

На правах рукописи



АБДУБАКОВА ЛИЛИЯ ВАРИСОВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ
В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ СИЛ ТЯЖЕСТИ И КОРИОЛИСА**

**Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Тюмень – 2015

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики
ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент
Обухов Александр Геннадьевич

Официальные оппоненты: **Скоркин Николай Андреевич,**
доктор технических наук, профессор,
Российский Федеральный Ядерный Центр
– Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им.
Е.И. Забабахина, ведущий научный
сотрудник

Замыслов Владимир Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент, ФГБОУ ВПО «Уральский
государственный университет путей
сообщения», доцент кафедры «Приклад-
ная математика»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Уральский
государственный горный университет»,
г. Екатеринбург

Защита диссертации состоится « 28 » апреля 2015 года в 16⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.274.14 при ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет» по адресу 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская, 15А, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет» и на сайте <http://d21227414.utmn.ru/>.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2015 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета



Е.А.Оленников

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена применению математического моделирования и численных методов для описания сложных течений газа в восходящих закрученных потоках. Рассматриваются процессы возникновения и эволюции трехмерного нестационарного движения политропного сжимаемого вязкого теплопроводного газа в восходящих закрученных потоках при учете действия сил тяжести и Кориолиса.

Исследование поддержано Министерством образования и науки РФ, проекты № 1.8490.2013 и № 3023.

Актуальность темы исследований. Технологии предупреждения чрезвычайных ситуаций, связанных с атмосферными явлениями, включены в перечень критических технологий Российской Федерации¹. Среди них – технологии предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера, одной из которых является прогнозирование возникновения и способы борьбы с разрушительными атмосферными вихрями – смерчами, торнадо и тропическими циклонами. Д.В. Наливкиным² и А.Ю. Вараксиным³ приведены примеры реальных тропических циклонов и торнадо, наблюдавшихся на протяжении большого промежутка времени и принесших значительные разрушения и человеческие жертвы.

Предупреждение о возникновении и борьба с подобными атмосферными вихрями и их разрушительными последствиями невозможна без детального и всестороннего изучения природы этих явлений, без проникновения в суть происходящих в них газодинамических процессов.

На протяжении десятилетий большое число исследователей активно занимаются проблемой восходящих закрученных потоков воздуха. Однако к настоящему времени отсутствует, кроме разрабатываемой научной школой С.П. Баутина, достаточно убедительная теория, объясняющая причины возникновения, функционирования и естественного исчезновения таких течений, подтвержденная экспериментами и адекватным математическим моделированием.

У этих исследователей отсутствует обоснованный ответ и на самый главный вопрос о том, откуда и в какой из элементов течения идет постоянное внешнее вложение энергии, обеспечивающее как начальную закрутку восходящему потоку, так и продолжительное движение больших закрученных масс воздуха.

¹Об утверждении приоритетных направлений развития науки, технологий и техники в Российской Федерации и перечня критических технологий Российской Федерации: Указ Президента Российской Федерации от 7 июля 2011 г. № 899 //Собр. законодательства Российской Федерации. – 2011. – № 28. – Ст. 4168.

²Наливкин Д.В. Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. – Л.: Наука, 1969. – 487 с.

³Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. – М.: Физматлит, 2011. – 312 с.

Математическое исследование течений газа в больших закрученных потоках ведется как с помощью достаточно простых моделей, например, модели «вихревых нитей»⁴, так и с привлечением очень сложных математических моделей, например, турбулентных течений⁵.

Однако для большинства представленных в многочисленных работах этих исследователей математические решения заведомо не удовлетворяют либо фундаментальному закону физики – закону сохранения энергии, либо законам термодинамики. Это является следствием использования модели несжимаемой сплошной среды.

В основу данного теоретического исследования положена схема возникновения и устойчивого функционирования восходящего закрученного потока газа, предложенная С.П. Баутиным⁶. К настоящему времени эта схема подтверждена математическими теоремами, расчетами и экспериментами⁷. Тем самым даны ответы на многие вопросы о возникновении и продолжительном функционировании восходящих закрученных потоков, а также определены главные направления для последующих и более детальных исследований.

Цели исследования.

1. С помощью постановок соответствующих начально-краевых задач провести математическое моделирование трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке, вызванного вертикальным продувом воздуха снизу вверх. Именно такая схема течения воздуха реализована в эксперименте⁸.

2. Численное построение решений поставленных начально-краевых задач для полной системы уравнений Навье-Стокса, описывающих сложные течения политропного газа в свободных восходящих закрученных потоках и учитывающих как диссипативные свойства вязкости и теплопроводности газа, так и действие сил тяжести и Кориолиса.

Задачи исследования.

1. Математическое моделирование сложных нестационарных течений политропного газа в восходящих закрученных потоках в конкретных как уже проведенных, так и планируемых экспериментах. В них возникновение и функционирование восходящего закрученного потока обеспечивается вертикальным продувом воздуха снизу вверх.

⁴Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003. – 504с.

⁵Арсеньев С.А., Бабкин В.А. Губарь А.Ю., Николаевский В.Н. Теория мезомасштабной турбулентности. Вихри атмосферы и океана. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. – 308 с.

⁶Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. – Новосибирск: Наука, 2008. – 96 с.

⁷Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты – Новосибирск:Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013.– 215 с.

⁸Баутин К.В., Баутин С.П., Макаров В.Н. Экспериментальное подтверждение возможности создания потока воздуха, закрученного силой Кориолиса. //Вестн.УрГУПС. – 2013. - №2(18). – с.27-33.

2. Постановка конкретных начально-краевых задач для полной системы уравнений Навье-Стокса, учитывающей действия сил тяжести и Кориолиса, решения которых моделируют трехмерные нестационарные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке в предлагаемых условиях.

3. Разработка программного комплекса, позволяющего определить все газодинамические параметры трехмерных нестационарных течений газа в восходящих закрученных потоках, иницированных вертикальным продувом.

4. Проведение массовых вычислительных экспериментов с целью расчета всех газодинамических параметров в восходящих закрученных потоках различных масштабов, а также для построения мгновенных линий тока в этих сложных трехмерных течениях. Рассчитанные газодинамические параметры позволят провести их сравнение с измеренными величинами в уже проведенных экспериментах и дать обоснованные рекомендации для проведения планируемых натуральных экспериментов с большими значениями их геометрических и скоростных характеристик.

Объектом исследований выступают сложные трехмерные нестационарные течения политропного сжимаемого вязкого теплопроводного газа в восходящих закрученных потоках.

Предметом исследований являются все газодинамические характеристики сложных течений газа в восходящих закрученных потоках в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, значения которых определяются при численном моделировании этих течений.

Методы исследования.

Для решения поставленных задач были использованы надежные и современные методы аналитического и численного моделирования движения упругой сплошной среды. При этом используется наиболее адекватная математическая модель – полная система уравнений Навье-Стокса. Она является квазилинейной системой уравнений с частными производными смешанного типа и в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии в движущейся сжимаемой вязкой теплопроводной сплошной среде. Кроме этого, она через реальные уравнения состояния точно учитывает законы термодинамики. Для этой модели ставятся конкретные начально-краевые задачи, которые численно решаются с помощью явной разностной схемы в конкретной расчетной области.

Научная новизна результатов работы по трем областям специальности 05.13.18 сводится к следующим положениям.

Математическое моделирование

1. Впервые приводятся конкретные, связанные с проведенными и планируемыми экспериментами, краевые условия для полной системы уравнений Навье-Стокса, позволяющие вместе с начальными условиями

проводить процедуру численного построения решений для описания течений газа в восходящем закрученном потоке, инициированном вертикальным продувом.

2. Впервые математически моделируется локальный вертикальный продув газа, который в условиях действия сил тяжести и Кориолиса приводит к возникновению восходящего закрученного потока во всей расчетной области.

3. Впервые определены все газодинамические характеристики течений газа в восходящих закрученных потоках, включая энергетические, часть из которых в натуральных наблюдениях установить не удастся.

Численные методы

1. Впервые с помощью явной разностной схемы и конкретно выбранных начально-краевых условий, соответствующих реальным экспериментам, численно построены нестационарные трехмерные решения полной системы уравнений Навье-Стокса, описывающие течения газа в восходящем закрученном потоке в прямоугольном параллелепипеде от момента начала продува до выхода течения практически на стационарный режим.

2. Впервые численно определены газодинамические и энергетические параметры трехмерных нестационарных течений газа в восходящих закрученных потоках, вызванных вертикальным продувом вверх.

3. Впервые численно построены мгновенные линии тока в восходящих закрученных потоках, что позволило сделать содержательные выводы о движении газа в целом во всем течении.

Комплексы программ

Создан программный комплекс на основе пяти программ, ориентированный на численное решение задач, связанных с описанием течений газа в восходящих закрученных потоках и определения газодинамических параметров таких течений.

Первая программа комплекса – «Нестационарная спираль» предназначена для расчета нестационарных плоских спиральных течений газа в придонной части восходящего закрученного потока.

Вторая программа – «Радиальная и окружная скорости ВЗП» позволяет рассчитать радиальную и окружную скорости течения газа в восходящем закрученном потоке по известным компонентам скоростей в прямоугольной системе координат.

С помощью третьей программы «Скорости ВЗП» возможно выполнить трехмерный расчет скоростей течения газа в восходящем закрученном потоке.

Четвертая часть программного комплекса – это программа трехмерного расчета термодинамических параметров течения газа в восходящем закрученном потоке «Термодинамика ВЗП».

И, наконец, пятая программа комплекса – «Визуализация ВЗП» позволяет визуализировать и форматировать результаты расчета трехмерных течений газа в восходящем закрученном потоке.

Все программы комплекса прошли государственную регистрацию.

Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

Теоретическая значимость.

В модели движения газа как упругой сплошной среды с диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности математически и численно смоделирован вертикальный продув, который при учете действия сил тяжести и Кориолиса приводит к осевой закрутке восходящего потока газа.

Поставлена и исследована конкретная начально-краевая задача для полной системы уравнений Навье-Стокса, решение которой моделирует трехмерные нестационарные течения политропного вязкого сжимаемого газа в восходящих закрученных потоках в предлагаемых условиях.

Численно получены значения всех газодинамических параметров исследуемых течений, которые в части направления закрутки и скоростных характеристик полностью совпали с измеренными в эксперименте.

Рассчитаны линии тока в газе, которые при соответствующей их визуализации позволяют детально и наглядно проследить за всеми этапами зарождения, развития и длительного существования атмосферных вихрей.

Практическая значимость работы состоит в том, что численно смоделированные сложные течения газа дают возможность сформулировать конкретные рекомендации для проведения будущих экспериментов с восходящими закрученными потоками, которые могут вывести на многие их практические применения. В частности, вентилирование карьеров, а также создание вихревого энергогенератора.

Достоверность результатов обеспечивается использованием хорошо известной математической модели – полной системы уравнений Навье-Стокса – и применением классических математических методов для построения решений и исследования свойств этих решений. Кроме того, достоверность результатов численного моделирования подтверждается тщательным тестированием численных методик, в том числе сравнением с точными аналитическими решениями, а также удовлетворительными результатами сопоставления с экспериментальными данными.

На защиту выносятся результаты, соответствующие пунктам паспорта специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам.

Пункт 2: Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

1. В модели упругой сплошной среды предложены конкретные, связанные с проведенными и планируемыми экспериментами, краевые условия для полной системы уравнений Навье-Стокса, позволяющие вместе с начальными условиями проводить процедуру численного построения решений для описания течений газа в восходящем закрученном потоке, инициированном вертикальным продувом.

2. Предложена математическая модель локального вертикального продува вязкого сжимаемого теплопроводного газа, который в условиях действия сил

тяжести и Кориолиса приводит к возникновению восходящего закрученного потока.

3. Определены все газодинамические характеристики и параметры течений газа в восходящих закрученных потоках, часть из которых в натуральных наблюдениях установить не удастся.

Пункт 4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

4. Программный комплекс на основе пяти программ, предназначенный для численного решения задач, связанных с описанием течений газа в восходящих закрученных потоках и определения газодинамических параметров таких течений. Программный комплекс используется для проведения вычислительного эксперимента на комплексе ИВЦ Новосибирского государственного университета, который эксплуатирует современный суперкомпьютер.

Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

5. Численными методами впервые построены трехмерные нестационарные течения политропного сжимаемого вязкого теплопроводного газа в разномасштабных восходящих закрученных потоках при условии действия сил тяжести и Кориолиса.

6. С помощью явных разностных схем и предложенных начально-краевых условий построены приближенные решения полной системы уравнений Навье-Стокса и впервые определены термодинамические, скоростные и энергетические характеристики трехмерных нестационарных течений газа в восходящих закрученных потоках.

Пункт 6: Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента.

7. Предложенная модель газа как движущейся сжимаемой сплошной среды, обладающей диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности, при численном моделировании возникающих при вертикальном продуве сложных закрученных течений дает основные газодинамические характеристики, совпадающие с имеющимися данными натуральных экспериментов.

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из трех областей: математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Апробация. Основные положения и результаты диссертации докладывались на конференциях (см. работы [7-12] из списка публикаций), в том числе: VII Международная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты»

(Новосибирск, сентябрь, 2013); XI Международная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты» (Новосибирск, апрель, 2014); XII Международная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты» (Новосибирск, май, 2014); Международная научная конференция МКФМ-2014-012 «Актуальные вопросы современных физико-математических наук» (Москва, июнь, 2014); XX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко. (Абрау-Дюрсо, Новороссийск, сентябрь, 2014); Международная конференция «Успехи механики сплошных сред» (УМСС, 2014), приуроченная к 75-летию академика В.А. Левина. (Владивосток, сентябрь-октябрь, 2014); VII международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии» (Новосибирск, август, 2014).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 печатных работах [1–17]. В том числе (в скобках в числителе указан общий объем этого типа публикаций в печатных листах, в знаменателе – объем принадлежащий лично автору): 4 статьи в периодических изданиях рекомендованных ВАК [1–4] для представления основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора или кандидата наук (2.6/2.0); 2 статьи в периодическом рецензируемом издании [5–6] (1.0/0.7); 5 – в трудах международных конференций [7–11] (2.4/2.0), 1 – в трудах Всероссийской конференции [12] (0.2/0.1); 5 свидетельств государственной регистрации программ для ЭВМ (в Роспатенте) [13–17] (2.0/1.5).

Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Во всех совместных работах Обухову А.Г. принадлежат постановки задач и рекомендации по выбору метода исследования и проверке полученных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы. Текст диссертации содержит 125 страниц печатного текста, 104 рисунка. Список использованной литературы включает 135 наименований работ российских и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** обосновывается актуальность выбранной темы исследований, сформулированы цели и задачи, приведены сведения о научной новизне, практической значимости, основных результатах и положениях, выносимых на защиту, апробации результатов и публикациях.

Первая глава носит вводный характер, посвящена описанию известных фактов, приведена для полноты изложения и содержит четыре параграфа.

В §1 рассматривается движение материальной точки в абсолютной и относительной системах координат, причины возникновения, свойства и различные проявления силы Кориолиса на Земле.

В §2 приводится система уравнений газовой динамики, являющейся квазилинейной системой уравнений с частными производными гиперболического типа

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}, \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Эта система в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии в движущейся сплошной среде и в приведенном виде учитывает влияние сил тяжести и Кориолиса. В системе (1) введены безразмерные переменные. При этом в качестве масштаба скорости берется значение скорости звука в воздухе при стандартных условиях, а в качестве масштаба расстояния выбирается основной линейный масштаб конкретного моделируемого восходящего закрученного потока.

Уравнения состояния идеального газа в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$p = \rho T, \quad e = T. \quad (2)$$

В §3 в предположении, что сплошная среда обладает диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности, приводится в безразмерном виде дифференциальная форма законов сохранения – полная система уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + \right. \\ \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \right\}, \end{cases} \quad (3)$$

где значения безразмерных постоянных коэффициентов вязкости и теплопроводности при расчетах берутся следующими: $\mu_0 = 0.001, \kappa_0 \approx 1.458333\mu_0$.

Система (3) имеет смешанный тип: первое уравнение – уравнение неразрывности (дифференциальная форма закона сохранения массы) – образует гиперболическую часть системы; второе (векторное) и третье уравнения – уравнения движения и энергии (дифференциальные формы законов сохранения импульса и энергии соответственно) – составляют параболическую часть системы. В приведенной системе (3) также учитывается влияние сил тяжести и Кориолиса.

В §4 описаны маломасштабные эксперименты группы А.Ю. Вараксина (Москва) и группы С.П. Баутина (Екатеринбург) по созданию восходящих закрученных потоков в лабораторных условиях. В этих экспериментах

установлена принципиальная возможность получить закрутку газа как с помощью локального нагрева нижней подстилающей поверхности (опыты А.Ю. Вараксина), так и посредством простого продува газа снизу вверх через трубу без какого-либо принудительного нагрева (опыты С.П. Баутина). При математическом моделировании этого продува вертикальная составляющая скорости газа в центре верхней грани расчетной области задается виде функции

$$w(t) = M[1 - \exp(-10t)], \quad (4)$$

описывающей постепенное увеличение от времени t вертикальной скорости продува от 0 до M , где M – константа, определяемая заданной скоростью продува.

Вторая глава диссертации посвящена описанию математического и численного моделирования трехмерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке с помощью конечно-разностной аппроксимации полной системы уравнений Навье-Стокса, краевых условий и описанию расчетной области.

В §5 приведено одно известное точное аналитическое решение⁹ системы уравнений газовой динамики и полной системы уравнений Навье-Стокса, которое принимается далее за начальное условие при численном построении ее решения:

$$u = 0, v = 0, w = 0, T_0(z) = 1 - kz, \rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}, \quad (5)$$

где k и ν заданные константы.

В §6 ставятся конкретные краевые условия для полной системы уравнений Навье-Стокса с учетом того, что в качестве расчетной области численного построения решений принимается прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием со стороной, равной масштабному значению расстояния, то есть со стороной, равной единице в безразмерных переменных. Высота параллелепипеда задается исходя из линейных характеристик конкретного моделируемого восходящего закрученного потока.

Для плотности и температуры на всех шести гранях параллелепипеда ставятся значения из точного стационарного решения (5).

Для остальных газодинамических параметров на всех гранях расчетного параллелепипеда ставится «условие непрерывности» потока, которое означает, что значения искомой функции на границу области сносятся линейной интерполяцией по нормали к данной граничной поверхности из внутренней части расчетной области. Исключением является плоскость $z = 0$, на которой третья компонента вектора скорости полагается нулем.

Кроме того, учитывая цель данной работы, в квадратной области, размером 0.1×0.1 в безразмерных переменных в центре верхней грани расчетной области задается вертикальная скорость течения газа, зависящая от времени t по закону (4). Тем самым моделируется вертикальный, плавно

⁹Баутин С.П., Обухов А.Г. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики //Известия вузов. Нефть и газ. –2013. – № 4. – С.81 –86.

нарастающий до конкретного значения скорости продув газа через верхнее отверстие.

В §7 представлена реализация конечно-разностной аппроксимации начально-краевых условий для рассматриваемой задачи. Расчетная область заполняется трехмерной сеткой узлов пересечения трех семейств плоскостей $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$, где $x_i = i \cdot \Delta x$, $y_j = j \cdot \Delta y$, $z_k = k \cdot \Delta z$, $0 \leq i \leq L$, $0 \leq j \leq M$, $0 \leq k \leq N$. Разностные шаги по трем пространственным переменным $\Delta x = x^0 / L$, $\Delta y = y^0 / M$, $\Delta z = z^0 / N$, где x^0, y^0, z^0 – длины сторон расчетного параллелепипеда.

Для аппроксимации производной по времени используются значения функции с двух последовательных временных слоев

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^n}{\Delta t},$$

а для аппроксимации производных по пространственным переменным используются стандартные формулы с центральными разностями значений функций с предыдущего временного слоя.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \approx \frac{g_{i+1,j+1,k}^n - g_{i-1,j+1,k}^n - g_{i+1,j-1,k}^n + g_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \approx \frac{g_{i+1,j,k+1}^n - g_{i-1,j,k+1}^n - g_{i+1,j,k-1}^n + g_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \approx \frac{g_{i,j+1,k+1}^n - g_{i,j-1,k+1}^n - g_{i,j+1,k-1}^n + g_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y \Delta z}.$$

Под буквой f здесь подразумевается любой из газодинамических параметров – плотность ρ , скорости u, v, w – проекции вектора скорости \vec{V} на декартовы оси, температура T , а g – скорости u, v, w .

Производная по времени имеет первый порядок аппроксимации, а все производные по пространственным переменным аппроксимируются со вторым порядком точности.

Расчет трехмерного нестационарного течения ведется по явной разностной схеме переходом с очередного n -го временного слоя на следующий $n+1$ временной слой с постоянным заданным шагом Δt . Выбор шага по времени осуществлялся с учетом стандартных неравенств для явных разностных схем в случае параболических уравнений:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_i \Delta x_j}{2\mu_0}; \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x_i \Delta x_j}{2\kappa_0},$$

где $\Delta x_i, \Delta x_j$ – шаги по соответствующим пространственным переменным; $i, j=1, 2, 3$. И поскольку полагается, что $\kappa_0 = 1.458333\mu_0$, то при следующих значениях входящих в последние неравенства констант

$$\Delta t = 0.001; \quad \Delta x = \Delta y = 0.005; \quad \Delta z = 0.004; \quad \mu = 0.001$$

требуемые неравенства выполняются.

По известным в начальный момент времени $t=0$ во всех точках прямоугольного параллелепипеда всем искомым функциям

$$\vec{U}|_{t=0} = \vec{U}^0 \quad (6)$$

с помощью явной разностной схемы

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t \cdot F(\vec{U}^n); \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix} \quad (7)$$

вычисляются значения искоемых функций во внутренних точках прямоугольного параллелепипеда в последующий момент времени. После этого, используя граничные условия, значения искоемых функций определяются во всех точках граней, ребер и вершин расчетной области.

Корректность работы программ тестировалась двумя способами.

Во-первых, нестационарным расчетом проверялась правильность передачи точного стационарного решения. Отличие получаемого в этих нестационарных расчетах течения от точного стационарного было порядка $10^{-4} \div 10^{-5}$. Это соответствует погрешностям, возникающим при использовании указанной разностной схемы. Также нестационарным расчетом при $g = \Omega = 0$ проводилось сравнение с ранее построенным¹⁰ одномерным течением. Совпадение также было удовлетворительным.

Во-вторых, расчеты проводились с разными шагами по пространству и времени и при изменении расчетных шагов результаты расчетов принципиально не меняются. Наблюдаемые при этом различия в решениях

¹⁰Баутин С.П., Замыслов В.Е. Представление приближенных решений полной системы уравнений Навье-Стокса в одномерном случае. //Вычислительные технологии.-2012.-Том 17, №3-с.3-12.

также были сопоставимы с погрешностями, обусловленными разностной схемой.

Численные расчеты проводились с помощью созданного комплекса на основе пяти программ, позволяющие проводить численное решение задач, связанных с описанием течений газа в восходящих закрученных потоках и определения газодинамических параметров таких течений. На рисунке 1 изображена блок-схема вычислительного комплекса.

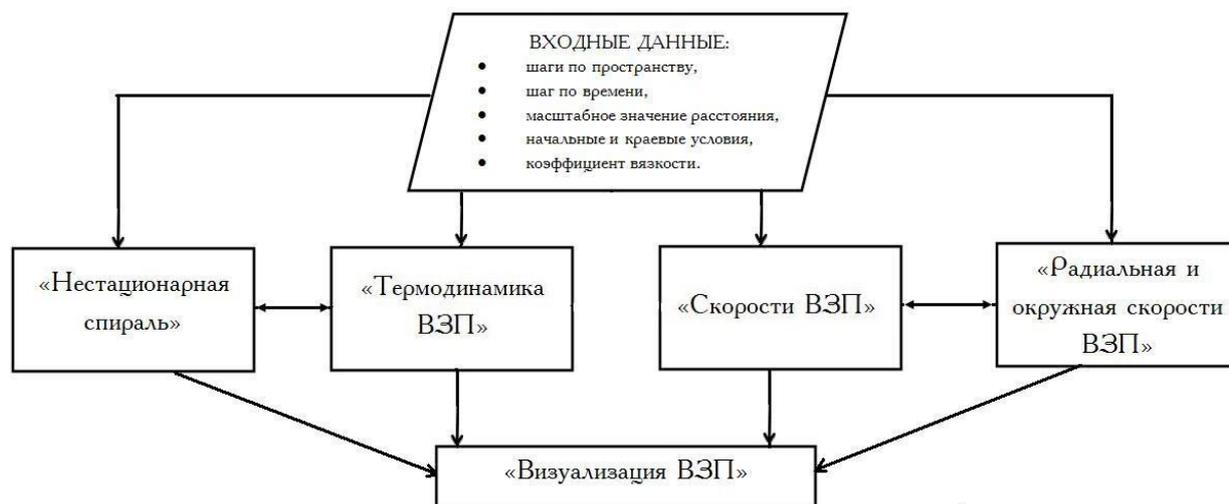


Рис.1. Блок-схема программного комплекса.

В третьей главе диссертации приводятся результаты численного моделирования трехмерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в восходящих закрученных потоках различных масштабов. Ввиду ограниченного объема автореферата далее описываются результаты расчета течений в восходящих закрученных потоках средних масштабов – планируемого эксперимента под условным названием «торнадо во дворе», в котором значение скорости продува будет порядка одного метра в секунду, радиус трубы – пять метров, расстояние от подстилающей поверхности до нижнего среза трубы – два-три метра.

Расчеты проводились при масштабном значении расстояния $x_0 = 50 м$, разностные шаги по трем пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = 0.005$ (размерное значение $0.25 м$), $\Delta z = 0.004$ (размерное значение $0.2 м$), а шаг по времени $\Delta t = 0.001$ (размерное значение $0.00015 с$).

Расчетная область представлена на рисунке 2. Пунктиром на рисунке изображена часть трубы квадратного сечения, через которую в эксперименте продувается воздух. Прямоугольный параллелепипед, расположенный под трубой, является той областью, в которой исследуются возникающие восходящие закрученные потоки.

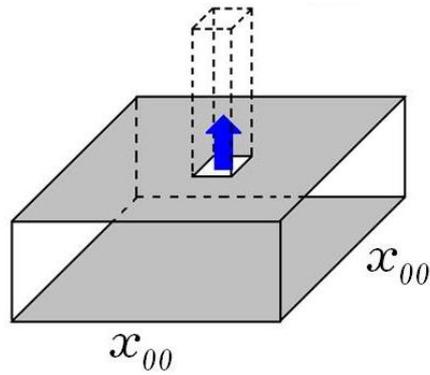


Рис. 2. Расчетная область.

На рисунке 3 представлены результаты расчетов плотности газа на высоте $z = 0.02$ (размерное значение 1 м) для четырех различных моментов расчетного времени.

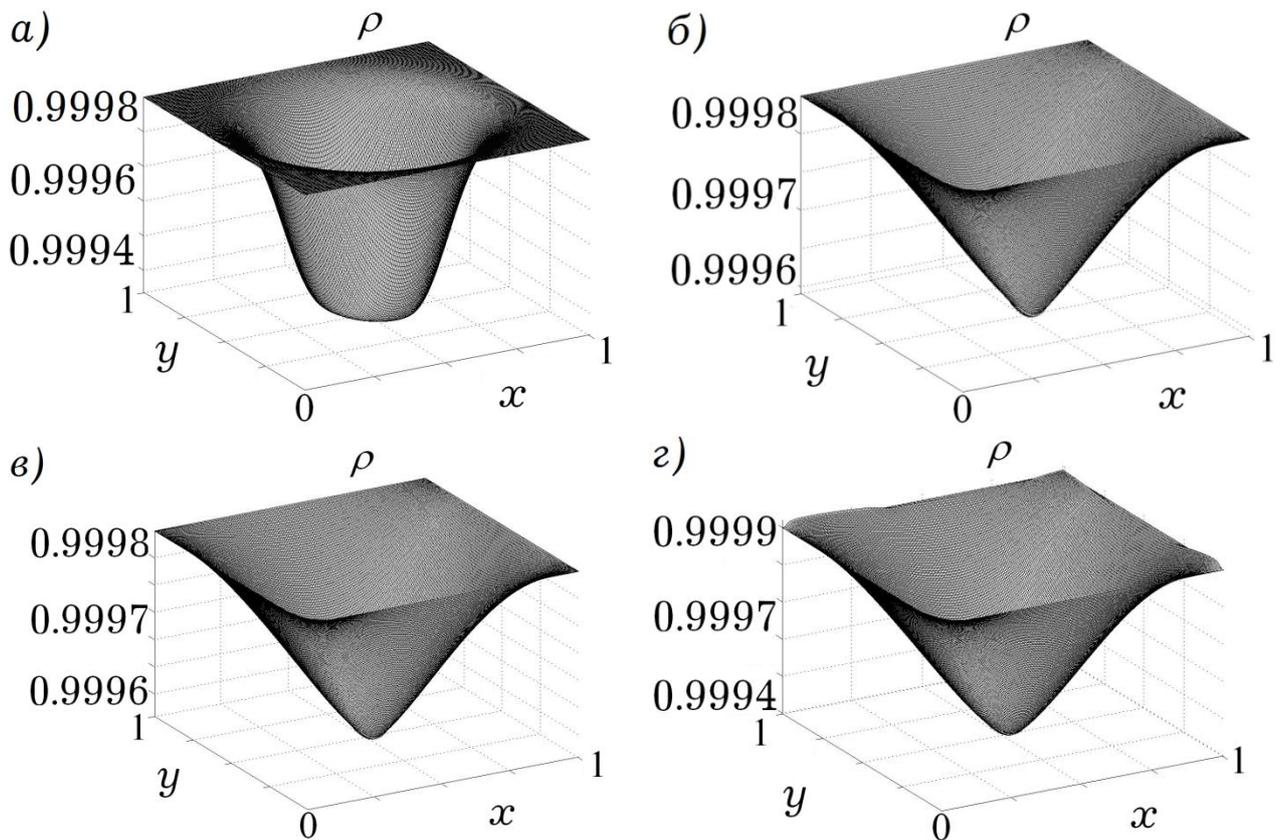


Рис. 3. Распределение плотности газа на высоте $z = 1\text{ м}$ при $t = 0.5c$ (а), $t = 2.0c$ (б), $t = 10c$ (в), $t = 30c$ (г).

Плотность газа по периметру расчетной области сохраняется неизменной и равной значению плотности стационарного распределения. В начальные моменты времени происходят явно нестационарные и немонотонные изменения плотности газа в средней части расчетной области. А с течением времени наблюдается монотонное плавное понижение плотности в центре расчетной

области и выход на стационарный режим. При этом плотность в области продува меньше, чем в окружающем потоке.

Результаты расчетов температуры газа показали, что в центре расчетной области под отверстием продува отмечается понижение температуры. Периферийное же значение температуры соответствует неизменному значению начального стационарного распределения. Следует отметить, что, также как и для плотности, видны незначительные немонотонные изменения температуры в начальные моменты времени. С увеличением времени изменение температуры становится монотонным и происходит выход на стационарный режим. В данном расчете, как и при расчете плотности, в средней части области расчета явно наблюдается цилиндрическая симметрия, не смотря на то, что расчет ведется в прямоугольной системе координат.

Поведение рассчитанных значений давления с течением времени аналогично поведению плотности и температуры, поскольку давление есть произведение плотности и температуры. В том числе значения давления в зоне продува также меньше, чем на периферии расчетной области.

На рисунке 4 представлены в виде поверхностей результаты расчетов первой компоненты u скорости газа на высоте $z = 0.02$ (размерное значение $1m$) для четырех различных моментов расчетного времени.

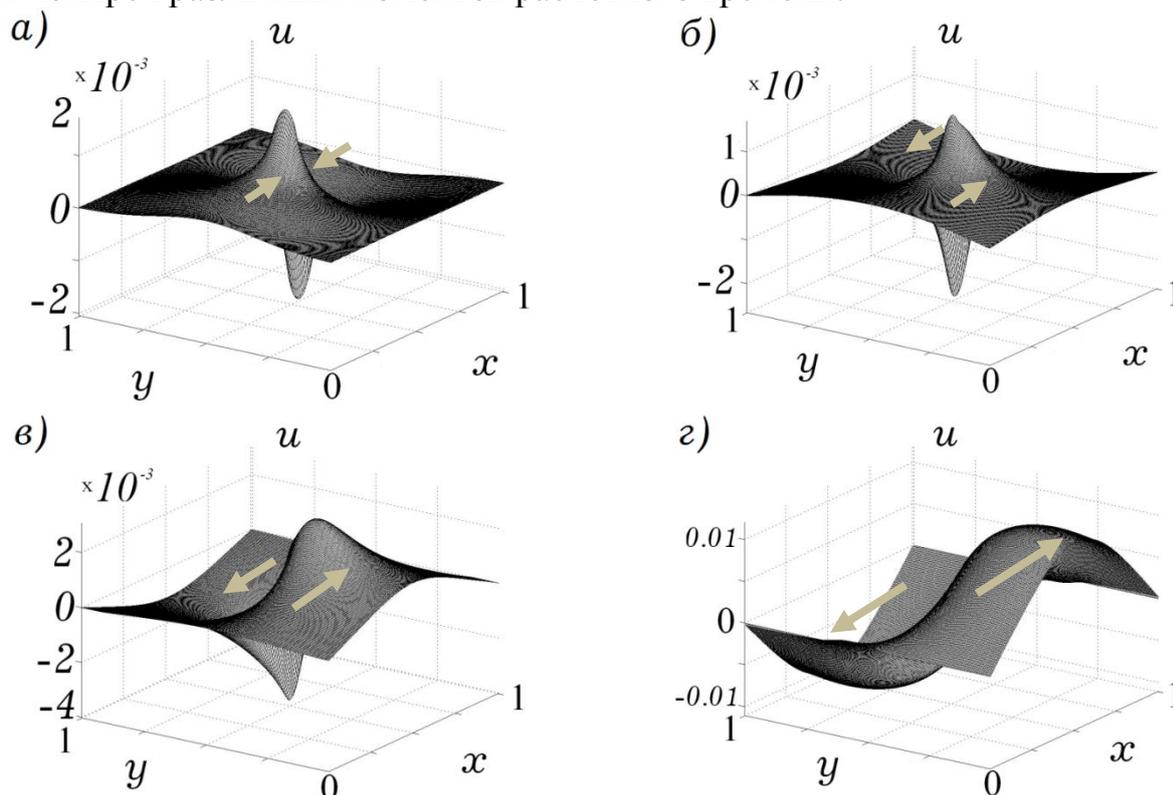


Рис. 4. Результаты расчетов первой компоненты u скорости газа на высоте $z = 1m$ при $t = 0.5c$ (а), $t = 2.0c$ (б), $t = 10c$ (в), $t = 300c$ (г).

Из рисунка видно, что первоначально встречные в направлении оси Ox потоки газа с течением времени перераспределяются в пространстве. Такое перераспределение движущихся встречных потоков иллюстрирует возникновение закрутки газа в положительном направлении, то есть против

хода часовой стрелки. С течением времени происходит рост абсолютных значений скоростей встречных потоков и постепенный выход на стационарный режим течения.

Результаты расчетов второй компоненты v скорости газа говорят о том, что первоначально встречные в направлении оси Oy потоки газа с течением времени также перераспределяются в пространстве, что также иллюстрирует закрутку газа в положительном направлении. Максимальное значение окружной скорости течения газа в данном расчете составляет 0.015 (размерное значение 5 м/с).

Из сопоставления поверхностей компонент u и v скорости газа следует вывод о положительном направлении закрутки газа, то есть против хода часовой стрелки во все моменты времени.

Результаты расчета третьей компоненты скорости w при $z = 0.02$ для тех же расчетных моментов времени приведены на рисунке 5.

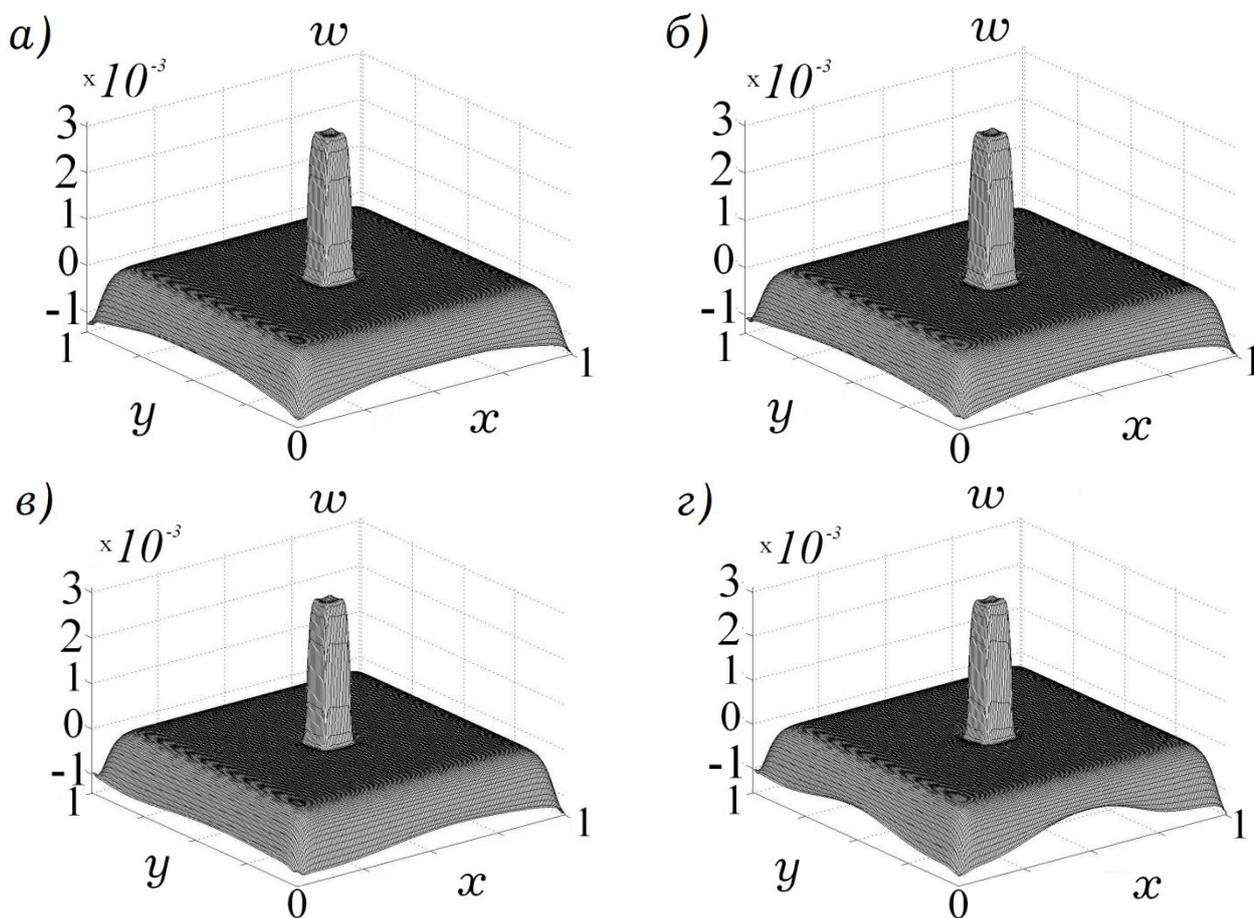


Рис. 5. Результаты расчета третьей компоненты скорости w на высоте $z = 1 м$ при $t = 0.5c$ (а), $t = 2.0c$ (б), $t = 10c$ (в), $t = 300c$ (г).

Следует отметить, что значения вертикальной составляющей скорости газа на этой высоте всюду, кроме значений в области продува, отрицательные и имеющие достаточно малые по модулю значения. Это означает, что движение газа на этой высоте вне области продува направлено вертикально вниз, а в области продува – вертикально вверх и скорость этого вертикального движения

вверх примерно равна 0.003 (размерное значение $1m/c$). Особо отмечаем, что в отличие от поверхностей плотности и температуры, третья компонента скорости газа в зоне продува фактически полностью повторяет квадратную конфигурацию зоны продува и не имеет цилиндрической симметрии.

Найденные во внутренних узлах расчетной сетки компоненты скорости дают возможность рассчитать безразмерное значение различных видов энергии движения газа в каждый фиксированный момент времени в расчетной области D .

В работе была рассчитана полная кинетическая энергия W восходящего закрученного потока, учитывающая все три компоненты вектора скорости частиц газа

$$W = \iiint_D \rho \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dD \quad (8)$$

Кинетическая энергия W_{xy} , обусловленная только первой u и второй v компонентами скорости

$$W_{xy} = \iiint_D \rho \cdot \frac{u^2 + v^2}{2} dD \quad (9)$$

Кинетическая энергия W_z , обусловленная только вертикальной w составляющей скорости

$$W_z = \iiint_D \rho \cdot \frac{w^2}{2} dD \quad (10)$$

Очевидно, что полная кинетическая энергия W восходящего закрученного потока является суммой двух других кинетических энергий W_{xy} и W_z

$$W = W_{xy} + W_z \quad (11)$$

Проецирование вектора скорости в узле $\vec{V}_{i,j,k}$ на радиальное и тангенциальное направления, позволяет найти радиальную v_r и окружную v_φ скорости движения частиц газа в каждой внутренней точке расчетной области. Это позволяет провести расчет кинетической энергии (11), связанной с движением газа в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} W = W_{xy} + W_z = W_{r\varphi} + W_z &= \iiint_D \rho \cdot \frac{v_r^2 + v_\varphi^2}{2} r dr d\varphi dz + \iiint_D \rho \cdot \frac{w^2}{2} dx dy dz = \\ &= \iiint_D \rho \cdot \frac{v_r^2}{2} r dr d\varphi dz + \iiint_D \rho \cdot \frac{v_\varphi^2}{2} r dr d\varphi dz + \iiint_D \rho \cdot \frac{w^2}{2} dx dy dz \end{aligned} \quad (12)$$

и энергию только вращательного движения газа

$$W_\varphi = \iiint_D \rho \cdot \frac{v_\varphi^2}{2} r dr d\varphi dz \quad (13)$$

На приведенных далее рисунках 6-9 представлены результаты расчетов всех пяти видов кинетических энергий для одинакового рассчитанного промежутка времени от начала продува. Данный промежуток времени соответствует начальной стадии возникновения и развития восходящего закрученного потока.

Максимальные безразмерные рассчитанные значения энергии, приведенные на графиках, составляют соответственно $W = 1.8906 \cdot 10^{-6}$, $W_{xy} = W_{r\varphi} = 1.8900 \cdot 10^{-6}$, $W_z = 0.61385 \cdot 10^{-9}$, $W_\varphi = 1.8413 \cdot 10^{-6}$.

Совпадение значений энергий W_{xy} и $W_{r\varphi}$ наблюдается для всех рассчитанных моментов времени, поэтому два графика соответствующих энергий представлены на рисунке 7 совпадающими друг с другом. Это свидетельствует о корректности вычислительной процедуры, поскольку это одни и те же энергии, но рассчитанных с использованием разных проекций вектора скорости.

Сопоставление численных значений кинетических энергий позволяет сделать вывод о том, что основной вклад порядка 97% в общую кинетическую энергию восходящего закрученного потока дает кинетическая энергия вращательного движения.

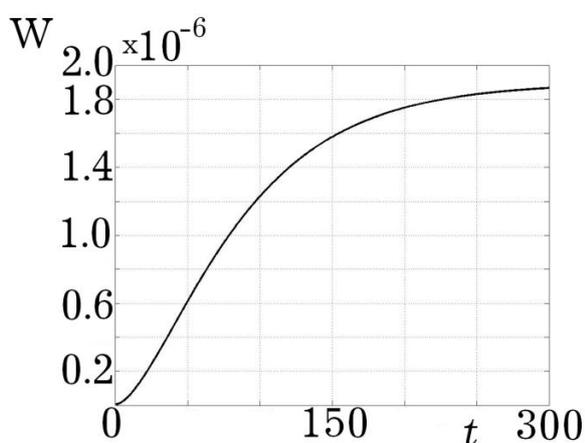


Рис. 6. Полная кинетическая энергия

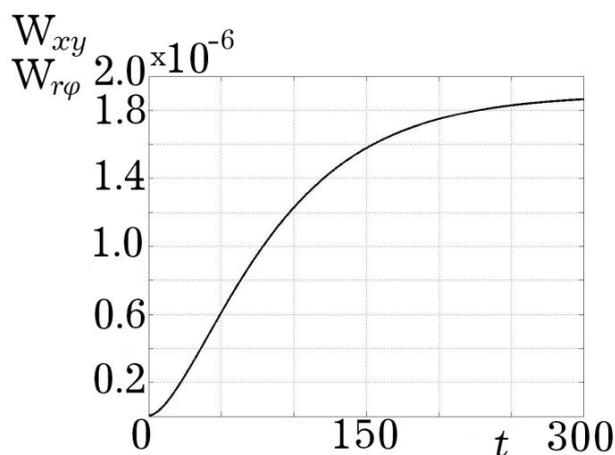


Рис. 7. Кинетические энергии без учета вертикальной скорости

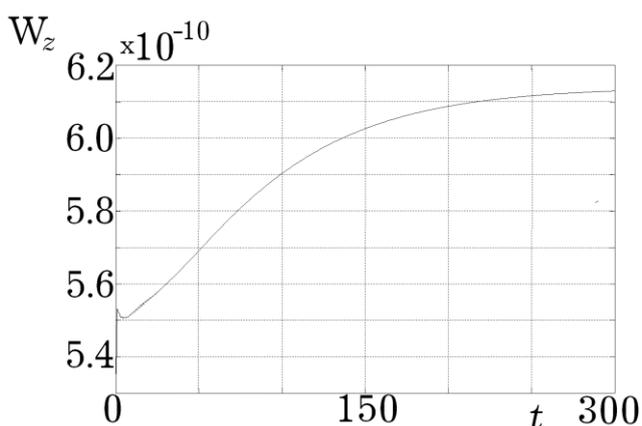


Рис. 8. Кинетическая энергия вертикального движения

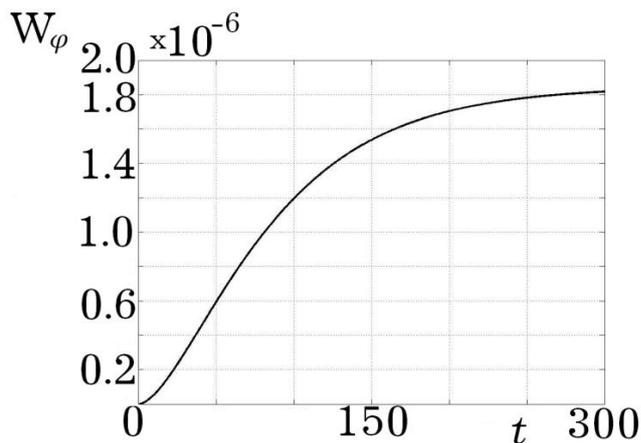


Рис.9. Кинетическая энергия вращательного движения

Размерное значение полной кинетической энергии

$$W^* = W \cdot \rho_{00} \cdot v_{00}^2 \cdot x_{00}^3 = 1.8906 \cdot 10^{-6} \cdot 1.2928 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \left(333 \frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 \cdot (50\text{м})^3 =$$

$$= 1.8906 \cdot 10^{-6} \cdot 1.7919 \cdot 10^{10} \text{ Дж} \approx 3.3878 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Эта энергия сопоставима с кинетической энергией движущегося легкового автомобиля массой 1000кг со скоростью 36км/ч (10м/с).

На рисунке 10 представлены результаты трехмерных расчетов мгновенных линий тока для четырех различных моментов времени в области близкой к вертикальной части восходящего закрученного потока. Видно, как постепенно происходит закрутка газа вблизи нижней плоскости расчетного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды из придонной части в вертикальную часть восходящего закрученного потока.

Когда просматривается анимированное движение линий тока, то визуально складывается впечатление, что поток движется не снизу вверх, а сверху вниз. На самом деле с течением времени уменьшается шаг винтового движения и это визуально воспринимается как движение винтовых линий тока вниз. А уменьшение шага винтового движения вызвано тем, что окружная скорость с увеличением времени нарастает, а скорость вертикального продува остается неизменной.

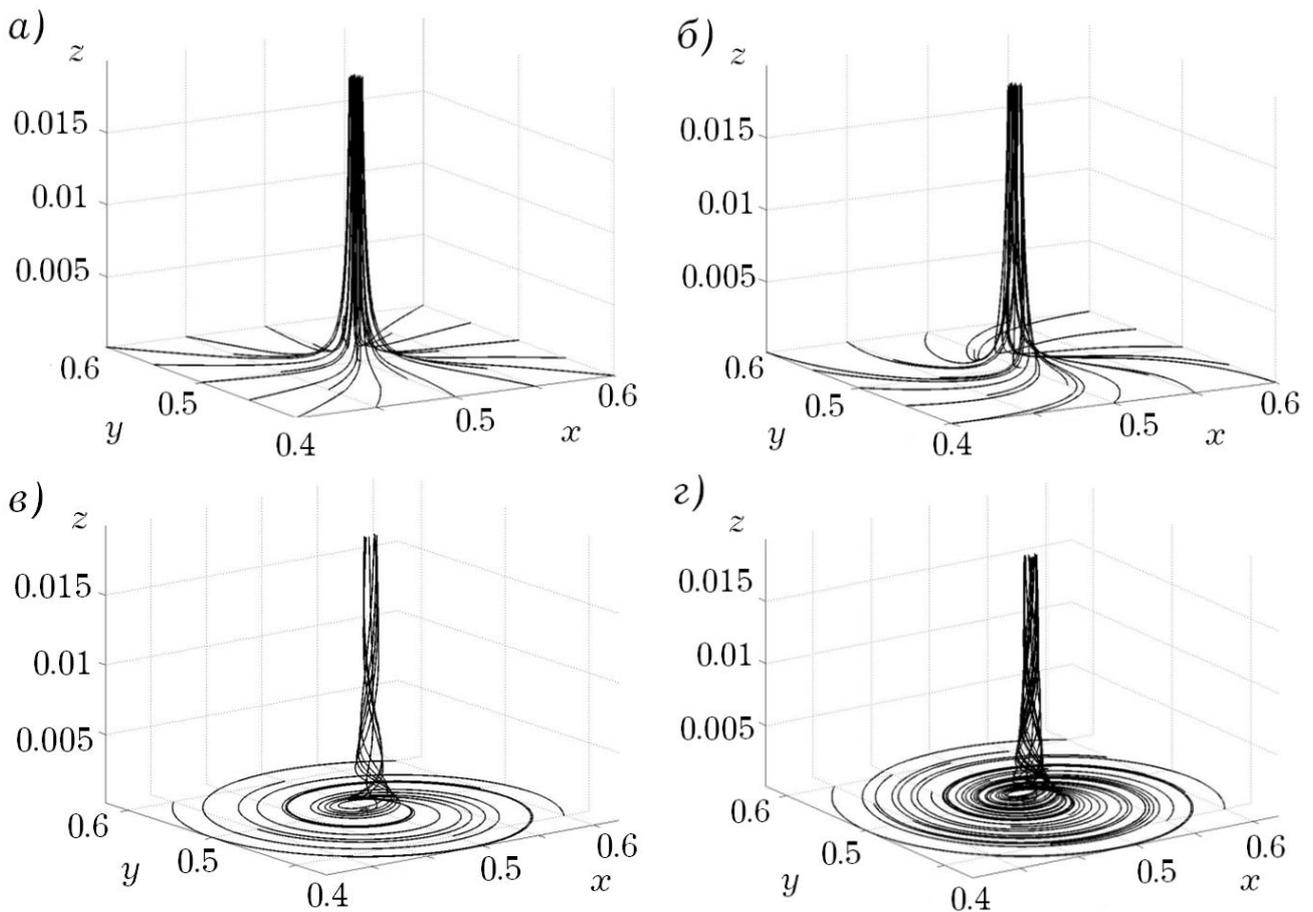


Рис. 10. Результаты трехмерных расчетов линий тока для различных моментов времени $t=0.5c$ (а), $t=2.0c$ (б), $t=10c$ (в), $t=300c$ (г)

В третьей главе также приведены результаты расчетов восходящих закрученных потоков как малых масштабов, соответствующих экспериментам группы С.П. Баутина, так и больших масштабов, соответствующих тропическому циклону средней интенсивности.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. В модели упругой сплошной среды для полной системы уравнений Навье-Стокса впервые предложена начально-краевая задача, соответствующая проведенным и планируемым экспериментам и описывающая сложные трехмерные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа в восходящих закрученных потоках, которые инициируются вертикальным продувом.

2. С помощью явных разностных схем и предложенных начально-краевых условий построены приближенные решения полной системы уравнений Навье-Стокса и впервые определены термодинамические, скоростные и энергетические характеристики трехмерных нестационарных течений газа в восходящих закрученных потоках.

3. Численными методами впервые построены трехмерные нестационарные течения политропного вязкого сжимаемого теплопроводного газа в разномасштабных восходящих закрученных потоках при условии действия сил тяжести и Кориолиса.

4. Предложенная модель газа как движущейся сжимаемой сплошной среды, обладающей диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности, при численном моделировании возникающих при вертикальном продуве сложных закрученных течений дает основные газодинамические характеристики, совпадающие с данными натурных экспериментов.

5. Созданный программный комплекс на основе пяти программ предназначен для численного решения задач, связанных с описанием течений газа в восходящих закрученных потоках и определения газодинамических параметров таких течений.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в периодических изданиях, рекомендованных ВАК

1. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа //Известия вузов. Нефть и газ. – 2014. – № 3 – С. 88–94.

2. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Численный расчет термодинамических характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа //Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика – 2014. – № 7. – С. 157–165.

3. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численное исследование термодинамических параметров закрученного потока газа при холодном вертикальном продуве //Инновации и инвестиции. – 2014. – № 8. – С.167–170.

4. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Расчет скоростей и линий тока трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве //Иновации и инвестиции. – 2014. – № 9. – С.139–142.

Публикации в периодических рецензируемых изданиях

5. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Численное моделирование начальной стадии возникновения восходящего закрученного потока //Академический журнал Западной Сибири. – 2013. – № 6(49), том 9. – С.10–12.

6. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Расчет скоростей трехмерного закрученного потока вязкого сжимаемого теплопроводного газа //Академический журнал Западной Сибири.–2014.–№ 3(52), том 10. – С. 126–127.

Публикации в трудах международных конференций

7. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Математическое моделирование нагрева поверхности Земли //Сборник материалов VII Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты». – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2013. – С.116–120.

8. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Численный расчет энергетических характеристик восходящего закрученного потока газа, инициированного холодным продувом //Материалы XI Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты». – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2014. – С.161–167.

9. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Численный расчет плотности, температуры и давления закрученного потока газа при вертикальном продуве //Материалы XII Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты». – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2014. – С.108–112.

10. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Численный расчет газодинамических параметров в восходящем закрученном потоке вязкого сжимаемого теплопроводного газа //Материалы международной научной конференции «Актуальные вопросы современных физико-математических наук» Россия, г. Москва, 26-28 июня 2014 г. С. 30–38.

11. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В., Сорокина Е.М., Баранникова Д.Д. Численное моделирование трехмерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа //Материалы международной конференции «Успехи механики сплошных сред» (УМСС'2014), приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина, 28 сентября – 4 октября 2014 г. – Владивосток: С. 364 – 368.

Публикация в трудах Всероссийской конференции

12. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численный расчет трехмерного закрученного течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа при вертикальном продуве //Материалы XX Всероссийской конференции

«Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященной памяти К.И. Бабенко (15–20 сентября, 2014) Абрау-Дюрсо, Новороссийск. – С. 15.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

13. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Программа расчета нестационарных плоских спиральных течений газа «Нестационарная спираль». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014616195 от 16.06.2014.

14. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Программа трехмерного расчета термодинамических параметров течения газа в восходящем закрученном потоке «Термодинамика ВЗП». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014618874 от 01.09.2014.

15. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Программа трехмерного расчета скоростей течения газа в восходящем закрученном потоке «Скорости ВЗП». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014616190 от 16.06.2014.

16. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Программа расчета радиальной и окружной скорости течения газа в восходящем закрученном потоке «Радиальная и окружная скорости ВЗП». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014619634 от 18.09.2014.

17. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Программа визуализации и форматирования результатов расчета трехмерных течений газа в восходящем закрученном потоке «Визуализация ВЗП». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014619635 от 18.09.2014.

Подписано в печать 25.02.2015. Тираж 120 экз.
Объем 1,0 уч.-изд. л. Формат 60x84/16. Заказ 57

Издательство БК Типография, ИП Бахмат В.Г.
625000, г. Тюмень, ул. Республики, 5а.
Тел./факс (3452) 38-78-67
E-mail: 387867@mail.ru