frac{2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z}{8\chi\text{Pev}R_1(1)} \right) \text{erfc}\left(\frac{1}{2\chi} \sqrt{\text{Fo} - \frac{z}{2\text{Pev}R_1(1)}} + \right. \\
& \left. + \frac{\chi z}{\sqrt{2\text{Pev}R_1(1)}\sqrt{2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z}} \right) - \\
& - 2\text{Pev}R_1(1)R_2(1)T_0 \left[\text{erfc}\left(\frac{\chi z}{2(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)} \right) - \right. \\
& - \exp\left(\frac{2\chi^2\text{Fo}(2\text{Pev}R_1(1) - 1)}{\text{Pev}R_1(1)} \right) \text{erfc}\left(\frac{\chi z}{(2\text{Pev}R_1(1)\text{Fo} - z)} + \right. \\
& \left. \left. + \text{erfc}\left(2\chi \sqrt{\text{Fo} - \frac{z}{2\text{Pev}R_1(1)}} \right) \right) \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Функция $F(z, \text{Fo})$ определена с точностью до константы $C_1(\text{Fo}, z)$, которая в пространстве изображений определяется выражением (Г.3.45). В пространстве оригиналов выражение для $C_1(\text{Fo}, z)$ запишется в форме

$$\begin{aligned}
C_1 = & \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \left[\frac{\Lambda(1-H)}{\chi} \left(\frac{1}{8} + 2\text{Pev}(R_1^3(1) - R_3(1)) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\Lambda\text{Pev}(1-H)R_1(r)}{\chi} \left(\frac{31}{8} - \chi \right) \right] - \frac{2\Lambda}{\chi} (1-H)\text{Pev}R_2(r) \times
\end{aligned} \tag{Г.3.50}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(1 - \exp(4\chi^2 \text{Fo}) \operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}})\right) + \frac{T_0(8R_3(1)\text{Pev} + \chi)}{4\text{Pev}R_1(1)} + \frac{\Lambda(1 - \text{H})}{2} + \\ & + \frac{2\Lambda(1 - \text{H})}{\chi} R_3(1)\text{Pev} + \frac{2\chi R_{12}(1)}{(R_1(1))^3 \text{Pev} \sqrt{\pi\text{Fo}}^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Выражения (Г.3.47), (Г.3.48) решают поставленную задачу в нулевом и первом приближении. Следует отметить, что полученные решения также требуют построения погранслойных функций в начальный момент времени и на границе при $z = 0$.

Г.3.4. Построение погранслойной функции в общей задаче

В задаче были модифицированы два условия для выполнения решения

$$\left\langle T^{(1)} \right\rangle_{z=0} = 0, \quad \left\langle T^{(1)} \right\rangle_{\text{Fo}=0} = 0. \quad (\text{Г.3.51})$$

При этом условия $T^{(1)}|_{z=0} = 0$, $T^{(1)}|_{\text{Fo}=0} = 0$ нарушаются ($\text{Fo} > 0$)

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda(2R_3(1) - R_2(r))}{R_1(1)\sqrt{\pi\text{Fo}}} T_0 + \frac{R_2(r) - 2R_3(1)}{R_1(1)} Q_1(1,0,\text{Fo}) - \\ & - Q_2(r,0,\text{Fo}) + 2Q_3(1,0,\text{Fo}) \neq 0, \end{aligned} \quad (\text{Г.3.52})$$

$$\begin{aligned} T^{(1)}|_{\text{Fo}=0} &= \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev}(1 - \text{H}) \left(\frac{2r^2 - 1}{4} R_1(1) - R_2(r) + 2R_3(1) \right) + \\ & + \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{2r^2 - 1}{4} Q_1(1, z, 0) - Q_2(r, z, 0) + 2Q_3(1, z, 0) \right) \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{Г.3.53})$$

Для уточнения решения в первом асимптотическом приближении в области малых параметров z и Fo возникает необходимость построения погранслойных функций. Как и в предыдущих случаях, погранслойная часть представляется в виде суммы

$$\Pi_j = \Pi_{zj} + \Pi_{\text{Foj}}, \quad (\text{Г.3.54})$$

где $\Pi_z = \Pi(r, \zeta, Fo)$, $\Pi_{Fo} = \Pi(r, z, \tau)$ – погранслойные функции разложения по асимптотическому параметру, $\zeta = z/\varepsilon$, $\tau = Fo/\varepsilon$ – растянутые переменные.

Подставив (3.6.36) в (Г.2.1) – (Г.2.7), получим

$$\left[\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \right] + \left[\frac{\partial \Pi_{z1}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_{z1}}{\partial r} \right) \right] + \left[\frac{\partial \Pi_{Fo1}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_{Fo1}}{\partial r} \right) \right] = 0, \quad (\text{Г.3.55})$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \text{Pev} R(r) \left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) \right] + \left[\frac{\partial \Pi_z}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) + \text{Pev} R(r) \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial \Pi_{Fo}}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_{Fo}}{\partial r} \right) + \text{Pev} R(r) \frac{\partial \Pi_{Fo}}{\partial z} \right] = 0, \quad (\text{Г.3.56})$$

$$(T + \Pi_z + \Pi_{Fo})|_{r=1} = (T_1 + \Pi_{z1} + \Pi_{Fo1})|_{r=1}, \quad (\text{Г.3.57})$$

$$\frac{\partial (T + \Pi_z + \Pi_{Fo})}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial (T_1 + \Pi_{z1} + \Pi_{Fo1})}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Г.3.58})$$

$$(T_1 + \Pi_{z1} + \Pi_{Fo1})|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Г.3.59})$$

$$(T + \Pi_z + \Pi_{Fo})|_{Fo=0} = 0, \quad (T_1 + \Pi_{z1} + \Pi_{Fo1})|_{Fo=0} = 0, \quad (\text{Г.3.60})$$

$$(T + \Pi_z + \Pi_{Fo})|_{z=0} = T_0(Fo). \quad (\text{Г.3.61})$$

Из (Г.2.9) – (Г.2.15) следует, что погранслойные функции являются решениями следующих задач в окрестности $z = 0$

$$\frac{\partial \Pi_{z1}}{\partial Fo} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_{z1}}{\partial r} \right), \quad (\text{Г.3.62})$$

$$\frac{\partial \Pi_z}{\partial Fo} = \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) - \frac{\text{Pev} R(r)}{\varepsilon} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \zeta}, \quad (\text{Г.3.63})$$

$$\Pi_z|_{r=1} = \Pi_{z1}|_{r=1}, \quad (\text{Г.3.64})$$

$$\left. \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial \Pi_{z1}}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (\text{Г.3.65})$$

$$\Pi_{z1} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Г.3.66})$$

$$\Pi_z \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Pi_{z1} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Г.3.67})$$

$$\Pi_z \Big|_{\zeta=0} = -T \Big|_{z=0}, \quad \Pi_{z1} \Big|_{\zeta=0} = -T_1 \Big|_{z=0} \quad (\text{Г.3.68})$$

и окрестности $\text{Fo} = 0$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}1}}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}1}}{\partial r} \right), \quad (\text{Г.3.69})$$

$$\frac{\partial \Pi_{\text{Fo}}}{\partial \tau} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}}}{\partial r} \right) - \varepsilon \text{Pe} \nu R(r) \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}}}{\partial z}, \quad (\text{Г.3.70})$$

$$\Pi_{\text{Fo}} \Big|_{r=1} = \Pi_{\text{Fo}1} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Г.3.71})$$

$$\left. \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}}}{\partial r} \right|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}1}}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (\text{Г.3.72})$$

$$\Pi_{\text{Fo}} \Big|_{\tau=0} = -T \Big|_{\text{Fo}=0}, \quad \Pi_{\text{Fo}1} \Big|_{\tau=0} = -T_1 \Big|_{\text{Fo}=0}, \quad (\text{Г.3.73})$$

$$\Pi_{\text{Fo}} \Big|_{z=0} = 0, \quad (\text{Г.3.74})$$

$$\Pi_{\text{Fo}1} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Г.3.75})$$

Решим каждую задачу в отдельности. Для этого представим погранслойные функции Π_{lj} , где $l = z, \text{Fo}$, в виде асимптотической формулы $\Pi_{lj} = \Pi_{lj}^{(0)} + \varepsilon \Pi_{lj}^{(1)}$. Нетрудно видеть, что задача для нулевых коэффициентов разложения имеет только тривиальное решение

$$\Pi_z^{(0)} = \Pi_{z1}^{(0)} = 0, \quad \Pi_{\text{Fo}}^{(0)} = \Pi_{\text{Fo}1}^{(0)} = 0. \quad (\text{Г.3.76})$$

Кроме того, погранслой во внешней области в любом приближении будет равен нулю, так как в ходе решения условия для внешней области не видоизменялись, следовательно, погрешности в малых областях Fo и z во внешней области отсутствуют, что следует также из постановки задачи. Сформулируем задачу для погранслойных функций только внутри скважины

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z^{(1)}}{\partial r} \right) - \text{Pev} R(r) \frac{\partial \Pi_z^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Pi_z^{(0)}}{\partial \text{Fo}} = 0, \quad (\text{Г.3.77})$$

$$\left. \frac{\partial \Pi_z^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \left. \frac{\partial \Pi_{z1}^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad (\text{Г.3.78})$$

$$\Pi_z^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Г.3.79})$$

$$\Pi_z^{(1)} \Big|_{\zeta=0} = -T^{(1)} \Big|_{z \rightarrow 0}. \quad (\text{Г.3.80})$$

Решение задачи (Г.3.77) – (Г.3.80) найдено методом разделения переменных

$$\Pi_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left(- \frac{\mu_n^2 \chi \zeta}{\Lambda \text{Pev} R(r)} \right) J_0(\mu_n r), \quad (\text{Г.3.81})$$

где μ_n корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. Константа C_0 равна 0, поскольку $\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{z=0} = 0$, а остальные C_n определяются выражениями

$$C_n = - \frac{2}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^1 T^{(1)} \Big|_{z \rightarrow 0} J_0(\mu_n r) r dr. \quad (\text{Г.3.82})$$

Подставляя (Г.3.82) в (Г.3.81), получим

$$\Pi_z^{(1)} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n)} \exp \left(- \mu_n^2 \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda \text{Pev}} z \right) \int_0^1 r T^{(1)} \Big|_{z \rightarrow 0} J_0(\mu_n r) dr. \quad (\text{Г.3.83})$$

Согласно рассуждениям, приведенным выше, сформулируем задачу для погранслоя в окрестности $\text{Fo} = 0$ только для скважины, так как во внешней области погранслоем отсутствует

$$\frac{\partial \Pi_{\text{Fo}}^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}}^{(1)}}{\partial r} \right) = \text{Pev} R(r) \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (\text{Г.3.84})$$

$$\left. \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}}^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \left. \frac{\partial \Pi_{\text{Fo}1}^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad (\text{Г.3.85})$$

$$\Pi_{\text{Fo}}^{(1)} \Big|_{\tau=0} = -T^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0}, \quad (\text{Г.3.86})$$

$$\Pi_{F_0}^{(1)} \Big|_{z=0} = 0. \quad (\text{Г.3.87})$$

Соответствующая задача, также решена методом разделения переменных

$$\Pi_{F_0}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{\mu_n^2 \chi \tau}{\Lambda}\right) J_0(\mu_n r), \quad (\text{Г.3.88})$$

где μ_n корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. Константа C_0 равна 0, поскольку $\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{F_0=0} = 0$. Константы C_n определяются выражениями

$$C_n = -\frac{2}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^1 T^{(1)} \Big|_{F_0 \rightarrow 0} J_0(\mu_n r) dr. \quad (\text{Г.3.89})$$

Подставляя (Г.3.89) в (Г.3.88), получим

$$\Pi_{F_0}^{(1)} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n)} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} F_0\right) \int_0^1 r T^{(1)} \Big|_{F_0 \rightarrow 0} J_0(\mu_n r) dr. \quad (\text{Г.3.90})$$

Выражения для $T^{(1)} \Big|_{z \rightarrow 0}$, $T^{(1)} \Big|_{F_0 \rightarrow 0}$ заданы формулами (Г.3.52) и (Г.3.53)

соответственно.

**ПРИЛОЖЕНИЕ Д. Произвольный профиль скорости
и постоянный вертикальный градиент температуры**

Д.1. Математическая постановка задачи

Математическую постановку этой задачи получим из (Г.1.1) – (Г.1.7) с учетом условия $\partial\theta_1/\partial z_d = \partial\theta/\partial z_d = -\Gamma$

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \lambda_{1r} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial\theta_1}{\partial r_d} \right), \quad r_d > r_0, \quad t > 0, \quad (\text{Д.1.1})$$

$$\rho c \frac{\partial\theta}{\partial t} = \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial\theta}{\partial r_d} \right) + \rho c v_0 R(r_d) \Gamma - \eta c \rho^2 g v_0 R(r_d) + q_d, \quad r_d < r_0, \quad (\text{Д.1.2})$$

$$t > 0,$$

$$\theta|_{r_d=r_0} = \theta_1|_{r_d=r_0}, \quad (\text{Д.1.3})$$

$$\lambda_r \frac{\partial\theta}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0} = \lambda_{1r} \frac{\partial\theta_1}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0}, \quad (\text{Д.1.4})$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_1|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad (\text{Д.1.5})$$

$$\theta_1|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \quad (\text{Д.1.6})$$

Обезразмеривание задачи (Д.1.1)–(Д.1.6) произведено с использованием соотношений (2.1.1). В безразмерную постановку задачи формально введен параметр асимптотического разложения ε

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad (\text{Д.1.7})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} = \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \text{Pev}(1 - \text{H})R(r) + Q(r, \text{Fo}), \quad r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad (\text{Д.1.8})$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.9})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.10})$$

$$T|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Д.1.11})$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Д.1.12})$$

Аналогично предыдущим задачам решение задачи (Д.1.7)–(Д.1.12) будем искать в виде асимптотического ряда (2.2.23) по параметру ε . Подставляя (2.2.23) в (Д.1.7)–(Д.1.12), получим

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (\text{Д.1.13})$$

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) - R(r) \text{Pev}(1 - \text{H}) - \right. \\ \left. - Q(r, \text{Fo}) \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (\text{Д.1.14})$$

$$T^{(0)}|_{r=1} - T_1^{(0)}|_{r=1} + \varepsilon (T^{(1)}|_{r=1} - T_1^{(1)}|_{r=1}) + \dots = 0, \quad (\text{Д.1.15})$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) \dots = 0, \quad (\text{Д.1.16})$$

$$T^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon T^{(1)}|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \quad T_1^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon T_1^{(1)}|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \quad (\text{Д.1.17})$$

$$T_1^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon T_1^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} + \dots = 0. \quad (\text{Д.1.18})$$

В пункте Д.1.1 приведена постановка основной задачи в частном случае постоянных вертикальных градиентов в нулевом приближении, в пункте Д.1.2 – для первого коэффициента разложения.

Д.1.1. Постановка задачи в нулевом приближении

Формально полагая $\varepsilon = 0$ в (Д.1.14), получим

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{Д.1.19})$$

Интегрируя (Д.1.19) получим

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = \frac{C}{r}. \quad (\text{Д.1.20})$$

В силу требования ограниченности решения при $r = 0$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = 0. \quad (\text{Д.1.21})$$

Аналогично случаю, рассмотренному в Приложении Б, заключаем

$$T^{(0)} = T^{(0)}(\text{Fo}). \quad (\text{Д.1.22})$$

Полагая $\varepsilon = 0$ в (Д.1.14), получим уравнение для $T_1^{(0)}$

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{Д.1.23})$$

С учетом (Д.1.19) из (Д.1.14) получим зацепленное уравнение

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - R(r) \text{Pev}(1 - \text{H}) - Q(r, \text{Fo}). \quad (\text{Д.1.24})$$

Для расщепления уравнения (Д.1.24) представим его в виде

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = A_1(\text{Fo}) - R(r) A_2(\text{Fo}) - Q(r, \text{Fo}), \quad (\text{Д.1.25})$$

где

$$A_1(\text{Fo}) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}}, \quad A_2 = \text{Pev}(1 - \text{H}). \quad (\text{Д.1.26})$$

Интегрируя (Д.1.25), получим выражение для радиальной производной первого коэффициента асимптотического разложения

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r A_1(\text{Fo})}{2} - \frac{A_2 R_1(r)}{r} - \frac{Q_1(r, \text{Fo})}{r} \right). \quad (\text{Д.1.27})$$

Воспользовавшись условием (Д.1.16), из (Д.1.27) имеем

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{A_1(\text{Fo})}{2} - A_2 R_1(1) - Q_1(1, \text{Fo}) \right) = \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.28})$$

где $R_1(r) = \int_0^r r' R(r') dr'$, $Q_1(r, \text{Fo}) = \int_0^r r' Q(r', \text{Fo}) dr'$. Подставив (Д.1.26) в (Д.1.28),

найдем

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - 2 \text{Pev}(1 - \text{H}) R_1(1) - 2 Q_1(1, \text{Fo}) = 2 \chi \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (\text{Д.1.29})$$

Запишем окончательную постановку задачи в нулевом приближении

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, \quad (\text{Д.1.30})$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - 2\text{Pev}(1 - \text{H})R_1(1) - 2Q_1(1, \text{Fo}) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, \quad (\text{Д.1.31})$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.32})$$

$$T^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_1^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Д.1.33})$$

$$T_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Д.1.34})$$

Задача (Д.1.30)–(Д.1.34) также отличается наличием следа производной решения для внешней области в уравнении (Д.1.31). Решение этой задачи приведено в разделе Д.2.

Д.1.2. Задача для первых коэффициентов разложения

Уравнения (Д.1.13)–(Д.1.14) для первого коэффициента разложения представляются в следующем виде:

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, \quad (\text{Д.1.35})$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r < 1, \text{Fo} > 0. \quad (\text{Д.1.36})$$

Аналогично предыдущим задачам осуществим «расщепление» уравнения (Д.1.36). Из (Д.1.27) найдем

$$T^{(1)} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} A_1(\text{Fo}) - A_2 R_2(r) - Q_2(r, \text{Fo}) \right) + B(\text{Fo}). \quad (\text{Д.1.37})$$

Подставив выражение (Д.1.37) в (Д.1.36) и проинтегрировав полученное уравнение, определим

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{r^3}{16} \frac{\partial A_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial Q_3(r, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right) + \frac{\Lambda r}{2\chi} \frac{\partial B(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}}, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, \quad (\text{Д.1.38})$$

где

$$R_2(r) = \int_0^r (r')^{-1} R_1(r') dr', \quad Q_2(r, \text{Fo}) = \int_0^r (r')^{-1} Q_1(r', \text{Fo}) dr',$$

$$R_3(r) = r^{-1} \int_0^r r' R_2(r') dr', \quad Q_3(r, \text{Fo}) = r^{-1} \int_0^r r' Q_2(r', \text{Fo}) dr'.$$

Воспользовавшись условием, следующим из (Д.1.16), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} &= \frac{\Lambda^2}{\chi^2} \left(\frac{1}{16} \frac{\partial A_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial Q_3(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right) + \\ &+ \frac{\Lambda}{2\chi} \frac{\partial B(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}. \end{aligned} \quad (\text{Д.1.39})$$

Отсюда следует уравнение

$$\frac{\partial B(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \text{Fo}^2} - \frac{2\Lambda}{\chi} \frac{\partial Q_3(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}.$$

для определения коэффициента $B(\text{Fo})$. Уравнение для первого коэффициента разложения имеет вид

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{1-2r^2}{8} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial [Q_2(r, \text{Fo}) - 2Q_3(1, \text{Fo})]}{\partial \text{Fo}} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.40})$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0.$$

Математическая постановка задачи для первых коэффициентов разложения включает также уравнение и условия

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, \quad (\text{Д.1.41})$$

$$T^{(1)} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.42})$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Д.1.43})$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0. \quad (\text{Д.1.44})$$

Решение рассматриваемой задачи отыскивается в виде (Д.1.37). Выполнение условия $T^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0$ требует построения погранслоного ряда, поэтому на первом этапе решения без учета погранслоя оно должно быть заменено среднеинтегральным условием.

Д.1.3. Дополнительное интегральное условие

С учетом того, что нулевой коэффициент разложения и радиальная производная первого коэффициента удовлетворяют задачам (Д.1.30)–(Д.1.34) и (Д.1.40)–(Д.1.44) соответственно, из (Д.1.7)–(Д.1.12) получим

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial F_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{Д.1.45})$$

$$\varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial F_0} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial F_0}, \quad (\text{Д.1.46})$$

$$\Theta \Big|_{r=1} = \Theta_1 \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.47})$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \varepsilon \frac{\partial (\Theta_1 + \varepsilon T_1^{(1)})}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.48})$$

$$(\Theta + \varepsilon T^{(1)}) \Big|_{F_0=0} = 0, \quad \Theta_1 \Big|_{F_0=0} = 0, \quad (\text{Д.1.49})$$

$$\Theta_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Д.1.50})$$

Усредним задачу (Д.1.45)–(Д.1.50), проинтегрировав по r в пределах от 0 до 1

$$\langle \Theta \rangle = 2 \int_0^1 \Theta r dr.$$

Для осреднения уравнения (Д.1.46) использовано следующее соотношение:

$$2 \int_0^1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) r dr = 2 \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \Big|_{r=1}.$$

Осредненная задача для остаточного члена имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial F_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{Д.1.51})$$

$$\frac{\partial \langle \Theta^{(1)} \rangle}{\partial F_0} - 2\chi \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\varepsilon \left(\frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial F_0} - 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right), \quad (\text{Д.1.52})$$

$$\langle \Theta \rangle \Big|_{r=1} = \Theta_1 \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.53})$$

$$\left(\langle \Theta \rangle + \varepsilon \langle T^{(1)} \rangle\right)_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Д.1.54})$$

$$\Theta_1|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Д.1.55})$$

Она имеет тривиальное решение, когда выполнены условия

$$\frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (\text{Д.1.56})$$

и

$$\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = 0. \quad (\text{Д.1.57})$$

В справедливости (Д.1.56) легко убедиться, усреднив (Д.1.36) с учетом (Д.1.10). Поскольку (Д.1.56) выполняется тождественно, то выражение (Д.1.57) является условием тривиального решения осредненной задачи для остаточного члена. Это условие следует добавить к задаче (Д.1.40)–(Д.1.44) вместо $T^{(1)}|_{\text{Fo}=0} = 0$, следующего из (Д.1.11); при этом задача для первого коэффициента разложения имеет единственное решение.

Таким образом, математическая постановка задачи для первого коэффициента разложения представится как

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad (\text{Д.1.58})$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{1 - 2r^2}{8} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial [Q_2(r, \text{Fo}) - 2Q_3(1, \text{Fo})]}{\partial \text{Fo}} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.59})$$

$$r < 1, \quad \text{Fo} > 0,$$

$$T^{(1)}|_{r=1} = T_1^{(1)}|_{r=1}, \quad (\text{Д.1.60})$$

$$T_1^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Д.1.61})$$

$$\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = 0. \quad (\text{Д.1.62})$$

Отметим, что задача для первого коэффициента разложения содержит нелокальное граничное условие (Д.1.61), что позволяет также отнести ее к неклассическим.

Д.2. Определение аналитических зависимостей

Д.2.1. Решение задачи для произвольного аксиально-симметричного профиля скорости в нулевом приближении

С помощью преобразования Лапласа – Карсона (2.4.1) запишем задачу (Д.1.30)–(Д.1.34) в пространстве изображений

$$pT_1^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad (\text{Д.2.1})$$

$$pT^{(0)u} - 2\text{Re}v(1 - \text{H})R_1(1) - 2Q_1^u(1, p) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \quad (\text{Д.2.2})$$

$$T^{(0)u} = T_1^{(0)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.2.3})$$

$$T_1^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Д.2.4})$$

Решение уравнения (Д.2.1) выражается через функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента

$$T_1^{(0)u} = C_1 I_0(r\sqrt{p}) + C_2 K_0(r\sqrt{p}). \quad (\text{Д.2.5})$$

Из условия (Д.2.4) следует, что постоянная C_1 равна нулю, поэтому получим

$$T_1^{(0)u} = C_2 K_0(r\sqrt{p}). \quad (\text{Д.2.6})$$

Для определения C_2 воспользуемся условием (Д.2.3). Подставив полученное выражение в (Д.2.6), представим решение для пласта $T_1^{(0)}$

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u} \quad (\text{Д.2.7})$$

и выражение для его производной

$$\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} = -\sqrt{p} \frac{K_1(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}, \quad (\text{Д.2.8})$$

$$\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\sqrt{p} \frac{K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u} = -\sqrt{p} k T^{(0)u}, \quad (\text{Д.2.9})$$

где $k = k(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$. С учетом (Д.2.9) уравнение (Д.2.2) для определения $T^{(0)u}$ можно представить как

$$pT^{(0)u} - 2\text{Pev}(1 - \text{H})R_1(1) - 2Q_1^u(1, p) = -2\chi k \sqrt{p} T^{(0)u}, \quad r < 1. \quad (\text{Д.2.10})$$

Решение уравнения (Д.2.10) запишется в форме

$$T^{(0)u} = 2 \frac{\text{Pev}(1 - \text{H})R_1(1) + Q_1^u(1, p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}}, \quad r < 1. \quad (\text{Д.2.11})$$

Подставив (4.3.11) в (4.3.7), получим решение для внешней области

$$T_1^{(0)u} = 2 \frac{K_0(r\sqrt{p}) \text{Pev}(1 - \text{H})R_1(1) + Q_1^u(1, p)}{K_0(\sqrt{p}) (p + 2\chi k \sqrt{p})}, \quad r > 1. \quad (\text{Д.2.12})$$

Выражения (Д.2.11) и (Д.2.12) представляют решение задачи в нулевом приближении в пространстве изображений.

Д.2.2. Построение решения для первого коэффициента разложения

В пространстве изображений Лапласа – Карсона задача для первых коэффициентов асимптотического разложения примет вид

$$pT_1^{(1)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad (\text{Д.2.13})$$

$$p(T^{(1)u} - T^{(1)}(\text{Fo} = 0)) + \Lambda \frac{1 - 2r^2}{8\chi} \left[p^2 T^{(0)u} - p \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}}(\text{Fo} = 0) \right] + \quad (\text{Д.2.14})$$

$$+ \Lambda \frac{p}{\chi} [Q_2^u(r, p) - 2Q_3^u(1, p) - Q_2(r, 0) + 2Q_3(1, 0)] = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1,$$

$$T^{(1)u} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.2.15})$$

$$T_1^{(1)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Д.2.16})$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle T_1^{(1)u} \rangle = 0. \quad (\text{Д.2.17})$$

По аналогии с предыдущими случаями решение для пласта и его производной на границе $r = 1$ представляется в форме

$$T_1^{(1)u} = T^{(1)u}|_{r=1} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}, \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\sqrt{pk}T^{(1)u}|_{r=1}. \quad (\text{Д.2.18})$$

Скорость изменения температуры в начальный момент времени $\partial T^{(0)}/\partial \text{Fo}(\text{Fo}=0)$ определяется из (Д.2.11)

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} \Big|_{\text{Fo}=0} = \lim_{p \rightarrow \infty} 2p \frac{\text{Pev}(1-\text{H})R_1(1) + Q_1^u(1, p)}{p + 2\chi k\sqrt{p}} = 2(\text{Pev}(1-\text{H})R_1(1) + Q_1(1,0)),$$

$$T^{(1)}(\text{Fo}=0) = \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \text{Pev}(1-\text{H}) \left[\frac{r^2}{2} R_1(1) - R_2(r) \right] + \frac{r^2}{2} Q_1(1,0) - Q_2(r,0) \right\} + B_5(0),$$

поскольку согласно теореме о соответствии $\lim_{p \rightarrow \infty} Q_1^u(1, p) = Q_1(1,0)$ и

$\lim_{p \rightarrow \infty} Q_2^u(r, p) = Q_2(1,0)$. Подставляя (Д.2.18) в (Д.2.14), получаем уравнение

для нахождения $T^{(1)u}$

$$p(T^{(1)u} - T^{(1)}(\text{Fo}=0)) + \Lambda \frac{1-2r^2}{8\chi} [p^2 T^{(0)u} - 2p(\text{Pev}(1-\text{H})R_1(1) + Q_1(1,0))] + \quad (\text{Д.2.19})$$

$$+ \Lambda \frac{p}{\chi} [Q_2^u(r, p) - 2Q_3^u(1, p) - Q_2(r,0) + 2Q_3(1,0)] = -2\chi k\sqrt{p}T^{(1)u}|_{r=1}.$$

Из (Д.1.37) найдем

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} pT^{(0)u} - R_2(r)\text{Pev}(1-\text{H}) - Q_2^u(r, p) \right) + B^u(p). \quad (\text{Д.2.20})$$

Подставив (Д.2.20) в (Д.2.19), определим значение коэффициента $B^u(p)$ в пространстве изображений

$$B^u(p) = \frac{\sqrt{p}B(0)}{\sqrt{p} + 2\chi k} + \frac{\Lambda \text{Pev}(1-\text{H})}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p}R_1(1)}{4\chi} + 2kR_2(1) \right) + \quad (\text{Д.2.21})$$

$$+ \frac{\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p}Q_1(1,0)}{4\chi} + 2kQ_2^u(1, p) \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\Lambda \frac{R_1(1)\text{Pev}(1-H) + Q_1(1,p)}{(\sqrt{p} + 2\chi k)^2} \left(\frac{p}{4\chi} + k\sqrt{p} \right) + \\
& + \frac{2\Lambda}{\chi} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + 2\chi k} [Q_3^u(1,p) - Q_3(1,0)].
\end{aligned}$$

При отсутствии источников из полученного соотношения следует

$$\begin{aligned}
B^u(p) = & \frac{\sqrt{p}B(0)}{\sqrt{p} + 2\chi k} + \frac{\Lambda\text{Pev}(1-H)}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p}R_1(1)}{4\chi} + 2kR_2(1) \right) - \\
& - \frac{\Lambda R_1(1)\text{Pev}(1-H)}{(\sqrt{p} + 2\chi k)^2} \left(\frac{p}{4\chi} + k\sqrt{p} \right).
\end{aligned}$$

Константу $B(0)$, входящую в выражение (Д.2.21), найдем из условия (Д.1.62)

$$B(0) = \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev}(1-H) \left(2R_3(1) - \frac{R_1(1)}{4} \right) - \frac{\Lambda}{4\chi} Q_1(1,0) + \frac{2\Lambda}{\chi} Q_3(1,0). \quad (\text{Д.2.22})$$

Если источников нет $Q = 0$, то оно представляется как

$$B(0) = \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev}(1-H) \left(2R_3(1) - \frac{R_1(1)}{4} \right).$$

С учетом (Д.2.22) выражение (Д.2.21) примет вид

$$\begin{aligned}
B^u(p) = & \frac{2\Lambda\text{Pev}(1-H)}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p}}{\chi} R_3(1) + kR_2(1) \right) + \\
& + \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(kQ_2^u(1,p) + \frac{\sqrt{p}}{\chi} Q_3^u(1,p) \right) - \\
& - \Lambda \frac{R_1(1)\text{Pev}(1-H) + Q_1(1,p)}{(\sqrt{p} + 2\chi k)^2} \left(\frac{p}{4\chi} + k\sqrt{p} \right)
\end{aligned} \quad (\text{Д.2.23})$$

или

$$\begin{aligned}
B^u(p) = & \frac{2\Lambda\text{Pev}(1-H)}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p}R_3(1)}{\chi} + kR_2(1) \right) + \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \times \\
& \times \left(\frac{\sqrt{p}}{\chi} Q_3(1,p) + kQ_2^u(1,p) \right) - \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\sqrt{p} + 4\chi k}{\sqrt{p} + 2\chi k} pT^{(0)u}.
\end{aligned} \quad (\text{Д.2.24})$$

В отсутствии источников выражение для искомого коэффициента имеет вид

$$B^u(p) = \Lambda \sqrt{p} T^{(0)u} \left(\frac{\sqrt{p} R_3(1)}{\chi R_1(1)} + k \frac{R_2(1)}{R_1(1)} - \frac{1}{8\chi} \frac{p + 4\chi k \sqrt{p}}{\sqrt{p} + 2\chi k} \right). \quad (\text{Д.2.25})$$

Выражения для первого коэффициента разложения представляются как

$$\begin{aligned} T^{(1)u} = & \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{r^2}{4} p T^{(0)} - \text{Pev}(1 - \text{H}) R_2(r) - Q_2^u(r, p) \right] + \\ & + \frac{2\Lambda \text{Pev}(1 - \text{H})}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p}}{\chi} R_3(1) + k R_2(1) \right) + \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \times \\ & \times \left(\frac{\sqrt{p}}{\chi} Q_3(1, p) + k Q_2^u(1, p) \right) - \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\sqrt{p} + 4\chi k}{\sqrt{p} + 2\chi k} p T^{(0)u}, \end{aligned} \quad (\text{Д.2.26})$$

$$\begin{aligned} T_1^{(1)u} = & \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[\frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{p}{4} T^{(0)} - \text{Pev}(1 - \text{H}) R_2(1) \right) + \right. \\ & + \frac{2\Lambda \text{Pev}(1 - \text{H})}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(\frac{\sqrt{p} R_3(1)}{\chi} + k R_2(1) \right) + \frac{2\Lambda}{\sqrt{p} + 2\chi k} \times \\ & \left. \times \left(\frac{\sqrt{p} Q_3(1, p)}{\chi} + k Q_2^u(1, p) \right) - \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\sqrt{p} + 4\chi k}{\sqrt{p} + 2\chi k} p T^{(0)u} \right] \end{aligned} \quad (\text{Д.2.27})$$

ИЛИ В ОТСУТСТВИИ ИСТОЧНИКОВ

$$\begin{aligned} T^{(1)u} = & \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} p T^{(0)} - \text{Pev}(1 - \text{H}) R_2(r) \right) + \\ & + \Lambda \sqrt{p} T^{(0)u} \left(\frac{\sqrt{p} R_3(1)}{\chi R_1(1)} + k \frac{R_2(1)}{R_1(1)} - \frac{1}{8\chi} \frac{p + 4\chi k \sqrt{p}}{\sqrt{p} + 2\chi k} \right), \end{aligned} \quad (\text{Д.2.28})$$

$$\begin{aligned} T_1^{(1)u} = & \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[\frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{p}{4} T^{(0)} - \text{Pev}(1 - \text{H}) R_2(1) \right) + \right. \\ & \left. + \Lambda \sqrt{p} T^{(0)u} \left(\frac{\sqrt{p} R_3(1)}{\chi R_1(1)} + k \frac{R_2(1)}{R_1(1)} - \frac{1}{8\chi} \frac{p + 4\chi k \sqrt{p}}{\sqrt{p} + 2\chi k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Д.2.29})$$

Для радиального профиля температуры получим с использованием выражения для первого коэффициента разложения с источниками тепла

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{r^2 - 1}{4} pT^{(0)} - \text{Pev}(1 - \text{H})(R_2(r) - R_2(1)) - \right. \\ \left. - Q_2^u(r, p) + Q_2^u(1, p) \right] \quad (\text{Д.2.30})$$

и без

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{r^2 - 1}{4} pT^{(0)} - \text{Pev}(1 - \text{H})(R_2(r) - R_2(1)) \right]. \quad (\text{Д.2.31})$$

Из (Д.2.30) следует стационарный профиль температуры при наличии источников

$$T^{(1)} - T^{(1)}(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} [\text{Pev}(1 - \text{H})(R_2(1) - R_2(r)) + \\ + Q_2(1, \infty) - Q_2(r, \infty)] \quad (\text{Д.2.32})$$

и их отсутствии

$$T^{(1)} - T^{(1)}(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} \text{Pev}(1 - \text{H})(R_2(1) - R_2(r)). \quad (\text{Д.2.33})$$

При $R(r)=1$ полученные выражения совпадают с соответствующими решениями задачи, представленными в Приложении Ж, для случая выровненного профиля скорости.

Д.2.3. Погранслойная задача

Покажем, что построенное точное в среднем решение содержит погранслой при $\text{Fo} = 0$. Действительно, значения первого приближения в этой точке отличаются от нуля и зависят от радиальной координаты

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{r^2}{2} (\text{Pev}(1 - \text{H})R_1(1) + Q_1(1,0)) - \text{Pev}(1 - \text{H})R_2(r) - Q_2(r,0) \right] + \text{const} \\ T^{(1)}|_{\text{Fo}=0} = \frac{\Lambda \text{Pev}(1 - \text{H})}{\chi} \left[R_1(1) \frac{r^2 - 1}{2} + 2R_3(1) - R_2(1) \right] \neq 0,$$

то есть, построенное выше решение не удовлетворяет условию $T^{(1)}|_{F_0=0}=0$.

Для устранения этого недостатка построим погранслоное решение.

Представим решение задачи (Д.2.1)–(Д.2.6) как сумму

$$\widehat{T}_j = T_j + \Pi_j, \quad (\text{Д.2.34})$$

где $T = T(r, F_0)$ – регулярная часть решения, соответствующая найденному выше первому приближению; $\Pi = \Pi(r, \tau')$ – погранслоная часть разложения по асимптотическому параметру, $\tau' = F_0/\varepsilon$ – растянутая переменная

Подставив (Д.2.34) в (Д.2.1)–(Д.2.6) получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial F_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{Д.2.35})$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial F_0} - \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \text{Pev}(1 - H)R(r) \right] + \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \tau'} - \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) \right] = 0, \quad (\text{Д.2.36})$$

$$(T + \Pi)|_{r=1} = (T_1 + \Pi_1)|_{r=1}, \quad (\text{Д.2.37})$$

$$\frac{\partial (T + \Pi)}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial (T_1 + \Pi_1)}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.2.38})$$

$$(T_1 + \Pi_1)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Д.2.39})$$

$$(T + \Pi)|_{F_0=0} = 0, \quad (T_1 + \Pi_1)|_{F_0=0} = 0. \quad (\text{Д.2.40})$$

Погранслоные функции являются решением следующей задачи:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau'} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} \right), \quad (\text{Д.2.41})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau'} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right), \quad (\text{Д.2.42})$$

$$\Pi|_{r=1} = \Pi_1|_{r=1}, \quad (\text{Д.2.43})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.2.44})$$

$$\Pi \Big|_{\tau'=0} = -T \Big|_{F_0=0}, \quad \Pi_1 \Big|_{\tau'=0} = -T_1 \Big|_{F_0=0}, \quad (\text{Д.2.45})$$

$$\Pi_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Д.2.46})$$

Далее представим погранслои Π_j в виде асимптотической формулы $\Pi_j = \Pi_j^{(0)} + \varepsilon \Pi_j^{(1)} + \dots$. Задача для нулевых коэффициентов разложения имеет только тривиальное решение

$$\Pi^{(0)} = \Pi_1^{(0)} = 0. \quad (\text{Д.2.47})$$

Задача для первых коэффициентов разложения примет следующий вид:

$$\frac{\partial \Pi_1^{(2)}}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial r} \right), \quad (\text{Д.2.48})$$

$$\frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial r} \right), \quad (\text{Д.2.49})$$

$$\Pi^{(1)} \Big|_{r=1} = \Pi_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.2.50})$$

$$\frac{\partial \Pi^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Д.2.51})$$

$$\frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad (\text{Д.2.52})$$

$$\Pi \Big|_{\tau'=0} = -T \Big|_{F_0=0}, \quad \Pi_1 \Big|_{\tau'=0} = -T_1 \Big|_{F_0=0}, \quad (\text{Д.2.53})$$

$$\Pi_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Д.2.54})$$

Для простоты приведем выражение погранслоевых функций только в скважине ($r < 1$). Соответствующая задача решена методом разделения переменных

$$\Pi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{-\mu_n^2 \chi F_0}{\Lambda}\right) J_0(\mu_n r), \quad (\text{Д.2.55})$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ корни уравнения Бесселя $J_1(\mu) = 0$. Константа C_0 равна 0, поскольку $\langle T^{(1)} \rangle|_{Fo=0} = 0$. Константы C_n определяются выражениями

$$C_n = -\frac{2}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^1 T^{(1)}|_{Fo=0} J_0(\mu_n r) dr. \quad (Д.2.56)$$

Подставляя (Д.2.56) в (Д.2.55), получим

$$\Pi^{(1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n)} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{\chi}{\Lambda} Fo\right) \int_0^1 r (-T^{(1)})|_{Fo=0} J_0(\mu_n r) dr. \quad (Д.2.57)$$

Д.2.4. Переход к оригиналам

Для окончательного решения задачи необходимо осуществить переход в пространство оригиналов, который может быть осуществлен по формуле обратного преобразования Лапласа – Карсона или с помощью известных соотношений [68].

Для относительно малых времен в скважине имеем $k \sim 1$, поэтому решение в скважине при отсутствии источников в нулевом и первом приближении имеет вид

$$T^{(0)u} = 2 \frac{\text{Pev}(1-H)R_1(1)}{p + 2\chi\sqrt{p}}, \quad r < 1. \quad (Д.2.58)$$

С помощью соотношений из [67] выражение для нулевого приближения температуры представляется в форме

$$T^{(0)} = \frac{2\text{Pev}(1-H)R_1(1)}{\chi} \left\{ \sqrt{\frac{Fo}{\pi}} - \frac{1}{4\chi} [1 - \exp(4\chi^2 Fo) \text{erfc}(2\chi\sqrt{Fo})] \right\}, \quad r < 1. \quad (Д.2.59)$$

Для малых значений параметра p или больших времен имеет место следующее асимптотическое выражение k : $k = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p}) \approx \approx -\{\sqrt{p} [C + \ln(\sqrt{p}/2)]\}^{-1}$. Для нулевого приближения (Д.2.11) в этом случае получим приближенную формулу, справедливую при больших значениях параметра p

$$T^{(0)u} \approx \frac{2\text{Pev}(1-H)R_1(1)}{p - 2\chi [C + \ln(\sqrt{p}/2)]^{-1}} \approx \quad (Д.2.60)$$

$$\approx -\frac{2\text{Pev}(1-H)R_1(1)(2C-2\ln 2+\ln p)}{4\chi},$$

оригинал которой имеет вид

$$T^{(0)} \approx 2\text{Pev}(1-H)R_1(1)\frac{\ln 4\text{Fo}-C}{4\chi}, \quad r < 1, \quad (\text{Д.2.61})$$

где $C = \ln(\gamma) = 0.577$ – постоянная Эйлера.

При малых временах имеем $k \sim 1$ выражение для первого коэффициента в скважине представим в виде

$$T^{(1)u} = 2\text{Pev}(1-H)R_1(1)\frac{\Lambda}{\chi} \left[\left(\frac{r^2}{4} + \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \right) \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+2\chi} - \frac{R_2(r)}{2R_1(1)} + \right. \\ \left. + \frac{\chi}{\sqrt{p}+2\chi} \frac{R_2(1)}{R_1(1)} - \frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+2\chi} + \frac{2\chi\sqrt{p}}{(\sqrt{p}+2\chi k)^2} \right) \right], \quad r < 1. \quad (\text{Д.2.62})$$

Далее воспользуемся следующими соответствиями:

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+2\chi} \rightarrow \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}), \quad (\text{Д.2.63})$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}+2\chi} \rightarrow \frac{1}{2\chi} \left[1 - \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right], \quad (\text{Д.2.64})$$

$$\frac{\sqrt{p}}{(\sqrt{p}+2\chi)^2} \rightarrow 2\sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} - 4\chi\text{Fo}\exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}). \quad (\text{Д.2.65})$$

Окончательно получим следующее выражение для первого коэффициента разложения в пространстве оригиналов для малых времен

$$T^{(1)} = 2\text{Pev}(1-H)R_1(1)\frac{\Lambda}{\chi} \left[\left(\frac{r^2}{4} + \frac{R_3(1)}{R_1(1)} \right) \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) - \right. \\ \left. - \frac{R_2(r)}{2R_1(1)} + \frac{1}{2} \frac{R_2(1)}{R_1(1)} \left[1 - \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) - \frac{\chi}{2} \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} + \chi^2\text{Fo}\exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right]. \quad (\text{Д.2.66})$$

Для разницы температур относительно стенки для малых времен получим следующее выражение в пространстве оригиналов:

$$T^{(1)} - T^{(1)}(r=1) = 2\text{Pev}(1-H)R_1(1) \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{r^2 - 1}{4} \times \right. \\ \left. \times \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) + \frac{R_2(1) - R_2(r)}{2R_1(1)} \right]. \quad (\text{Д.2.67})$$

Выражение для первого приближения решения внутри трубы, имеет вид

$$T^1 = \frac{\text{Pev}(1-H)}{\chi} \left\{ \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} + \left(\frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r} \frac{1-2r^2}{8} - \frac{1}{4\chi} \right) \left[1 - \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r} \frac{\chi}{2} \left[\frac{1}{4\chi} + \left(2\chi\text{Fo} - \frac{1}{4\chi} \right) \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) - \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} \right] \right\}, r < 1. \quad (\text{Д.2.68})$$

Полученные на основе асимптотического метода выражения позволяют рассчитывать температурные поля в скважине для относительно малых времен.

Из (Д.2.36) с использованием выражений (Д.2.48), (Д.2.49) легко получить выражение первого коэффициента для больших значений времени

$$T^{(1)} = \frac{\text{Pev}(1-H)\Lambda}{4\chi} \left(1 - r^2 + \frac{2r^2 - 3}{8\chi\text{Fo}} \right), r < 1. \quad (\text{Д.2.69})$$

Воспользовавшись формулами (Д.2.47) и (Д.2.52) для больших времен имеем

$$T^1 = \frac{\text{Pev}(1-H)}{4\chi} \left[\ln 4\text{Fo} - C + \frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r} \left(1 - r^2 - \frac{3 - 2r^2}{8\chi\text{Fo}} \right) \right], r < 1. \quad (\text{Д.2.70})$$

Из выражения (Д.2.67), как и из (Д.2.70), следует стационарный профиль температуры в скважине

$$T^1 - T_w^1 = \frac{\text{Pev}(1-H)\Lambda}{4\chi} (1 - r^2), \quad (\text{Д.2.71})$$

где T_w^1 – температура стенки трубы. Отметим, что все развитые ранее другими исследователями модели температурных полей в скважине в принципе не позволяют определить радиальную зависимость температуры в скважине.

Выражения включают множитель в виде отношения бесселевых функций. Для построения оригиналов воспользуемся соотношением, найденным в [94]

$$\frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \rightarrow \varphi(\text{Fo}) = 1 + \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \exp(-u^2 \text{Fo}) \frac{J_0(ur)Y_0(u) - J_0(u)Y_0(ru)}{Y_0^2(u) + J_0^2(u)} \frac{du}{u}. \quad (\text{Д.2.72})$$

Преобразуем выражение для первого коэффициента в окружающей среде

$$T_1^{(0)u} = \frac{\text{Pev}(1 - \text{H})}{p + 2\chi\sqrt{p}} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}, \quad r > 1. \quad (\text{Д.2.73})$$

для относительно малых значений времени $k \approx 1$ так, чтобы можно было воспользоваться известным выражением для свертки

$$f(p)g(p)/p \rightarrow \int_0^{\text{Fo}} f(\text{Fo} - \tau)g(\tau)d\tau$$

$$T_1^{(0)u} = \text{Pev}(1 - \text{H}) \frac{1}{p} \frac{p}{p + 2\chi\sqrt{p}} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}. \quad (\text{Д.2.74})$$

С помощью соответствия

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + 2\chi} \rightarrow \exp(4\chi^2 \text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \quad (\text{Д.2.75})$$

легко найти искомый оригинал для нулевого приближения в окружающей скважину массиве горных пород

$$T_1^{(0)u} = \text{Pev}(1 - \text{H}) \int_0^{\text{Fo}} \varphi(\text{Fo} - \tau) \exp(4\chi^2 \tau) \text{erfc}(2\chi\tau) d\tau, \quad (\text{Д.2.76})$$

где функция $\varphi(\text{Fo})$ определяется выражением (Д.2.72). С учетом значения этой функции нулевое приближение температурного поля в окружающей скважину массиве $r > 1$ можно представить в виде

$$T_1^{(0)} = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\text{Fo}} \int_0^\infty \exp(-u^2(\text{Fo} - \tau)) \frac{J_0(ru)Y_0(u) - J_0(u)Y_0(ru)}{Y_0^2(u) + J_0^2(u)} \frac{du}{u} \times \right. \\ \left. \times \exp(4\chi^2 \tau) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\tau}) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{\chi} \left\{ \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} - \frac{1}{4\chi} [1 - \exp(4\chi^2 \text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}})] \right\} \right) \text{Pev}(1 - \text{H}). \quad (\text{Д.2.77})$$

Аналогично для первого коэффициента в окружающей скважину среде

$$T_1^{(1)u} = -\text{Pev}(1 - \text{H}) \Lambda \frac{1}{p} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \frac{p\sqrt{p}}{4(\sqrt{p} + 2\chi)^2} \quad (\text{Д.2.78})$$

с использованием соответствия

$$\frac{p\sqrt{p}}{(\sqrt{p} + 2\chi)^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} - 4\chi(1 + 4\chi^2 Fo)\exp(4\chi^2 Fo)\operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{Fo}) - 8\chi^2 \sqrt{\frac{Fo}{\pi}}, \quad (\text{Д.2.79})$$

являющегося следствием следующих двух:

$$\frac{p}{\sqrt{p} + 2\chi} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} - 2\chi \exp(4\chi^2 Fo)\operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{Fo}), \quad (\text{Д.2.80})$$

$$\frac{p}{(\sqrt{p} + 2\chi)^2} \rightarrow (1 + 8\chi^2 Fo)\exp(4\chi^2 Fo)\operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{Fo}) - 4\chi\sqrt{\frac{Fo}{\pi}},$$

при $r > 1$ получим

$$T_1^{(1)} = -\frac{\operatorname{Re}v(1 - \text{H})\Lambda}{4} \left(\int_0^{Fo} \varphi_1(Fo - \tau, r) \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - 4\chi(1 + 4\chi^2 \tau)\exp(4\chi^2 \tau)\operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{Fo}) - \right. \\ \left. - 8\chi^2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} d\tau + 2\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} - 4\chi Fo \exp(4\chi^2 Fo)\operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{Fo}) \right), \quad r > 1, \quad (\text{Д.2.81})$$

где

$$\varphi_1(Fo, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-u^2 Fo) \frac{J_0(ur)Y_0(u) - J_0(u)Y_0(ru)}{Y_0^2(u) + J_0^2(u)} \frac{du}{u}. \quad (\text{Д.2.82})$$

С использованием найденных нулевого и первого коэффициентов найдем выражение для первого приближения в малых временах

$$T_1^1 = \operatorname{Re}v(1 - \text{H}) \left\{ \int_0^{Fo} \varphi_1(Fo - \tau, r) \exp(4\chi^2 \tau)\operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{\tau}) \right\} \times \\ \times \frac{\Lambda}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - 4\chi(1 + 4\chi^2 \tau)\exp(4\chi^2 \tau)\operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{Fo}) - 8\chi^2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right] d\tau + \\ + \frac{1}{\chi} \left\{ \sqrt{\frac{Fo}{\pi}} - \frac{1}{4\chi} [1 - \exp(4\chi^2 Fo)\operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{Fo})] \right\} - \\ - \frac{\Lambda}{4} \left[2\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} - 4\chi Fo \exp(4\chi^2 Fo)\operatorname{erfc}(2\chi\sqrt{Fo}) \right]. \quad (\text{Д.2.83})$$

При помощи формул (2.1.1) полученные выражения для температуры в скважине в первом приближении для относительно малых (Д.2.68) и больших (Д.2.70) значений времени можно привести к размерному виду

$$\begin{aligned}
\theta = & \frac{v r_0^2 c \rho}{\lambda_{1r}} \Gamma \left(1 - \frac{\eta \rho g}{\Gamma} \right) \left\{ \sqrt{\frac{\tau \lambda_{1r}}{\pi r_0^2 c_1 \rho_1}} + \left(\frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r} \frac{D^2 - 2r_d^2}{8D^2} - \frac{c \rho}{4c_1 \rho_1} \right) \times \right. \\
& \times \left[1 - \exp \left(4 \frac{\tau \lambda_{1r} c_1 \rho_1}{r_0^2 c^2 \rho^2} \right) \times \operatorname{erfc} \left(\frac{2}{c \rho r_0} \sqrt{\tau c_1 \rho_1 \lambda_{1r}} \right) \right] + \\
& + \frac{\lambda_{1r} c_1 \rho_1}{\lambda_r 2c \rho} \left[\frac{c_1 \rho_1}{4c \rho} + \left(\frac{2\tau \lambda_{1r}}{r_0^2 c \rho} - \frac{c_1 \rho_1}{4c \rho} \right) \exp \left(4 \frac{\tau \lambda_{1r} c_1 \rho_1}{r_0^2 c^2 \rho^2} \right) \times \right. \\
& \left. \left. \times \operatorname{erfc} \left(\frac{2}{c \rho r_0} \sqrt{\tau \lambda_{1r} c_1 \rho_1} \right) - \sqrt{\frac{\tau \lambda_{1r}}{c_1 \rho_1 r_0^2 \pi}} \right] \right\} + \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad r_d < r_0, \quad \tau > 0,
\end{aligned} \tag{Д.2.84}$$

$$\begin{aligned}
\theta = & \frac{v r_0^2 c \rho}{4\lambda_{1r}} \Gamma \left(1 - \frac{\eta \rho g}{\Gamma} \right) \left\{ \ln \left(4 \frac{\tau \lambda_{1r}}{r_0^2 c_1 \rho_1} \right) - C + \right. \\
& \left. + \frac{\lambda_{1r}}{8\lambda_r} \left[1 + \frac{2r_d^2 - r_0^2}{r_0^2 c_1 \rho_1} c \rho \left(4 \frac{c_1 \rho_1}{c \rho} - \frac{r_0^2 c_1 \rho_1}{\tau \lambda_{1r}} \right) \right] \right\} + \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad r_d < r_0, \quad \tau > 0.
\end{aligned} \tag{Д.2.85}$$

Выражения (Д.2.84), (Д.2.85) представляют собой размерные расчетные формулы для температурного поля в скважине в малых и больших временах соответственно. Результаты расчетов по указанным формулам обсуждаются в разделе 3.4.

ПРИЛОЖЕНИЕ Е. Решение задачи нестационарного теплообмена модельного потока с выровненным профилем скорости

Е.1. Задача о теплообмене потока с выровненным профилем скорости

Постановка задачи для случая выровненной скорости $R(r) = 1$ следует из (Г.1.1)–(Г.1.7)

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \lambda_{1z} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2} + \lambda_{1r} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \right), \quad r_d > r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0, \quad (\text{Е.1.1})$$

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} + \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right) - \rho c v \frac{\partial \theta}{\partial z_d} + q_d, \quad r_d < r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0, \quad (\text{Е.1.2})$$

где выражение для плотности источников определяется формулой (1.2.2)

$$\theta \Big|_{r_d=r_0} = \theta_1 \Big|_{r_d=r_0}, \quad (\text{Е.1.3})$$

$$\lambda_r \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0} = \lambda_{1r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0}, \quad (\text{Е.1.4})$$

$$\theta \Big|_{t=0} = \theta_1 \Big|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad (\text{Е.1.5})$$

$$\theta_1 \Big|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad (\text{Е.1.6})$$

$$\theta \Big|_{z_d=0} = \theta_{10}(t). \quad (\text{Е.1.7})$$

Аналогично предыдущим случаям на искомое решение накладывается условие симметрии.

Используя соотношения (2.1.1), приведем задачу (Е.1.1)–(Е.1.7) к безразмерному виду

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} = v^2 \frac{\lambda_{1z}}{\lambda_{1r}} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \quad (\text{Е.1.8})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} = \chi v^2 \frac{\lambda_z}{\lambda_{1r}} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \text{Pe} v \left(\frac{\partial T}{\partial z} + 1 - \text{H} \right) + Q(r, z, \text{Fo}), \quad (\text{Е.1.9})$$

$$r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0,$$

$$T \Big|_{r=1} = T_1 \Big|_{r=1}, \quad (\text{Е.1.10})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{E.1.11})$$

$$T \Big|_{\text{Fo}=0} = T_1 \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{E.1.12})$$

$$T_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{E.1.13})$$

$$T \Big|_{z=0} = \frac{\theta_{10}(t) - \theta_{01}}{\theta_0} = T_0(\text{Fo}), \quad (\text{E.1.14})$$

где Pe – аналог параметра Пекле, Fo – аналог числа Фурье.

Аналогично предыдущему случаю, вводим формально параметр асимптотического разложения ε , пренебрегаем слагаемыми, содержащими множитель порядка ν^2

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (\text{E.1.15})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \text{Pe} \nu \left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - Q(r, z, \text{Fo}) = 0, \quad (\text{E.1.16})$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0,$$

$$T \Big|_{r=1} = T_1 \Big|_{r=1}, \quad (\text{E.1.17})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{E.1.18})$$

$$T \Big|_{\text{Fo}=0} = T_1 \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{E.1.19})$$

$$T_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{E.1.20})$$

$$T \Big|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (\text{E.1.21})$$

В задаче (E.1.15)–(E.1.21) представим решения в виде асимптотического ряда (2.2.23) по параметру ε . Подставляя (2.2.23) в (E.1.15), получим

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (\text{E.1.22})$$

$$r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0.$$

Аналогично из уравнений (2.2.23) и (E.1.16) получим

$$\begin{aligned}
& -\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) - \right. \\
& \left. - Q(r, z, \text{Fo}) \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0, \quad (\text{E.1.23}) \\
& r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия в виде асимптотической формулы запишутся следующим образом:

$$T^{(0)}|_{r=1} - T_1^{(0)}|_{r=1} + \varepsilon^1 (T^{(1)}|_{r=1} - T_1^{(1)}|_{r=1}) + \dots = 0, \quad (\text{E.1.24})$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \dots = 0, \quad (\text{E.1.25})$$

$$T^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon^1 T^{(1)}|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \quad T_1^{(0)}|_{\text{Fo}=0} + \varepsilon^1 T_1^{(1)}|_{\text{Fo}=0} + \dots = 0, \quad (\text{E.1.26})$$

$$T_1^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon^1 T_1^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} + \dots = 0, \quad (\text{E.1.27})$$

$$T^{(0)}|_{z=0} + \varepsilon^1 T^{(1)}|_{z=0} + \dots = T_0(\text{Fo}). \quad (\text{E.1.28})$$

Как и в предыдущем случае, осуществим постановку для нулевого и первого коэффициентов разложения.

Е.1.1. Постановка задачи для частного случая выровненной скорости в нулевом приближении

Из (Е.1.22), получим уравнение для нулевого коэффициента разложения $T_1^{(0)}$

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{E.1.29})$$

Полагая $\varepsilon = 0$ в (Е.1.23), с учетом (Е.1.25) или условия ограниченности производной в центре скважины легко установить, что нулевой коэффициент разложения не зависит от радиальной координаты $T^{(0)} = T^{(0)}(z, \text{Fo})$.

Из (Е.1.29) получим «зацепленное» уравнение для определения нулевого коэффициента разложения температуры в трубе

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + \text{Pev} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - Q(r, z, Fo). \quad (\text{E.1.30})$$

Для «расцепления» уравнения (E.1.30), обозначим его правую часть через $A(z, Fo)$ и запишем в следующем виде:

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = A(z, Fo) - Q(r, z, Fo), \quad (\text{E.1.31})$$

где

$$A(z, Fo) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + \text{Pev} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) \quad (\text{E.1.32})$$

не зависит от радиальной координаты. Из (E.1.31) с учетом симметрии температурного поля относительно оси получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} &= \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{A(z, Fo)r}{2} - \frac{1}{r} Q_1(r, z, Fo) \right), \\ T^{(1)} &= \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{A(z, Fo)r^2}{4} - Q_2(r, z, Fo) \right) + B(z, Fo), \end{aligned} \quad (\text{E.1.33})$$

где $B(z, Fo)$ также не зависит от r .

$$Q_1(r, z, Fo) = \int_0^r r' Q(r', z, Fo) dr', \quad Q_2(r, z, Fo) = \int_0^r r'^{-1} Q_1(r', z, Fo) dr'.$$

Из (E.1.33) видно, что зависимость $T^{(1)}$ от радиальной координаты в случае выровненного профиля скорости при отсутствии источников – параболическая. Приравняв к нулю выражение перед первым сомножителем первого порядка по ε в (E.1.25), получим

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{A(z, Fo)}{2} - Q_1(1, z, Fo) \right) = \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (\text{E.1.34})$$

Для $A(z, Fo)$ из (E.1.34) найдем следующее выражение:

$$A(z, Fo) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + 2Q_1(1, z, Fo). \quad (\text{E.1.35})$$

Подставив полученное выражение для $A(z, Fo)$ в (E.1.32), запишем уравнение, содержащее коэффициенты разложения только нулевого порядка

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - 2Q_1(1, z, \text{Fo}) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{E.1.36})$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0.$$

Окончательная постановка задачи в нулевом приближении представится как

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (\text{E.1.37})$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - 2Q_1(1, z, \text{Fo}) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, \quad (\text{E.1.38})$$

$$z > 0,$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{E.1.39})$$

$$T^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = T_1^{(0)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{E.1.40})$$

$$T_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{E.1.41})$$

$$T^{(0)} \Big|_{z=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (\text{E.1.42})$$

Задача (E.1.37)–(E.1.42) содержит след производной из внешней области в уравнении (E.1.38). В отличие от исходной эта задача является смешанной. Решение задачи для нулевого коэффициента разложения представлено в разделе E.2.1.

E.1.2. Первый коэффициент разложения для выровненного профиля скорости

Уравнения (E.1.22)–(E.1.23) для первого коэффициента разложения запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, z > 0, \quad (\text{E.1.43})$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right), \quad r < 1, \text{Fo} > 0, z > 0. \quad (\text{E.1.44})$$

Осуществим «расщепление» уравнения (E.1.44). Введем оператор

$$\hat{L} = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (\text{E.1.45})$$

тогда уравнение (E.1.44) представится в виде:

$$\frac{1}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) = \widehat{L}T^{(1)}, \quad r < 1, \text{Fo} > 0, \quad z > 0. \quad (\text{E.1.46})$$

Поскольку оператор \widehat{L} не действует на радиальную координату r , то выражение (E.1.44) с учетом (E.1.33), запишется в виде

$$\frac{1}{\Lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2}{4} \widehat{L}A(z, \text{Fo}) - \widehat{L}Q_2(r, z, \text{Fo}) \right) + \widehat{L}B(z, \text{Fo}). \quad (\text{E.1.47})$$

Интегрируя (E.1.47), получим выражение для производной второго коэффициента разложения по радиальной координате

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = \frac{\Lambda^2}{\chi} \left(\frac{r^3}{16} \widehat{L}A(z, \text{Fo}) - \widehat{L}Q_3(r, z, \text{Fo}) \right) + \Lambda \frac{r}{2} \widehat{L}B(z, \text{Fo}), \quad (\text{E.1.48})$$

которое согласно условию на границе (E.1.25) равно

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} &= \frac{\Lambda^2}{\chi} \left(\frac{1}{16} \widehat{L}A(z, \text{Fo}) - \widehat{L}Q_3(1, z, \text{Fo}) \right) + \\ &+ \frac{\Lambda}{2} \widehat{L}B(z, \text{Fo}) = \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}. \end{aligned} \quad (\text{E.1.49})$$

Согласно (E.1.45) $Q_3(r, z, \text{Fo}) = \frac{1}{r} \int_0^r r' Q_2(r', z, \text{Fo}) dr'$. Уравнение (E.1.49) эквивалентно уравнению (E.1.44), где $A(z, \text{Fo})$ определяется согласно (E.1.35), а $B(z, \text{Fo})$ неизвестно. Найдя аналитическое выражение $B(z, \text{Fo})$, получим решение задачи в первом приближении. Из (E.1.49) для $\widehat{L}B(z, \text{Fo})$ получим

$$\widehat{L}B(z, \text{Fo}) = 2 \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{8} \widehat{L}A(z, \text{Fo}) - 2 \widehat{L}Q_3(1, z, \text{Fo}) \right). \quad (\text{E.1.50})$$

Подставляя в (E.1.50) выражение для $B(z, \text{Fo})$, следующее из (E.1.33), найдем

$$\begin{aligned} \widehat{L}T^{(1)} &= 2 \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{1-2r^2}{8\chi} \widehat{L}A(z, \text{Fo}) - \\ &- \frac{\Lambda}{\chi} \widehat{L}_3(Q_2(r, z, \text{Fo}) - 2Q_3(1, z, \text{Fo})). \end{aligned} \quad (\text{E.1.51})$$

Согласно (Е.1.32) и (Е.1.45) выражение $\widehat{L}A(z, Fo)$ может быть выражено через $T^{(0)}$ как

$$\widehat{L}A(z, Fo) = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial Fo^2} + 2Pe\nu \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z \partial Fo} + Pe^2 \nu^2 \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2} \right),$$

$$\widehat{L}A(z, Fo) = 2\chi \widehat{L} \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + 2\widehat{L}Q_1(1, Fo, z).$$

Подставив выражение для оператора \widehat{L} из (Е.1.45) в (Е.1.51), получим уравнение для отыскания первого коэффициента разложения в скважине

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Fo} + Pe\nu \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \\ - \Lambda \left(\frac{1-2r^2}{8} \widehat{L}A(z, Fo) + \widehat{L}(Q_2(r, Fo, z) - 2Q_3(1, Fo, z)) \right), \end{aligned} \quad (E.1.52)$$

$$r < 1, Fo > 0, z > 0.$$

Математическая постановка задачи для первых коэффициентов разложения включает также уравнение и условия

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, Fo > 0, z > 0, \quad (E.1.53)$$

$$T^{(1)} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \quad (E.1.54)$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (E.1.55)$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{Fo=0} = 0. \quad (E.1.56)$$

Как и в предыдущем случае, при решении задачи для первого приближения удовлетворить условиям $T^{(1)} \Big|_{z=0} = 0$ и $T^{(1)} \Big|_{Fo=0} = 0$ при любых r не представляется возможным.

Е.1.3. Осреднение задачи для остаточного члена

Примем сумму слагаемых после первого коэффициента разложения как остаточный член Θ , тогда решение задачи (Е.1.8)–(Е.1.14) будет отыскиваться в виде ряда (Г.2.37).

С учетом того, что нулевой коэффициент разложения и радиальная производная первого коэффициента удовлетворяют задаче (E.1.33)–(E.1.37) и уравнению (E.1.53), из (E.1.22)–(E.1.28) и (E.1.60) получим

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{E.1.57})$$

$$\varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \text{Pev} \varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right), \quad (\text{E.1.58})$$

$$\Theta \Big|_{r=1} = \Theta_1 \Big|_{r=1}, \quad (\text{E.1.59})$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \varepsilon \frac{\partial (\varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1)}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{E.1.60})$$

$$\left(\varepsilon \langle T^{(1)} \rangle + \langle \Theta \rangle \right) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_1 \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{E.1.61})$$

$$\Theta_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{E.1.62})$$

$$\left(\varepsilon T^{(1)} + \Theta \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (\text{E.1.63})$$

Усредним задачу (E.1.57)–(E.1.63) по r в пределах от 0 до 1. Осредненная задача для остаточного члена имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{E.1.64})$$

$$\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \text{Fo}} - \frac{2\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial r} \Big|_{r=1} + \text{Pev} \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial z} = -\varepsilon \left(\frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial z} \right), \quad (\text{E.1.65})$$

$$\langle \Theta \rangle \Big|_{r=1} = \Theta_1 \Big|_{r=1}, \quad (\text{E.1.66})$$

$$\left(\varepsilon \langle T^{(1)} \rangle + \langle \Theta \rangle \right) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_1 \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{E.1.67})$$

$$\Theta_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{E.1.68})$$

$$\left(\varepsilon \langle T^{(1)} \rangle + \langle \Theta \rangle \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (\text{E.1.69})$$

Подставляя (E.1.60) в (E.1.65), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle \Theta^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} - 2\chi \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \text{Pev} \frac{\partial \langle \Theta^{(1)} \rangle}{\partial z} = \\ & = -\varepsilon \left(\frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial z} - 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.1.70})$$

Из осреднения коэффициента при ε^1 в (E.1.23) и условия (E.1.11) получим

$$\frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial z} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (\text{E.1.71})$$

Подставляя (E.1.71) в (E.1.70), найдем, что осредненная задача для остаточного члена имеет тривиальное решение, если

$$\langle T^{(1)} \rangle|_{z=0} = 0, \quad \langle T^{(1)} \rangle|_{\text{Fo}=0} = 0.$$

Окончательно задача для первого коэффициента разложения имеет вид

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \quad (\text{E.1.72})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \\ & - \Lambda \left(\frac{1-2r^2}{8} \bar{L}A(z, \text{Fo}) + \bar{L}_3(Q_2(r, \text{Fo}, z) - 2Q_3(1, \text{Fo}, z)) \right), \end{aligned} \quad (\text{E.1.73})$$

$$r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0,$$

$$T^{(1)}|_{r=1} = T_1^{(1)}|_{r=1}, \quad (\text{E.1.74})$$

$$T_1^{(1)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{E.1.75})$$

$$T_1^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{E.1.76})$$

$$\langle T^{(1)} \rangle|_{z=0} = 0, \quad (\text{E.1.77})$$

$$\langle T^{(1)} \rangle|_{\text{Fo}=0} = 0. \quad (\text{E.1.78})$$

Е.2. Аналитическое решение задачи

В данном разделе найдены аналитические выражения для нулевого и первого коэффициентов асимптотического разложения основной задачи тер-

мокаротажа в пространстве преобразований, построены выражения для коэффициентов разложения в пространстве оригиналов для случаев, когда это оказалось возможным.

Е.2.1. Решение задачи в нулевом приближении

С помощью преобразования Лапласа – Карсона [67] запишем задачу (Е.1.37)–(Е.1.42) в пространстве изображений

$$pT_1^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad z > 0, \quad (\text{Е.2.1})$$

$$pT^{(0)u} + \text{Re}v \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - 2Q_1^u(1, z, p) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \quad z > 0, \quad (\text{Е.2.2})$$

$$T^{(0)u} = T_1^{(0)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Е.2.3})$$

$$T_1^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Е.2.4})$$

$$T^{(0)u} \Big|_{z=0} = T_0(p). \quad (\text{Е.2.5})$$

Аналогично предыдущим задачам решение уравнения (Е.2.1) выражается через функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента

$$T_1^{(0)u} = C_1 I_0(r\sqrt{p}) + C_2 K_0(r\sqrt{p}). \quad (\text{Е.2.6})$$

Из условия (Е.2.4) следует, что постоянная C_1 равна нулю, поэтому получим

$$T_1^{(0)u} = C_2 K_0(r\sqrt{p}). \quad (\text{Е.2.7})$$

Для определения C_2 воспользуемся условием (Е.2.3). Подставив полученное выражение в (Е.2.7) представим решение для пласта $r > 1$ и его производной в виде

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}, \quad \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} = -\sqrt{p} \frac{K_1(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}, \quad (\text{Е.2.8})$$

$$\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\sqrt{p} \frac{K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u} = -\sqrt{p} k T^{(0)u},$$

где $k = k(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$. С учетом последних равенств уравнение (Е.2.2) для определения $T^{(0)u}$ можно представить как

$$\frac{dT^{(0)u}}{dz} + \frac{1}{\text{Pev}} (p + 2\chi k \sqrt{p}) T^{(0)u} = \frac{\text{Pev}(1 - \text{H}) + 2Q_1^u(1, z, p)}{\text{Pev}}, \quad r < 1, z > 0. \quad (\text{E.2.9})$$

Решение уравнения (E.2.9) с учетом условия (E.2.5) представится в форме

$$T^{(0)u} = T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \int_0^z \left(1 - \text{H} + 2 \frac{Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}} \right) e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi, \quad r < 1, z > 0, \quad (\text{E.2.10})$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\text{Pev}} (p + 2\chi k \sqrt{p}). \quad (\text{E.2.11})$$

Подставив (E.2.10) в (E.2.8), получим решение для внешней области

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \int_0^z \left(1 - \text{H} + 2 \frac{Q_1^u(1, \xi, p)}{\text{Pev}} \right) e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi \right], \quad r > 1, z > 0. \quad (\text{E.2.12})$$

Выражения (E.2.10) и (E.2.12) представляют точное решение задачи в нулевом приближении в пространстве изображений.

E.2.2. Построение решения для первого коэффициента разложения

В пространстве изображений Лапласа – Карсона [67] задача для первых коэффициентов разложения (E.1.52)–(E.1.56) примет вид

$$pT_1^{(1)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, z > 0, \quad (\text{E.2.13})$$

$$p(T^{(1)u} - T^{(1)}(\text{Fo} = 0)) + \text{Pev} \frac{\partial T^{(1)u}}{\partial z} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \left(\frac{1 - 2r^2}{8} \widehat{L}^u A^u(z, p) + \widehat{L}^u (Q_2^u(r, z, p) - 2Q_3^u(1, z, p)) \right), \quad (\text{E.2.14})$$

$$pT_1^{(1)u} + \text{Pev} \frac{\partial T^{(1)u}}{\partial z} - 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \chi \Lambda \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \widehat{L} \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, z > 0,$$

$$T^{(1)u} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{E.2.15})$$

$$T_1^{(1)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{E.2.16})$$

$$\langle T^{(1)u} \rangle|_{z=0} = 0, \quad (\text{E.2.17})$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle T^{(1)u} \rangle = 0. \quad (\text{E.2.18})$$

Решение уравнения (E.2.13) выражается через функции Бесселя нулевого порядка. По аналогии с нулевым приближением представим решение для пласта и его производной на границе $r = 1$ в виде

$$T_1^{(1)u} = T^{(1)u}|_{r=1} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}, \quad \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r}|_{r=1} = -\sqrt{p}kT^{(1)u}|_{r=1}. \quad (\text{E.2.19})$$

Оператор \hat{L} , определяемый выражением (E.1.45), в пространстве изображений примет вид

$$\hat{L}^u = \frac{1}{\chi} \left(p + \text{Pev} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{E.2.20})$$

С учетом выражения для первого коэффициента в пространстве изображений

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{A^u(z, p)r^2}{4} - Q_2^u(r, z, p) \right) + B^u(z, p) \quad (\text{E.2.21})$$

условие $\lim_{p \rightarrow \infty} \langle T^{(1)u} \rangle = 0$ представим в виде выражения, связывающего $B(z, 0)$

с моментными функциями источников

$$B(z, 0) = \frac{\Lambda}{\chi} \left(2Q_3(1, z, 0) - \frac{Q_1(1, z, 0)}{4} \right). \quad (\text{E.2.22})$$

Далее представим уравнение (E.2.12) в виде

$$\begin{aligned} p(T^{(1)u} - T^{(1)}(F_0 = 0)) + \text{Pev} \frac{\partial T^{(1)u}}{\partial z} &= 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r}|_{r=1} - \\ - \Lambda \frac{1-2r^2}{8\chi} \left[p(A^u(z, p) - A^u(z, 0)) + \text{Pev} \frac{\partial A^u(z, p)}{\partial z} \right] &- \\ - \frac{\Lambda}{\chi} p \left[(Q_2^u(r, z, p) - 2Q_3^u(1, z, p)) - (Q_2(r, z, 0) - 2Q_3(1, z, 0)) \right] &- \end{aligned} \quad (\text{E.2.23})$$

$$- \text{Pev} \frac{\Lambda}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} (Q_2^u(r, z, p) - 2Q_3^u(1, z, p)),$$

а затем с учетом соотношений

$$T^{(1)}(\text{Fo} = 0) = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{Q_1(1, \text{Fo}, z) r^2}{2} - Q_2(r, 0, z) \right) + B(z, 0),$$

$$\left. \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} \right|_{\text{Fo}=0} = 2Q_1(1, \text{Fo}, z) + \text{Pev}(1 - \text{H})$$

получим из (E.2.23) уравнение для $B^u(z, p)$

$$\frac{d}{dz} B^u(z, p) + \frac{p + 2\chi\sqrt{pk}}{\text{Pev}} B^u(z, p) = \Sigma(z, p), \quad (\text{E.2.24})$$

где выражение для источников имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma(z, p) &= \frac{2\Lambda}{\text{Pev}} \sqrt{pk} Q_2^u(1, z, p) - \frac{\Lambda}{8\text{Pev}} (\hat{L}^u + 4\sqrt{pk}) A^u(z, p) + \frac{2\Lambda}{\text{Pev}} \hat{L}^u Q_3^u(1, z, p) + \\ &+ \frac{p\Lambda}{\text{Pev}\chi} \left(2Q_3(1, z, 0) - \frac{Q_1(1, z, 0)}{4} \right) = \frac{2\Lambda}{\text{Pev}} \sqrt{pk} Q_2^u(1, p, z) - \frac{\Lambda}{8\text{Pev}\chi} (p + 4\chi\sqrt{pk}) \times \\ &\times A^u(z, p) - \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\partial}{\partial z} A^u(z, p) + \frac{2\Lambda p}{\text{Pev}\chi} Q_3^u(1, z, p) + \frac{2\Lambda}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} Q_3^u(1, z, p) = \\ &= \frac{2\Lambda}{\text{Pev}} \sqrt{pk} Q_2^u(1, z, p) + \frac{\Lambda}{4} \sqrt{pk} (1 - \text{H}) + \frac{\Lambda}{2\text{Pev}} \chi k^2 p T^{(0)u} - \\ &- \frac{\Lambda}{4\chi} \left[\frac{1}{\text{Pev}} (p + 2\chi\sqrt{pk}) + \frac{d}{dz} \right] Q_1^u(1, p, z) + \frac{2\Lambda}{\chi} \left[\frac{1}{\text{Pev}} p + \frac{d}{dz} \right] Q_3^u(1, z, p). \end{aligned} \quad (\text{E.2.25})$$

В преобразованиях (E.2.25) учтены следующие равенства

$$pT^{(0)u} + \text{Pev} \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} = \chi \hat{L} T^{(0)u} = -2\chi k \sqrt{p} T^{(0)u} + \text{Pev}(1 - \text{H}) + 2Q_1^u(1, z, p),$$

$$A(z, 0) = 2Q_1(1, 0, z).$$

Решение уравнения (E.2.24) имеет вид

$$B^u(z, p) = B^u(0, p)e^{-\alpha z} + \int_0^z \Sigma(\xi, p) \exp[-\alpha(z - \xi)] d\xi. \quad (\text{E.2.26})$$

С учетом равенства $A^u(0, p) = -2\chi\sqrt{pk}T_0^u(p) + 2Q_1^u(1, 0, p)$ из условия (E.2.17) определяется выражение для $B^u(0, p)$

$$B^u(0, p) = \frac{1}{4}\Lambda\sqrt{pk}T_0^u(p) + \frac{\Lambda}{\chi} \left(2Q_3^u(1, 0, p) - \frac{Q_1^u(1, 0, p)}{4} \right). \quad (\text{E.2.27})$$

Поскольку выражение для $A^u(z, p)$ представляется как

$$\begin{aligned} A^u(z, p) &= pT^{(0)u} + \text{Pev} \left(\frac{\partial T^{(0)u}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = \\ &= 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} + 2Q_1^u(1, z, p) = -2\chi\sqrt{pk}T^{(0)u} + 2Q_1^u(1, z, p), \end{aligned} \quad (\text{E.2.28})$$

то искомое решение для первого коэффициента имеет вид

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda r^2}{2\chi} Q_1^u(1, z, p) - \frac{\Lambda r^2}{2} \sqrt{pk}T^{(0)u} - \frac{\Lambda}{\chi} Q_2^u(r, z, p) + B^u(z, p), \quad (\text{E.2.29})$$

где выражение $B^u(z, p)$ определяется согласно (E.2.26), (E.2.27). Эти соотношения полностью решают поставленную задачу для первого коэффициента в пространстве изображений. Построение расчетных соотношений в пространстве оригиналов целесообразно для конкретных функций источников, возникающих в практических задачах.

Для случая отсутствия источников получим

$$\Sigma(z, p) = \frac{\Lambda}{4} \sqrt{pk}(1 - \text{H}) + \frac{\Lambda\chi}{2\text{Pev}} k^2 p T^{(0)u}, \quad B^u(0, p) = \frac{1}{4} \Lambda \sqrt{pk} T_0^u(p). \quad (\text{E.2.30})$$

С учетом (E.2.25) решение запишется в виде

$$B^u(z, p) = \frac{1}{4} \Lambda \sqrt{pk} T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \frac{\Lambda}{4\alpha} \sqrt{pk}(1 - \text{H})(1 - \exp(-\alpha z)) + \quad (\text{E.2.31})$$

$$+ \frac{\Lambda\chi}{2\text{Pev}} k^2 p \int_0^z T^{(0)u}(\xi, p) \exp[-\alpha(z-\xi)] d\xi.$$

Это позволяет записать искомое решение для первого коэффициента разложения в виде

$$T^{(1)u} = -\frac{\Lambda r^2}{2} \sqrt{pk} T^{(0)u} + \frac{1}{4} \Lambda \sqrt{pk} T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \frac{\Lambda}{4\alpha} \sqrt{pk} (1-H) \times \\ \times (1 - \exp(-\alpha z)) + \frac{\Lambda\chi}{2\text{Pev}} k^2 p \int_0^z T^{(0)u}(\xi, p) \exp[-\alpha(z-\xi)] d\xi. \quad (\text{E.2.32})$$

$$T_1^{(1)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})\Lambda}{K_0(\sqrt{p})} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{pk} T^{(0)u} + \frac{1}{4} \sqrt{pk} T_0^u(p) e^{-\alpha z} + (1-H) \frac{\sqrt{pk}}{4\alpha} \times \right. \\ \left. \times (1 - \exp(-\alpha z)) + \frac{\Lambda\chi}{2\text{Pev}} k^2 p \int_0^z T^{(0)u}(\xi, p) \exp[-\alpha(z-\xi)] d\xi \right]. \quad (\text{E.2.33})$$

Заметим, что в найденное решение входит коэффициент нулевого разложения, который определяется согласно выражению (E.2.10).

Полученные решения для первого коэффициента необходимы, в первую очередь, для определения радиальных профилей температуры

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}(r=1) = \frac{\Lambda}{2} \left(\sqrt{pk} T^{(0)u} - \frac{1}{\chi} Q_1^u(1, z, p) \right) (1-r^2) + \\ + \frac{\Lambda}{\chi} [Q_2^u(1, z, p) - Q_2^u(r, z, p)], \quad (\text{E.2.34})$$

которое при отсутствии источников приводит к следующему выражению:

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}(r=1) = \frac{\Lambda}{2} \sqrt{pk} T^{(0)u} (1-r^2). \quad (\text{E.2.35})$$

В отсутствие источников выражение для нулевого коэффициента имеет вид

$$T^{(0)u} = T_0^u(p) \exp\left(-\frac{z}{\text{Pev}} (p + 2\chi k \sqrt{p})\right) + \\ + \frac{(1-H)\text{Pev}}{p + 2\chi k \sqrt{p}} \left[1 - \exp\left(-\frac{z}{\text{Pev}} (p + 2\chi k \sqrt{p})\right) \right]. \quad (\text{E.2.36})$$

Поскольку при малых $p \rightarrow 0$ ($Fo \rightarrow \infty$) имеет место асимптотическое соотношение $k\sqrt{p} = \sqrt{p} K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p}) \approx -\{[C + \ln(\sqrt{p}/2)]\}^{-1}$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{p} k T^{(0)u} = \frac{(1-H)Pe\nu}{2\chi}.$$

С учетом этого из (E.2.35) следует формула для стационарного профиля температуры

$$T - T(r=1) = Pe\nu(1-H) \frac{\Lambda}{4\chi} (1-r^2), \quad (E.2.37)$$

совпадающее с выражением, полученным в предположении постоянного вертикального градиента температуры (Приложение Ж).

Из сопоставления решений в нулевом (E.2.10), (E.2.12) и первом (E.2.32), (E.2.33) приближениях как и ранее следует, что решение в нулевом приближении в скважине описывает осредненные по сечению скважины значения температуры, а решения в первом приближении являются необходимыми для детального описания радиальных зависимостей температуры в скважине.

E.2.3. Получение решений в пространстве оригиналов

В отсутствии источников решения упрощаются и представляются в следующем виде:

$$T^{(0)u} = T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \int_0^z (1-H) e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi, \quad r < 1, \quad z > 0, \quad (E.2.38)$$

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \int_0^z (1-H) e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi \right], \quad r > 1, \quad z > 0, \quad (E.2.39)$$

$$T^{(1)u} = -\frac{\Lambda r^2}{2} \sqrt{p} k T^{(0)u} - \frac{\Lambda}{4} \sqrt{p} k T_0(p) e^{-\alpha z} + \Lambda \int_0^z e^{-\alpha(z-\xi)} \left[\frac{\chi p k^2}{2} T^{(0)u} - \frac{Pe\nu(1-H)}{4} \right] d\xi, \quad (E.2.40)$$

$$T^{(1)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})\Lambda}{K_0(\sqrt{p})} \left\{ -\frac{r^2}{2} \sqrt{pk} T^{(0)u} - \frac{1}{4} \sqrt{pk} T_0(p) e^{-\alpha z} + \right. \\ \left. + \int_0^z e^{-\alpha(z-\xi)} \left[\frac{\chi p k^2}{2} T^{(0)u} - \frac{\text{Pev}(1-H)}{4} \right] d\xi \right\}. \quad (\text{E.2.41})$$

Полученные решения позволяют построить расчетные зависимости температуры в скважине от различных параметров. В качестве примера приведем формулы температуры для достаточно малых времен или больших значений p . В этом случае $k \approx 1$ и для температурных полей в скважине в нулевом приближении имеет вид

$$T^{(0)} = \Phi \left(\text{Fo} - \frac{z}{\text{Pev}} \right) T_0 \text{erfc} \left(\frac{\chi z}{\sqrt{\text{Pev}(\text{PevFo} - z)}} \right) + \\ + (1-H) \int_0^z \text{erfc} \left(\frac{\chi(z-\xi)}{\text{Pev} \sqrt{\text{Pev}(\text{PevFo} - z - \xi)}} \right) \Phi \left(\text{Fo} - \frac{z-\xi}{\text{Pev}} \right) d\xi, \quad r < 1, \quad z > 0. \quad (\text{E.2.42})$$

В окружающем пласте выражение для нулевого коэффициента разложения представляется как

$$T_1^{(0)} = \Phi \left(\text{Fo} - \frac{z}{\text{Pev}} \right) \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \exp(-u^2(\text{Fo} - \tau)) \frac{Y_0(ru)J_0(u) - Y_0(u)J_0(ru)}{Y_0^2(ru) + J_0^2(u)} \frac{du}{u} \times \right. \\ \left. \times \left[T_0 \exp \left(\frac{-\chi^2 z^2}{\text{Pev}(\text{PevFo} - z)} \right) + \int_0^z (1-H) \exp \left(\frac{-\chi^2(z-\xi)^2}{\text{Pev}(\text{PevFo} - z)} \right) d\xi \right] d\tau + \right. \\ \left. + T_0 \text{erfc} \left(\frac{\chi z}{\sqrt{\text{Pev}(\text{PevFo} - z)}} \right) + \int_0^z (1-H) \text{erfc} \left(\frac{\chi(z-\xi)}{\sqrt{\text{Pev}(\text{PevFo} - z - \xi)}} \right) d\xi, \quad r < 1, \right. \\ \left. z > 0. \right. \quad (\text{E.2.43})$$

Точка $\text{Fo} = 0$ является сингулярной и, строго говоря, в окрестности этой точки решение теряет смысл. Для первого коэффициента разложения получим следующее выражение для относительно малых времен вне зоны влияния сингулярности:

$$\begin{aligned}
T^{(1)} = & \Phi\left(\text{Fo} - \frac{z}{\text{Pe}v}\right) \left\{ -\frac{r^2 + 2}{4} \frac{T_0}{\sqrt{\pi\left(\text{Fo} - \frac{z}{\text{Pe}v}\right)}} \exp\left(\frac{-\chi^2 z^2}{\text{Pe}^2 v^2 \left(\text{Fo} - \frac{z}{\text{Pe}v}\right)}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{\chi T_0 z}{4} \Psi\left(\frac{2\chi z}{\text{Pe}v}, \text{Fo} - \frac{z}{\text{Pe}v}\right) - \right. \\
& \left. - \frac{r^2 + 2}{4} (1-H)(2 - \text{Pe}v) \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\pi\left(\text{Fo} - \frac{z}{\text{Pe}v}\right)}} \exp\left(\frac{-\chi^2 (z - \xi)^2}{\text{Pe}^2 v^2 \left(\text{Fo} - \frac{z - \xi}{\text{Pe}v}\right)}\right) d\xi \right\} \Lambda + \\
& + (1-H)\Lambda \int_0^z \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \exp\left(\frac{4\chi^2 (z - \xi)}{\text{Pe}v} + \frac{\text{Fo} - \frac{z - \xi}{\text{Pe}v}}{4\chi^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{\chi(z - \xi)}{\text{Pe}v \sqrt{\text{Fo} - \frac{z - \xi}{\text{Pe}v}}} + 2\chi \sqrt{\text{Fo} - \frac{z - \xi}{\text{Pe}v}}\right) d\xi, \\
& r > 1, z > 0.
\end{aligned} \tag{E.2.44}$$

В окружающем массиве выражение для первого коэффициента разложения для относительно малых времен представится в форме

$$\begin{aligned}
T_1^{(1)} = & \Lambda \int_0^{\text{Fo}\infty} \int_0^{\text{Fo}\infty} \exp\left(-u^2(\text{Fo} - \tau)\right) \frac{Y_0(ru)J_0(u) - Y_0(u)J_0(ru)}{Y_0^2(ru) + J_0^2(u)} \frac{du}{u} \times \\
& \times \left[\frac{(r^2 + 2) T_0}{4\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-\chi^2 z^2}{\text{Pe}^2 v^2 \left(\tau - \frac{z}{\text{Pe}v}\right)}\right) \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{\chi^2 z^2}{\text{Pe}^2 v^2 \sqrt{\tau - \frac{z}{\text{Pe}v}}} + \frac{1}{\left(\tau - \frac{z}{\text{Pe}v}\right)^{5/2}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\chi \Lambda T_0 z}{2} \Psi'_\tau\left(\frac{2\chi z}{\text{Pe}v}, \tau - \frac{z}{\text{Pe}v}\right) + \frac{r^2 + 2}{4} (1-H)\Lambda(2 - \text{Pe}v) \times \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{\chi^2 z^2}{\text{Pe}^2 v^2 \sqrt{\tau - \frac{z}{\text{Pe}v}}} + \frac{1}{\left(\tau - \frac{z}{\text{Pe}v}\right)^{5/2}} \right) \right) \right] \tag{E.2.45}
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^z \exp \left(\frac{-\chi^2(z-\xi)^2}{\text{Pe}^2 \nu^2 \left(\tau - \frac{\xi}{\text{Pe}\nu} \right)} \right) \left(\frac{\chi^2(z-\xi)^2}{\text{Pe}^2 \nu^2 \sqrt{\tau - \frac{\xi}{\text{Pe}\nu}}} + \frac{1}{\left(\tau - \frac{\xi}{\text{Pe}\nu} \right)^{5/2}} \right) d\xi.$$

Выражения (E.2.42), (E.2.44) представляют искомое решение задачи для нулевого и первого приближения в скважине в предположении выровненного профиля скорости. В следующем разделе рассмотрены аналогичные задачи для произвольного распределения скорости жидкости в скважине в зависимости от радиальной координаты. Результаты расчетов по указанным формулам обсуждаются в разделе 3.4.

E.2.4. Построение погранслойной функции

Покажем, что построенное точное в среднем решение содержит погранслой при $z = 0$. Действительно, значения первого приближения в этой точке отличаются от нуля и зависят от радиальной координаты

$$T^{(1)}|_{z=0} = \Phi(\text{Fo}) \left[-\frac{r^2 + 2}{4} \frac{T_0}{\sqrt{\pi \text{Fo}}} \right]_{z=0} \neq 0,$$

то есть, построенное выше решение не удовлетворяет условию $T^{(1)}|_{z=0} = 0$.

Для устранения этого недостатка необходимо построение погранслойного решения. Процедура отыскания погранслойного решения аналогична представленному в Приложении Г.

Для простоты приведем выражение погранслойной функции только в скважине ($r < 1$).

$$\Pi^{(1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n)} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{\chi}{\Lambda \text{Pe}\nu} z \right) \int_0^1 r (-T^{(1)})|_{\text{Fo}=0} J_0(\mu_n r) dr. \quad (\text{E.2.46})$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ Ж. Частный случай постоянных
градиентов и выровненного профиля скорости**

Ж.1. Постановка задачи

Эта задача следует из (Е.1.1)–(Е.1.7) в частном случае постоянных градиентов и из (Д.1.1)–(Д.1.6), когда профиль скоростей по сечению скважины можно считать выровненным, как, например, при турбулентном движении или в условиях барботажа всплывающими газовыми пузырьками.

Математическая постановка задачи принимает вид

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \lambda_{1r} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \right), \quad r_d > r_0, \quad t > 0, \quad (\text{Ж.1.1})$$

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right) + \rho c v \Gamma - \eta c \rho^2 g v + q_d, \quad r_d < r_0, \quad t > 0, \quad (\text{Ж.1.2})$$

$$\theta \Big|_{r_d=r_0} = \theta_1 \Big|_{r_d=r_0}, \quad (\text{Ж.1.3})$$

$$\lambda_r \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0} = \lambda_{1r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0}, \quad (\text{Ж.1.4})$$

$$\theta \Big|_{t=0} = \theta_1 \Big|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad (\text{Ж.1.5})$$

$$\theta_1 \Big|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \quad (\text{Ж.1.6})$$

С использованием соотношений (2.1.1), задача (Ж.1.1)–(Ж.1.6) приведена к безразмерным переменным

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad (\text{Ж.1.7})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} = \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \text{Pev}(1 - \text{H}) + Q(r, \text{Fo}), \quad (\text{Ж.1.8})$$

$$T \Big|_{r=1} = T_1 \Big|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.9})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.10})$$

$$T \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_1 \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Ж.1.11})$$

$$T_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Ж.1.12})$$

Для получения приближенных решений задачу (Ж.1.7)–(Ж.1.12) представим в виде асимптотического ряда по параметру ε (2.2.23). Подставляя (2.2.23) в (Ж.1.7), получим

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial F_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial F_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0. \quad (\text{Ж.1.13})$$

Аналогично из уравнений (Ж.1.8) и (2.2.23) найдем

$$\begin{aligned} -\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial F_0} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) - \text{Pev}(1 - H) - \right. \\ \left. - Q(r, F_0) \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial T^{(1)}}{\partial F_0} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{Ж.1.14})$$

Граничные и начальные условия примут вид

$$T^{(0)}|_{r=1} - T_1^{(0)}|_{r=1} + \varepsilon (T^{(1)}|_{r=1} - T_1^{(1)}|_{r=1}) + \dots = 0, \quad (\text{Ж.1.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) \dots = 0, \end{aligned} \quad (\text{Ж.1.16})$$

$$T^{(0)}|_{F_0=0} + \varepsilon T^{(1)}|_{F_0=0} + \dots = 0, \quad T_1^{(0)}|_{F_0=0} + \varepsilon T_1^{(1)}|_{F_0=0} + \dots = 0, \quad (\text{Ж.1.17})$$

$$T_1^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon T_1^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} + \dots = 0. \quad (\text{Ж.1.18})$$

Осуществим далее постановку для нулевого и первого коэффициентов разложения задачи.

Ж.1.1. Задача в нулевом приближении

Как и предыдущих разделах, получим уравнение для нулевого коэффициента разложения во внешней области $T_1^{(0)}$

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial F_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{Ж.1.19})$$

Формально полагая $\varepsilon = 0$ в (Ж.1.14), получим

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) = 0.$$

Отсюда получим выражение для радиального градиента температуры в нулевом приближении следующее выражение:

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = \frac{C}{r}.$$

В силу условия $\partial T^{(0)} / \partial r (r=1) = 0$, следующего из (Ж.1.16), или требования ограниченности решения при $r = 0$ из (Ж.1.20) получим $C = 0$, поэтому

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = 0.$$

Отсюда следует, что в нулевом приближении температура не зависит от радиальной координаты r и является функцией времени Fo : $T^{(0)} = T^{(0)}(Fo)$.

Уравнение для определения нулевого коэффициента разложения температуры в трубе, согласно (Ж.1.13), примет вид

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} - \text{Pev}(1 - H) - Q(r, Fo). \quad (\text{Ж.1.20})$$

Для исключения $T^{(1)}$ из (Ж.1.20) представим его в виде

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = A(Fo) - Q(r, Fo), \quad (\text{Ж.1.21})$$

где коэффициент $A(Fo)$ является функцией только от времени Fo и не зависит от радиальной координаты r

$$A(Fo) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} - \text{Pev}(1 - H). \quad (\text{Ж.1.22})$$

Интегрируя (Ж.1.21), получим выражение для радиальной производной первого коэффициента асимптотического разложения

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{rA(Fo)}{2} - \frac{1}{r} Q_1(r, Fo) \right). \quad (\text{Ж.1.23})$$

Здесь $Q_1(r, Fo) = \int_0^r r' Q(r', Fo) dr'$. Воспользовавшись условием, следующим

из (Ж.1.16) при $\varepsilon = 0$ получим

$$\left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{A(Fo)}{2} - Q_1(1, Fo) \right) = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}. \quad (\text{Ж.1.24})$$

Подставив (Ж.1.22) в (Ж.1.24), получим уравнение, содержащее коэффициенты разложения только нулевого порядка

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} - \text{Pev}(1 - H) - 2Q_1(1, Fo) = 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}. \quad (\text{Ж.1.25})$$

Запишем окончательную постановку задачи в нулевом приближении

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad (\text{Ж.1.26})$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} - \text{Pev}(1 - H) - 2Q_1(1, Fo) = 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad (\text{Ж.1.27})$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.28})$$

$$T^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad T_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (\text{Ж.1.29})$$

$$T^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Ж.1.30})$$

Решение этой задачи в нулевом приближении описано в разделе Ж.2.1.

С помощью осреднения легко показать, что нулевой коэффициент разложения совпадает с решением осредненной исходной задачи в любой момент времени. Это означает, что нулевое приближение в каждый момент времени описывает усредненные по сечению трубы значения температуры.

Ж.1.2. Постановка для первых коэффициентов разложения задачи

Уравнения (Ж.1.13), (Ж.1.14) для первого коэффициента разложения представляются в следующем виде:

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad (\text{Ж.1.31})$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r < 1, \text{Fo} > 0. \quad (\text{Ж.1.32})$$

Осуществим «расщепление» уравнения (Ж.1.32). Из (Ж.1.23) найдем

$$T^{(1)} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^2 A(\text{Fo})}{4} - Q_2(r, \text{Fo}) \right) + B(\text{Fo}), \quad (\text{Ж.1.33})$$

где $Q_2(r, \text{Fo}) = \int_0^r r'^{-1} Q_1(r', \text{Fo}) dr'$. Подставив выражение (Ж.1.33) в (Ж.1.32) и

проинтегрировав по r , получим выражение для радиального градиента второго коэффициента разложения

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{r^3}{16} \frac{\partial A(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial Q_3(r, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right) + \frac{r}{2} \frac{\partial B(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right]. \quad (\text{Ж.1.34})$$

Здесь $Q_3(r, \text{Fo}) = \int_0^r r' Q_2(r', \text{Fo}) dr'$. Воспользовавшись условием, следу-

ющим из (Ж.1.15), построим уравнение, позволяющее исключить второй коэффициент разложения

$$\left. \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{\Lambda}{\chi} \left[\frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1}{16} \frac{\partial A(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial Q_3(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial B(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right] = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1}. \quad (\text{Ж.1.35})$$

Продифференцировав (Ж.1.33) по Fo и исключив $B(\text{Fo})$ из (Ж.1.35), с учетом (Ж.1.22) приходим к окончательной постановке задачи для первого коэффициента разложения

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{1-2r^2}{8} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{\partial [Q_2(r, \text{Fo}) - 2Q_3(1, \text{Fo})]}{\partial \text{Fo}} \right) = 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.36})$$

$$r < 1, \text{Fo} > 0,$$

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \text{Fo} > 0, \quad (\text{Ж.1.37})$$

$$T^{(1)}|_{r=1} = T_1^{(1)}|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.38})$$

$$T_1^{(1)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Ж.1.39})$$

$$T^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Ж.1.40})$$

Условие $T^{(1)}|_{\text{Fo}=0} = 0$, следующее из (Ж.1.17), является избыточным. Для построения нетривиального решения оно должно быть ослаблено и заменено средне интегральным

$$\langle T^{(1)} \rangle|_{\text{Fo}=0} = 0.$$

Решение задачи (Ж.1.36)–(Ж.1.40) представлено в разделе Ж.2.2 данной главы.

Ж.1.3. Условие тривиального решения осредненной задачи для остаточного члена

Подставив выражение

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \varepsilon^2 T_j^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T_j^{(n)} + \Theta_j^{(n)}, \quad (\text{Ж.1.41})$$

при $n = 1$ в (Ж.1.7)–(Ж.1.12), после соответствующих преобразований получим следующую задачу:

$$\frac{\partial(T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1)}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1)}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad (\text{Ж.1.42})$$

$$\varepsilon \frac{\partial(T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \Theta)}{\partial \text{Fo}} = \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \Theta)}{\partial r} \right) + \quad (\text{Ж.1.43})$$

$$+ \varepsilon \text{Pev}(1 - \text{H}) + \varepsilon Q(r, \text{Fo}), \quad r < 1, \quad \text{Fo} > 0,$$

$$(T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \Theta)|_{r=1} = (T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1)|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.44})$$

$$\frac{\partial(\varepsilon T^{(1)} + \Theta)}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial(T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1)}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.45})$$

$$(T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \Theta)|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1)|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Ж.1.46})$$

$$(T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1)|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Ж.1.47})$$

Эта задача упрощается с учетом того, что нулевой и первый коэффициенты разложения удовлетворяют уравнениям (Ж.1.20) и (Ж.1.32) и задачам (Ж.1.26)–(Ж.1.30) и (Ж.1.36)–(Ж.1.40).

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad (\text{Ж.1.48})$$

$$\varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}}, \quad r < 1, \quad (\text{Ж.1.49})$$

$$\Theta|_{r=1} = \Theta_1|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.50})$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial (\varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1)}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.51})$$

$$\Theta|_{\text{Fo}=0} = -\varepsilon T^{(1)}|_{\text{Fo}=0}, \quad \Theta_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Ж.1.52})$$

$$\Theta_1|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Ж.1.53})$$

Усредним задачу (Ж.1.48)–(Ж.1.53) по r в пределах от 0 до 1. Осредненная задача для остаточного члена имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{Ж.1.54})$$

$$\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \text{Fo}} - 2\chi \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right|_{r=1} = -\varepsilon \left(\frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} - 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} \right), \quad (\text{Ж.1.55})$$

$$\langle \Theta \rangle|_{r=1} = \Theta_1|_{r=1}, \quad (\text{Ж.1.56})$$

$$\langle \Theta \rangle|_{\text{Fo}=0} = -\varepsilon \langle T^{(1)} \rangle|_{\text{Fo}=0}, \quad \Theta_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (\text{Ж.1.57})$$

$$\Theta_1|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Ж.1.58})$$

Из осреднения (Ж.1.32) и условия (Ж.1.16) получим

$$\frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} = 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1}. \quad (\text{Ж.1.59})$$

С учетом (Ж.1.59) правая часть уравнения (Ж.1.55) обращается в нуль. При этом задача (Ж.1.54)–(Ж.1.58) имеет только тривиальное решение в пространстве изображений при условии

$$\left\langle T^{(1)} \right\rangle \Big|_{Fo=0} = 0. \quad (\text{Ж.1.60})$$

Заметим, что это условие является более слабым, нежели обращение в нуль первого коэффициента разложения в начальный момент времени $T^{(1)} \Big|_{Fo=0} = 0$, поскольку в этом случае (Ж.1.60) выполняется тождественно.

Ж.2. Решение задачи для выровненного профиля скорости и постоянного вертикального градиента температуры

Ж.2.1. Построение решения в нулевом приближении

С помощью преобразования Лапласа – Карсона [67]

$$T_j^u = p \int_0^{\infty} e^{-pFo} T_j(Fo) dFo, \quad (\text{Ж.2.1})$$

запишем задачу (Ж.1.26)–(Ж.1.30) в пространстве изображений

$$pT_1^{(0)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad (\text{Ж.2.2})$$

$$pT^{(0)u} - \text{Pe}v(1 - \text{H}) - 2Q_1^u(1, p) = 2\chi \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \quad (\text{Ж.2.3})$$

$$T^{(0)u} = T_1^{(0)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Ж.2.4})$$

$$T_1^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Ж.2.5})$$

Решение уравнения (Ж.2.2) выражается через функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента

$$T_1^{(0)u} = C_1 I_0(r\sqrt{p}) + C_2 K_0(r\sqrt{p}). \quad (\text{Ж.2.6})$$

Из условия (Ж.2.5) следует, что постоянный коэффициент C_1 равен нулю, поэтому получим

$$T_1^{(0)u} = C_2 K_0(r\sqrt{p}). \quad (\text{Ж.2.7})$$

Для определения C_2 воспользуемся условием (Ж.2.4). Подставив полученное выражение в (Ж.2.7), представим решение для температуры окружающего массива в виде

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}, \quad (\text{Ж.2.8})$$

производная $T_1^{(0)u}$ по радиальной координате представится как

$$\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} = -\sqrt{p} \frac{K_1(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}, \quad \frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\sqrt{p} k T^{(0)u}, \quad (\text{Ж.2.9})$$

где $k = k(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$. С учетом (Ж.2.9) уравнение (Ж.2.3) для определения $T^{(0)u}$ можно представить как простое алгебраическое

$$pT^{(0)u} - \text{Pev}(1 - \text{H}) - 2Q_1^u(1, p) = -2\chi k \sqrt{p} T^{(0)u}, \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.10})$$

Решение уравнения (Ж.2.10) представится в форме

$$T^{(0)u} = \frac{\text{Pev}(1 - \text{H}) + 2Q_1^u(1, p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}}, \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.11})$$

Подставив (Ж.2.11) в (Ж.2.8), получим решение для внешней области

$$T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left(\frac{\text{Pev}(1 - \text{H}) + 2Q_1^u(1, p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}} \right), \quad r > 1. \quad (\text{Ж.2.12})$$

Выражения (Ж.2.11) и (Ж.2.12) представляют решение задачи в нулевом приближении в пространстве изображений.

Ж.2.2. Решение задачи для первого коэффициента разложения

В пространстве изображений Лапласа – Карсона задача для первых коэффициентов разложения (Ж.1.36)–(Ж.1.40) примет вид

$$pT_1^{(1)u} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad (\text{Ж.2.13})$$

$$p(T^{(1)u} - T^{(1)}(\text{Fo}=0)) + \Lambda \frac{1-2r^2}{8\chi} p[pT^{(0)u} - \text{Pev}(1-\text{H}) - 2Q_1(1,0)] + \quad (\text{Ж.2.14})$$

$$+ \frac{\Lambda}{\chi} p[Q_2^u(r, p) - 2Q_3^u(1, p) - Q_2(r, 0) + 2Q_3(1, 0)] = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1,$$

$$T^{(1)u} \Big|_{r=1} = T_1^{(1)u} \Big|_{r=1}, \quad (\text{Ж.2.15})$$

$$T_1^{(1)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{Ж.2.16})$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle T^{(1)u} \rangle = 0. \quad (\text{Ж.2.17})$$

Решение уравнения (Ж.2.13) выражается через функции Бесселя нулевого порядка. По аналогии с нулевым приближением представим решение для пласта и его производной на границе $r = 1$ в форме

$$T_1^{(1)u} = T^{(1)u} \Big|_{r=1} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}, \quad \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\sqrt{p}kT^{(1)u} \Big|_{r=1}. \quad (\text{Ж.2.18})$$

Подставляя (Ж.2.18) в (Ж.2.14), получим уравнение для нахождения $T^{(1)u}$

$$p(T^{(1)u} - T^{(1)}(\text{Fo}=0)) + \Lambda \frac{1-2r^2}{8\chi} p [pT^{(0)u} - \text{Pev}(1-\text{H}) - 2Q_1(1,0)] + \frac{\Lambda}{\chi} p [Q_2^u(r,p) - 2Q_3^u(1,p) - Q_2(r,0) + 2Q_3(1,0)] = -2\chi k \sqrt{p} T^{(1)u} \Big|_{r=1}. \quad (\text{Ж.2.19})$$

Для нахождения $B^u(p)$ из (Ж.1.33) воспользуемся выражением для $T^{(1)u}$ в пространстве изображений

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \frac{r^2}{4} [pT^{(0)u} - \text{Pev}(1-\text{H})] - Q_2^u(r,p) \right\} + B^u(p). \quad (\text{Ж.2.20})$$

Выражение для производной по безразмерному времени от нулевого коэффициента разложения в начальный момент времени находится с использованием (Ж.2.11) с помощью теоремы о соответствиях [66]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial \text{Fo}}(\text{Fo}=0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} pT^{(0)u} = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{\text{Pev}(1-\text{H}) + 2Q_1^u(1,p)}{p + 2\chi k \sqrt{p}} = \\ &= \text{Pev}(1-\text{H}) + 2Q_1(1,0), \quad r < 1. \end{aligned}$$

Аналогично найдем выражение для $T^{(1)}(\text{Fo}=0)$

$$T^{(1)}(\text{Fo}=0) = \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \frac{r^2}{2} Q_1(1,0) - Q_2(r,0) \right\} + B(\text{Fo}=0).$$

Окончательно представим выражение для $B^u(p)$ следующим образом:

$$B^u(p) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+2\chi k}} B(0) - \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\sqrt{p+4\chi k}}{\sqrt{p+2\chi k}} (pT^{(0)u} - \text{Pev}(1-H)) + \quad (\text{Ж.2.21})$$

$$+ \frac{2\Lambda}{\chi} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+2\chi k}} \left[Q_3^u(1,p) - Q_3(1,0) + \frac{1}{8} Q_1(1,0) \right] + \frac{2\Lambda k}{\sqrt{p+2\chi k}} Q_2^u(1,p).$$

Среднее значение для первого коэффициента разложения в скважине представится в виде

$$\langle T^{(1)u} \rangle = \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \frac{1}{8} (pT^{(0)u} - \text{Pev}(1-H)) - 2Q_3^u(1,p) \right\} + B^u(p). \quad (\text{Ж.2.22})$$

Согласно теореме о соответствиях начальное значение оригиналов при $F_0 = 0$ соотносится бесконечным значениям параметра p в изображениях, поэтому из (Ж.2.22) и (Ж.2.17) получим выражение для $B(0)$

$$B(0) = \frac{2\Lambda}{\chi} \left[Q_3(1,0) - \frac{1}{8} Q_1(1,0) \right]. \quad (\text{Ж.2.23})$$

Подставив (Ж.2.23) в (Ж.2.21), определим значение коэффициента $B^u(p)$ в пространстве изображений

$$B^u(p) = -\frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\sqrt{p+4\chi k}}{\sqrt{p+2\chi k}} (pT^{(0)u} - \text{Pev}(1-H)) + \quad (\text{Ж.2.24})$$

$$+ \frac{2\Lambda}{\chi} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+2\chi k}} Q_3^u(1,p) + \frac{2\Lambda k}{\sqrt{p+2\chi k}} Q_2^u(1,p).$$

Полученное выражение позволяет представить соотношение для первого коэффициента в изображениях (Ж.2.20) в виде

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \frac{r^2}{4} (pT^{(0)u} - \text{Pev}(1-H)) - Q_2^u(r,p) \right\} - \quad (\text{Ж.2.25})$$

$$- \frac{\Lambda}{8\chi} \frac{\sqrt{p+4\chi k}}{\sqrt{p+2\chi k}} (pT^{(0)u} - \text{Pev}(1-H)) +$$

$$+ \frac{2\Lambda}{\chi(\sqrt{p+2\chi k})} (\sqrt{p} Q_3^u(1,p) + \chi k Q_2^u(1,p)).$$

С учетом (Ж.2.10) преобразуем выражение (Ж.2.25)

$$T^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{2r^2 - 1}{4} - \frac{\chi k}{2(\sqrt{p} + 2\chi k)} \right) (Q_1^u(1, p) - \chi k \sqrt{p} T^{(0)u}) - \frac{\Lambda}{\chi} Q_2^u(r, p) + \frac{2\Lambda}{\chi(\sqrt{p} + 2\chi k)} (\sqrt{p} Q_3^u(1, p) + \chi k Q_2^u(1, p)).$$

Согласно (Ж.2.25) и (Ж.2.18) выражение для температуры в окружающей скважину среде представится как

$$T_1^{(1)u} = \frac{\Lambda}{\chi} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left\{ \frac{\sqrt{p}}{4(\sqrt{p} + 2\chi k)} (Q_1^u(1, p) - \chi k \sqrt{p} T^{(0)u}) - Q_2^u(1, p) + \frac{2}{\sqrt{p} + 2\chi k} (\sqrt{p} Q_3^u(1, p) + \chi k Q_2^u(1, p)) \right\}. \quad (\text{Ж.2.26})$$

В отсутствие источников выражение для первого коэффициента разложения в скважине представляется как

$$T^{(1)u} = - \left[\frac{2r^2 - 1}{4} - \frac{\chi k}{2(\sqrt{p} + 2\chi k)} \right] \Lambda k \sqrt{p} T^{(0)u}. \quad (\text{Ж.2.27})$$

Подставив (Ж.2.27) в (Ж.2.18), определим первый коэффициент разложения во внешней среде

$$T_1^{(1)u} = - \frac{\Lambda}{4} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \frac{kp}{\sqrt{p} + 2\chi k} T^{(0)u}. \quad (\text{Ж.2.28})$$

Выражения (Ж.2.27) и (Ж.2.28) представляют решение задачи для первого коэффициента разложения, где $T^{(0)u}$ определяется выражением (Ж.2.11). Итак, «в среднем точное» решение при отсутствии источников в изображениях в первом приближении представляется как

$$T^{1u} = \frac{\text{Re}v(1 - \text{H})}{p + 2\chi k \sqrt{p}} \left\{ 1 - \Lambda \left[\frac{2r^2 - 1}{4} - \frac{\chi k}{2(\sqrt{p} + 2\chi k)} \right] k \sqrt{p} \right\}, \quad r < 1, \quad (\text{Ж.2.29})$$

$$T_1^{1u} = \frac{\text{Re}v(1 - \text{H})}{p + 2\chi k \sqrt{p}} \left\{ 1 - \frac{\Lambda kp}{4(\sqrt{p} + 2\chi k)} \right\} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}, \quad r > 1. \quad (\text{Ж.2.30})$$

Заметим, что решения (Ж.2.27), (Ж.2.28) без учета источников, в отличие от выражений (Ж.2.25), (Ж.2.26), позволяют указать на отсутствие погранслоя вблизи точки $\text{Fo} = 0$. Для этого достаточно устремить параметр пре-

образования Лапласа – Карсона p к бесконечности. Равенство нулю соответствующих пределов означает выполнение нулевых начальных условий задачи для первого коэффициента $T^{(1)}|_{F_0=0} = 0$, что свидетельствует об отсутствии погранслоя.

Из сопоставления решений в нулевом (Ж.2.11), (Ж.2.12) и первом (Ж.2.27), (Ж.2.28) приближениях следует, что решение в нулевом приближении в скважине не зависит от радиальной координаты и описывает осредненные по сечению скважины значения температуры. Радиальные распределения температуры в скважине описываются только в первом и более высоких приближениях. В этом смысле получение решения в первом приближении является необходимым для детального описания температурного поля в скважине. Для разности температуры между любой точкой внутри скважины и стенкой согласно (Ж.2.25) получим выражение

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \frac{1-r^2}{2} (\chi k \sqrt{p} T^{(0)u} - Q_1^u(1, p)) + Q_2^u(1, p) - Q_2^u(r, p) \right\}.$$

Из (Ж.2.25) с учетом (Ж.2.11) имеем

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \frac{1-r^2}{2} \left(\chi k \frac{\operatorname{Re} \nu(1-H) + 2Q_1^u(1, p)}{\sqrt{p+2\chi k}} - Q_1^u(1, p) \right) + Q_2^u(1, p) - Q_2^u(r, p) \right\}. \quad (\text{Ж.2.31})$$

В отсутствие источников из (Ж.2.31) следует выражение для радиального профиля температуры в скважине

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}(r=1) = \Lambda \frac{1-r^2}{2} k \sqrt{p} T^{(0)u} = \Lambda k \frac{\operatorname{Re} \nu(1-H)}{\sqrt{p+2\chi k}} \frac{1-r^2}{2}. \quad (\text{Ж.2.32})$$

Из (Ж.2.31) также следуют стационарные распределения при наличии источников

$$T - T(r=1) = \frac{\Lambda}{\chi} \left\{ \text{Pev}(1 - \text{H}) \frac{1 - r^2}{4} + Q_2(1, \infty) - Q_2(r, \infty) \right\}, \quad (\text{Ж.2.33})$$

и их отсутствии

$$T - T(r=1) = \text{Pev}(1 - \text{H}) \frac{\Lambda}{4\chi} (1 - r^2). \quad (\text{Ж.2.34})$$

Из (Ж.2.34) следует, что в отсутствие источников и при постоянной по сечению скорости течения жидкости профиль температуры в скважине параболически зависит от радиальной координаты.

Ж.2.3. Построение погранслойной функции

Решение рассматриваемой задачи содержит погранслой при $\text{Fo} = 0$, который обусловлен наличием источников тепла. Действительно, значения первого приближения в этой точке отличаются от нуля

$$T^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{2r^2 - 1}{4} Q_1(1,0) + 2Q_3(1,0) - Q_2(r,0) \right) \neq 0, \quad (\text{Ж.2.35})$$

то есть, построенное выше решение не удовлетворяет условию $T^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0$.

Погранслойное решение, устраняющее этот недостаток температурного поля в скважине, построено аналогично Приложению Д.

$$\Pi^{(1)} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n)} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \text{Fo}\right) \int_0^1 r T^{(1)} \Big|_{\text{Fo} \rightarrow 0} J_0(\mu_n r) dr, \quad (\text{Ж.2.36})$$

где $T^{(1)} \Big|_{\text{Fo} \rightarrow 0}$ определяется соотношением (Ж.2.21).

Ж.2.4. Простейшие приближенные решения

Для окончательного решения задачи необходимо выполнить переход в пространство оригиналов, который осуществляется по формуле обратного преобразования Лапласа – Карсона [68]

$$T_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \frac{T_j^u(p)}{p} dp. \quad (\text{Ж.2.37})$$

Заметим, что обратный переход в пространство оригиналов может быть осуществлен численно с помощью пакетов программ для современных ЭВМ.

Полученные решения позволяют построить расчетные формулы для температурных полей в скважинах также с использованием справочных соотношений [68], покажем это на нескольких примерах. Получению оригиналов решения для больших p (или малых Fo) благоприятствует сходное асимптотическое поведение функции Бесселя $K_1(\sqrt{p})$ и $K_0(\sqrt{p})$. Действительно, для больших значений аргумента $K_1(\sqrt{p}) \cong \sqrt{\pi/(2\sqrt{p})} \exp(-\sqrt{p})$, $K_0(\sqrt{p}) \cong \sqrt{\pi/(2\sqrt{p})} \exp(-\sqrt{p})$, поэтому их отношение можно положить равным единице. Так для относительно малых времен в скважине имеем $k \sim 1$, поэтому решение в скважине при отсутствии источников в нулевом (Ж.2.11) и первом (Ж.2.12) приближениях имеет вид

$$T^{(0)u} = \frac{\text{Re}v(1-H)}{p + 2\chi\sqrt{p}} = \frac{\text{Re}v(1-H)}{2\chi} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p} + 2\chi} \right), \quad r < 1, \quad (\text{Ж.2.38})$$

$$T^{(1)u} = -\frac{\Lambda \text{Re}v(1-H)}{4} \frac{1}{\sqrt{p} + 2\chi} \left(2r^2 - 1 - \frac{2\chi}{\sqrt{p} + 2\chi} \right), \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.39})$$

С учетом полученных выражений для нулевого и первого коэффициентов разложения первое приближение для исходной задачи в изображениях представится как

$$T^{1u} = \frac{\text{Re}v(1-H)}{p + 2\chi\sqrt{p}} \left[1 - \frac{\lambda_{1r}}{4\lambda_r} \left(2r^2 - 1 - \frac{2\chi}{\sqrt{p} + 2\chi} \right) \sqrt{p} \right], \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.40})$$

В (Ж.2.40) учтено, что выражение для Λ имеет вид $\Lambda = \lambda_{1r} / \lambda_r$.

Оригинал решения (Ж.2.38) легко найти с использованием известных соотношений для обратного преобразования Лапласа – Карсона

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \rightarrow 2\sqrt{\frac{Fo}{\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{p} + 2\chi} \rightarrow \frac{1}{2\chi} \left[1 - \exp(4\chi^2 Fo) \text{erfc}(2\chi\sqrt{Fo}) \right]. \quad (\text{Ж.2.41})$$

Это позволяет представить выражение для нулевого приближения температуры в форме

$$T^{(0)} = \frac{\text{Pe}\nu(1-H)}{\chi} \left\{ \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} - \frac{1}{4\chi} \left[1 - \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right] \right\}, \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.42})$$

С помощью (Ж.2.41) оригинал выражения (Ж.2.38) для относительно малых времен $k \sim 1$ представляется как

$$T^{(1)} - T^{(1)}(r=1) = \Lambda \text{Pe}\nu(1-H) \frac{1-r^2}{4\chi} \left[1 - \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right], \quad (\text{Ж.2.43})$$

из которого при устремлении числа Фурье в бесконечность следует стационарный профиль температуры (Ж.2.34).

Если дополнительно учесть следующее соотношение:

$$\frac{1}{(\sqrt{p} + 2\chi)^2} \rightarrow \frac{1}{4\chi^2} + \left(2\text{Fo} - \frac{1}{4\chi^2} \right) \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) - \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}}, \quad (\text{Ж.2.44})$$

то оригинал для первого коэффициента разложения (Ж.2.37) представится как

$$T^{(1)} = \frac{\text{Pe}\nu(1-H)\Lambda}{\chi} \left\{ \frac{1-r^2}{4} \left[1 - \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right] + \right. \\ \left. + \chi \text{Fo} \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) - \frac{\chi}{2} \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} \right\}, \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.45})$$

Выражение для первого приближения решения внутри трубы, согласно (Ж.2.38), (Ж.2.40) и (Ж.2.43), имеет вид

$$T^1 = \frac{\text{Pe}\nu(1-H)}{\chi} \left\{ \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} + \left(\frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r} \frac{1-r^2}{4} - \frac{1}{4\chi} \right) \left[1 - \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r} \left(\chi \text{Fo} \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) - \frac{\chi}{2} \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} \right) \right\}, \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.46})$$

Полученные на основе асимптотического метода выражения позволяют рассчитывать температурные поля в скважине для относительно малых времен.

Для малых значений параметра p или больших времен имеет место асимптотическое представление для бесселевых функций $K_1(\sqrt{p}) \approx 1/\sqrt{p}$, $K_0(\sqrt{p}) \approx -\ln(\gamma\sqrt{p}/2)$ получим выражение для коэффициента k :

$k = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p}) \approx -\{\sqrt{p} [C + \ln(\sqrt{p}/2)]\}^{-1}$. Для нулевого приближения (Ж.2.11) в этом случае получим приближенную формулу, справедливую при больших значениях параметра p

$$T^{(0)u} \approx \frac{\text{Pev}(1 - H)}{p - 2\chi[C + \ln(\sqrt{p}/2)]^{-1}} \approx -\frac{\text{Pev}(1 - H)(2C - 2\ln 2 + \ln p)}{4\chi}, \quad (\text{Ж.2.47})$$

оригинал которой с использованием соответствия

$$-\ln \gamma p \rightarrow \ln F_0 \quad (\text{Ж.2.48})$$

можно представить в виде

$$T^{(0)} \approx \text{Pev}(1 - H) \frac{\ln 4F_0 - C}{4\chi}, \quad r < 1, \quad (\text{Ж.2.49})$$

где $C = \ln(\gamma) = 0.577$ – постоянная Эйлера.

Для построения оригинала первого приближения при больших значениях времени воспользуемся следующими преобразованиями и соответствиями:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sqrt{p} + 2\chi k} &\approx -\frac{1}{p[C + \ln(\sqrt{p}/2)] - 2\chi} \approx -\frac{2}{p(\ln p + 2C - \ln 4) - 4\chi} \approx \\ &\approx \frac{2}{4\chi - p \ln p} \approx \frac{1}{2\chi} \left(1 + \frac{p \ln p}{4\chi}\right) \rightarrow \frac{1}{2\chi} \left(1 - \frac{1}{4\chi F_0}\right), \end{aligned} \quad (\text{Ж.2.50})$$

$$\left(\frac{k}{\sqrt{p} + 2\chi k}\right)^2 \approx \frac{1}{4\chi^2} \left(1 + \frac{p \ln p}{4\chi}\right)^2 \approx \frac{1}{4\chi^2} \left(1 + \frac{p \ln p}{2\chi}\right) \rightarrow \frac{1}{4\chi^2} \left(1 - \frac{1}{2\chi F_0}\right). \quad (\text{Ж.2.51})$$

Изображение первого коэффициента

$$T^{(1)u} = -\left[\frac{2r^2 - 1}{4} - \frac{\chi k}{2(\sqrt{p} + 2\chi k)}\right] \Lambda k \sqrt{p} T^{(0)u} \quad (\text{Ж.2.52})$$

с использованием значения для нулевого коэффициента представим как

$$T^{(1)u} = -\frac{1}{4} \frac{\text{Pev}(1 - H) \Lambda k}{\sqrt{p} + 2\chi k} \left(2r^2 - 1 - \frac{2\chi k}{\sqrt{p} + 2\chi k}\right), \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.53})$$

Из (Ж.2.38) с использованием выражений (Ж.2.48), (Ж.2.49) легко получить следующее асимптотическое выражение первого коэффициента для больших значений времени

$$T^{(1)} = \frac{\text{Pev}(1-H)\Lambda}{4\chi} \left(1 - r^2 + \frac{2r^2 - 3}{8\chi\text{Fo}} \right), \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.54})$$

Воспользовавшись формулами (Ж.2.47) и (Ж.2.52) можно получить следующую простую асимптотическую формулу в первом приближении для больших времен:

$$T^1 = \frac{\text{Pev}(1-H)}{4\chi} \left[\ln 4\text{Fo} - C + \frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r} \left(1 - r^2 - \frac{3 - 2r^2}{8\chi\text{Fo}} \right) \right], \quad r < 1. \quad (\text{Ж.2.55})$$

Из выражения (Ж.2.51), как и из (Ж.2.53), следует стационарный радиальный профиль температуры в скважине

$$T^1 - T_w^1 = \frac{\text{Pev}(1-H)\Lambda}{4\chi} (1 - r^2), \quad (\text{Ж.2.56})$$

где T_w^1 – температура стенки трубы. Отметим, что все развитые ранее другими исследователями модели температурных полей в скважине в принципе не позволяют определить радиальную зависимость температуры.

Полученные на основе асимптотического метода выражения для малых (Ж.2.40), (Ж.2.41), (Ж.2.44) и больших (Ж.2.47), (Ж.2.52)–(Ж.2.54) значений времени позволяют рассчитывать температурные поля в скважине с достаточной для практических целей точностью.

Выражения для температурного поля в окружающей скважину среде более сложны, поскольку включают множитель в виде отношения бесселевых функций. Для построения оригиналов воспользуемся соотношением, найденным в [94]

$$\frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \rightarrow \varphi(\text{Fo}) = 1 + \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \exp(-u^2\text{Fo}) \frac{J_0(ur)Y_0(u) - J_0(u)Y_0(ru)}{Y_0^2(u) + J_0^2(u)} \frac{du}{u}. \quad (\text{Ж.2.57})$$

Преобразуем выражение для нулевого коэффициента в окружающей среде

$$T_1^{(0)u} = \frac{\text{Pev}(1 - \text{H}) K_0(r\sqrt{p})}{p + 2\chi\sqrt{p}} \frac{K_0(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \quad (\text{Ж.2.58})$$

для относительно малых значений времени $k \approx 1$ так, чтобы можно было воспользоваться известным выражением для свертки

$$f(p)g(p)/p \rightarrow \int_0^{\text{Fo}} f(\text{Fo} - \tau)g(\tau)d\tau$$

$$T_1^{(0)u} = \text{Pev}(1 - \text{H}) \frac{1}{p} \frac{p}{p + 2\chi\sqrt{p}} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}. \quad (\text{Ж.2.59})$$

С помощью соответствия

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + 2\chi} \rightarrow \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \quad (\text{Ж.2.60})$$

легко найти искомый оригинал для нулевого приближения в окружающем скважину массиве горных пород

$$T_1^{(0)u} = \text{Pev}(1 - \text{H}) \int_0^{\text{Fo}} \varphi(\text{Fo} - \tau) \exp(4\chi^2\tau) \text{erfc}(2\chi\tau) d\tau, \quad (\text{Ж.2.61})$$

где функция $\varphi(\text{Fo})$ определяется выражением (Ж.2.55). С учетом значения этой функции нулевое приближение температурного поля в окружающем скважину массиве $r > 1$ можно представить в виде

$$T_1^{(0)} = \text{Pev}(1 - \text{H}) \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\text{Fo}} \int_0^{\infty} \exp(-u^2(\text{Fo} - \tau)) \frac{J_0(ru)Y_0(u) - J_0(u)Y_0(ru)}{Y_0^2(u) + J_0^2(u)} \frac{du}{u} \times \right. \\ \left. \times \exp(4\chi^2\tau) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\tau}) d\tau + \frac{1}{\chi} \left\{ \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} - \frac{1}{4\chi} [1 - \exp(4\chi^2\text{Fo}) \text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}})] \right\} \right). \quad (\text{Ж.2.62})$$

Аналогично для первого коэффициента в окружающей скважину среде

$$T_1^{(1)u} = -\text{Pev}(1 - \text{H}) \Lambda \frac{1}{p} \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \frac{p\sqrt{p}}{4(\sqrt{p} + 2\chi)^2} \quad (\text{Ж.2.63})$$

с использованием соответствия

$$\frac{p\sqrt{p}}{(\sqrt{p} + 2\chi)^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi\text{Fo}}} - \quad (\text{Ж.2.64})$$

$$-4\chi(1+4\chi^2\text{Fo})\exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}})+8\chi^2\sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}},$$

являющегося следствием следующих двух:

$$\frac{p}{\sqrt{p+2\chi}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi\text{Fo}}} - 2\chi \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}), \quad (\text{Ж.2.65})$$

$$\frac{p}{(\sqrt{p+2\chi})^2} \rightarrow (1+8\chi^2\text{Fo})\exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) - 4\chi\sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}},$$

при $r > 1$ получим

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} = & -\frac{\text{Pev}(1-\text{H})\Lambda}{4} \left(\int_0^{\text{Fo}} \varphi_1(\text{Fo}-\tau, r) \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - \right. \\ & \left. -4\chi(1+4\chi^2\tau)\exp(4\chi^2\tau)\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) + \right. \\ & \left. +8\chi^2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}d\tau + 2\sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} - 4\chi\text{Fo} \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right), \quad r > 1, \end{aligned} \quad (\text{Ж.2.66})$$

где

$$\varphi_1(\text{Fo}, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-u^2\text{Fo}) \frac{J_0(ur)Y_0(u) - J_0(u)Y_0(ru)}{Y_0^2(u) + J_0^2(u)} \frac{du}{u}. \quad (\text{Ж.2.67})$$

С использованием найденных нулевого и первого коэффициентов найдем выражение для первого приближения при относительно малых значениях времени

$$\begin{aligned} T_1^1 = & \text{Pev}(1-\text{H}) \left\{ \int_0^{\text{Fo}} \varphi_1(\text{Fo}-\tau, r) \exp(4\chi^2\tau)\text{erfc}(2\chi\sqrt{\tau}) \right\} - \\ & -\frac{\Lambda}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - 4\chi(1+4\chi^2\tau)\exp(4\chi^2\tau)\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) - 8\chi^2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\chi} \left\{ \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} - \frac{1}{4\chi} [1 - \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}})] \right\} - \\ & - \frac{\Lambda}{4} \left[2\sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} - 4\chi\text{Fo} \exp(4\chi^2\text{Fo})\text{erfc}(2\chi\sqrt{\text{Fo}}) \right] \}. \end{aligned} \quad (\text{Ж.2.68})$$

Полученные выше выражения представляют приближенные решения задачи для нулевого и первого приближений в предположении выровненного профиля скорости.

При помощи формул (2.1.1) полученные выражения для температуры в скважине в первом приближении для относительно малых (Ж.2.46) и больших (Ж.2.55) значений времени можно привести к размерному виду

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{\nu r_0^2 c \rho}{\lambda_{1r}} \Gamma \left(1 - \frac{\eta \rho g}{\Gamma} \right) \left\{ \sqrt{\frac{\tau \lambda_{1r}}{\pi r_0^2 c_1 \rho_1}} + \left(\frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r} \frac{D^2 - 2r_d^2}{8D^2} - \frac{c \rho}{4c_1 \rho_1} \right) \times \right. \\ & \times \left[1 - \exp \left(4 \frac{\tau \lambda_{1r} c_1 \rho_1}{r_0^2 c^2 \rho^2} \right) \times \operatorname{erfc} \left(\frac{2}{c \rho r_0} \sqrt{\tau c_1 \rho_1 \lambda_{1r}} \right) \right] + \\ & + \frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r} \frac{c_1 \rho_1}{2c \rho} \left[\frac{c_1 \rho_1}{4c \rho} + \left(\frac{2\tau \lambda_{1r}}{r_0^2 c \rho} - \frac{c_1 \rho_1}{4c \rho} \right) \exp \left(4 \frac{\tau \lambda_{1r} c_1 \rho_1}{r_0^2 c^2 \rho^2} \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times \operatorname{erfc} \left(\frac{2}{c \rho r_0} \sqrt{\tau \lambda_{1r} c_1 \rho_1} \right) - \sqrt{\frac{\tau \lambda_{1r}}{c_1 \rho_1 r_0^2 \pi}} \right] \right\} + \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad r_d < r_0, \quad \tau > 0, \end{aligned} \quad (\text{Ж.2.69})$$

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{\nu r_0^2 c \rho}{4\lambda_{1r}} \Gamma \left(1 - \frac{\eta \rho g}{\Gamma} \right) \left\{ \ln \left(4 \frac{\tau \lambda_{1r}}{r_0^2 c_1 \rho_1} \right) - C + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_{1r}}{8\lambda_r} \left[1 + \frac{2r_d^2 - r_0^2}{r_0^2 c_1 \rho_1} c \rho \left(4 \frac{c_1 \rho_1}{c \rho} - \frac{r_0^2 c_1 \rho_1}{\tau \lambda_{1r}} \right) \right] \right\} + \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad r_d < r_0, \quad \tau > 0. \end{aligned} \quad (\text{Ж.2.70})$$

Выражения (Ж.2.69), (Ж.2.70) представляют собой размерные расчетные формулы для температурного поля в скважине в малых и больших временах соответственно.

Ж.2.5. Точное решение задачи

При решении задачи асимптотическими методами возникает вопрос о близости точного и асимптотического решений. Достоверность развитого метода может быть обоснована сопоставлением полученных асимптотических решений с коэффициентами разложения точного решения параметризованной задачи в ряд Маклорена по формальному параметру. Представленный

частный случай допускает точное решение задачи (Ж.1.7)–(Ж.1.12) в пространстве изображений Лапласа – Карсона

$$pT_1^u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^u}{\partial r} \right), \quad (\text{Ж.2.71})$$

$$pT^u = \frac{\chi}{\Lambda \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^u}{\partial r} \right) + \text{Pev}(1 - \text{H}), \quad (\text{Ж.2.72})$$

$$T^u|_{r=1} = T_1^u|_{r=1}, \quad \frac{\partial T^u}{\partial r}|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1^u}{\partial r}|_{r=1}, \quad T_1^u|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (\text{Ж.2.73})$$

Решения задачи (Ж.2.71)–(Ж.2.73) имеют вид

$$T^u = \frac{\text{Pev}(1 - \text{H})}{p} \left[1 - \frac{\sqrt{\varepsilon \Lambda \chi} k I_0(r \sqrt{\varepsilon p \Lambda / \chi})}{\left[I_1(\sqrt{\varepsilon p \Lambda / \chi}) + \sqrt{\varepsilon \Lambda \chi} k I_0(\sqrt{\varepsilon p \Lambda / \chi}) \right]} \right], \quad (\text{Ж.2.74})$$

$$T_1^u = \frac{K_0(r \sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \frac{\text{Pev}(1 - \text{H})}{p} \left[1 - \frac{\sqrt{\varepsilon \Lambda \chi} k I_0(r \sqrt{\varepsilon p \Lambda / \chi})}{\left[I_1(\sqrt{\varepsilon p \Lambda / \chi}) + \sqrt{\varepsilon \Lambda \chi} k I_0(\sqrt{\varepsilon p \Lambda / \chi}) \right]} \right]. \quad (\text{Ж.2.75})$$

Нетрудно убедиться, что T^u при $\varepsilon \rightarrow 0$ совпадает с выражением (Ж.2.11), а $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial T^u}{\partial \varepsilon}$ – с выражением (Ж.2.27) для первого коэффициента разложения. Такое сопоставление является прямой проверкой справедливости развитого выше метода решения задач сопряжения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абдибеков, У.С. Численное моделирование турбулентного течения в канале /У.С. Абдибеков// Вычислительные технологии. – Т. 12. – № 5. – 2007. – С. 16–23.
2. Аксёнов, Б.Г. Решение осесимметричных задач тепломассообмена с фазовым переходом во влажных дисперсных материалах / Б.Г. Аксёнов, В.В. Фомина // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – № 1. – 2012. – С. 44–51.
3. Александров, Е.Н. Нагрев нефтеносного пласта и оптимизация режима добычи углеводородов из скважин истощенных месторождений / Е.Н. Александров, М. Гудвин, Н.М. Кузнецов // Георесурсы. – № 4 (21). – 2006. – С. 2–5.
4. Алиев, З.С. Состояние изученности и необходимость разработки новых методов и технологий по исследованию вертикальных и горизонтальных газовых скважин / З.С. Алиев // Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. – № 1. – 2011.– С. 75–87.
5. Анаников, С.В. Нестационарное температурное поле в жидкости, перемещаемой в радиально-расходящемся канале / С.В. Анаников // Вестник Казанского технологического университета. – Т. 16. – № 8. – 2013. – С. 89–96.
6. Анаников, С.В. Об одной прямой задаче теплопроводности / С.В. Анаников // Вестник Казанского технологического университета. – Т. 18. – № 18. – 2015. – С. 189–190.
7. Антониади, Д.Г. Настольная книга по термическим методам добычи нефти / Д.Г. Антониади, А.Р. Гарушев, В.Г. Ишханов – Краснодар: Советская Кубань, 2000. – 464 с.
8. Аргунова, К.К. Тепловое взаимодействие нефтедобывающих скважин с многолетнемерзлыми горными породами / Аргунова К.К., Бондарев Э.А., Рожин И.И. // Наука и образование. – № 4. – 2008. – С. 78–83.

9. Ахмедов, С.А. Влияние слоистой неоднородности пласта на показатели разработки при неизотермическом вытеснении парафинистой нефти водой / С.А. Ахмедов, З.Х. Ахмедова, Х.Г. Ахмедова // Вестник Астраханского государственного технического университета. – № 1 (61). – 2016. – С. 14–21.
10. Ахметова, О.В. Представление зависимости коэффициента теплопроводности нефти и осадочных пород от температуры в виде линейной функции / О.В. Ахметова // Естественные и математические науки в современном мире. – № 11 (46). – 2016. – С. 61–68.
11. Ахметова, О.В. Квазистационарные поля давления при линейной фильтрации в неоднородном анизотропном пласте в асимптотическом приближении / О.В. Ахметова, А.И. Филиппов, И.М. Филиппов // Механика жидкости и газа. – № 3. – 2012. – С. 89–100.
12. Ахметова, О.В. Использование асимптотического метода для решения задач фильтрации / О.В. Ахметова // Тезисы докладов Международной научно-технической конференции. Наука. Технология. Производство 2015. – Салават, 2015. – С. 127–129.
13. Ахметова, О.В. Новый метод исследования полей давления в неоднородном ортотропном пористом пласте / О.В. Ахметова, П.Н. Михайлов, И.М. Филиппов // Вестник Башкирского университета. – Т18. – № 2. – 2013. – С. 363–366.
14. Ахметова, О.В. Нулевое асимптотическое приближение в задаче о поле давления с переменными коэффициентами / О.В. Ахметова, М.Р. Губайдуллин, Р.В. Сираев, Е.Н. Фаттахова // Естественные и математические науки в современном мире. – № 6 (41). – 2016. – С. 91–99.
15. Ахметова, О.В. Плотность и давление реального газа в стволе действующей скважины / О.В. Ахметова, А.Г. Крупинов // сбор. науч. тр. по мат. Междунар. науч.-практ. конф. «Тенденции развития научных исследований». – Киев, 2010. – С. 102–105.

16. Ахметова, О.В. Радиально неинвариантные распределения температуры в вертикальном потоке жидкости в скважине / О.В. Ахметова, М.А. Горюнова, Н.Я. Хасанов // тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». – Т.3. – Уфа, 2008. – С. 174–179.
17. Ахметова, О.В. Распределение плотности и давления по стволу газовой скважины / О.В. Ахметова, А.Г. Крупинов // сбор. мат. VIII Междунар. науч.-практич. конф. «Наука и современность – 2011». – Новосибирск, 2011. – С. 63–67.
18. Ахметова, О.В. Расчет температурных полей при течении флюида в скважинах на основе асимптотических разложений: дис. ... к. ф.-м. н.: 05.13.18 / О.В. Ахметова – Стерлитамак, 2005. – 125 с.
19. Ахметова, О.В. Расчеты поля давления стационарного потока газа в скважине / О.В. Ахметова, А.Г. Крупинов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – Т.7. – № 11.1. – 2011. – С. 133–137.
20. Ахметова, О.В. Расчеты радиальных распределений температуры турбулентного потока в вертикальной трубе / О.В. Ахметова // Современная парадигма науки и образования: сб. мат. всерос. науч.-практ. конф. – Уфа, 2010. – С. 416–418.
21. Ахметова, О.В. Решение задачи о температурном поле в скважине для различных режимов течения / О.В. Ахметова, М.А. Горюнова, А.С. Родионов // ВНКСФ 16: Шестнадцатая всерос. науч. конф. студ.-физиков и молод. уч.: мат. конф., информ. бюл. – Волгоград, 2010. – С. 43–44.
22. Ахметова, О.В. Нестационарное температурное поле в слоисто-неоднородной ортотропной пористой среде / О.В. Ахметова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – Т.2. – № 3. – 2016. – С. 10–23.
23. Ахметова, О.В. Температурные поля в трубах переменного радиуса / О.В. Ахметова, А.С. Родионов // сб. тр. всерос. молодеж. науч. конф.: Мавлютовские чтения. – Т.5. – Уфа, 2010. – С. 171–172.

24. Ахметова, О.В., Моделирование динамики температурных меток в стволе скважины / О.В. Ахметова, А.М. Ибатуллин // тез. докл. межвуз. науч.-технич. конф. студ., асп. и молод. учен. «Наука. Технология. Производство». – Салават, 2012. – С. 122–123.
25. Багдерина, Ю.Ю. Приближенно инвариантные решения дифференциальных уравнений с малым параметром / Ю.Ю. Багдерина, Р.К. Газизов // Дифференциальные уравнения. – Т.41. – № 3. – 2005. – С. 347–355.
26. Бадертдинова, Е.Р. Термогидродинамические исследования вертикальных нефтяных скважин / Бадертдинова Е.Р., Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н. // Теплофизика высоких температур. – Т.49. – № 5. – 2011. – С. 795–798.
27. Бадертдинова, Е.Р. Термогидродинамические методы исследования скважин, вскрывших слоистые пласты, на основе теории регуляризации / Е.Р. Бадертдинова // мат. X междунар. конф. «Сеточные методы для краевых задач и приложения». – Казань, 2014. – С. 97–102.
28. Бан, А. Об основных уравнения фильтрации в сжимаемых пористых средах / А. Бан, К.С. Басниев, В.Н. Николаевский // Прикладная механика и техническая физика. – № 3. – 1961. – С. 52–57.
29. Баранова, З.Н. Нефти СССР. Справочник. Том 1. Нефти северных районов Европейской части СССР и Урала / З.Н. Баранова и др. – М.: Химия, 1971. – 504 с.
30. Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик – М.: Недра, 1984. – 211 с.
31. Баренблатт, Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике / Г.И. Баренблатт – Л.: Гидрометеиздат, 1982. – 256 с.
32. Баренблатт, Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик – М.: Недра, 1972. – 288 с.
33. Баскаков, А.П. Общая теплотехника / А.П. Баскаков, М.И. Гуревич,

- Н.И. Решетин и др. – М.-Л.: Государственное энергетическое издательство, 1963. – 392 с.
34. Басниев, К.С. Нефтегазовая гидромеханика: учебное пособие для вузов / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг – М.-Ижевск: ИКИ, 2005. – 544 с.
35. Басниев, К.С. Подземная гидромеханика / К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов – М.: Недра, 1993. – 416 с.
36. Бахтизин, Р.Н. Исследование процесса теплообмена при свободной конвекции в неоднородных средах / Р.Н. Бахтизин, А.В. Бакиев, Н.Н. Хазиев // Вестник Академии наук Республики Башкортостан. – Т.19. – № 4. – 2014. – С. 44–49.
37. Бахтизин, Р.Н. Построение верхних и нижних оценок для решения задачи стационарной фильтрации в эллиптической области / Р.Н. Бахтизин, Р.Р. Газизов // Инженерно-физический журнал. – Т.55. – № 3. – 1988. – С. 514–515.
38. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований: Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций / Г. Бейтмен, А. Эрдейи – М.: Наука, 1970. – 328 с.
39. Белова, О.В. Метод последовательной смены стационарных состояний для плоскоодномерной задачи фильтрации с предельным градиентом давления / О.В. Белова, В.Ш. Шагапов // Вестник СамГУ – Естественно-научная серия. – № 7 (118). – 2014. – С. 75–84.
40. Бондарев, Э.А. Регулирование работы газовых скважин: возможности математического моделирования / А.Э. Бондарев, К.К. Аргунова // Наука и образование. – № 1. – 2005. – С. 41–45.
41. Боровский, М.Я. Физические свойства горных пород верхней части геологического разреза республики Татарстан: плотность, пористость / М.Я. Боровский, А.С. Борисов, Н.Н. Равилова, Е.Г. Фахрутдинов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Естественные науки. – Т. 153. – № 3. – 2011. – С. 220–229.

42. Борщук, О.С. Нелинейная фильтрация в низкопроницаемых коллекторах. численная схема, анализ устойчивости и сходимости / О.С. Борщук, В.П. Житников // Научно-технический вестник ОАО НК Роснефть. – № 2 (31). – 2013. – С. 13–16.
43. Булгакова, Г.Т. Численное решение прямой и обратной задач термометрии / Г.Т. Булгакова, Р.А. Валиуллин, О.А. Кулагин // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – № 4. – 1997. – С. 31–37.
44. Булыгин, В.Я. Гидромеханика нефтяного пласта / В.Я. Булыгин. – М.: Недра, 1974. – 232 с.
45. Валиуллин, Р.А. Баротермический эффект при трехфазной фильтрации с фазовыми переходами / Р.А. Валиуллин, А.Ш. Рамазанов, Р.Ф. Шарафутдинов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 6. – 1994. – С. 113–116.
46. Валиуллин, Р.А. Исследование радиально-углового распределения температуры при неизотермической двухфазной фильтрации нефти и воды / Р.А. Валиуллин, Р.Ф. Шарафутдинов, А.А. Садретдинов, А.С. Бочков // Прикладная механика и техническая физика. – Т. 49. – № 6 (292). – 2008. – С. 992–997.
47. Валиуллин, Р.А. Определение работающих интервалов горизонтального ствола скважины термогидродинамическими методами / Валиуллин Р.А. и др. // Нефтяное хозяйство.– № 2. – 2004. – С. 88–90.
48. Валиуллин, Р.А. Особенности переходных температурных полей в скважине при опробовании нефтяных пластов / Р.А. Валиуллин, Р.Ф. Шарафутдинов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – № 1. – 1998. – С. 29–35.
49. Валиуллин, Р.А. Термические методы диагностики нефтяных пластов и скважин: дис. ... д. т. н.: 04.00.12 / Р.А. Валиуллин – Тверь, 1996. – 320 с.
50. Варгафтик, Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б. Варгафтик – М.: Наука, 1972. – 721 с.
51. Вафин, Р.Ф. Породы-коллекторы сверхвязких нефтей уфимского ком-

- плекса больше-каменского месторождения и их свойства / Р.Ф. Вафин, А.Г. Николаев, Р.Д. Валеева // Ученые записки Казанского университета. Серия: Естественные науки. – Т. 152. – № 1. – 2010. – С. 215–225.
52. Вахитов, Г.Г. Геотермические методы контроля за разработкой нефтяных месторождений / Г.Г. Вахитов, Ю.П. Гатенберг, В.А. Лутков – М.: Недра, 1984. – 240 с.
53. Вахитов, Г.Г. Термодинамика призабойной зоны нефтяного пласта. / Г.Г. Вахитов, О.Л. Кузнецов, Э.М. Симкин – М.: Недра, 1978. – 216 с.
54. Видин, Ю.В. Нестационарная теплопередача через цилиндрическую стенку / Ю.В. Видин, Д.И. Иванов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – Т. 8. – № 12-1. – 2012. – С. 99–100.
55. Власов, П.А. Квазистационарное температурное поле двухслойного полупространства с подвижной границей / П.А. Власов, И.К. Волков // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – № 5. – 2015. – С. 126–136.
56. Вольницкая, Е.П. Гидродинамические методы анализа фильтрационных полей и свойств коллекторов сложного строения при импульсно-волновых воздействиях в скважине: дис. ... д. т. н.: 01.02.05 / Е.П. Вольницкая – Москва, 2005. – 256 с.
57. Гадильшина, В.Р. Исследование вертикальных газовых скважин на нестационарных режимах / В.Р. Гадильшина, Д.В. Казунин, М.Х. Хайруллин, М.Н. Шамсиев // Вестник Мурманского государственного технического университета. – Т. 16. – № 1. – 2013. – С. 66–69.
58. Гидров, А.Д. Изменение диссипации энергии при переходе от ламинарного режима к турбулентному / А.Д. Гидров // Инженерно-строительный журнал. – № 5. – 2011. – С. 49–76.
59. Гизатуллин, Р.Г. Математическая модель работы скважины с установкой центробежных электронасосов / Р.Г. Гизатуллин, Н.Г. Мусакаев, В.Ш.

- Шагапов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – № 2. – 2004. – С. 23–28.
60. Гимаутдинов, Ш.К. Физика нефтяного и газового пласта / Ш.К. Гимаутдинов – М.: Недра, 1971. – 312 с.
61. Губайдуллин, Д.А. Идентификация тензоров коэффициентов проницаемости неоднородного анизотропного трещиновато-пористого пласта / Д.А. Губайдуллин, А.И. Никифоров, Р.В. Садовников // Вычислительная механика сплошных сред. – Т. 4. – № 4. – 2011. – С. 11–19.
62. Гурбатова, И.П. Влияние структуры порового пространства на масштабный эффект при изучении фильтрационно-емкостных свойств сложно-построенных карбонатных коллекторов / И.П. Гурбатова, В.А. Кузьмин, Н.Н. Михайлов // Геология нефти и газа. – № 2. – 2011. – С. 74–82.
63. Гуров, К.П. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов / К.П. Гуров – М.: Наука, 1978. – 128 с.
64. Гусейн-Заде, М.А. Особенности дроссельной температуры в пористой среде / М.А. Гусейн-Заде, А.К. Колосовская // Известия вузов. Сер. Нефть и газ. – № 2. – 1967. – С. 73–78.
65. Дворкин, И.Л. Особенности термометрии при исследовании обводнения перфорированных интервалов в процессе эксплуатации / И.Л. Дворкин, А.И. Филиппов, В.М. Коханчиков, В.В. Труфанов // Нефтяное хозяйство. – № 8. – 1976. – С. 42–44.
66. Диткин, В.А. Операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников – М.: Высшая школа, 1966. – 406 с.
67. Диткин, В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
68. Дмитриев, А.П. Термодинамические процессы в горных породах / А.П. Дмитриев, С.А. Гончаров – М.: Недра, 1990. – 360 с.
69. Дмитриев, М.Н. Двухфазная фильтрация в трансверсально-изотропной пористой среде: эксперимент и теория / М.Н. Дмитриев и др. // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 4. – 2004. –

С. 92–97.

70. Дмитриев, М.Н. К представлению функций относительных фазовых проницаемостей для анизотропных пористых сред / М.Н. Дмитриев, Н.М. Дмитриев, В.М. Максимов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 3. – 2005. – С. 118–125.
71. Дмитриев, М.Н. Модель двухфазной фильтрации Рапопорта – Лиса в анизотропных средах / М.Н. Дмитриев // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 2. – 2011. – С. 136–144.
72. Дмитриев, М.Н. Обобщенный закон Дарси и структура фазовых и относительных фазовых проницаемостей для двухфазной фильтрации в анизотропных пористых средах / М.Н. Дмитриев, Н.М. Дмитриев, В.В. Кадет // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 2. – 2003. – С. 136–145.
73. Дмитриев, М.Н. Тензорные характеристики фильтрационно емкостных свойств анизотропных пористых сред. Теория и эксперимент / М.Н. Дмитриев, Н.М. Дмитриев, В.М. Максимов, М.Т. Мамедов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 2. – 2012. – С. 57–63.
74. Дмитриев, М.Н. Уравнения неустановившихся течений по двучленному закону фильтрации в изотропной пористой среде / Н.М. Дмитриев, М.Н. Дмитриев, А.А. Мурадов // Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. – № 3. – 2011. – С. 102–111.
75. Дмитриев, М.Н. Эффекты анизотропии при двухфазных фильтрационных течениях / М.Н. Дмитриев, Н.М. Дмитриев, В.М. Максимов, Д.Ю. Семигласов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 3. – 2010. – С. 140–146.
76. Дмитриев, Н.М. Законы фильтрации с предельным градиентом в анизотропных пористых средах / Н.М. Дмитриев, В.М. Максимов, М.Т. Мамедов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и га-

за. – № 2. – 2010. – С. 64–71.

77. Дмитриев, Н.М. Нелинейные законы фильтрации для оротропных пористых сред / Н.М. Дмитриев, А.А. Мурадов, А.А. Семенов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 5. – 2008. – С. 83–89.
78. Дмитриев, Н.М. Представление тензора коэффициентов проницаемости для анизотропных трещиноватых коллекторов / Н.М. Дмитриев, А.М. Нуриев // Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. – № 3. – 2015. – С. 31–38.
79. Дмитриев, Н.М. Эффект асимметрии при фильтрации в анизотропных пористых средах / Н.М. Дмитриев, В.В. Кадет, Н.Н. Михайлов, А.А. Семенов // Технологии нефти и газа. – № 1 (48). – 2007. – С. 52–55.
80. Дьяконов, Д.М. Определение и использование тепловых свойств горных пород и пластовых жидкостей нефтяных месторождений / Д.М. Дьяконов, Б.А. Яковлев – М.: Недра, 1969. – 116 с.
81. Желтов, Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта / Ю.П. Желтов – М.: Недра, 1975. – 216 с.
82. Желтов, Ю.П. Разработка нефтяных месторождений / Ю.П. Желтов – М.: Недра, 1986. – 332 с.
83. Зайцев, М.В. Влияние термокольматации околоскважинных зон на производительность скважин / М.В. Зайцев // Нефтяное хозяйство. – № 2. – 2011. – С. 83–85.
84. Зайцев, М.В. Влияние околоскважинной зоны на продуктивность скважины / М.В. Зайцев, Н.Н. Михайлов // Нефтяное хозяйство. – № 1. – 2004. – С. 64–66.
85. Зельдович, Я.Б. Элементы математической физики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис – М.: Наука, 1973. – 351 с.
86. Иконникова, Л.Н. Оценка забойного давления фонтанирующей скважины при его значении ниже давления насыщения / Л.Н. Иконникова, А.Б. Золотухин // Вестник Пермского национального исследовательско-

- го политехнического университета. Геология. Нефтегазовое и горное дело. – № 2. – 2012. – С. 61–68.
87. Ильясов, А.М. Численное моделирование дисперсных течений в нефтедобывающей скважине / А.М. Ильясов, Р.Ф. Шарафутдинов, С.Ф. Урманчеев, Р.А. Валиуллин // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. – № 1. – 2008. – С. 24–28.
88. Имомназаров, Х.Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред / Х.Х. Имомназаров // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. IV. – № 2. – 2001. – С. 154–165.
89. Исламов, Д.Ф. Нестационарное температурное поле при фильтрации жидкости в неоднородном пласте / Д.Ф. Исламов, А.Ш. Рамазанов // Вестник Башкирского университета. – Т. 21. – № 1. – 2016. – С. 4–8.
90. Кадет, В.В. Перколяционный анализ границ применимости линейного закона фильтрации / В.В. Кадет, П.С. Чагиров // Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. – № 3. – 2011. – С. 28–37.
91. Казанцев, С.А. Высокоточный мониторинг температуры при решении геологических и геоэкологических задач: аппаратура и опыт применения / Казанцев С.А., Дучков А.Д. // Интерэкспо Гео-Сибирь. – Т. 3. – № 2. – 2006. – С. 25–29.
92. Камалетдинова, Л.М. Аналитическое решение одной задачи теплопроводности с объемными источниками тепла / Камалетдинова Л.М., Фатыхов М.А. // Ученые записки сборник научных статей физико-математического. Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы. – Уфа, 2008. – С. 57–63.
93. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер – М.: Наука, 1964. – 487 с.
94. Кейс, В.М. Конвективный тепло- и массообмен / В.М. Кейс – М.: Энергия, 1972. – 448 с.
95. Керимов, М.З. Распределение нестационарного перепада температуры в

- приствольной зоне с учетом радиального движения жидкости в скважину / М.З. Керимов, А.А. Тагиев // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. – № 12. – 2003. – С. 39–41.
96. Киреев, А.М. Теоретические основы и технологии управления проявлениями горного давления при строительстве скважин: дис. ... д. т. н.: 25.00.15 / А.М. Киреев – Тюмень, 2008. – 372 с.
97. Ковалева, Л.А. Моделирование процессов тепло- и массопереноса в углеводородной жидкости при индукционном нагреве / Л.А. Ковалева, В.Н. Киреев, А.А. Мусин // Прикладная механика и техническая физика. – Т.50. – № 1 (293). – 2009. – С. 80–85.
98. Ковалева, Л.А. Нестационарная фильтрация многокомпонентной углеводородной системы при наличии объемного источника тепла / Л.А. Ковалева, Н.М. Насыров, Ф.Л. Саяхов, Ф.С. Хисматуллина // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – № 3. – 1997. – С. 37–42.
99. Коваленко, Ю.Ф. Геомеханика нефтяных и газовых скважин: дис. ... д. ф.-м. н.: 01.02.04 / Ю.Ф. Коваленко – Москва, 2012. – 314 с.
100. Ковальский, А.А. Анализ асимптотического решения задачи о поле давления в слоисто-неоднородном пласте / А.А. Ковальский, О.В. Ахметова, М.Р. Губайдуллин, Р.В. Сираев // Материалы Всероссийской научной конференции «Актуальные вопросы современной науки и образования». Нефтекамск, 2016. – С. 137–141.
101. Ковригин, Л.А. Конвективный теплообмен в межтрубном пространстве нефтяной скважины с греющим кабелем / Л.А. Ковригин, И.Б. Кухарчук // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – № 6. – 2012. – С. 43–47.
102. Коновалов, А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости / А.Н. Коновалов – Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.
103. Конюхов, В.М. Гидродинамические эффекты при двухфазной многокомпонентной фильтрации в пластах сложной структуры: дис. ... д. ф.-

м. н.: 01.02.05 / В.М. Конюхов – Казань, 2004. – 318 с.

104. Конюхов, В.М. Нефтеотдача пластов сложной структуры при двухфазной фильтрации неньютоновской нефти / В.М. Конюхов, П.А. Машенькин, А.Н. Чекалин // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – № 2. – 2013. – С. 63–77.
105. Котенёв, А.Ю. Моделирование процесса вытеснения нефти в неоднородных коллекторах / А.Ю. Котенёв, О.Ф. Кондрашев, Р.Ф. Шарафутдинов, А.А. Садретдинов // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – № 2. – 2010. – С. 28–32.
106. Котляр, Л.А. Оценка возможности определения профиля притока нефтяной скважины по термометрии переходных процессов / Л.А. Котляр, В.П. Пименов, В.В. Шако // Известия ВУЗов. Геология и разведка. – № 3. – 2011. – С. 78–82.
107. Котяхов, Ф.И. Физика нефтяных и газовых коллекторов / Ф.И. Котяхов – М.: Недра, 1977. – 287 с.
108. Крянев, Д.Ю. Проблемы и перспективы повышения эффективности разработки нефтяных месторождений / Д.Ю. Крянев, С.А. Жданов // Академия энергетики. – № 6 (38). – 2010. – С. 46–49.
109. Кузнецов, Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов – М.: Высшая школа, 1965. – 420 с.
110. Купцов, С.М. Методология прогнозирования теплофизических свойств пластовых жидкостей и горных пород нефтяных месторождений: дис. ... д. т. н.: 25.00.17 / С.М. Купцов – Москва, 2010. – 252 с.
111. Купцов, С.М. Температурное поле эксплуатационной скважины / С.М. Купцов // Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. – № 4. – 2009. – С. 62–68.
112. Кутателадзе, С.С. Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе – М.: Атомиздат, 1979. – 416 с.

113. Куштанова, Г.Г. Некоторые особенности нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых коллекторах / Куштанова Г.Г. // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – № 1. – 2007. – С. 4–13.
114. Куштанова, Г.Г. Закономерности формирования термограмм продуктивной толщи / Г.Г. Куштанова // Георесурсы. – № 3. – 2007. – С. 47–48.
115. Лаврушко, П.Н. Эксплуатация нефтяных и газовых скважин / П.Н. Лаврушко, В.М. Муравьев – М.: Недра, 1971. – 369 с.
116. Лапук, Б.Б. Теоретические основы разработки месторождений природных газов / Б.Б. Лапук – М.-Ижевск: ИКИ, 2002. – 296 с.
117. Лейбензон, Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. / Л.С. Лейбензон – М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. – 244 с.
118. Ломов, С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов – М.: Наука, 1981. – 400 с.
119. Лутошкин, Г.С. Сбор и подготовка нефти, газа и воды / Г.С. Лутошкин – М.: Недра, 1977. – 192 с.
120. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
121. Лыков, А.В. Тепломассообмен (Справочник) / А.В. Лыков – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
122. Максимов, В.М. Нелинейные эффекты при фильтрации вязкопластичных жидкостей в анизотропных пористых средах / В.М. Максимов, Н.М. Дмитриев // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. – № 5. – 2002. – С. 59–63.
123. Манапов, Т.Ф. Научно-методические основы выработки остаточных запасов нефти из неоднородных по проницаемости пластов: дис. ... д. т. н.: 25.00.17 / Т.Ф. Манапов – Уфа, 2011. – 314 с.
124. Маскет, М. Физические основы технологии добычи нефти / М. Маскет – М. - Ижевск: ИКИ, 2004. – 696 с.
125. Маскет, М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет – М. - Ижевск: ИКИ, 2004. – 640 с.

126. Мехтиев, Ш.Ф. Геотермические исследования нефтяных и газовых месторождений / Ш.Ф. Мехтиев, А.Х. Мирзаджанзаде, С.А. Алиев – М.: Недра, 1971. – 216 с.
127. Мирзаджанзаде, А.Х. Основы технологии добычи газа / А.Х. Мирзаджанзаде, О.Л. Кузнецов, К.С. Басниев, З.С. Алиев – М.: Недра, 2003. – 880 с.
128. Михайлов, П.Н. Моделирование температурного поля в потоке жидкости в скважине и прилегающих пластах. / П.Н. Михайлов, А.И. Филиппов, О.В. Ахметова // сб. науч. тр. Математические модели в образовании, науке и промышленности: СПб, 2003. – С.149–152.
129. Михайлов, П.Н. Температурное поле в скважине в асимптотическом приближении / Михайлов П.Н., Михайлов А.П., Кульсарина Н.А. // Фундаментальные исследования. – № 6-1. – 2015. – С. 50–55.
130. Михайлов, П.Н. Температурные поля в скважине и пластах при фильтрации химически- и радиоактивных растворов в асимптотическом приближении: дис. ... д. ф.-м. н.: 01.04.14 / П.Н. Михайлов – Стерлитамак, 2009. – 396 с.
131. Морозкин, Н.Д. Расчет пластового давления с помощью метода конечных элементов / Н.Д. Морозкин, Г.С. Бикбулатова // Нефтяное хозяйство. – № 11. – 1998. – С. 28–30.
132. Морозов, П.Е. Фильтрационные волны давления в пористых и трещиновато-пористых средах / П.Е. Морозов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – № 4-3. – 2011. – С. 996–998.
133. Морозов, П.Е. Оценка фильтрационных параметров пласта по данным нестационарного притока жидкости к вертикальным скважинам / П.Е. Морозов, Р.В. Садовников, М.Х. Хайруллин, М.Н. Шамсиев // Инженерно-физический журнал. – Т. 76. – № 6. – 2003. – С. 142–145.
134. Мохов, М.А. Научно-практические основы применения физических полей в нефтяных скважинах с осложненными условиями эксплуатации: дис. ... д. т. н.: 25.10.17 / М.А. Мохов – Москва, 2006. – 286 с.

135. Мусакаев, Н.Г. Математическое моделирование процессов, протекающих в нагнетательной скважине при закачке теплоносителя в пласт / Н.Г. Мусакаев // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – № 4. – 2002. – С. 12–16.
136. Мухаметшин, Р.З. Оценка послойной неоднородности карбонатных коллекторов / Р.З. Мухаметшин, Н.Ф. Булыгина, Е.А. Юдинцев // Нефтяное хозяйство. – № 5. – 1988. – С. 34–37.
137. Нагимов, В.М. Оценка вклада теплопроводности в изменение температуры фильтрующейся в пористой среде жидкости / В.М. Нагимов, А.Ш. Рамазанов // Вестник Башкирского университета. – Т. 20. – № 2. – 2015. – С. 413–416.
138. Назаров, В.Ф. Использование разностных термограмм при решении нефтепромысловых задач при компрессорном освоении скважин / В.Ф. Назаров, Н.А. Алабужева // Каротажник. – № 11 (233). – 2013. – С. 47–52.
139. Назаров, В.Ф. Определение малых нарушений герметичности обсадной колонны скважины / В.Ф. Назаров, А.Р. Гайнитдинов, Э.М. Набиуллина // Каротажник. – № 4 (238). – 2014. – С. 23–30.
140. Назаров, В.Ф. Определение места нарушения герметичности насосно-компрессорных труб в нагнетательных скважинах / В.Ф. Назаров, В.К. Мухутдинов, К.Р. Ахметов, Ф.Ф. Азизов // Каротажник. – № 9 (243). – 2014. – С. 15–19.
141. Назаров, В.Ф. Оценка технического состояния обсадной колонны в зумпфе нагнетательной скважины / В.Ф. Назаров, М.В. Чупов, Р.Р. Масленникова // Каротажник. – № 7. – 2012. – С. 246–258.
142. Назаров, В.Ф. Эффективность использования современной термометрической аппаратуры при исследовании скважин на нефтяных месторождениях / В.Ф. Назаров // Каротажник. – № 4. – 2008. – С. 103–111.
143. Назаров, В.Ф. Влияние конструкции термометров на качество результатов измерений в скважинах / В.Ф. Назаров, В.К. Мухутдинов, Ф.Ф. Ази-

- зов, К.Р. Ахметов // Нефтяное хозяйство. – № 9. – 2014. – С. 114–117.
144. Назаров, В.Ф. Термометрия водонагнетательных скважин нефтяных месторождений: дис. ... д. т. н.: 25.00.10 / В.Ф. Назаров – Уфа, 2002. – 327 с.
145. Найфэ, А.Х. Методы возмущений / А.Х. Найфэ – М.: Наука, 1976. – 474 с.
146. Намиот, А.Ю. Изменение температуры по стволу эксплуатирующихся скважин / А.Ю. Намиот // Нефтяное хозяйство. – № 5. – 1955. – С. 45–48.
147. Непримеров, Н.Н. Особенности теплового поля нефтяного месторождения / Н.Н. Непримеров, М.А. Пудовкин, А.И. Марков – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1968. – 164 с.
148. Нигматулин, Р.И. Динамика многофазных сред / Р.И. Нигматулин – М.: Наука, 1987. – 464 с.
149. Николаевский, В.Н. Механика насыщенных пористых сред / В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов – М.: Недра, 1970. – 336 с.
150. Николаевский, В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. / В.Н. Николаевский – М.: Недра, 1984. – 232 с.
151. Овчинников, М.Н. Метод фильтрационных волн давления как способ исследования окрестности скважины и верификации фильтрационных моделей / М.Н. Овчинников, Г.Г. Куштанова, А.Г. Гаврилов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – № 2. – 2009. – С. 55–59.
152. Овчинников, М.Н. Фильтрационные волны давления как метод исследования параметров пластов / М.Н. Овчинников, Г.Г. Куштанова, А.Г. Гаврилов, М.В. Сударев // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – № 6. – 2015. – С. 124–161.
153. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина – М.: ГИТТЛ, 1952. – 674 с.
154. Проселков, Ю.М. Теплопередача в скважинах / Ю.М. Проселков – М.: Недра, 1975. – 224 с.
155. Пудовкин, М.А. Краевые задачи математической теории теплопроводности

- сти в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении / М.А. Пудовкин, И.К. Волков – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – 188 с.
156. Пудовкин, М.А. Температурные процессы в действующих скважинах / М.А. Пудовкин, А.Н. Саламатин, В.А. Чугунов – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. – 166 с.
157. Рамазанов, А.Ш. Аналитическая модель для расчета температурного поля в нефтяном пласте при нестационарном притоке жидкости / А.Ш. Рамазанов, В.М. Нагимов // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – № 1. – 2007. – С. 18–23.
158. Рамазанов, А.Ш. Баротермический эффект при вытеснении нефти из пористой среды / А.Ш. Рамазанов, Р.Ф. Шарафутдинов, А.Г. Халикова // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 3. – 1992. – С. 104–109.
159. Рамазанов, А.Ш. Нестационарное температурное поле в пористой среде при фильтрации газированной нефти и воды / А.Ш. Рамазанов, А.В. Паршин // Вестник Башкирского университета. – Т. 12. – № 1. – 2007. – С. 16–18.
160. Рамазанов, А.Ш. Температурное поле в пласте с учетом термодинамических эффектов при работе скважины с переменным дебитом / А.Ш. Рамазанов, В.М. Нагимов, Р.К. Ахметов // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – № 1. – 2013. – С. 527–536.
161. Рамазанов, А.Ш. Температурные поля при нестационарной фильтрации жидкости. / А.Ш. Рамазанов, А.И. Филиппов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 4. – 1983. – С. 175–178.
162. Рамазанов, А.Ш. Теоретические основы термогидродинамических методов исследования нефтяных пластов: дис. ... д. т. н.: 01.04.14, 25.00.10 / А.Ш. Рамазанов – Уфа, 2004. – 269 с.
163. Рубинштейн, Л.И. Температурные поля в нефтяных пластах / Л.И. Рубинштейн. – М.: Недра, 1971. – 276 с.

164. Саяхов, Ф.Л. Двумерное моделирование тепломассопереноса в системе «нагнетательная скважина – пласт» при электромагнитном воздействии / Ф.Л. Саяхов, Л.А. Ковалёва, Н.М. Насыров // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – № 1. – 2001. – С. 45–51.
165. Спивак, С.И. Многокритериальный подход к задаче определения проницаемости из данных геофизических исследований скважин / С.И. Спивак, Д.Р. Юлмухаметов, М.М. Хасанов // Нефтегазовое дело. – Т. 3. – 2005. – С. 155–166.
166. Толпаев, В.А. Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: дис. ... д. ф.-м. н.: 05.13.18 / В.А. Толпаев – Ставрополь, 2004. – 352 с.
167. Топольников, А.С. Математическое моделирование динамических процессов в нефтедобывающей скважине / А.С. Топольников, Р.Х. Болотнова, В.А. Бузина, У.О. Агишева // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. – № 4 (54). – 2014. – С. 112–118.
168. Требин, Г.Ф. Нефти месторождений Советского Союза / Г.Ф. Требин, Н.В. Чарыгин, Т.М. Обухова – М.: Недра, 1980. – 583 с.
169. Требин, Г.Ф. Фильтрация жидкостей и газов в пористых средах. / Г.Ф. Требин – М.: Гостоптехиздат, 1959. – 160 с.
170. Фатыхов, М.А. Математическое моделирование процесса нагрева карбонатосодержащего нефтяного пласта при совместном воздействии соляной кислоты и высокочастотного электромагнитного поля / М.А. Фатыхов, А.И. Худайбердина // Башкирский химический журнал. – Т. 15. – № 3. – 2008. – С. 29–34.
171. Филиппов, А.И. Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе «в среднем точного» решения / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова, М.А. Горюнова // Прикладная механика и техническая физика. – Т. 51.– №3. – 2010.– С. 84–93.
172. Филиппов, А.И. Анализ температурного поля цилиндрического потока смеси жидкостей на основе «в среднем точного» решения / А.И. Филип-

пов, О.В. Ахметова, М.А. Зеленова, В.А. Рогов // тр. всерос. науч. конф. с междунар. участ. «Дифференциальные уравнения и их приложения». Уфа, 2011. – С. 356–359.

173. Филиппов, А.И. Асимптотически осредненное решение задачи о поле давления в слоисто-неоднородной пористой среде / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, М.Р. Губайдуллин // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – № 3. – 2015. – С. 693–712.
174. Филиппов, А.И. Асимптотические представления упругих волновых полей в проницаемых пластах / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, Г.Ф. Заманова // Акустический журнал. – Т. 59. – № 5. – 2013. – С. 596–606.
175. Филиппов, А.И. Асимптотическое осреднение температуры турбулентного потока в скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, А.С. Родионов // Вестник Тюменского государственного университета. – № 4. – 2012. – С. 6–13.
176. Филиппов, А.И. Асимптотическое решение задачи о температурном поле в скважине. / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, К.А. Филиппов, О.В. Ахметова // мат. рос. науч.-практич. конф. Интеграция вузовской науки и производства как важнейшее условие повышения качества подготовки специалистов. Уфа, 2004. – С. 67–77.
177. Филиппов, А.И. Баротермический эффект при фильтрации газированной жидкости / А.И. Филиппов, А.А. Фридман, Е.М. Девяткин – Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т; Стерлитамакский филиал АН РБ, 2000. – 175 с.
178. Филиппов, А.И. Дозвуковое течение реального сжимаемого газа в вертикальной трубе / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, А.Г. Крупинов // Известия высших учебных заведений. Физика. – Т. 54. – № 12 – 2011. – С. 112–115.
179. Филиппов, А.И. Задача о квазистационарном температурном поле в анизотропном слое с источниками при наличии конвекции / А.И. Филиппов,

О.В. Ахметова, И.Ф. Кабиров // Научно-технический вестник Поволжья. – № 5. – 2011. – С. 9–21.

180. Филиппов, А.И. Задача о температурном поле в анизотропном слое с источниками при наличии конвекции / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, И.Ф. Кабиров // Инженерно-физический журнал. – Т. 85. – № 4. – 2012. – С. 738–752.
181. Филиппов, А.И. Задача о теплообмене в турбулентных потоках жидкости / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, А.С. Родионов, Л.Л. Дудина // науч. тр. Стерлитамакской гос. пед. акад. им. Зайнаб Бишевой. Серия: «Физико-математические и естественные науки». – № 1. – 2011. – С. 132–135.
182. Филиппов, А.И. Задача термокаротажа с заданным радиальным профилем скорости нефтяного потока в стволе скважины / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, М.А. Зеленова, А.С. Родионов // Инженерно-физический журнал. – Т. 86. – № 1. – 2013. – С. 172–190.
183. Филиппов, А.И. Интерпретация скважинных термограмм / А.И. Филиппов, К.А. Филиппов – Уфа: Гилем, 2004. – 160 с.
184. Филиппов, А.И. Использование температурных меток для контроля технического состояния трубопроводов. / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // сб. тр. XVIII Междунар. научн. конф. Математические методы в теории и технологиях. Казань, 2005. – С. 82–88.
185. Филиппов, А.И. Исследование радиальных распределений температуры в скважине / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова //: мат. IV Уральской рег. науч.-практ. конф. Современные физико-математические проблемы в педагогических вузах. – Уфа, 2003. – С. 106–108.
186. Филиппов, А.И. Исследование температурного поля действующей скважины с учетом фазовых переходов / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, М.А. Зеленова, А.С. Родионов // мат. всеросс. науч.-практич. конф. с междунар. участием. Актуальные проблемы современной науки и образования. Естественные науки. Уфа, 2010. – С. 44–49.

187. Филиппов, А.И. Исследование температурного поля турбулентного газового потока в скважине на основе метода покоефициентного осреднения / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, К.В. Олефиренко // Тезисы докладов и сообщений XV Минского международного форума по тепло- и массообмену. Т. 2. Минск, 2016. – С. 441–443.
188. Филиппов, А.И. Исследование температурных полей в трубах переменного радиуса / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, А.С. Родионов, М.А. Зеленова // Вестник Воронежского государственного технического университета. – Т.6. – № 10. – 2010. – С.171–178.
189. Филиппов, А.И. Исследование температурных полей потока газа в скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, М.А. Зеленова, А.Г. Крупинов // Инженерно – физический журнал. – Т.84. – № 5. – 2011. – С. 1052–1064.
190. Филиппов, А.И. Квазистационарное температурное поле источников при закачке жидкостей в однородный анизотропный пласт / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова // науч. тр. Стерлитамакской гос. пед. акад. им. Зайнаб Бишевой. Серия: «Физико – математические и естественные науки». – №1. – 2011. – С. 105–117.
191. Филиппов, А.И. Математические модели тепломассопереноса на основе формального асимптотического параметра / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова // тез. докл. III всерос. науч. конф. студ., асп., молод. учен. и спец. «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации». – Якутск, 2012. – С. 36–38.
192. Филиппов, А.И. Математическое моделирование температурного поля в скважине с учетом радиального профиля скорости. / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // сб. тр. XVII Междун. научн. конф.: Математические методы в технике и технологиях. Т. 1. – Кострома, 2004. – С. 84–94.
193. Филиппов, А.И. Математическое моделирование температурного поля цилиндрического потока смеси жидкостей / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, В.А. Рогов // Вестник ХНТУ – №3 (42). – 2011. – С. 455–459.

194. Филиппов, А.И. Моделирование температурного поля в газовой скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, М.А. Зеленова, А.Г. Крупинов // сб. тр. XX междунар. науч.-практ. конф. «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности». СПб., 2010. – С. 347–348.
195. Филиппов, А.И. Моделирование температурного поля в потоке жидкости в скважине и прилегающих пластах. / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // сб. науч. тр. Математические модели в образовании, науке и промышленности. СПб., 2003. – С. 149–152.
196. Филиппов, А.И. Модель асимптотически осредненного температурного поля турбулентного газового потока / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, К.В. Олефиренко // Естественные и математические науки в современном мире. – № 13. – 2013.– С. 59–67.
197. Филиппов, А.И. Нулевое асимптотическое приближение задачи о фильтрационно-волновом поле в пористой среде / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, А.А. Ковальский, Л.Р. Юсупова // Инновации в науке. – № 30-1. – 2014. – С. 27–37.
198. Филиппов, А.И. Одномерные монохроматические плоские фильтрационные волны /А.И. Филиппов, О.В.Ахметова // Инженерно-физический журнал. – Т. 88. – № 2. – 2015. – С. 285–290.
199. Филиппов, А.И. Основная задача теории термокаротажа. / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // тр. междунар. науч. конф. Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы. Т.3. Уфа, 2003. – С. 193–206.
200. Филиппов, А.И. Основная задача термокаротажа / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // Теплофизика высоких температур. – Т. 44. – №5.– 2006. – С. 747–755.
201. Филиппов, А.И. Первое асимптотическое приближение задачи о поле давления в неоднородной ортотропной пористой среде / А.И. Филиппов,

- О.В. Ахметова, А.А. Ковальский, М.Р. Губайдуллин // Известия Уфимского научного центра РАН. – № 1. – 2016. – С. 5–12.
202. Филиппов, А.И. Поле плотности стационарного ламинарного потока газа в скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, К.В. Олефиренко // Научно-технический вестник Поволжья. – №4. – 2014. – С. 31–33.
203. Филиппов, А.И. Поле давления в вертикальном потоке газа в скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, К.В. Олефиренко, Е.С. Телицин // Известия высших учебных заведений. Серия физика. – Т. 58. – № 8. – 2015. – С. 45–49.
204. Филиппов, А.И. Поле давления при радиальной фильтрации в неоднородном ортотропном пласте в асимптотическом приближении / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, М.Р. Губайдуллин // Инженерно-физический журнал. – Т. 88. – № 6. – 2015. – С. 1285–1297.
205. Филиппов, А.И. Поля температуры в скважине с учетом радиального профиля скорости / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, К.А. Филиппов, О.В. Ахметова // Физико-химическая гидродинамика: Межвузовский сборник. – Уфа, 2004. – С. 101–119.
206. Филиппов, А.И. Построение «в среднем точного» асимптотического решения задачи о радиальном распределении температурного поля в скважине / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова, М.А. Горюнова // Теплофизика высоких температур. – Т. 46. – № 3.– 2008. – С. 449–456.
207. Филиппов, А.И. Представление фильтрационно-волновых полей в слоистой анизотропной среде в виде плоской волны (часть II) / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – Т. 1. – № 2 (2). – 2015. – С. 92–103.
208. Филиппов, А.И. Представление фильтрационно-волновых полей в слоистой анизотропной среде в виде плоской волны (часть I) / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова // Вестник Тюменского государственного универси-

- тета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – Т. 1. – № 1 (1). – 2015. – С. 65–76.
209. Филиппов, А.И. Приближенное аналитическое решение задачи о температурном поле в скважине / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // периодич. межвуз. сб. науч.-методич. работ. Матем. вестник Волго-Вятского региона. Киров, 2004. – С. 100–109.
210. Филиппов, А.И. Приближенное описание поля давления в неоднородном анизотропном пористом пласте / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, И.М. Филиппов // науч. тр. Стерлитамакской гос. пед. акад. им. Зайнаб Бишевой. Серия: «Физико-математические и естественные науки». – № 1. – 2011. – С. 122–131.
211. Филиппов, А.И. Применение термометрии для определения интервалов заколонной циркуляции в условиях опробования скважин / А.И. Филиппов, Г.А. Закусило, А.М. Осипов // Нефтяное хозяйство – № 3. – 1984. – С. 17–21.
212. Филиппов, А.И. Радиальное распределение температурных полей в скважине / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // мат. междунар. науч.-технич. конф. Нефть и газ Западной Сибири. – Тюмень, 2005. – С. 90–91.
213. Филиппов, А.И. Расчет асимптотически осредненного температурного поля турбулентного газового потока в вертикальной скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, К.В. Олефиренко // Нефтегазовое дело. – № 11-4. – 2013. – С. 150–157.
214. Филиппов, А.И. Расчеты амплитуды фильтрационно – волнового поля в нефтяном пласте на основе нулевого асимптотического коэффициента разложения / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, Г.Ф. Заманова // тез. докл. межвуз. науч.-технич. конф. студ., асп. и молод. учен. «Наука. Технология. Производство». – Салават, 2012. – С. 122–123.
215. Филиппов, А.И. Расчеты температурного поля в газовой скважине / А.И.

- Филиппов, О.В. Ахметова, М.А. Зеленова, А.Г. Крупинов // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – №6. – 2011. – С. 350–365.
216. Филиппов, А.И. Скважинная термометрия переходных процессов. / А.И. Филиппов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989. – 116 с.
217. Филиппов, А.И. Спектральные соотношения для фильтрационно-волновых полей в неоднородных проницаемых пористых пластах / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, Г.Ф. Заманова, А.А. Ковальский // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – № 2. – 2014. – С. 1–13.
218. Филиппов, А.И. Температурное поле в действующей скважине / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. VII. – №1(17) – 2004. – С. 135–144.
219. Филиппов, А.И. Температурное поле в скважине с учетом профиля скорости течения флюида / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // Обзорение прикладной и промышленной математики. – Т. 14. – № 4. – 2007. – С. 731–732.
220. Филиппов, А.И. Температурное поле источников тепла при закачке жидкости в анизотропный неоднородный пласт / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, И.Ф. Кабиров // Прикладная механика и техническая физика. – Т. 54. – № 6 (322). – 2013. – С. 95–111.
221. Филиппов, А.И. Температурное поле турбулентного потока в скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, А.С. Родионов // Теплофизика высоких температур. – Т. 51. – № 2. – 2013. – С. 277–286.
222. Филиппов, А.И. Температурное поле, инициированное потоком жидкости в действующей скважине / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // сб. тр. XVIII Междунар. научн. конф. Математические методы в теории и технологиях. Казань, 2005. – С. 160–165.
223. Филиппов, А.И. Температурные поля ламинарных и турбулентных потоков жидкости в скважинах / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, А.С. Родионов. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2013. – 122 с.

224. Филиппов, А.И. Теплообмен турбулентного потока в скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, А.С. Родионов // XIV Минский Международный форум по тепло- и массообмену. – Минск, 2012. – С. 322–325.
225. Филиппов, А.И. Установившиеся двумерные фильтрационно-волновые поля при заданных гармонических возмущениях давления на границе / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, Г.Ф. Заманова, А.А. Ковальский // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – № 5. – 2014. – С. 181–208.
226. Филиппов, А.И. Учет источников в задаче о температурном поле в вертикальном потоке жидкости в скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, М.А. Горюнова, А.С. Родионов // тр. Стерлитамакского филиала АН РБ. Физико-математические и технические науки. – № 6. – 2009. – С. 182–196.
227. Филиппов, А.И. Учет радиального профиля скорости в основной задаче термокаротажа / А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова // тр. Стерлитамакского филиала АН РБ. Физико-математические и технические науки. – № 4. – 2006. – С. 19–30.
228. Филиппов, А.И. Фильтрационно-волновые поля в однородной и изотропной пористой среде / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, Г.Ф. Заманова // науч. тр. Стерлитамакской гос. пед. акад. им. З. Бишевой. Физико-математические и естественные науки. – № 1. – 2011. – С. 118–121.
229. Филиппов, А.И. Фильтрационно-волновые поля в неоднородной пористой среде / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, Г.Ф. Заманова // XIV Минский Международный форум по тепло- и массообмену. – Минск, 2012. – С. 643–648.
230. Филиппов, А.И. Фильтрационное поле давления в неоднородном пласте при постоянном отборе / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, И.М. Филиппов // Инженерно-физический журнал. – Т. 85. – № 1. – 2012. – С. 1052–1064.
231. Филиппов, А.И. Фильтрационные волны в анизотропной среде / А.И.

- Филиппов, О.В. Ахметова, А.А. Ковальский, Р.Ф. Повленкович // Естественные и математические науки в современном мире. – № 14. – 2014. – С. 57–63.
232. Филиппов, А.И. Фильтрационные волны в слабоанизотропной среде / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, А.А. Ковальский, Г.Ф. Заманова // Вестник Башкирского университета. – Т. 18. – № 4. – 2013. – С. 1004–1005.
233. Филиппов, А.И. Температурное поле в пласте и скважине / А.И. Филиппов, О.В. Ахметова – Уфа: АН РБ, Гилем, 2011. – 336 с.
234. Филиппов, А.И. Термодинамика фильтрационных нефтегазовых потоков / А.И. Филиппов, С.А. Филиппов – Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т; Стерлитамак. филиал АН РБ, 2002. – 200 с.
235. Филиппов, Л.П. Явления переноса / Л.П. Филиппов – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 120 с.
236. Фомкин, А.В. Повышение эффективности нефтеизвлечения: необходимость и тенденции / А.В. Фомкин, С.А. Жданов // Бурение и нефть. – № 4. – 2015. – С. 14–19.
237. Хайруллин, М.Х. Численное решение прямых и обратных задач тепло-массопереноса в нефтяных пластах / М.Х. Хайруллин и др. // Вестник Казанского технологического университета. – Т. 16. – № 24. – 2013. – С. 125–128.
238. Хасанов, М.М. Исследование устойчивости фильтрации жидкостей с зародышами газа / М.М. Хасанов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – № 2. – 1994. – С. 66–72.
239. Хасанов, М.М. Обработка данных гидродинамических исследований скважин – КВД / М.М. Хасанов и др. // Оборудование и технологии для нефтегазового комплекса. – № 2. – 2002. – С. 24–28.
240. Хасанов, М.М. Определение проницаемости из данных геофизических исследований скважин как некорректно поставленная задача / М.М. Хасанов, С.И. Спивак, Д.Р. Юлмухаметов // Нефтегазовое дело. – № 1. – 2005. – С. 155–161.

241. Хасанов, М.М. Определение профиля вертикального распределения проницаемости с учетом данных эксплуатации скважин / М.М. Хасанов, К.В. Торопов, А.А. Лубнин // Нефтяное хозяйство. – № 8. – 2009. – С. 26–31.
242. Хасанов, М.М. Развитие информационных технологий и математического моделирования – одно из приоритетных научных направлений / М.М. Хасанов, И.Д. Кизина // Оборудование и технологии для нефтегазового комплекса. – № 2. – 2002. – С. 22–29.
243. Хафизов, Р.М. Динамика восстановления давления в «вакуумированной» скважине / Р.М. Хафизов, И.Г. Хусаинов, В.Ш. Шагапов // Прикладная математика и механика. – Т. 73. – № 4. – 2009. – С. 615–621.
244. Хисамов, Р.С. Термогидродинамические исследования вертикальных нефтяных скважин / Р.С. Хисамов // Нефтяное хозяйство. – № 9. – 2010. – С. 76–78.
245. Цирельман, Н.М. Прямые и обратные задачи тепломассопереноса / Н.М. Цирельман – М.: Энергоатомиздат, 2005. – 390 с.
246. Чагиров, П.С. Новый метод определения границ применимости закона Дарси / П.С. Чагиров, В.В. Кадет // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – № 4-3. – 2011. – С. 1243–1244.
247. Чарный, И.А. Подземная гидродинамика / И.А. Чарный – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.
248. Чекалюк, Э.Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа / Э.Б. Чекалюк – Киев: ГИТЛ УССР, 1965. – 286 с.
249. Чекалюк, Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта / Э.Б. Чекалюк. – М.: Недра. 1965. – 238 с.
250. Череменский, Г.А. Геотермия / Г.А. Череменский. – Л.: Недра, 1972. – 271 с.
251. Череменский, Г.А. Прикладная геотермия / Г.А. Череменский. – Л.: Недра, 1977. – 224 с.
252. Чупров, И.Ф. Решение задачи о прогреве трещиноватого пласта / И.Ф.

- Чупров, Е.А. Канева // Известия Коми научного центра УрО РАН. – № 11. – 2012. – С. 82–85.
253. Шабаров, А.Б. Измерительно-вычислительная система диагностики параметров течения и теплообмена многофазной смеси в скважинах и трубопроводах / А.Б. Шабаров и др. // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика.– № 4. – 2012. – С. 74–79.
254. Шарафутдинов, Р.Ф. Моделирование полей давления и температуры в пласте при пуске горизонтальной скважины в работу / Р.Ф. Шарафутдинов, Р.А. Валиуллин // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. – № 3. – 2001. – С. 36–38.
255. Шарафутдинов, Р.Ф. Опыт использования метода активной термометрии при диагностике состояния эксплуатационных скважин / Р.Ф. Шарафутдинов и др. // Каротажник. – № 4. – 2010. – С. 5–12.
256. Шарафутдинов, Р.Ф. Радиально-азимутальный неизотермический приток жидкости к скважине в условиях теплового воздействия / Р.Ф. Шарафутдинов, А.А. Садретдинов, А.С. Бочков // Теплофизика высоких температур. – Т. 49. – № 3. – 2011. – С. 449–453.
257. Шарафутдинов, Р.Ф. Тепловое поле эффекта Джоуля - Томсона в условиях охлаждения пластов / Р.Ф. Шарафутдинов, А.И. Филиппов // Известия вузов. Сер. Нефть и газ. – № 6. – 1983. – С. 59–64.
258. Щелкачев, В.Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме / В.Н. Щелкачев – М.: Недра, 1959. – 457 с.
259. Эрих, В.Н. Химия и технология нефти и газа / В. Н. Эрих, М. Г. Расина, М. Г. Рудин – Л.: Химия, 1985. – 408 с.
260. Яворский, Б.М. Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф – М.: Наука, 1971. – 940 с.
261. Adivarahan, P. Heat Transfer in Porous Rocks Through Which Single-Phase Fluids Are Flowing / P. Adivarahan, D.Kunii, J. M. Smith // Society of Petroleum Engineers Journal. – Vol. 61. – Iss. 9. – 1962. – pp. 290–296.

262. Akhmetova, O.V. Quasi-Steady-State Pressure Fields in Linear Flow through a Porous Inhomogeneous Anisotropic Reservoir in the Asymptotic Approximation / O.V. Akhmetova, A.I. Filippov, I.M. Filippov // Fluid dynamics. – Vol. 47. – No. 3. – 2012. – pp. 364–374.
263. Alammar, K. Simulation of Average Turbulent Pipe Flow: A Three-Equation Model / K. Alammar // Open Journal of Fluid Dynamics – Vol.4 – No. 1. – 2014. – pp. 69–73.
264. Alves, I.N. A Unified Model for Predicting Flowing Temperature Distribution in Wellbores and Pipelines / I.N. Alves, F.J.S. Alhanati, O. Shoham // SPE Production Engineering – Vol. 7. – Iss. 04. – 1992. URL: <https://www.onepetro.org/search?q=A>
265. Andrade, J. S. Inertial Effects on Fluid Flow through Disordered Porous Media / J. S. Andrade, and etc. // Physical Review Letters. – Vol. 82. – Iss. 26. – 1999. – pp. 134–136.
266. App, J. Impact of Reservoir Permeability on Flowing Sandface Temperatures: Dimensionless Analysis / J. App, K. Yoshioka // SPE Journal – Vol. 18. – Iss. 04. – 2013. URL: <https://www.onepetro.org/journal-paper/SPE-146951-PA>
267. Arsenjev, S.L. The boundary and continual transfer phenomena in fluids and flows / S.L. Arsenjev, I.B. Lozovitski, Y.P. Sirik // Cornell University Library. – 2003. – URL: <http://arxiv.org/abs/physics/0304017>
268. Atena, A. Modeling and Simulation of Real Gas Flow in a Pipeline / A. Atena, T. Muche // Journal of Applied Mathematics and Physics. – Vol.4. – No. 8. – 2016. – pp. 1652–1681.
269. Atkinson, P.G. Problems Of Heat Transfer In Porous Media / P.G. Atkinson, H.J. Ramey // SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Denver, 1977. – URL: <https://www.onepetro.org/conference-paper/SPE-6792-MS>
270. Barkley, D. The rise of fully turbulent flow / D. Barkley and etc. // Nature. – Vol. 526. – Iss. 7574. – 2015. – pp. 550–553.
271. Belghit, A. Numerical Study of Heat Transfer and Contaminant Transport in an Unsaturated Porous Soil / A. Belghit, M. Benyaich // Journal of Water Re-

- source and Protection – Vol.6. – No.13. – 2014. – pp. 1238–1247.
272. Brill, J.P. Modeling Multiphase Flow in Pipes / J.P. Brill // The Way Ahead – Vol. 06. – Iss. 02. – 2010. URL: <https://www.onepetro.org/journal-paper/SPE-0210-016-TWA>
273. Chemetov, N. On a generalized Muskat type problem / N. Chemetov, W. Neves // Cornell University Library. – 2014. – URL: <http://arxiv.org/abs/1404.2522>
274. Combarous, M.A. Combined Free and Forced Convection in Porous Media / M.A. Combarous, P. Bia // Society of Petroleum Engineers Journal – Vol. 11. – Iss. 04. – 1971. URL: <https://www.onepetro.org/journal-paper/SPE-3192-PA>
275. Cordoba, A. Porous media: the Muskat problem in 3D / A. Cordoba, D. Cordoba, F. Gancedo // Cornell University Library. – 2010. – URL: <http://arxiv.org/abs/1005.3536>
276. Desouky, S.E.D.M. Turbulent Pressure Loss of Yield-fluids in Pipes / S.E.D.M. Desouky, M.A. Al-Saddique // Journal of Canadian Petroleum Technology. – Vol. 38. – No. 13. – 1999. – pp. 1–5.
277. Dingfelder, B. An improved Talbot method for numerical Laplace transform inversion / B. Dingfelder, J.A.C. Weideman // Numerical Algorithms. – 2014. – URL: https://www.researchgate.net/publication/236136713_An_improved_Talbot_method_for_numerical_Laplace_transform_inversion
278. Dou, H.S. Secret Hidden in Navier-Stokes Equations: Singularity and Criterion of Turbulent Transition / H.S. Dou // The APS 67th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics, San Francisco, 2014. – URL: <http://arxiv.org/abs/1409.0086>
279. Du, J. Forced convective heat transfer for fluid flowing through a porous medium with internal heat generation / J. Du, B. Wang // Heat Transfer – Asian Research. – Vol. 30. – No. 3. – 2001. – pp. 213–221.
280. Fattahi, E. Large scale lattice Boltzmann simulation for the coupling of free and porous media flow / E. Fattahi and etc. // Cornell University Library. –

2015. – URL: <http://arxiv.org/abs/1507.06565>

281. Filippov, A.I. Analysis of the temperature field of cylindrical flow based of an on-the-average exact solution / A.I. Filippov, P.N. Mikhailov, O.V. Akhmetova, M.A. Goryunova // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – Vol. 5. – No. 3. – 2010. – pp. 369–376.
282. Filippov, A.I. Asymptotic Representations of Elastic Wave Fields in Permeable Strata / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova, G.F. Zamanova // Acoustical Physics. – Vol. 59. – No. 5. – 2013. – pp. 548–558.
283. Filippov, A.I. Construction of «on the average exact» asymptotic solution of the problem on radial distribution of temperature field in a well / A.I. Filippov, P.N. Mikhailov, O.V. Akhmetova, M.A. Goryunova // High Temperature. – Vol. 46. – No. 3. – 2008. – pp. 406–413.
284. Filippov, A.I. Field of Turbulent Flow in a Well / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova, A.S. Rodionov // High Temperature. – Vol. 51. – No. 2. – 2013. – pp. 246–255.
285. Filippov, A.I. Filtration pressure field in an inhomogeneous bed in constant drainage / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova, I.M. Filippov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – Vol. 85. – No. 1. – 2012. – pp. 1–18.
286. Filippov, A.I. Investigation of the temperature fields of a gas flow in a well / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova, M.A. Zelenova, A.G. Krupinov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – Vol. 84. – No. 5. – 2011. – pp. 1132–1147.
287. Filippov, A.I. One-Dimensional Plane Monochromatic Filtration Waves / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova // Journal of Engineering Physics and Thermophysics – Vol. 88. – Iss. 2. – 2015. – pp. 287–292.
288. Filippov, A.I. Quasi-one-dimensional nonstationary temperature field of a turbulent flow in a well / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova, A.S. Rodionov // Journal of Engineering Thermophysics. – Vol. 21. – Iss. 3. – 2012. – pp. 167–180.

289. Filippov, A.I. Subsonic flow of a real compressible gas in a vertical pipe / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova, A.G. Krupinov // Russian Physics Journal. – Vol. 54. – No 12. – 2011.– pp. 1423–1426
290. Filippov, A.I. Temperature field in inhomogeneous strongly anisotropic medium with sources / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova, M.A. Zelenova, M.A. Asylbaev // Journal of Engineering Thermophysics. – Vol. 23. – Iss. 2. – 2014. – pp. 158–170.
291. Filippov, A.I. The main problem of temperature survey / A.I. Filippov, P.N. Mikhailov, O.V. Akhmetova // High Temperature. – Vol. 44. – No. 5. – 2006. – pp. 743–751
292. Filippov, A.I. Thermologging problem with a given radial oil-velocity profile in the well shaft / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova, M.A. Zelenova, A.S. Rodionov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – Vol. 86. – Iss. 1. – 2013.– pp 183–204.
293. Filippov, A.I., Temperature field of heat sources during fluid injection in an anisotropic inhomogeneous reservoir / A.I. Filippov, O.V. Akhmetova, I.F. Kabirov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – Vol. 54. – No. 6. – 2013. – pp. 945–959.
294. Flock, D.L. Modelling of a Thermally Stimulated Oil Reservoir – An Evaluation of Theoretical and Numerical Methods / D.L. Flock, D. Quon, M.A. Leal, A.R. Thachuk // Journal of Canadian Petroleum Technology – Vol. 6. – Iss. 04. – 1967. URL: <https://www.onepetro.org/conference-paper/WPC-12157>
295. Grinchik, N.N. On the problem of nonisothermal mass transfer in porous media / N.N. Grinchik etc. // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – Vol. 76. – Iss. 6. – 2003. – pp. 1348–1363.
296. Guo, B. A Simple Model for Predicting Heat Loss and Temperature Profiles in Insulated Pipelines / B.Guo, Sh. Duan, A. Ghalambor // SPE Production & Operations – Vol. 21. – Iss. 01. – 2006. URL: <https://www.onepetro.org/journal-paper/SPE-86983-PA>

297. Indelman, P. Unsteady source flow in weakly heterogeneous porous media / P. Indelman // *Computational Geosciences*. – Vol. 4. – Iss. 4. – 2000. – pp. 351–381.
298. Indratno, S.W. Inversion of the Laplace Transform from the Real Axis Using an Adaptive Iterative Method / S.W. Indratno, A.G. Ramm // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. – 2009. – URL: <http://journals/ijmms/2009/898195/>
299. Kuchuk, F.J. A Nonlinear Approximation for the Pressure Behavior of Heterogeneous Reservoirs / F.J. Kuchuk, T.M. Habashy, C. Torres-Verdin // *SPE Formation Evaluation*. – Vol. 1. – Iss. 3. – 1996. – URL: <https://www.onepetro.org/journal-paper/SPE-26456-PA>
300. Kuchuk, F.J. Pressure Behavior of Laterally Composite Reservoirs / F.J. Kuchuk, T. Habashy // *SPE Formation Evaluation*. – Vol. 12. – Iss. 1. – 1997. – URL: <https://www.onepetro.org/journal-paper/SPE-24678-PA>
301. Kuhlman, K.L. Review of inverse Laplace transform algorithms for Laplace-space numerical approaches / K.L. Kuhlman // *Numerical Algorithms*. – Vol. 63. – Iss. 2. – 2013. – pp. 339–355.
302. Kunii, D. Thermal Conductivities of Porous Rocks Filled with Stagnant Fluid / D. Kunii, J.M. Smith // *Society of Petroleum Engineers Journal* – Vol. 1.– Iss. 01. – 1961. URL: <https://www.onepetro.org/journal-paper/SPE-1617-G>
303. Liu, Q. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann modeling of incompressible flows in porous media / Q. Liu, Y.L. He // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – Vol. 429. – 2015.– pp. 215–230.
304. Liua, Q. A multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for convection heat transfer in porous media / Q. Liua, Y.L. Hea, Q. Lib, W.Q. Taoa // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – Vol. 73. – 2014.– pp. 761–775.
305. Medeiros, F. A Semianalytical Approach To Model Pressure Transients in Heterogeneous Reservoirs / F. Medeiros, E. Ozkan, H. Kazemi // *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*. – Vol. 13. – Iss. 2. – 2010.– URL: <https://www.onepetro.org/journal-paper/SPE-102834-PA>

306. Nakshatrala, K.B. A numerical study of fluids with pressure-dependent viscosity flowing through a rigid porous medium / K.B. Nakshatrala, K.R. Rajagopal // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – Vol. 67. – Iss. 3. – 2011. – pp. 342–368.
307. Nelkin, M. Resource Letter TF-1: Turbulence in fluids / M. Nelkin // *American Journal of Physics*. – Vol. 68. – Iss. 4. – 2000. – pp. 310–318.
308. Nield, D.A. *Convection in Porous Media* / D.A. Nield, A. Bejan. – New York: Springer, 2013. – 778 p.
309. Nielsen, R.F. Transfer of Fluid Components in a Porous Medium at Constant Saturation and Fluid Velocity / R.F. Nielsen, R.L. Gilchrist // *Journal of Petroleum Technology* – Vol. 11. – Iss. 01. – 1959. URL: <https://www.onepetro.org/journal-paper/SPE-1046-G>
310. Niemeyer, K.E. Recent progress and challenges in exploiting graphics processors in computational fluid dynamics / K.E. Niemeyer, C.J. Sung // *The Journal of Supercomputing*. – Vol. 67. – Iss. 2. – 2014. – pp. 528–564.
311. Pablo, A. Nonlocal filtration equations with rough kernels / A. de Pablo, F. Quirós, A. Rodríguez // *Cornell University Library*. – 2015. – URL: <http://arxiv.org/abs/1509.09143>
312. Pilarczyk, D. Asymptotic stability of singular solution to nonlinear heat equation / D. Pilarczyk // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*. – Vol. 25. – Iss. 3. – 2009. – pp. 991–1001.
313. Ramey, H.J. Wellbore Heat Transmission / H.J. Ramey // *Journal of Petroleum Technology* – Vol. 14. – Iss. 04. – 1962. pp. 427–436.
314. Rannie, W.D. Heat transfer in turbulent shear flow / W.D. Rannie // *Journal of the aeronautical sciences*. – Vol. 23. – No. 5. – 1956. – pp. 485–489.
315. Ryan, N.W. Transition from laminar to turbulent flow in pipes / N. W. Ryan, M. M. Johnson // *AIChE Journal*. – Vol. 5. – Iss. 4. – 1959. – pp. 433–435.
316. Shu, J.J. Transient conjugate free convection from a vertical flat plate in a porous medium subjected to a sudden change in surface heat flux / J.J. Shu, I. Pop // *International Journal of Engineering Science*. – Vol. 36. – No. 2. –

- 1998.– pp. 207–214.
317. Smith, E.W. Heat Transfer Analysis of Partially And Fully Buried Pipes / E.W. Smith, J. Holbeach // 8th North American Conference on Multiphase Technology, Alberta, 2012. – URL: <https://www.onepetro.org/conference-paper/BHR-2012-A009>
318. Sochi, T. Single-Phase Flow of Non-Newtonian Fluids in Porous Media / T. Sochi // Cornell University Library. – 2009. – URL: <http://arxiv.org/abs/0907.2399>
319. Tiselj, I. DNS of Turbulent Heat Transfer in Channel Flow With Heat Conduction in the Solid Wall / I. Tiselj, R. Bergant, B. Mavko, I. Bajsic, G. Hetsroni // Journal of Heat Transfer. – Vol. 123. – Iss. 5. – 2001. – pp. 849–857.
320. Vabishchevich, P. Iterative methods for solving the pressure problem at multiphase filtration / P. Vabishchevich, M. Vasil'eva // Cornell University Library. – 2011. – URL: <http://arxiv.org/abs/1107.5479>
321. Zhang, H.Q.U. Unified Model of Heat Transfer in Gas-Liquid Pipe Flow / H.Q.U. Zhang, Q.U. Wang, C.U. Sarica, J.P.U. Brill // SPE Production & Operations. – Vol. 21. – Iss. 1. – 2006. – pp. 114–122.
322. Zhou, Y. Turbulent Flow of Non-Newtonian Fluid in Coiled Tubing: Numerical Simulation and Experimental Verification / Y. Zhou, S.N. Shah // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Denver, 2003. – URL: <https://www.onepetro.org/conference-paper/SPE-84123-MS> (дата обращения 09.09.2015)
323. Zimmermann C. Modelling Turbulent Heat Transfer in a Natural Convection Flow / C. Zimmermann, R. Groll // Journal of Applied Mathematics and Physics – Vol.2. – No.7. – 2014. – pp. 662–670.