

*На правах рукописи*



**Ряховский Алексей Васильевич**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ  
ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Сургут – 2013

Работа выполнена в ГБОУ ВПО «Сургутский государственный университет Ханты-Мансийского автономного округа – Югры».

**Научный руководитель:** кандидат физико-математических наук, доцент **Гореликов Андрей Вячеславович**

**Официальные оппоненты:** **Кислицын Анатолий Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет», заведующий кафедрой Микро- и нанотехнологий;

**Сибгатуллин Ильяс Наилевич** кандидат физико-математических наук, НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, старший научный сотрудник.

**Ведущая организация:** Тюменский филиал ФГБУН Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

Защита состоится « 15 » ноября 2013 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.274.14 при ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет» по адресу: 625003 г. Тюмень, ул. Перекопская, 15а, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-библиотечном центре ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет».

Автореферат разослан « 12 » октября 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Оленников Евгений  
Александрович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность.** Необходимость исследования естественной конвекции жидкости во вращающихся сферических слоях часто возникает при рассмотрении фундаментальных и прикладных проблем науки и техники. В частности, эта задача представляет интерес с точки зрения астрофизики, геодинамики и физики атмосферы, поскольку изучение течений в жидких ядрах планет и звезд, мантийной конвекции и атмосферной циркуляции сводится к решению задачи конвекции в сферических слоях. В технических приложениях конвекция в сферических слоях играет важную роль, например, при моделировании конвекции в условиях микрогравитации в космических аппаратах и их топливных баках.

Одной из наиболее актуальных проблем геодинамики является задача о конвекции во внешнем жидком ядре Земли и непосредственно связанный с ней вопрос о формировании геомагнитного поля. Сложность создания математической модели геодинамо связана, прежде всего, с отсутствием прямых сведений о процессах, протекающих в ядре Земли, его составе и физических свойствах. Решение данных задач осложняется тем, что для большинства изучаемых процессов в настоящее время невозможно провести непосредственные натурные и лабораторные эксперименты. Таким образом, основным инструментом исследования становится численное моделирование.

Большинство из упомянутых выше проблем относятся к так называемым «большим» задачам, требующим для своего численного решения значительных затрат вычислительных ресурсов. Поэтому одним из важнейших моментов является разработка программного обеспечения, использующего современные технологии высокопроизводительных вычислений, в частности, параллельные вычисления на системах с общей и распределенной памятью.

В настоящее время для численного решения системы уравнений конвекции в сферических слоях наиболее часто используются полуспектральные и спектральные методы, в которых решение ищется при помощи разложения неизвестных функций по сферическим гармоникам. Однако по сравнению с методом контрольного объема использование спектральных методов невыгодно с точки зрения быстродействия при параллельном выполнении программ, поскольку метод контрольного объема легче распараллеливается и

требует значительно меньше операций обмена данными между процессами. Кроме того, в отличие от спектральных методов при использовании метода контрольного объема не требуется делать дополнительных предположений, таких, например, как выбор числа гармоник, на котором следует останавливать разложение.

**Целью диссертационной работы** является разработка новых методов численного моделирования и программного обеспечения для решения задач гидродинамики и теплообмена в сферических слоях с использованием высокопроизводительных технологий параллельного программирования, а также численное исследование естественной конвекции во вращающихся сферических слоях в центральном поле тяжести в постановке, учитывающей возможность вращения границ слоя под действием силы трения, и изучение различных режимов конвекции в зависимости от определяющих задачу параметров.

**Объектом исследования** являются конвективные течения вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, границы которого могут вращаться под действием сил трения со стороны жидкости.

**Предметом исследования** является структура и режимы естественно-конвективных течений в сферических слоях и зависимости скоростей вращения границ слоя от управляющих параметров.

**Методы исследования** включают в себя методы математического моделирования: математическую модель задачи, разработку численного алгоритма решения задачи и его реализацию в виде программного комплекса, проведение вычислительных экспериментов с последующим анализом результатов.

#### **Задачи работы:**

1) разработка и обоснование нового метода математического моделирования задачи естественной конвекции в сферическом слое, обе границы которого могут вращаться под действием сил вязкого трения со стороны жидкости;

2) разработка, отладка и тестирование программного комплекса для численного решения двух- и трехмерных задач гидродинамики и теплообмена в сферических слоях методом контрольного объема;

3) распараллеливание программного кода для возможности ведения расчетов на высокопроизводительных вычислительных системах с общей и распределенной памятью с использованием стандарта MPI (Message Passing Interface – Интерфейс передачи сообщений);

4) проведение вычислительных экспериментов по исследованию естественной конвекции во вращающихся сферических слоях в зависимости от числа Рэлея, скорости вращения границ слоя и аспектного отношения, и анализ полученных результатов.

**На защиту выносятся** следующие результаты, соответствующие пунктам паспорта специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам:

1. **Пункт 1:** *Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.* Новый математический метод моделирования граничных условий для задачи естественной конвекции в сферическом слое, учитывающий возможность вращения обеих границ слоя под действием сил вязкого трения со стороны жидкости.

2. **Пункт 3:** *Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.* Новый численный метод решения задачи естественной конвекции в сферическом слое с вращающимися границами, основанный на законе сохранения момента импульса и методе контрольного объема.

3. **Пункт 4:** *Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.* Комплекс параллельных вычислительных программ для решения задач гидродинамики и теплообмена в сферических слоях, созданный на основе предложенных методов и предназначенный для использования на высокопроизводительных вычислительных системах с общей и распределенной памятью.

4. **Пункт 5:** *Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.* Новые результаты вычислительных экспериментов по исследованию режимов естественной конвекции во вращающихся сферических слоях в центральном поле тяжести в зависимости от управляющих параметров.

Таким образом, в соответствии с паспортом специальности 05.13.18 в диссертации присутствуют оригинальные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

**Научная новизна** выносимых на защиту результатов заключается в следующем:

На основе метода контрольного объема создан и протестирован программный комплекс для проведения вычислительных экспериментов по исследованию двух- и трехмерных задач гидродинамики и теплообмена в сферических слоях с использованием высокопроизводительных вычислительных систем.

Задача о естественной конвекции в сферических слоях рассмотрена в новой математической постановке, учитывающей возможность вращения обеих границ слоя под действием сил вязкого трения со стороны жидкости. В рассмотренной модели границами слоя жидкости являются твердые слои. На границе жидкость – твердое тело выполняются условия прилипания, а вся механическая система в целом является замкнутой.

Предложен новый математический метод решения задач о движении и конвективном теплообмене в замкнутой механической системе, состоящей из двух твердых сферических слоев, пространство между которыми заполнено жидкостью.

Разработан новый численный метод совместного решения системы уравнений естественной конвекции в сферическом слое и уравнений движения твердых границ слоя, основанный на законе сохранения момента импульса.

Проведены серии вычислительных экспериментов с различными вариантами граничных условий. В результате расчетов найдены новые трехмерные решения задачи о естественной конвекции во вращающихся сферических слоях в центральном поле тяжести. Получены новые данные о влиянии вращения на режимы естественной конвекции в сферических слоях.

**Достоверность результатов** диссертации обеспечивается использованием математической модели, основанной на фундаментальных законах и уравнениях классической механики и механики сплошных сред; выбором теоретически обоснованных численных методов; проведением большого числа тестовых расчетов. Сравнение численных решений тестовых задач с аналитическими решениями и с результатами вычислительных и лабораторных экспериментов других авторов демонстрирует количественное и качественное совпадение.

**Практическая значимость.** Результаты диссертационной работы имеют практическое значение для исследований в области астрофизики, физики атмосферы и геодинамики, в частности, непосредственно относятся к задаче моделирования естественной конвекции в жидком ядре Земли. Разработанный программный комплекс может

быть использован для эффективного решения инженерно-технических задач, требующих моделирования конвективного теплообмена в областях сферической геометрии на высокопроизводительных вычислительных системах. Примером таких задач является проблема гомогенизации стратифицированного топлива в сферических баках космических аппаратов в условиях микрогравитации.

Разработанное программное обеспечение используется для проведения вычислительного практикума со студентами старших курсов и аспирантами Политехнического института Сургутского государственного университета.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 11 печатных работах [1-11], из них 3 статьи в изданиях из научных журналов, рекомендованных ВАК; 3 – в сборниках научных статей; 2 – в тезисах окружных конференций; 3 – в тезисах всероссийских и международных конференций. Получено свидетельство государственной регистрации программ для ЭВМ в Роспатенте [12].

**Работа выполнена при поддержке** гранта РФФИ № 13-01-12051 «офи\_м» в рамках конкурса ориентированных фундаментальных исследований по актуальным междисциплинарным темам.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

- Всероссийская конференция по математике и механике (Томск, 2008);

- 4-я и 5-я международные конференции «Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания» (Обнинск, 2008, 2011);

- X и XI окружные конференции молодых ученых «Наука и инновации XXI века» (Сургут, 2009, 2010);

- I Всероссийская конференция молодых ученых «Наука и инновации XXI века» (Сургут, 2012).

Результаты работы докладывались на объединенных семинарах кафедры прикладной математики, кафедры «Строительные технологии и конструкции» и лаборатории «Математического моделирования в строительстве и промышленности» Сургутского государственного университета.

**Личный вклад.** Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. В совместных исследованиях автор принимал участие во всех этапах работы: в постановках задач, в выборе и формулировке математической модели, в создании численного метода и его реализации в виде

программного комплекса, в проведении вычислительных экспериментов и анализе их результатов. Автор самостоятельно разработал параллельный алгоритм и реализовал его в виде комплекса вычислительных программ, провел отладку и тестирование.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Диссертация изложена на 143 страницах, включая 48 иллюстраций, 7 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 139 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введение** обоснована актуальность исследований в области математического моделирования естественной конвекции во вращающихся сферических слоях, обозначены цели и задачи работы, кратко изложены основные результаты диссертации, выносимые на защиту, и отмечена их достоверность и новизна.

**В первой главе** приводится обзор современного состояния экспериментальных и численных исследований конвекции и МГД-течений в сферических слоях. Основное внимание при этом обращается на работы, посвященные задаче о естественной конвекции во вращающихся сферических слоях и задаче о геодинamo. Рассмотренные статьи были опубликованы в журналах Nature, Science, Earth and Planetary Science Letters, Journal of Fluid Mechanics, Physical Review Letters, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, Physics of Fluids и др. Всего рассмотрено 128 работ, особое внимание уделено современным исследованиям за период 2000–2013 гг. В разделе 1.1 описываются результаты лабораторных экспериментов по изучению конвекции во вращающихся сферических слоях, а также экспериментов по генерации магнитного поля за счет течений проводящей жидкости. В разделе 1.2 приводятся основные результаты численного моделирования естественной конвекции и МГД-течений во вращающихся сферических слоях, в частности, предсказание восточного дрейфа твердого ядра Земли и получение эффекта инверсии геомагнитного поля. Раздел 1.3 посвящен современным численным методам решения задач гидродинамики, магнитной гидродинамики и теплообмена в сферических слоях. По обзору литературы сделаны выводы о перспективных направлениях исследований по математическому моделированию задач конвекции в сферических слоях и, в частности, о необходимости разра-



ботки параллельного программного обеспечения, позволяющего эффективно использовать вычислительные мощности современных высокопроизводительных систем.

**Во второй главе** рассматривается численное моделирование гидродинамики и теплообмена в сферических слоях, приводится описание разработанного программного комплекса.

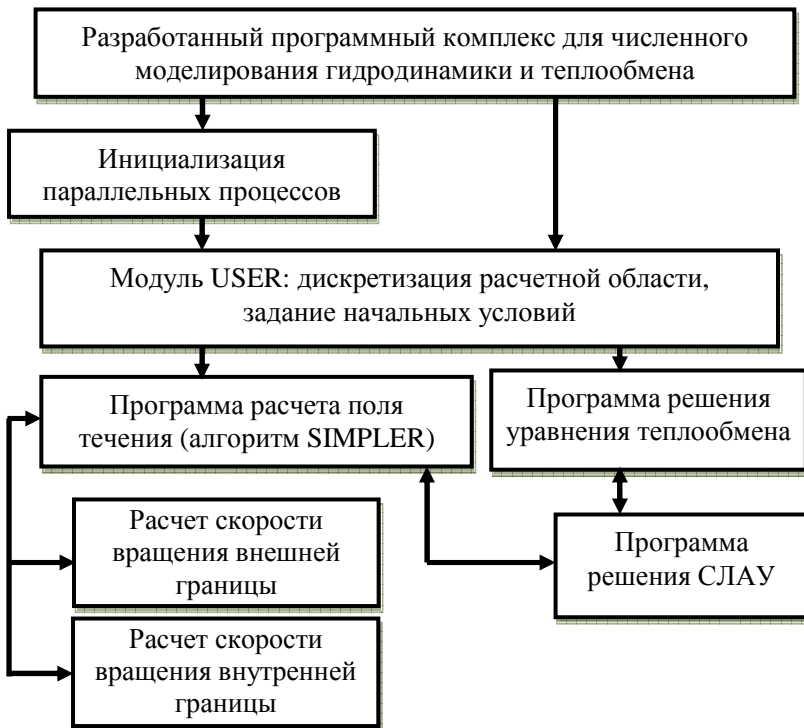
В разделе 2.1 приводится постановка задачи. Рассматривается сферический слой, заполненный вязкой несжимаемой теплопроводящей жидкостью. В качестве математической модели используется система уравнений гидродинамики и теплообмена.

Раздел 2.2 посвящен дискретизации расчетной области. Для дискретизации уравнений конвекции использовался метод контрольного объема в сферических координатах. В разделах 2.3–2.6 выводятся дискретные аналоги для уравнения теплообмена, уравнения движения жидкости, уравнений на давление и поправку давления. При выводе дискретных аналогов уравнений для компонент скорости применялись шахматные сетки. В разделе 2.7 приводится алгоритм SIMPLER, при использовании которого рассчитывалось поле течения. В разделе 2.8 рассматриваются граничные условия для давления. В разделе 2.9 описываются основные функции стандарта MPI (Message Passing Interface), которые использовались для коммуникации между параллельными потоками.

Раздел 2.10 посвящен разработке параллельной версии алгоритма. Распараллеливание было выполнено при помощи метода одномерной декомпозиции. Метод заключается в разбиении расчетной области на подобласти вдоль азимутального угла  $\varphi$ . В каждой из подобластей расчет ведется отдельным процессом. Приграничные расчетные точки одной области являлись граничными точками для соседней области, и наоборот, т.е. область перекрытия двух смежных подобластей представляла собой слой толщиной два контрольных объема. При такой декомпозиции каждый процесс должен обмениваться данными только с процессами, отвечающими за соседние подобласти. Обмен данными производился на этапе решения СЛАУ на каждой итерации метода переменных направлений. Пересылаемые данные представляют собой двухмерный массив, содержащий значения искомой функции в приграничных точках области. В разделе 2.11 приводится описание метода переменных направлений, который применялся для решения СЛАУ, полученных в результате дискретизации. Метод переменных направлений был модифицирован для

возможности ведения параллельных вычислений: прогонки осуществлялись только в радиальном и полярном направлениях.

Раздел 2.12 содержит описание разработанного комплекса программ. В программном комплексе выделяются следующие независимые функциональные блоки: блок, отвечающий за инициализацию параллельных процессов; модуль, в котором находятся процедуры задания геометрических размеров области, расчета координат контрольных объемов и задания начальных условий; графический интерфейс пользователя; программы решения уравнений гидродинамики и теплообмена; процедура решения СЛАУ; процедура расчета граничных условий на внешней и внутренней границах сферического слоя. Схема, иллюстрирующая структуру программного комплекса, приведена на рисунке 1.



**Рис. 1. Структура программного комплекса для численного моделирования задач гидродинамики и теплообмена в сферических слоях**

Для удобства использования разработанный программный комплекс был оснащен оконным пользовательским интерфейсом, написанном на языке C#. Оконный интерфейс позволяет варьировать условия задачи без изменения и перекомпиляции исходного кода. Предусмотрена возможность задания следующих параметров: внутреннего и внешнего радиусов сферического слоя, количества узлов сетки, шага по времени, начальных и граничных условий 1-го рода для температуры и скорости.

**Третья глава** посвящена рассмотрению результатов верификации разработанного программного обеспечения. Программный комплекс был протестирован на 9 задачах, включающих задачи с аналитическим решением, а также вычислительные и натурные эксперименты, результаты которых приводятся в работах других авторов. В разделах 3.1–3.6 представлены результаты решения задач с аналитическими решениями. В разделах 3.7–3.9 проводится сравнение численных решений с вычислительными и лабораторными экспериментами других авторов. Рассматривались вычислительные эксперименты по сферическим течениям Тейлора-Куэтта; по естественной конвекции во вращающемся сферическом слое в центральном поле тяжести; по естественной конвекции в сферическом слое в центральном и вертикальном полях сил, а также лабораторные эксперименты по изучению естественной конвекции в сферическом слое в вертикальном поле тяжести.

Раздел 3.10 посвящен анализу производительности разработанного параллельного кода. Оценка эффективности распараллеливания проводилась путем расчета ускорения, которое определялось как отношение времени выполнения последовательной версии кода к времени выполнения параллельной версии. Тесты для определения ускорения проводились на задаче нестационарного течения изотермической жидкости через сферический слой. Расчетная сетка составляла  $62 \times 182 \times 362$  узлов. Часть расчетов была выполнена с использованием технологической платформы программы «Университетский кластер» ИСП РАН. Получено семикратное ускорение при использовании 40 процессоров.

Результаты верификации разработанного программного комплекса демонстрируют качественное и количественное соответствие с имеющимися аналитическими решениями, численными решениями и данными лабораторных экспериментов. Результаты тестов на производительность показывают типичную для данного класса задач зависимость ускорения от числа процессоров на вычислительных системах с распределенной памятью.

**Четвертая глава** посвящена разработке нового метода математического моделирования естественной конвекции в сферическом слое, обе границы которого являются твердыми оболочками, а также анализу результатов вычислительных экспериментов.

В разделе 4.1 рассматриваются особенности приближения Буссинеска в инерциальной и в равномерно вращающейся системах отсчета, и устанавливается связь между этими моделями. Обосновывается выбор инерциальной системы отсчета.

В разделе 4.2 рассматривается математическая модель задачи естественной конвекции в сферическом слое и описывается разработанный метод моделирования граничных условий, учитывающий возможность вращения обеих границ слоя под действием сил вязкого трения со стороны жидкости.

Рассматривается сферический слой толщиной  $H$  с внутренним радиусом  $r_0$ , расположенный в центральном поле тяжести  $\mathbf{g} = -g(r)\mathbf{e}_r$  (рис. 2). Слой заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Температура внутренней границы  $T_h$  выше температуры  $T_c$  внешней границы. Внешняя и внутренняя границы сферического слоя вращаются вокруг оси  $Oz$  со скоростями  $\boldsymbol{\omega}_{out}(t)$  и  $\boldsymbol{\omega}_{in}(t)$ , которые могут изменяться со временем под действием сил вязкого трения со стороны жидкости. В начальный момент времени  $t = 0$  сферический слой вращается со скоростью  $\boldsymbol{\omega}_0$ .

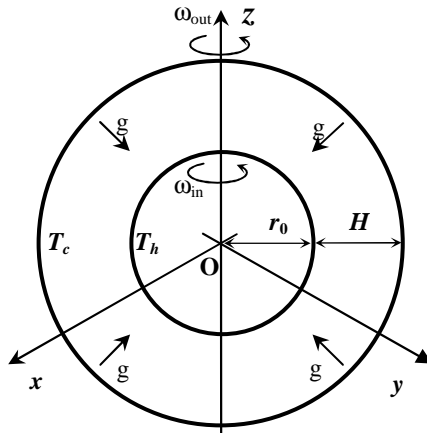


Рис. 2. Схема, иллюстрирующая постановку задачи

Использовались следующие характерные масштабы: длины –  $H$ ; времени –  $H^2/\alpha$ ; скорости –  $\alpha/H$ ; угловой скорости –  $\alpha/H^2$ ; давления –  $\alpha\mu/H^2$ ; температуры –  $(T_h - T_c)$ . Безразмерные параметры задачи:  $A=r_0/H$  – аспектное отношение;  $Ra = g\beta(T_h - T_c)H^3/\alpha\nu$  – число Рэлея;  $Pr = \nu/\alpha$  – число Прандтля;  $J = I/\rho H^5$  – безразмерный момент инерции твердой оболочки;  $\Omega_0 = H^2\omega_0/\alpha$  – безразмерная начальная угловая скорость вращения сферического слоя. Здесь  $\alpha$  – коэффициент температуропроводности;  $\beta$  – коэффициент объемного расширения;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $I$  – момент инерции твердой оболочки;  $\rho$  – плотность жидкости.

В качестве математической модели используется система уравнений естественной конвекции в приближении Буссинеска в инерциальной системе отсчета в безразмерных переменных:

$$\frac{1}{Pr} \frac{DU}{D\tau} = -\nabla P + \text{div} \mathbf{S} + Ra \Theta \mathbf{e}_r, \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{D\Theta}{D\tau} = \Delta \Theta, \quad (3)$$

где  $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_\varphi$  – скорость жидкости;  $\tau$  – время;  $P$  – давление;  $\mathbf{S}$  – тензор вязких напряжений;  $\Theta$  – температура.

Граничные условия:

$$\mathbf{U}|_{R=A} = [\Omega_{in}(\tau), \mathbf{R}], \quad \Theta|_{R=A} = 1, \quad \mathbf{U}|_{R=A+1} = [\Omega_{out}(\tau), \mathbf{R}], \quad \Theta|_{R=A+1} = 0. \quad (4)$$

Начальные условия:  $\mathbf{U}|_{\tau=0} = [\Omega_0, \mathbf{R}], \quad \Theta|_{\tau=0} = A(A+1)/R - A$ .

Угловые скорости  $\Omega_{in}(\tau)$  и  $\Omega_{out}(\tau)$  находятся из уравнений движения внутреннего шара и внешнего твердого слоя:

$$J_{in} \frac{d\Omega_{in}}{d\tau} = Pr \iint_{S_{in}} [\mathbf{R}_{in}, \mathbf{f}_{in}]_z dS, \quad (5)$$

$$J_{out} \frac{d\Omega_{out}}{d\tau} = Pr \iint_{S_{out}} [\mathbf{R}_{out}, \mathbf{f}_{out}]_z dS, \quad (6)$$

где  $S_{in}$ ,  $S_{out}$  – границы внутреннего шара и внешнего слоя;  $\mathbf{f}_{in}$ ,  $\mathbf{f}_{out}$  – силы трения, действующие на единицу площади  $S_{in}$  и  $S_{out}$ ;  $\mathbf{R}_{in}$ ,  $\mathbf{R}_{out}$  – безразмерные радиус-векторы точек.

Решение уравнения (5) имеет вид:

$$\Omega_{in}(\tau) = \Omega_{in}(\tau_0) e^{-\frac{8\pi}{3} C_{in}(\tau - \tau_0)} + C_{in} \int_{\tau_0}^{\tau} F_{in}(\xi) e^{-\frac{8\pi}{3} C_{in}(\tau - \xi)} d\xi, \quad (7)$$

где:  $C_{in} = \frac{\text{Pr} A^3}{J_{in}}$ ,  $F_{in}(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial W}{\partial R} \Big|_{R=A} \sin^2 \theta d\theta d\varphi$ , аналогичным образом определяются  $C_{out}$  и  $F_{out}(\tau)$ .

Дискретный аналог выражения (7) используется при аппроксимации граничных условий на внутренней сфере в следующем виде:

$$\Omega_{in}(\tau) \approx \Omega_{in}(\tau_0) e^{-\frac{8\pi}{3} C_{in} \Delta\tau} + \frac{3}{8\pi} \left( \frac{F_{in}(\tau) + F_{in}(\tau_0)}{2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{8\pi}{3} C_{in} \Delta\tau} \right), \quad (8)$$

где  $\Delta\tau$  – шаг по времени ( $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ ).

Аналогичным образом записывается решение уравнения (6) и его дискретный аналог, использующийся для аппроксимации граничных условий на внешней сфере:

$$\Omega_{out}(\tau) \approx \Omega_{out}(\tau_0) e^{\frac{8\pi}{3} C_{out} \Delta\tau} + \frac{3}{8\pi} \left( \frac{F_{out}(\tau) + F_{out}(\tau_0)}{2} \right) \left( 1 - e^{\frac{8\pi}{3} C_{out} \Delta\tau} \right). \quad (9)$$

На временном слое  $\tau_n$  считаются известными поля скорости  $\mathbf{U}_n$ , температуры  $\Theta_n$  и давления  $P_n$ . Система, состоящая из жидкого слоя и твердых оболочек, считается замкнутой механической системой. Разработанный новый алгоритм решения задачи в случае вращения обеих границ сферического слоя состоит из следующих этапов:

1. Рассчитывается скорость вращения внутреннего ядра (формула (8)). Скорость вращения внешней границы находится из закона сохранения момента импульса.

2. По алгоритму SIMPLER находится первое приближение для давления  $P^*$  и скорости  $\mathbf{U}^*$ . Решается уравнение теплопереноса для нахождения распределения температуры  $\Theta^*$ . Определяется момент импульса жидкости.

3. Рассчитывается скорость вращения внешней границы (формула (9)). Скорость вращения внутреннего ядра находится из закона сохранения момента импульса.

4. По алгоритму SIMPLER находится следующее приближение для давления  $P^{**}$  и скорости  $\mathbf{U}^{**}$ . Решается уравнение теплопереноса для нахождения распределения температуры  $\Theta^{**}$ . Определяется момент импульса жидкости.

5. Проверка численной сходимости. В качестве критерия сходимости используются максимальные по области относительные невязки уравнений движения, теплообмена и неразрывности. Если критерий не удовлетворяется, то вновь выполняются шаги 1–4.

Если критерий сходимости удовлетворяется, то происходит переход на следующий временной слой  $\tau_{n+1}$ :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}^{**}, P_{n+1} = P^{**}, \Theta_{n+1} = \Theta^{**}.$$

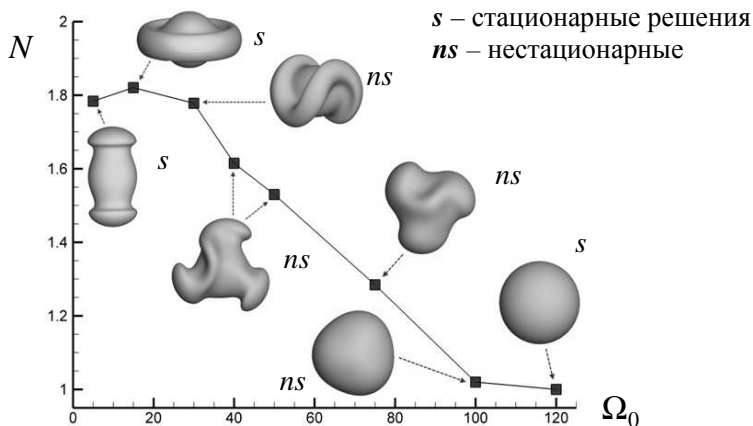
После этого этапы 1–5 повторяются.

Результаты, демонстрирующие структуру конвективных течений, более наглядно представлять и анализировать в системе отсчета, которая равномерно вращается вместе с внешней границей сферического слоя с угловой скоростью  $\Omega_0$ . В этой системе отсчета азимутальная составляющая скорости равна:  $W' = W - \Omega_0 R \sin \theta$ .

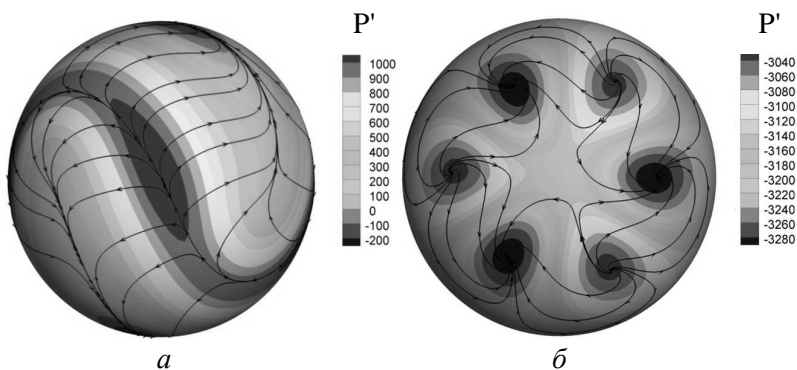
В разделе 4.3 представлены результаты вычислительных экспериментов, посвященных решению осесимметричной задачи конвекции в равномерно вращающемся сферическом слое. Исследовалась зависимость стационарных решений от числа Рэлея  $Ra$  при постоянной скорости вращения слоя. Установлено, что возможно существование, по крайней мере, двух различных типов стационарных режимов конвекции, соответствующих одному значению числа Рэлея. Определены зависимости числа Нуссельта от скорости вращения  $\Omega$  и от числа Рэлея.

В разделе 4.4 представлены результаты вычислительных экспериментов по исследованию естественной конвекции во вращающемся сферическом слое в трехмерной постановке. Считалось, что внешняя граница слоя вращается равномерно, а внутреннее твердое ядро может вращаться под действием силы трения со стороны жидкости. Рассматривались сферические слои с аспектным отношением  $A = 0,56$ . Исследовалась зависимость режимов конвекции от скорости вращения  $\Omega_0$  внешней границы при фиксиро-

ванном числе Рэлея  $Ra = 10^4$ . Величина  $\Omega_0$  изменялась в диапазоне  $5 \leq \Omega_0 \leq 100$ . Характерные поверхности постоянной температуры и зависимость числа Нуссельта от  $\Omega_0$  изображены на рисунке 3. Получены новые, трехмерные, периодические по времени режимы течения (рис. 4).



**Рис. 3. Зависимость числа Нуссельта от скорости вращения внешней границы сферического слоя. Показаны характерные изоповерхности температуры**

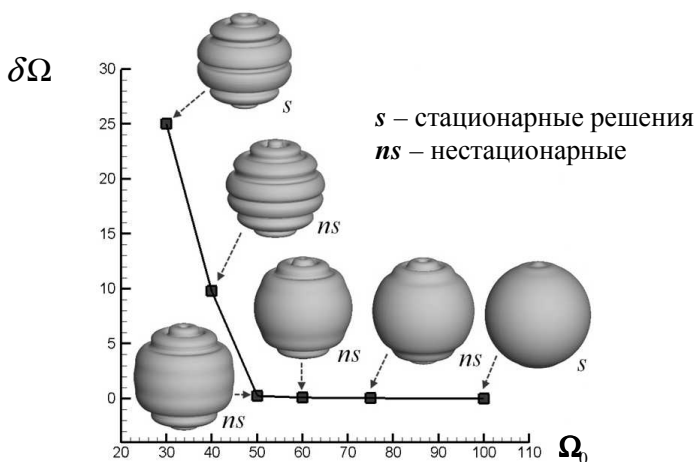


**Рис. 4. Линии тока тангенциальных составляющих скорости на сферической поверхности в системе отсчета равномерно вращающейся вместе с внешней границей слоя, цветом показано распределение  $P'$  – отклонения давления, вызванного естественной конвекцией:**

$$a - \Omega_0 = 30; \quad b - \Omega_0 = 100$$



В разделе 4.5 представлены результаты вычислительных экспериментов, в которых предполагалось, что обе границы сферического слоя могут вращаться под действием сил вязкого трения со стороны жидкости. Аспектное отношение в данном случае было равно  $A = 3$ . Считалось, что момент инерции жидкого слоя относительно оси  $z$  совпадает с моментами инерции внутреннего шара и внешней границы сферического слоя. В начальный момент времени скорости вращения внутренней и внешней сфер совпадали и были равны  $\Omega_0$ . Вычислительные эксперименты проводились при фиксированном числе Рэлея  $Ra = 10^4$ , а начальная безразмерная скорость вращения  $\Omega_0$  границ сферического слоя варьировалась в диапазоне от 5 до 100.



**Рис. 5.** Зависимость относительной разности скоростей  $\delta\Omega$  вращения внутренней и внешней границ от  $\Omega_0$ .

При  $\Omega_0 \geq 50$  было получено семейство осесимметрических периодических решений. Влияние начальной скорости вращения сферического слоя на скорости вращения границ оценивалось при помощи расчета относительной разности скоростей вращений внутренней и внешней границ слоя:  $\delta\Omega = |\Omega_{in} - \Omega_{out}| / \Omega_0 \cdot 100\%$ . На рисунке 5 приводятся характерные изоповерхности температуры и зависимость  $\delta\Omega$  от  $\Omega_0$ . Как видно из рисунка, при увеличении

момента импульса вращающейся системы естественно-конвективные течения затухают.

В **заключении** сформулированы основные выводы, перечислены полученные в данной работе результаты.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ**

В рамках стандартной модели естественной конвекции, основанной на приближении Буссинеска, впервые рассмотрена задача о естественной конвекции в сферическом слое, обе границы которого могут вращаться под действием сил вязкого трения со стороны жидкости. Предложен новый математический метод моделирования граничных условий для данной задачи, использующий решение уравнений движения твердых границ сферического слоя. Разработан алгоритм численного решения данной задачи, основанный на учете закона сохранения момента импульса.

Новый алгоритм реализован в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для численного моделирования 2D и 3D задач гидродинамики и теплообмена в сферических слоях методом контрольного объема. Разработанный многопоточный код показывает типичное для данного класса задач ускорение при выполнении на вычислительных системах с распределенной памятью.

Проведено тестирование программного комплекса с целью проверки корректности применяемых вычислительных методов. Результаты верификации показывают количественное совпадение с аналитическими решениями и расчетными данными других авторов, а также качественное соответствие результатам лабораторных экспериментов, что позволяет сделать вывод об адекватности получаемых численных решений и о возможности использования разработанного программного обеспечения для проведения вычислительных экспериментов.

В ходе проведения комплексного исследования задачи о естественной конвекции во вращающемся сферическом слое получен ряд новых результатов:

- новые трехмерные, периодические по времени решения;
- определена зависимость скорости вращения внутреннего твердого ядра от скорости вращения внешней границы сферического слоя;
- продемонстрирован эффект восточного дрейфа внутреннего твердого ядра, наблюдаемый при сейсмологических исследованиях ядра Земли;

- показано, что даже при малых скоростях вращения сферического слоя, получаемые решения, как правило, трехмерные и нестационарные;

- показано, что влияние силы трения на вращение внешней границы существенно, когда момент инерции внешней границы сопоставим по порядку величины с моментами инерции жидкого слоя и внутреннего ядра.

### **СПИСОК РАБОТ ОПУБЛИКОВАННЫХ В ИЗДАНИЯХ, РЕКОМЕНДОВАННЫХ ВАК РФ**

1. Гореликов А.В., Ряховский А.В. Численное моделирование естественной конвекции в сферическом слое // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2008. – № 3. – С. 77–84.

2. Гореликов А.В., Ряховский А.В. Влияние вращения внешней границы на режимы естественной конвекции в сферическом слое // Вестник Нижегородского университетского им. Н.И. Лобачевского. №4. Часть 3. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – С. 1085–1087.

3. Гореликов А.В., Ряховский А.В., Фокин А.С. Численное исследование некоторых нестационарных режимов естественной конвекции во вращающемся сферическом слое // Вычислительная механика сплошных сред – Пермь, 2012. – Т. 5, № 2 – С. 184–192.

### **СПИСОК РАБОТ ОПУБЛИКОВАННЫХ В ДРУГИХ ИЗДАНИЯХ**

4. Гореликов А.В., Ряховский А.В. Распараллеливание программного кода для численного моделирования гидродинамики и теплообмена в сферическом слое с использованием стандарта OpenMP // Сборник научных трудов. Физико-математические и технические науки / Сургутский государственный университет ХМАО. – Сургут : Изд-во СурГУ, 2008. – Вып. 29. – С. 29–34.

5. Гореликов А.В., Ряховский А.В. Численное исследование свободной конвекции во вращающемся шаровом слое // 4-я международная конференция «Математические идеи П.Л. Чебышева их приложение к современным проблемам естествознания» – Тезисы докладов. – Обнинск: ИАТЭ НИЯУ МИФИ, 2008. – С. 23–24.

6. Гореликов А.В., Ряховский А.В. Численное моделирование теплопроводности с использованием стандарта распределенных

вычислений MPI // Наука и инновации XXI века: мат-лы X Окр. конф. молодых ученых. – Сургут: ИЦ СурГУ, 2009. – С. 6–8.

7. Ряховский А.В. Тестирование программного комплекса для численного моделирования естественной конвекции в кубе // Сборник научных трудов. Физико-математические и технические науки / Сургутский государственный университет ХМАО – Сургут, 2010. – Вып. 33 – С. 48–53.

8. Ряховский А.В. Численное моделирование конвекции в кубе // Наука и инновации XXI века: мат-лы XI Окр. конф. молодых ученых. – Сургут: ИЦ СурГУ, 2010. – С. 8–9.

9. Ряховский А.В. Тестирование программного комплекса для численного моделирования магнитной гидродинамики в кубе // Сборник научных трудов. Физико-математические и технические науки / Сургутский государственный университет ХМАО – Сургут, 2011. – Вып. 34 – С. 29–33.

10. Гореликов А.В., Ряховский А.В. Численное исследование свободной конвекции в сферическом слое с вращающимися границами // V международная конференция «Математические идеи П.Л. Чебышева их приложение к современным проблемам естествознания» – Тезисы докладов – Обнинск: ИАТЭ НИЯУ МИФИ, 2011. – С. 139–140.

11. Ряховский А.В., Гореликов А.В. Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в сферических слоях // Наука и инновации XXI века: Материалы I Всероссийской конференции молодых ученых. Т. III. Под ред. Е.Ю. Мурунова. – Сургут: Дефис, 2012. – С. 136–139.

### **СВИДЕТЕЛЬСТВО О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

12. Гореликов А.В., Ряховский А.В. Свидетельство о регистрации программы «Программа численного моделирования конвекции в сферических слоях». – 2013 – № 2013618281.

Ряховский Алексей Васильевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ  
ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 10.10.2013 г. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 120. Заказ № 72.

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе  
издательского центра СурГУ.  
Тел. (3462) 76-30-65, 76-30-66.

Отпечатано в полиграфическом отделе  
издательского центра СурГУ.  
г. Сургут, ул. Энергетиков, 8. Тел. (3462) 76-30-67.

ГБОУ ВПО «Сургутский государственный университет ХМАО – Югры»  
628400, Россия, Ханты-Мансийский автономный округ,  
г. Сургут, пр. Ленина, 1.  
Тел. (3462) 76-29-00, факс (3462) 76-29-29.