

*На правах рукописи*



**СОРОКИНА Елена Михайловна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ КОНВЕКТИВНЫХ  
ТЕЧЕНИЙ ГАЗА**

**Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ**  
**диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**

**Тюмень – 2016**

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Тюменский государственный университет».

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, доцент  
**Обухов Александр Геннадьевич**

**Официальные оппоненты:** **Дерябин Сергей Львович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГБОУ ВО «Уральский государственный  
университет путей сообщения», профессор  
кафедры естественнонаучных дисциплин

**Пяткова Анна Владимировна**, кандидат  
физико-математических наук, Тюменский  
филиал ФГБУН Института теоретической и  
прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, научный сотрудник

**Ведущая организация:** Снежинский физико-технический институт –  
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Снежинск

Защита диссертации состоится «15» декабря 2016 года в 16-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.274.14 при ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет» по адресу: 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская, 15А, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет» и на сайте <https://diss.utmn.ru/sovnet/diss-sovnet-212-274-14/zashchita/>.

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2016 г.

*Ученый секретарь  
диссертационного совета*



*Е. А. Оленников*

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена применению математического моделирования и численных методов для описания начальной стадии сложных течений вязких теплопроводных газов в тепловых конвективных потоках. Рассматриваются процессы возникновения и динамики трехмерного нестационарного движения газа при учете силы тяжести как сжимаемой вязкой теплопроводной сплошной среды в тепловых конвективных потоках.

Исследование поддержано Министерством образования и науки РФ, проект № 3023.

**Актуальность темы исследований.** Возникновение конвекции заметно влияет на динамику потоков сплошной среды: значительно усиливаются теплообмен, диффузия, изменяются характерные скорости и другие характеристики потока. Такого рода явления могут играть как положительную, так и отрицательную роль в ряде технологических процессов. Ввиду этого, задача управления конвекцией является чрезвычайно актуальной. Неравномерный нагрев сплошной среды приводит, в силу теплового расширения, к появлению неоднородностей плотности. В поле силы тяжести это является причиной возникновения переменной по пространству силы и, как следствие, сложного движения среды.

Конвекция играет важную роль в ряде технологических процессов, эффективность которых может быть значительно улучшена подавлением или усилением конвекции. Так, например, в процессе выращивания кристаллов важно подавить развитие ячеистых возмущений, существенно ухудшающих свойства получаемого образца. Обратная ситуация наблюдается при растворении примесей и перемешивании веществ: важно усилить конвекцию, чтобы интенсифицировать указанные процессы. Таким образом, задачи управления конвекцией являются важными в технологических приложениях.

Несмотря на достаточно большое количество публикаций, обилие экспериментальных исследований, различных подходов в выборе математических моделей и способов их численной реализации, возможности адекватного описания и практического применения конвективных течений сплошной среды еще далеки от завершения. Математическое моделирование рассматривается как важный и часто единственный инструмент исследования сложных движений сжимаемой сплошной среды.

### **Цели исследования.**

1. Математическое моделирование начальной стадии трехмерных нестационарных течений газов при условии действия силы тяжести как сжимаемых вязких теплопроводных сплошных сред в тепловом конвективном потоке, вызванном различным по конфигурации локальным нагревом подстилающей поверхности.

2. Численное построение решений полной системы уравнений Навье-Стокса (ПСУНС), описывающих возникновение сложных трехмерных нестационарных течений газов в конвективных потоках и учитывающих диссипативные свойства вязкости и теплопроводности в областях с разными геометрическими характеристиками.

**Задачи исследования.**

1. Математическое моделирование возникновения конкретных сложных трехмерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в конвективном потоке, являющихся следствием различных форм локального нагрева подстилающей поверхности и одновременного действия силы тяжести.

2. Формулировка конкретных начально-краевых условий для ПСУНС, позволяющих численно моделировать возникновение трехмерных нестационарных течений газов в тепловом конвективном потоке в областях с разными геометрическими характеристиками и необходимой устойчивости вычислительного алгоритма.

3. Разработка программно-вычислительного комплекса, позволяющего рассчитывать все основные характеристики возникающих трехмерных нестационарных течений газов в конвективных потоках, инициированных локальным нагревом.

4. Проведение вычислительных экспериментов с целью расчета газодинамических параметров в начальной фазе сложных трехмерных течений, а также расчета мгновенных линий тока отдельных частиц газа в конвективных потоках различных масштабов и при различных схемах нагрева. Рассчитанные параметры конвективных течений позволяют проводить их сравнение с измеренными величинами в натуральных наблюдениях и в различных экспериментальных исследованиях.

**Объектом исследований** выступают сложные трехмерные нестационарные течения вязких сжимаемых теплопроводных газов в свободных конвективных потоках.

**Предметом исследований** являются методы моделирования и определения параметров начальной стадии возникновения сложных течений сжимаемых вязких теплопроводных газов в тепловых конвективных потоках в условиях действия силы тяжести.

**Методы исследования.**

Для решения поставленных задач в работе были использованы современные и хорошо апробированные методы аналитического и численного моделирования движения сжимаемой сплошной среды. Используется адекватная математическая модель – ПСУНС, являющаяся квазилинейной системой уравнений с частными производными смешанного типа и в дифференциаль-

ной форме передающая законы сохранения массы, импульса и энергии в движущейся сжимаемой сплошной среде, а также точно учитывающей законы термодинамики. Для этой модели ставятся конкретные начально-краевые условия, которые позволяют с помощью явной разностной схемы численно строить устойчивые решения в различных расчетных областях.

**Научная новизна** результатов работы по трем областям специальности 05.13.18 сводится к следующим положениям.

#### *Математическое моделирование*

1. Приводятся конкретные начальные и краевые условия для ПСУНС, позволяющие численно построить решения для описания возникновения трехмерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в конвективном потоке, инициированном локальным нагревом.

2. Математически моделируются две конкретные локальные схемы нагрева подстилающей поверхности, которые в условиях действия силы тяжести приводят к возникновению разнообразных тепловых конвективных потоков.

3. Определены термодинамические и скоростные параметры течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в начальной стадии возникновения тепловых конвективных потоков в замкнутых объемах различной формы и размеров.

#### *Численные методы*

1. С помощью явной разностной схемы и конкретно выбранных начально-краевых условий численно построены решения ПСУНС, описывающие трехмерные нестационарные течения сжимаемых вязких теплопроводных газов при возникновении различных по масштабам конвективных течений.

2. Численно определены газодинамические, термодинамические и энергетические параметры трехмерных нестационарных течений газов в возникающих конвективных потоках, вызванных локальным нагревом.

3. Вычислены и построены траектории движения отдельных частиц газа в нескольких конкретных тепловых конвективных потоках, позволивших сделать содержательные выводы о движении течения в целом.

#### *Комплексы программ*

Создан программно-вычислительный комплекс на основе четырех программ, ориентированный на численное решение задач, связанных с описанием течений газов в тепловых конвективных потоках и определения газодинамических и термодинамических параметров таких течений.

Первая программа комплекса – «Конвективный поток» – позволяет рассчитывать газодинамические и термодинамические параметры возникающего при локальном нагреве нестационарного трехмерного конвективного потока.

С помощью второй программы – «Энергия конвективного потока» – можно выполнить расчет кинетической энергии трехмерного конвективного

течения газа на основе проведенного расчета скоростей течения в конвективном потоке.

Третья часть программного комплекса – «Конвективные линии тока» – это программа расчета и визуализации мгновенных линий тока трехмерных конвективных течений, так же использующая результаты расчетов по первой программе комплекса.

Четвертая программа комплекса – «Визуализация конвективного потока» – позволяет визуализировать и форматировать результаты расчета трехмерных течений газа в тепловом конвективном потоке. Эта программа использует результаты расчетов всех трех других программ комплекса.

Все программы комплекса прошли государственную регистрацию.

### **Теоретическая значимость**

Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

В модели движения сжимаемой сплошной среды с диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности математически и численно смоделированы два типа локального нагрева подстилающей поверхности, которые при учете силы тяжести приводят к возникновению и последующему функционированию конвективного потока.

Поставлены и численно решены конкретные начально-краевые задачи для ПСУНС, решения которых моделируют трехмерные нестационарные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в тепловых конвективных течениях.

Численно получены значения всех термодинамических и скоростных параметров для начальной стадии исследуемых течений.

Рассчитаны линии тока отдельных частиц газа, которые при соответствующей их визуализации позволяют детально и наглядно проследить за зарождением и развитием конвективных потоков.

**Практическая значимость работы** состоит в том, что результаты математического и численного моделирования начальной стадии сложных нестационарных трехмерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа позволяют сформулировать конкретные рекомендации для более эффективной работы по обслуживанию и эксплуатации нефтепроводов и газопроводов. Не менее важны и рекомендации по хранению жидких и газообразных веществ в различных емкостях, контейнерах и хранилищах.

**Достоверность** результатов обеспечивается использованием хорошо известной математической модели – ПСУНС и применением классических математических методов для построения решений и исследования свойств этих решений. Кроме того, достоверность результатов численного моделирования подтверждается тщательным тестированием численных методик на найденных точных аналитических решениях, удовлетворительным сопоставлением с экспериментальными данными.

**На защиту выносятся результаты,** соответствующие пунктам паспорта специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам.

*Пункт 2: Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.*

1. Предложенные в модели сжимаемой сплошной среды конкретные начально-краевые условия для ПСУНС, позволяющие добиться устойчивости вычислительной схемы, численно строить решения для описания начальной стадии конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа при локальном прогреве подстилающей поверхности в условиях действия силы тяжести.

2. Предложенные две математические модели локального нагрева сжимаемых вязких теплопроводных газов, которые в условиях действия силы тяжести приводят к возникновению конвективного потока.

3. Численное определение газодинамических и термодинамических характеристик и параметров течений газов в конвективных потоках.

4. Показано, что при отсутствии учета действия силы Кориолиса в конвективных потоках не возникает осевая закрутка газа. Движение газа в этом случае имеет только радиальный характер.

*Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.*

5. Программно-вычислительный комплекс на основе четырех, разработанных автором программ, предназначенный для численного решения задач, связанных с описанием течений сжимаемых вязких теплопроводных газов в тепловых конвективных потоках и определением газодинамических и термодинамических параметров таких потоков. Программно-вычислительный комплекс используется для проведения вычислительного эксперимента на комплексе ИВЦ Новосибирского государственного университета и на кластере «Менделеев» Тюменского государственного университета.

*Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.*

6. Численные методы построения трехмерных нестационарных течений сжимаемых вязких теплопроводных газов в возникающих разномасштабных конвективных потоках при условии действия силы тяжести.

7. Построенные с помощью явных разностных схем и предложенных начально-краевых условий приближенные решения ПСУНС, позволившие определить термодинамические, газодинамические, скоростные и энергетиче-

ские характеристики трехмерных нестационарных течений сжимаемых вязких теплопроводных газов в возникающих конвективных потоках.

*Пункт 6: Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента.*

8. Предложенная модель газа как движущейся сжимаемой сплошной среды, обладающей диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности, при численном моделировании возникающих при локальном нагреве сложных конвективных течений дает возможность определения основных газодинамических и термодинамических характеристик придонной части торнадо и тропического циклона.

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из трех областей: математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

**Апробация результатов.** Основные положения и результаты диссертации докладывались на конференциях (см. работы [10-21] из списка публикаций), в том числе:

1. VI научно-практическая межрегиональная конференция «Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений» (Тюмень, ТюмГУ, 2013).

2. Международная научно-техническая конференция «Нефть и газ Западной Сибири» (Тюмень, ТюмГНГУ, 2013).

3. Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Новые технологии – нефтегазовому региону» (Тюмень, ТюмГНГУ, 2013).

4. Международная научная конференция «Физико-математические науки: теория и практика» (Москва, январь, 2014).

5. XI Международная научно-практическая конференция «Новое слово в науке и практике: гипотезы и апробация результатов исследований» (Новосибирск, ЦРНС, 2014).

6. XII Международная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты» (Новосибирск, ЦРНС, 2014).

7. VII международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии» (Новосибирск, август, 2014).

8. Международная конференция «Успехи механики сплошных сред» (Владивосток, сентябрь–октябрь, 2014).

9. XX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики» (Абрау-Дюрсо, Новороссийск, сентябрь, 2014).

10. Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015. Пятое заседание тематических секций по направлению «Инновационные ядерные технологии» (Снежинск, февраль, 2015).

11. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, август, 2015).

12. Международная научно-техническая конференция «Нефть и газ Западной Сибири» (Тюмень, ноябрь, 2015).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 25 печатных работах [1–25], в том числе (в скобках в числителе указан общий объем этого типа публикаций в печатных листах, в знаменателе – объем принадлежащий лично автору) 6 статей в периодических изданиях рекомендованных ВАК [1–6] для представления основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора или кандидата наук (5.0/3.0), 3 статьи в периодическом рецензируемом издании [7-9] (1.0/0.8), 8 – в трудах международных конференций [10–17](3.75/2.0), 4 – в трудах Всероссийской конференции [18-21] (2.0/1.0), 4 свидетельства государственной регистрации программ для ЭВМ (в Роспатенте) [22–25] (4.0/3.0). Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Автор самостоятельно проводил аналитические выкладки и получал расчетные формулы предложенных моделей, описывающих сложные течения сплошной среды в конвективных потоках, самостоятельно составлял алгоритмы расчета всех газодинамических и термодинамических параметров, самостоятельно составлял программы, входящие в программный комплекс и проводил тестовые расчеты и численные эксперименты. Во всех совместных работах Обухову А.Г. принадлежат постановки задач, выбор метода исследования и участие в проверке полученных результатов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и четырех приложений. Текст диссертации содержит 140 страниц печатного текста, 79 рисунков. Список использованной литературы включает 123 наименования работ российских и зарубежных авторов.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы исследований, сформулированы цели и задачи, приведены сведения о научной новизне, практической значимости, основные результаты и положения, выносимые на защиту, апробации результатов и публикациях.

**Первая глава** носит вводный характер, посвящена описанию известных фактов, обзору литературных источников по математическому и численному моделированию конвективных течений сплошной среды и содержит три параграфа.

В первом параграфе приводятся основные понятия и термины конвективного движения сплошной среды.

Во втором параграфе дается обзор основных математических моделей конвективных течений сплошных сред.

Третий параграф посвящен описанию особенностей численного моделирования различных задач конвекции сплошных сред.

**Вторая глава** диссертации посвящена описанию выбранной математической модели и постановки двух конкретных начально-краевых задач для численного решения ПСУНС и содержит четыре параграфа.

В четвертом параграфе приводится формулировка двух конкретных физических процессов, математическое и численное моделирование которых составляет основную задачу диссертационного исследования:

1) возникновение свободной конвекции воздуха в атмосфере Земли при локальном круговом нагреве ее поверхности;

2) возникновение свободного конвективного течения газа в замкнутой теплоизолированной емкости при локальном кольцевом нагреве ее нижней поверхности.

Пусть над поверхностью Земли в поле силы тяжести находится в покое атмосферный воздух (рис. 1). С некоторого момента времени  $t > 0$  локальный участок поверхности Земли начинает нагреваться за счет солнечной энергии. Поскольку воздух является вязкой сжимаемой сплошной средой, то возникающий восходящий поток инициирует движение воздуха в окружающем пространстве. Другими словами под действием силы тяжести за счет градиента температуры возникает свободная конвекция атмосферного воздуха.

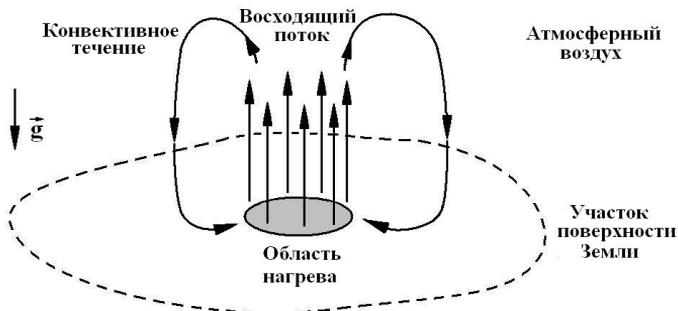


Рис. 1. Возникновение конвективного течения атмосферного воздуха

Пусть на поверхности Земли в поле силы тяжести находится замкнутый кубической формы контейнер с находящимся в нем в покое атмосферным воздухом (рис. 2). Начиная с некоторого момента времени  $t > 0$  локальный участок дна этого контейнера, начинает нагреваться с помощью нагревателя кольцевой формы. При этом в замкнутом контейнере под действием силы тяжести за счет градиента температуры также возникает свободная конвекция воздуха.

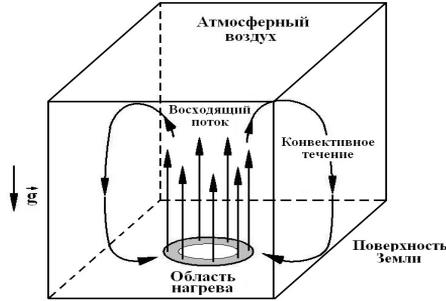


Рис. 2. Возникновение конвективного течения воздуха в замкнутой емкости

Поскольку в указанных двух задачах рассматривается возникновение конвективного течения газа при локальном нагреве нижней поверхности, то для его описания и моделирования используются законы газовой динамики. Именно поэтому основной математической моделью исследования таких течений была выбрана ПСУНС.

В безразмерных переменных с учетом действия силы тяжести в векторной форме ПСУНС имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \{ [(u_x - v_y)^2 + \\ + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $x, y, z$  – декартовы координаты;  $\rho$  – плотность;  $\vec{V} = (u, v, w)$  – вектор скорости с проекциями на соответствующие декартовы оси;  $T$  – температура;  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  – вектор ускорения силы тяжести;  $\nabla$  и  $\operatorname{div}$  – операторы градиента и дивергенции по декартовым пространственным переменным. Система (1) в дифференциальной форме передает законы сохранения

массы, импульса и энергии в движущейся сплошной среде. Безразмерные коэффициенты вязкости и теплопроводности полагаются постоянными и имеют значения  $\mu_0 = 0.001$ ,  $\kappa_0 \approx 1.46\mu_0$ . В системе (1) стандартным образом введены безразмерные переменные

$$f = \frac{f_*}{f_{00}}, \quad (2)$$

где  $f_*$  – размерное значение переменной,  $f_{00}$  – ее масштабное значение. При указанном способе введения безразмерных переменных уравнения состояния имеют вид:

$$p = \rho T, \quad e = T. \quad (3)$$

Отличие ПСУНС от традиционно используемой системы уравнений газовой динамики состоит в том, что второе и третье уравнения в правых частях содержат дополнительные слагаемые с частными производными от компонент скоростей по пространственным переменным, описывающие диссипативные свойства – вязкости и теплопроводности для движущейся сплошной среды.

Численное моделирование возникающих сложных конвективных течений воздуха над нагреваемой областью поверхности Земли предлагается рассматривать в расчетной области в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 3).

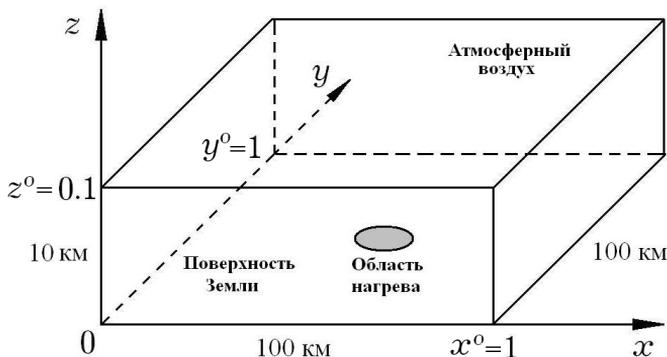


Рис. 3. Расчетная область в виде прямоугольного параллелепипеда

Его нижняя грань, совпадающая с поверхностью Земли, имеет форму квадрата со стороной, равной безразмерному единичному масштабному значению расстояния (размерное значение 100 км). Высота имеет безразмерное значение 0.1 (размерное значение 10 км). Размеры расчетной области в данном случае приняты такими, чтобы максимально приблизить их к размерам возникающих конвективных потоков в атмосфере Земли при формировании, например, тропических циклонов.

Численное моделирование возникающих сложных конвективных течений воздуха над нагревающейся нижней поверхностью замкнутого контейнера рассматривается в расчетной области в виде куба (рис. 4). Его нижняя грань, совпадающая с поверхностью Земли, имеет форму квадрата со стороной, равной единичному масштабному значению расстояния (размерное значение 10 м).

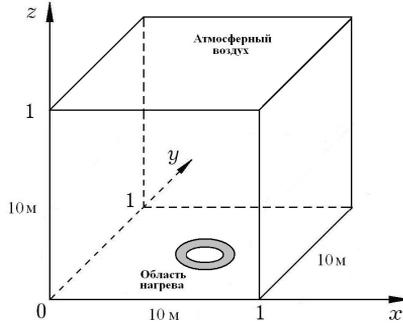


Рис. 4. Расчетная область в виде куба

Функции

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}, \quad T_0(z) = 1 - kz, \quad (4)$$

где

$$k = \frac{l x_{00}}{T_{00}}, \quad l = 0.0065 \text{ К/м}, \quad T_{00} = 288^\circ \text{ К}, \quad \nu = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0 \quad (5)$$

и  $x_{00}$  – конкретное масштабное значение расстояния, соответствующее исследуемому течению, качественно и количественно хорошо передают данные натуральных наблюдений за параметрами атмосферы Земли и приближенно описывают стационарное распределение воздуха в атмосфере, при котором плотность и температура убывают с увеличением пространственной координаты  $z$ . Кроме того, они являются точным аналитическим решением системы (1) и могут быть использованы в качестве начальных условий при описании возникновения двух видов конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в случае постоянных значений коэффициентов вязкости и теплопроводности.

В пятом параграфе речь идет о постановке конкретных краевых условий для двух описанных выше задач возникновения и функционирования свободно-теплого конвективного потока и их конечно-разностной аппроксимации.

При моделировании конвективных течений в атмосфере Земли для **плотности** на всех шести гранях расчетного параллелепипеда  $x = 0$ ,  $x = x^0$ ,  $y = 0$ ,  $y = y^0$ ,  $z = 0$ ,  $z = z^0$  ставится «условие непрерывности», при котором

значения плотности на границу области сносятся линейной интерполяцией из внутренней части расчетной области. Это означает, что в процессе расчетов плотность воздуха может изменяться на всех гранях расчетного параллелепипеда в соответствии с установленными в ПСУНС закономерностями.

**Нормальные составляющие вектора скорости** на нижней и верхней грани  $z = 0$ ,  $z = z^0$  берутся равными нулю  $w|_{z=0, z=z^0} = 0$ , а для двух других **(тангенциальных) компонент вектора скорости** ставятся «условия непрерывности». Это означает, что воздух не может пересекать нижнюю и верхнюю граничные поверхности расчетной области, но может двигаться вдоль них.

**Все компоненты вектора скорости** на четырех боковых гранях рассчитываются из «условия непрерывности». Это означает, что воздух может пересекать все боковые граничные поверхности расчетной области.

Для **температуры** на пяти гранях, кроме нижней, задаются «условия теплоизоляции», при которых производная от температуры в направлении нормали к соответствующей грани равна нулю:  $\frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0, \xi=\xi^0} = 0$ .

Другими словами, внутренняя часть расчетной области не обменивается теплом с окружающим пространством.

**Температуру на плоскости  $z = 0$**  предлагается задавать функцией

$$T|_{z=0} = T_0(t, x, y) = 1 + 0.125(1 - e^{-10t}) \cos^6(\pi \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}), \quad (6)$$

моделирующей локальный круговой нагрев солнечной энергией поверхности Земли. В этой формуле фоновое значение температуры равно масштабной единице (размерное значение  $288^\circ\text{K} = 15^\circ\text{C}$ ), коэффициент 0.125 (размерное значение  $36^\circ$ ) равен превышению максимальной температуры нагрева над фоновой температурой и задается в качестве входного значения в разных вариантах расчета. Множитель  $(1 - e^{-10t})$  обеспечивает плавное нарастание температуры нагрева от фонового до максимального значения.

При моделировании конвективных течений в замкнутом контейнере для **плотности** на всех шести гранях расчетного куба ставится «условие непрерывности». Это означает, что в процессе расчетов плотность воздуха может изменяться на всех гранях расчетного куба в соответствии с установленными в ПСУНС закономерностями.

Для **нормальных составляющих вектора скорости** ко всем граничным поверхностям берутся равными нулю  $u|_{x=0, x=x^0} = 0$ ,  $v|_{y=0, y=y^0} = 0$ ,  $w|_{z=0, z=z^0} = 0$ , а для двух других **(тангенциальных) компонент вектора скорости** ко всем граничным поверхностям ставятся «условия симметрии». Это

означает, что воздух не может пересекать граничные поверхности расчетной области, но может двигаться вдоль них.

Для **температуры** на пяти гранях кроме нижней задаются «условия теплоизоляции», при которых производная от температуры в направлении нормали к соответствующей грани равна нулю. Другими словами, внутренняя часть расчетной области не обменивается теплом с окружающим пространством.

Для рассматриваемой задачи **температура на плоскости**  $z = 0$  в кольце между концентрическими окружностями с безразмерными радиусами  $r_1 = \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2} = 0.1$  и  $r_2 = \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2} = 0.3$  задана функцией

$$\begin{cases} T|_{z=0} = T_0(t, x, y) = 1 + M(1 - e^{-10t}) \cos^2(15.7r), & 0.1 \leq r \leq 0.3; \\ T|_{z=0} = T_0(t, x, y) = 1, & r < 0.1, \quad r > 0.3, \end{cases} \quad (7)$$

моделирующей кольцеобразный локальный нагрев нижней грани расчетного куба. Задаваемый коэффициент  $M$  в последней формуле определяет максимальное значение температуры нагрева в разных вариантах расчета и равен разности между максимальным безразмерным значением температуры локального нагрева и масштабным безразмерным значением температуры  $M = T_{\max} - 1$ .

Шестой параграф предлагает подробный вывод всех пяти конечно-разностных аналогов ПСУНС, использующий второй порядок аппроксимации частных производных центральными разностями по пространственным переменным и первый порядок аппроксимации производной по времени.

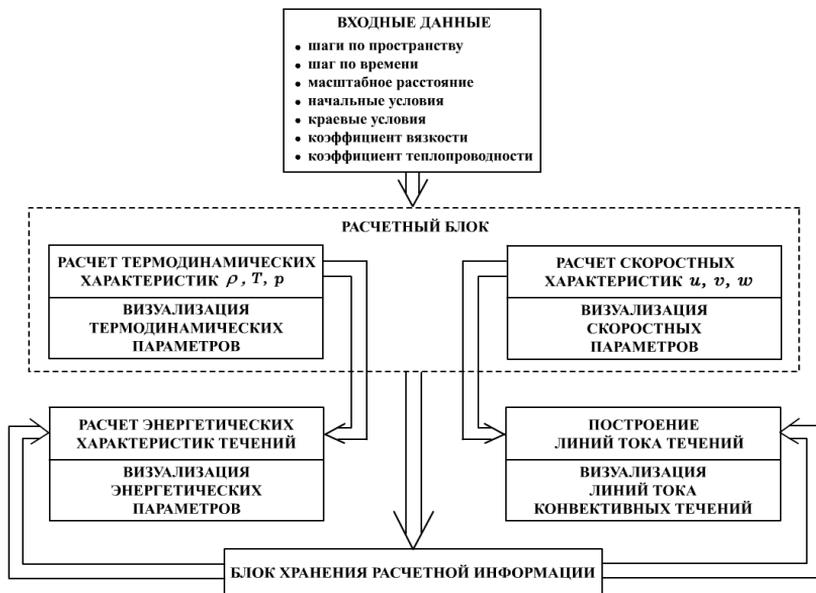
В седьмом параграфе описан программно-вычислительный комплекс на основе четырех программ, позволяющий проводить численное решение задач, связанных с описанием конвективных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа и определения их основных параметров.

На рис. 5 изображена блок-схема программно-вычислительного комплекса.

Программно-вычислительный комплекс состоит из пяти основных блоков: блока входных данных; расчетного блока; блока расчета энергетических характеристик течений; блока построений линий тока течений; блока хранения расчетной информации.

Исходные данные размещаются пользователем в блоке входных данных перед началом работы программно-вычислительного комплекса.

В основном расчетном блоке с помощью явной разностной схемы с учетом начальных и граничных условий численно строятся решения ПСУНС и определяются термодинамические и скоростные характеристики возникающих конвективных потоков. Программа, реализующая данный алгоритм расчета, называется «Конвективный поток» (свидетельство о регистрации № 2014616161 от 11.06.2014).



*Рис. 5.* Блок-схема программно-вычислительного комплекса

Результаты расчета термодинамических и скоростных характеристик конвективного течения по желанию пользователя могут быть визуализированы с помощью специально разработанной программы «Визуализация конвективного потока» (свидетельство о регистрации № 2014619392 от 16.09.2014).

Результаты работы расчетного блока могут передаваться в качестве исходных данных для двух других блоков – блока расчетов энергетических характеристик и блока построения линий тока. Функционирование первого из них обеспечивается работой «Энергия конвективного потока» (свидетельство о регистрации № 2014619662 от 18.09.2014). Блок построения линий тока течений основан на работе программы «Конвективные линии тока» (свидетельство о регистрации № 2014616025 от 09.06.2014), которая, используя скоростные характеристики потока, выстраивает мгновенные линии тока.

В этом же параграфе описано несколько способов тестирования программно-вычислительного комплекса. Во-первых, нестационарный расчет верно передает точное стационарное решение. Во-вторых, расчеты нестационарного конвективного течения, возникающего при задании на плоскости  $z = 0$  постоянного теплового режима, приводят к практически стационарному конвективному течению. При исчезновении теплового режима конвективный поток исчезает, и вновь устанавливается стационарное распределение газа,

совпадающее с точным стационарным решением. В-третьих, нестационарным трехмерным расчетом с использованием созданного комплекса программ были повторены расчеты одномерных нестационарных течений. Начальные данные вносили гладкое возмущение в однородный покоящийся без воздействия силы тяжести газ. Это передает возникновение размазанного ударного перехода, описанного Р. Беккером<sup>1</sup>.

**Третья глава** представляет результаты математического и численного моделирования начальной стадии нестационарного трехмерного конвективно-го течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа как сплошной среды при различных схемах локального нагрева нижней поверхности и зависимости термодинамических и газодинамических характеристик указанных течений от температуры нагрева.

В восьмом параграфе рассматриваются результаты математического и численного моделирования трехмерных конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в условиях действия силы тяжести в непроницаемой кубической емкости.

Расчеты проводились при масштабных размерных значениях плотности, скорости, расстояния и времени равными соответственно  $\rho_{00} = 1.29 \text{ кг/м}^3$ ,  $u_{00} = 333 \text{ м/с}$ ,  $x_{00} = 10 \text{ м}$ ,  $t_{00} = x_{00} / u_{00} = 0.03 \text{ с}$ . Безразмерное и соответствующее размерное значение коэффициента  $M$  следующие:  $M = 0.125$ ,  $M_* = 36^\circ\text{C}$ .

На рисунках 6-7 приведены результаты расчета температуры газа в виде графиков функции двух переменных  $T(x, y)$  на фиксированной высоте  $z = 0.5$  (размерное значение 5 м) для двух расчетных шагов по времени.

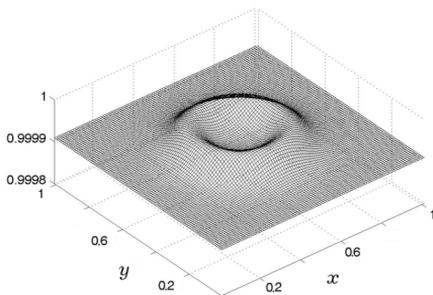


Рис. 6. Температура на 500 шаге

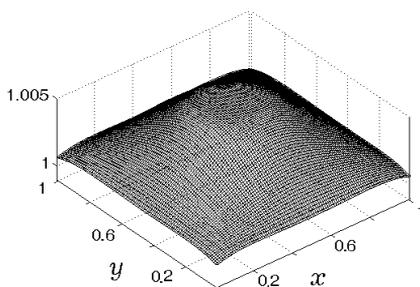


Рис. 7. Температура на 1000000 шаге

<sup>1</sup> Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1968. – 529 с.

В начале кольцеобразного прогрева нижней поверхности температура газа имеет четко выраженную кольцеобразную центральную симметрию, которая с течением времени расширяясь к боковым граням, сохраняет кольцеобразный характер. Распределение температуры со временем приобретает вид колокола, что связано с более интенсивным прогревом центральной области.

Распределение плотности в начале нагрева также имеет форму кольца, центр которого совпадает с геометрическим центром квадратного сечения расчетной области, а радиус его совпадает с радиусом кольца нагрева. С течением времени происходит расширение кольца с повышенными значениями плотности и его размывание в пространстве.

На рис. 8-9 приведены результаты расчета давления газа в виде графиков функции двух переменных  $p(x, y)$  на фиксированной высоте  $z = 0.5$  (размерное значение 5 м) для двух расчетных шагов по времени.

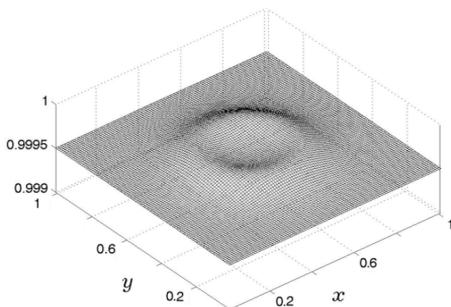


Рис. 8. Давление на 500 шаге

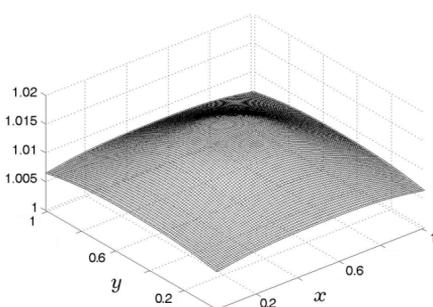


Рис. 9. Давление на 1000000 шаге

На рисунках 10-11 представлены графики  $x$ -ой компоненты скорости газа для фиксированной высоты  $z = 0.5$  (размерное значение 5 м) для двух фиксированных расчетных шагов по времени.

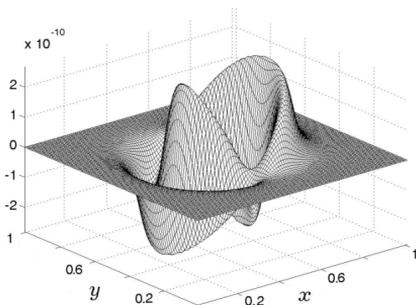


Рис. 10. Скорость  $u$  на 500 шаге

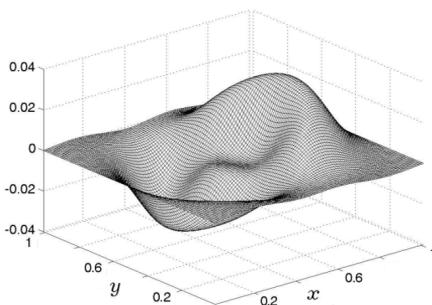


Рис. 11. Скорость  $u$  на 1000000 шаге

В самом начале прогрева периферийные значения скорости практически равны нулю. В центре расчетной области скорости малы по значению, противоположны по знаку, и имеют четко выраженную кольцевую структуру, соответствующую кольцевой схеме нагрева нижней плоскости. Положительные и отрицательные значения первой компоненты скорости, находящиеся за пределами кольцевого нагрева, описывают расходящееся от центра вдоль радиуса движение газа. Разные же по знаку скорости, но находящиеся внутри кольца нагрева, соответствуют сходящемуся вдоль радиуса к центру потоку газа. Максимальные безразмерные значения модулей скоростей для данного расчетного момента времени составляют  $2 \cdot 10^{-10}$  (размерное значение  $6.66 \cdot 10^{-8}$  м/с).

С течением времени область, соответствующая движению газа от центра, достигает боковые грани. Максимальные значения модулей скорости увеличиваются до 0.04 (размерное значение 13.32 м/с). Значения скорости на плоскостях  $x = 0$  и  $x = 1$  равны нулю, а значения скоростей на гранях  $y = 0$  и  $y = 1$  волнообразно изменяются.

Характер поведения  $y$ -ой компоненты скорости газа полностью аналогичен поведению  $x$ -ой компоненты скорости газа, с той лишь разницей, что она описывает движение газа вдоль оси  $y$ .

На приведенных далее рис. 12-13 изображены поверхности  $z$ -ой компоненты скорости газа на той же высоте  $z = 0.5$  (размерное значение 5 м) для двух фиксированных расчетных шагов по времени.

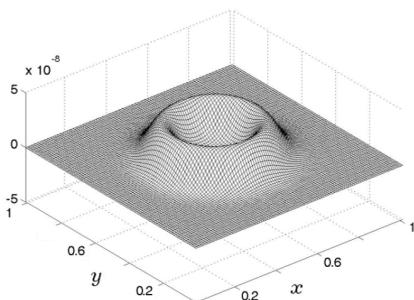


Рис. 12. Скорость  $w$  на 500 шаге

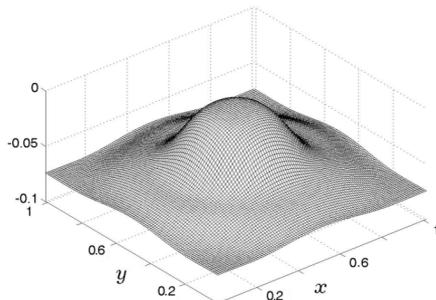


Рис. 13. Скорость  $w$  на 1000000 шаге

В начальные моменты времени нагрева вертикальная составляющая скорости газа имеет кольцевой характер с малыми значениями  $5 \cdot 10^{-8}$  (размерное  $1.67 \cdot 10^{-5}$  м/с) и фоновыми значениями, равными нулю. С течением времени фоновые значения вертикальной скорости становятся отрицательными, а

кольцеобразная структура размывается в пространстве. При этом безразмерная вертикальная скорость в центре купола достигает значения  $10^{-3}$  (размерное 0.333 м/с).

По найденным во внутренних узлах расчетной сетки компонентам скорости и плотности рассчитывается безразмерное значение энергии движения газа в каждый фиксированный момент времени в расчетной области  $D$ .

В работе была рассчитана полная кинетическая энергия  $W$  конвективного потока, учитывающая все три компоненты вектора скорости частиц газа

$$W = \iiint_D \rho \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dD. \quad (8)$$

На приведенном далее рис. 14 представлен результат расчета этой энергии за фиксированный промежуток времени от начала нагрева.

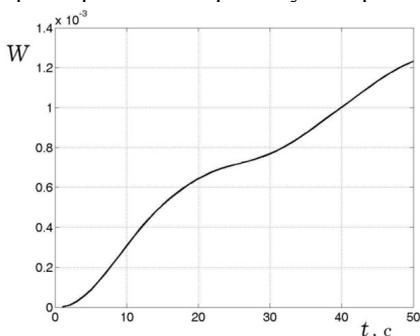


Рис. 14. Полная кинетическая энергия

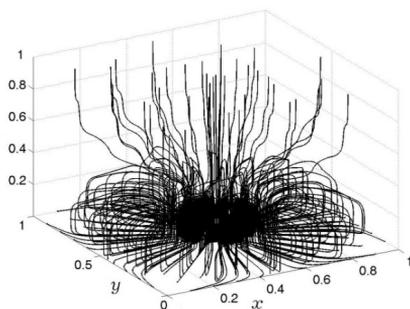


Рис. 15. Линии тока на 150000 шаге

В начальные расчетные моменты времени поведение кинетической энергии описывается квадратичной функцией скорости. Затем за счет вовлечения в конвективный поток все больших масс газа подводимого количества тепла при нагреве оказывается недостаточно для увеличения скорости его частиц. На графике это фиксируется как замедление роста кинетической энергии. При дальнейшем нагреве опять наблюдается рост скоростей и кинетической энергии конвективного потока.

На рис. 15 представлены результаты расчета линий тока газа для фиксированного момента времени. На рисунке изображены линии тока конвективного течения газа, выпущенные с плоскости  $z = 0$ . Количество линий тока составляет  $10 \times 10 = 100$ . По координатам  $x$  и  $y$  отложены безразмерные расстояния.

С точки зрения движения газа как сжимаемой сплошной среды такое поведение линий тока к данному моменту расчетного времени означает форми-

рование тороидального конвективного потока газа большой интенсивности вблизи источника нагрева подстилающей поверхности. Это говорит о том, что прогрев основной части изолированного резервуара еще незначительный и конвективный поток не может преодолеть влияние силы тяжести.

Девятый параграф посвящен описанию результатов численных расчетов скоростных характеристик начальной фазы трехмерного нестационарного конвективного течения воздуха в атмосфере Земли. Расчеты проводились при следующих входных параметрах: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны соответственно  $\rho_{00} = 1.29 \text{ кг/м}^3$ ,  $u_{00} = 333 \text{ м/с}$ ,  $x_{00} = 100000 \text{ м}$ ,  $t_{00} = x_{00} / u_{00} = 300.3 \text{ с}$ .

На рис. 16 представлены графики температурных зависимостей максимального значения модуля первой  $u$ , второй  $v$ , максимального и минимального значений третьей  $w$  компоненты скорости течения газа на средней плоскости расчетной области при  $z = 0.05$  для фиксированного момента времени.

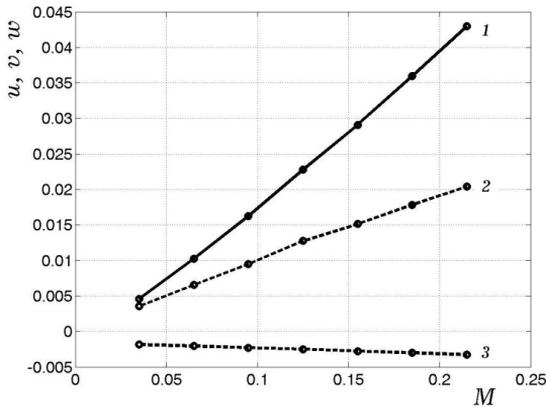


Рис. 16. Температурные зависимости скоростей на высоте  $h = 5 \text{ км}$ :  
1 – скорости  $u$  и  $v$ ; 2 – максимум скорости  $w$ ; 3 – минимум скорости  $w$

Как следует из приведенных графиков, общей чертой в поведении скоростей теплового конвективного потока является их практически линейная зависимость от максимальной температуры нагрева. При этом для диапазона изменения максимальной температуры нагрева  $0.18$  (размерное значение  $51.84^\circ\text{C}$ ) интервал изменения модуля первой  $u$  и второй  $v$  компоненты скорости течения газа в безразмерном виде составляет в среднем  $0.045$  (размерное значение  $14.985 \text{ м/с}$ ), а интервал изменения модуля третьей компоненты  $w$  скорости газа –  $0.0175$  (размерное значение  $5.828 \text{ м/с}$ ).

На рис. 17 представлены мгновенные линии тока конвективного течения газа для фиксированного момента времени.

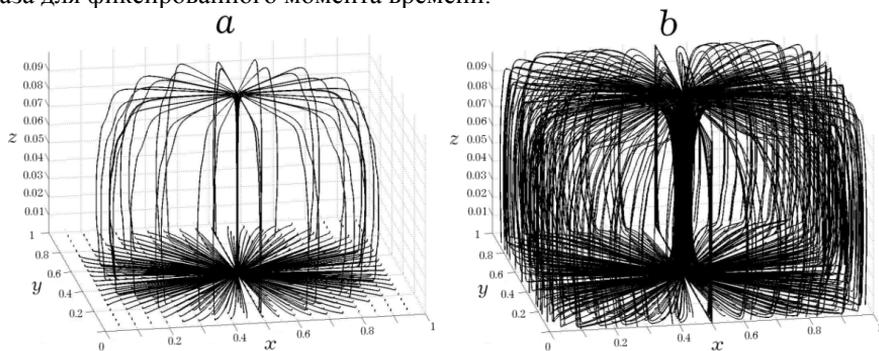


Рис. 17. Мгновенные линии тока конвективного течения газа:  
 $a$  – для  $M = 0.035$ ,  $b$  – для  $M = 0.215$

Очевидно, что густота мгновенных линий тока существенно отличается – для более низкой температуры нагрева ( $M = 0.035$ ) она значительно меньше, чем при большей температуре нагрева ( $M = 0.215$ ). При этом важно подчеркнуть, что количество линий тока, выпускаемых из плоскости  $z = 0$ , в обоих случаях одинаково. Различие в густоте линий тока означает различие в интенсивности конвективного потока за счет различия скоростей течения при разных температурах нагрева. Кроме того, формирование конвективного потока при более высоких температурах нагрева происходит существенно быстрее, чем при низких температурах. Во всех случаях, как следует из расчетов, конвективное движение газа вдоль верхней и нижней граней имеет четко выраженный радиальный характер.

В десятом параграфе представлены результаты численного моделирования возникновения нестационарных трехмерных свободных конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в атмосфере Земли при локальной круговой схеме нагрева. Численно получены все газодинамические, термодинамические характеристики, а также построены мгновенные линии тока для начальной стадии формирования свободного конвективного потока.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. В модели сжимаемой сплошной среды предложены конкретные начально-краевые условия для ПСУНС, позволяющие численно строить решения для описания течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в начальной стадии теплового конвективного потока, инициированного локальным прогревом подстилающей поверхности в условиях действия силы тяжести.

2. Предложены математические модели локального кругового и кольцевого нагрева вязких сжимаемых теплопроводных газов, которые в условиях действия силы тяжести приводят к возникновению конвективных потоков.

3. Численными методами впервые построены трехмерные нестационарные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа в разномасштабных конвективных потоках при условии действия силы тяжести.

4. Показано, что при отсутствии учета действия силы Кориолиса в конвективных потоках не возникает осевая закрутка газа. Движение газа в этом случае имеет только радиальный характер.

5. С помощью явных разностных схем и предложенных двух конкретных начально-краевых условий построены приближенные решения ПСУНС, определены термодинамические, газодинамические, скоростные и энергетические характеристики трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в возникающих конвективных потоках.

6. Численными экспериментами проведено исследование зависимости скоростей течений в возникающем конвективном потоке сжимаемого вязкого теплопроводного газа от температуры нагрева.

7. Создан программно-вычислительный комплекс на основе четырех программ, предназначенный для численного решения задач, связанных с описанием течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в начальной стадии тепловых конвективных потоков и определения газодинамических и термодинамических параметров таких потоков.

## **СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Публикации в периодических изданиях, рекомендованных ВАК**

1. Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Математическое моделирование и численный расчет трехмерного конвективного течения газа // Известия вузов. Нефть и газ. – 2013. – № 6. – С.57 – 63.

2. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Численное исследование температурной зависимости скоростных характеристик нестационарного конвективного течения газа // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика – 2014. – № 7. – С. 147–156.

3. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Численный расчет скоростей конвективного течения газа при кольцеобразной схеме нагрева // Известия вузов. Нефть и газ. – 2015. – № 3 – С. 84–90.

4. Сорокина Е.М., Обухов А.Г., Чунихин С.А., Терехова Н.В. Численный расчет термодинамических параметров конвективного течения газа при кольцеобразной схеме нагрева // В мире научных открытий. – 2015. – № 4.1(64). – С. 559-568.

5. Терехова Н.В., Чунихин С.А., Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Численный расчет линий тока конвективного течения газа при кольцеобразной схеме нагрева // В мире научных открытий. – 2015. – № 4.1(64). – С. 568-577.

6. Чунихин С.А., Терехова Н.В., Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Математическое моделирование конвективного течения газа при кольцевом нагреве подстилающей поверхности // В мире научных открытий. – 2015. – № 4.1(64). – С. 577-585.

#### **Публикации в периодических рецензируемых изданиях**

7. Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Численный расчет энергетических характеристик теплового конвективного потока газа // Академический журнал Западной Сибири. – 2014. – №2 (51), том 10. – С. 48-49.

8. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Математическое моделирование и численный расчет скоростей конвективного течения газа при кольцевом нагреве // Академический журнал Западной Сибири.–2015.–№ 2(57), том 11. – С. 149-150.

9. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Численное моделирование термодинамических параметров конвективного течения газа при кольцеобразной схеме нагрева в условиях действия силы тяжести // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Т. 1, № 1 (1). – С. 50-58.

#### **Публикации в трудах международных конференций**

10. Обухов А.Г., Сорокина Е.М., Чунихин С.А., Проботок В.В., Терехова Н.В. Численный расчет трехмерного теплового конвективного потока газа. – Нефть и газ Западной Сибири: материалы международной научно-технической конференции. Т. 1. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2013. – С. 26-30.

11. Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Температурные зависимости скоростей нестационарного трехмерного конвективного течения газа // Сборник материалов международной научной конференции «Физико-математические науки: теория и практика». – Россия, Москва, 29-31 января, 2014. – С.50-53.

12. Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Уравнение импульса для течений жидкости или газа в прямоугольной системе координат потока // Материалы XI Международной научно-практической конференции «Новое слово в науке и практике: гипотезы и апробация результатов исследований». – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2014. – С. 118-123.

13. Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Модельный расчет трехмерного нестационарного течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа// Материалы XII Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты». – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2014. – С.113-120.

14. Сорокина Е.М., Баранникова Д.Д., Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численное исследование трехмерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа // Материалы VII международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии» Россия, г. Новосибирск, 15-16 августа 2014 г. – С. 51–54.

15. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В., Сорокина Е.М., Баранникова Д.Д. Численное моделирование трехмерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа // Материалы международной конференции «Успехи механики сплошных сред» (УМСС'2014), приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина, 28 сентября – 4 октября 2014 г. – Владивосток: С. 364 – 368.

16. Баутин С.П., Абдубакова Л.В., Баранникова Д.Д., Казачинский А.О., Крутово И.Ю., Мезенцев А.В., Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Математическое и эксперимен-

тальное моделирование восходящих закрученных потоков // Материалы XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Казань, 20 – 24 августа 2015 года. – С. 378–380.

17. Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Численное моделирование конвективного течения вязкой сплошной среды при кольцевой схеме нагрева // Нефть и газ Западной Сибири: материалы международной научно-технической конференции. Т. 3. Проектирование, сооружение и эксплуатация систем транспорта и хранения нефти и газа. Автомобильно-дорожные проблемы нефтегазового комплекса / ТюмГНГУ; отв. ред. П. В. Евтин. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2015. – С. 81-87.

#### **Публикация в трудах Всероссийских конференций**

18. Обухов А.Г., Сорокина Е.М., Терехова Н.В. Уравнение неразрывности в прямоугольной и цилиндрической системах координат // Материалы VI научно-практической межрегиональной конференции «Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений». – ТюмГУ. – 2013. – С. 193 – 200.

19. Сорокина Е.М., Чунихин С.А., Протолюк В.В. Стационарное решение системы уравнений газовой динамики // Материалы Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Новые технологии – нефтегазовому региону». – Тюмень: ТюмГНГУ. – 2013. – Т.1. С.351–353.

20. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Численный расчет трехмерного конвективного течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа // Материалы XX Всероссийской конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященной памяти К.И. Бабенко (15–20 сентября, 2014) Абрау-Дюрсо. – С. 95–96.

21. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Моделирование теплового конвективного потока воздуха // Сборник научных трудов Научной сессии НИЯУ МИФИ-2015. Пятое заседание тематических секций по направлению «Инновационные ядерные технологии». 5-6 февраля 2015 г. Снежинск. М.: НИЯУ МИФИ; Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2015. - С. 157-161.

#### **Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:**

22. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Программа расчета мгновенных линий тока трехмерных конвективных течений «Конвективные линии тока». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014616025 от 09.06.2014.

23. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Программа расчета газодинамических параметров нестационарного трехмерного конвективного потока «Конвективный поток». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014616161 от 11.06.2014.

24. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Программа расчета кинетической и внутренней энергии конвективного течения газа «Энергия конвективного потока». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014619662 от 18.09.2014.

25. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Программа визуализации результатов расчета газодинамических параметров нестационарного конвективного потока газа «Визуализация конвективного потока». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014619392 от 16.09.2014.

Подписано в печать 12.10.2016. Тираж 120 экз.  
Объем 1,0 уч.-изд. л. Формат 60×84/16. Заказ 871.

---

Издательство Тюменского государственного университета  
625003, г. Тюмень, ул. Семакова, 10.  
Тел./факс (3452) 59-74-81; 59-74-68  
E-mail: [izdatelstvo@utmn.ru](mailto:izdatelstvo@utmn.ru)