

© А.В. ТАТЦСЦВ

atatosov@utmn.ru

УДК 543.3

**РАСТЕКАНИЕ ЖИДКОСТИ ВО ВЛАЖНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

*АННОТАЦИЯ.* Рассмотрен процесс растекания жидкости во влажной пористой среде вдоль поверхности насыщения.

*SUMMARY.* The process of spreading of the liquid in a wet porous medium along the surface saturation considered.

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.* Пористая среда, фильтрация, жидкость.

*KEY WORDS.* Porous media, filtration, fluid.

**Введение.** Процессы сброса жидких отходов широко распространены как в хозяйственной деятельности человека, так и в природе. Этим они наносят существенный вред окружающей среде. В связи с чем возникает задача локализации, ликвидации и профилактики вероятных выбросов, которая может быть решена с помощью математических моделей, позволяющих прогнозировать поведение жидких сбросов с достаточной достоверностью [1-5].

Рассмотрим процесс растекания жидкости во влажном грунте. Насыщенность грунта растет с глубиной и достигает предельного значения на некоторой горизонтальной поверхности. Вблизи этой поверхности находится источник другой более легкой жидкости. Эта жидкость радиально движется в пористой среде вдоль поверхности насыщения. Необходимо определить скорость и форму растекающегося пятна.

**Допущения.** Растекание жидкости изучим на основе математической модели, построенной аналогично теории «мелкой воды». Подобное приближение справедливо при следующих допущениях: горизонтальные размеры жидкого пятна много больше вертикальных, при этом пренебрегаем вертикальными составляющими скоростей и ускорений. Изменение давления по высоте подчиняется гидростатическому распределению. Капиллярные эффекты не учитываются. Жидкость, первоначально насыщающая грунт является менее вязкой.

**Математическая постановка задачи.** Без учета капиллярных эффектов поверхность насыщения будет представлять собой свободную поверхность, выше которой находится сухой грунт I, ниже — полностью насыщенный II (рисунке 1). Легкая жидкость, частично погружаясь, удерживается на этой поверхности, распространяясь в основном радиально. На рис. 1 представлена схема растекания жидкости в насыщенной пористой среде. Здесь  $h$  — толщина слоя жидкости выше поверхности насыщения,  $H$  — толщина слоя жидкости ниже поверхности насыщения,  $v$  — средняя по высоте радиальная скорость течения жидкости,  $r$  — радиус пятна.

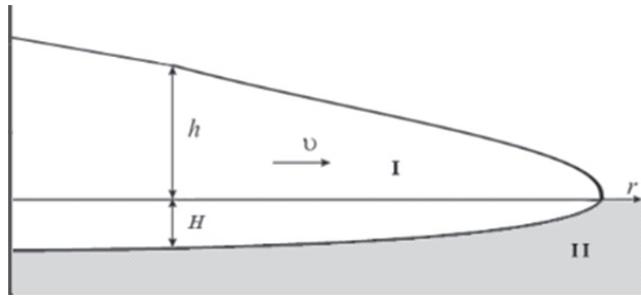


Рис. 1. Схема радиального растекания жидкости

Принимая во внимание гидростатическое распределение давления на границе жидкостей I-II, получим следующую зависимость

$$p_0 + \rho g(h + H) = p_0 + \rho_{II} gH,$$

где  $p_0$  — внешнее давление,  $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение свободного падения. Используя полученное уравнение связи для давлений на границе, найдем соотношение для высот  $h$  и  $H$

$$h = \frac{H}{\rho} (\rho_{II} - \rho).$$

С учетом принятых выше допущений и предположений уравнение неразрывности жидкости при радиальном растекании по горизонтальной поверхности запишем в следующем виде [6-7]

$$\frac{\partial hm}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial r} + \frac{hv}{r} = 0, \quad (1)$$

уравнение импульсов в принятом приближении имеет вид [8-9]:

$$v = -\frac{k}{\mu} \rho g \frac{\partial h}{\partial r}, \quad (2)$$

где  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости,  $k$  — коэффициент проницаемости грунта,  $m$  — пористость.

Таким образом, получим систему уравнений, описывающую процесс растекания жидкости вдоль поверхности насыщения с учетом влияния силы тяжести

$$\begin{cases} \frac{\partial hm}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial r} + \frac{hv}{r} = 0, \\ v = -\frac{k}{\mu} \rho g \frac{\partial h}{\partial r}. \end{cases} \quad (3)$$

Совместно с системой будем рассматривать три типа условий:

а) постоянный расход

$$2\pi r(h + H)v \rightarrow \dot{V}, r \rightarrow 0; \quad (4)$$

б) постоянное давление

$$h(0, t) = h_0; \quad (5)$$

в) постоянный объем

$$V = \int_0^r 2\pi r(h + H)dr = \text{const.} \quad (6)$$

#### Автомоделное решение

По аналогии с [10] ищем автомодельные решения, удовлетворяющие системе (3) и граничным условиям (4)-(6) в виде

$$\begin{aligned} h(r, t) &= t^n H^* H(\xi), \\ v(r, t) &= t^k V^* V(\xi), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\xi$  — безразмерная автомодельная переменная,  $n, k, l$  — безразмерные параметры,  $E^*, H^*, V^*$  — размерные постоянные.

Далее подставив автомодельные функции (5) в систему (3), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно автомодельной переменной  $\xi$

$$\begin{cases} nH - \xi l \frac{dH}{d\xi} + V \frac{dH}{d\xi} + H \frac{dV}{d\xi} + \frac{HV}{\xi} = 0 \\ V = -\frac{dH}{d\xi} \end{cases}; \quad (8)$$

два алгебраических уравнения относительно параметров  $k, l, n$ , выполнение которых гарантирует существование автомодельного решения:

$$\begin{aligned} 1 &= l - k, \\ k &= n - l; \end{aligned} \quad (9)$$

и уравнения связи между размерными постоянными:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{k} V^* &= \rho g \frac{H^*}{E^*}; \\ \frac{V^*}{E^*} &= m. \end{aligned} \quad (10)$$

#### Первое решение

Условие постоянного объемного расхода источника имеет вид

$$2\pi r(h + H)v \rightarrow \dot{V}, r \rightarrow 0.$$

Переходя к автомодельным переменным (7), получим граничное условие для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8):

$$\xi H(\xi)V(\xi) = 1, \xi \rightarrow 0; \quad (11)$$

связь между параметрами  $k, l, n$

$$l + n + k = 0; \quad (12)$$

и еще одну связь между размерными постоянными:

$$\begin{aligned} 2\pi\varepsilon E^* H^* V^* &= \dot{V}; \\ \varepsilon &= \frac{\rho_{II}}{\rho_{II} - \rho}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из алгебраических уравнений (9) и (12) найдем

$$k=-1/2, l=1/2, n=0,$$

а из уравнений (10) и (13)

$$V^* = mE^* = \sqrt[4]{\frac{k\rho g m \dot{V}}{2\pi\varepsilon\mu}}, H^* = \sqrt{\frac{\mu\dot{V}}{2\pi\varepsilon k\rho g m}}.$$

Распределение безразмерных функций автомодельной переменной ищем численно, решая соответствующую краевую задачу.

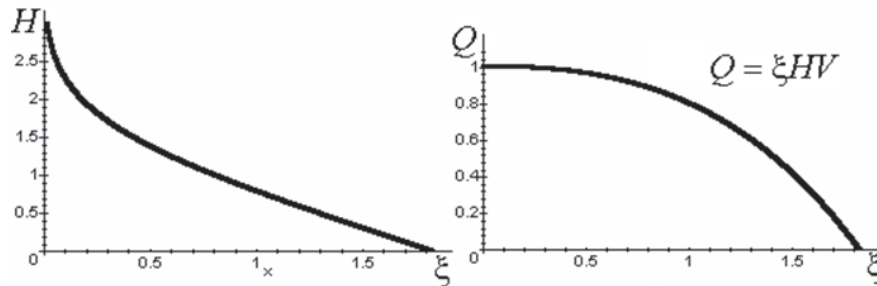


Рис. 2. Функции автомодельной переменной, удовлетворяющие граничному условию а)

Решение показывает, что при постоянном расходе внешний размер пятна жидкости растет со временем по закону

$$L(t) \approx 1.83 \sqrt[4]{\frac{k\rho g \dot{V}}{2\pi\varepsilon\mu t^3}} t^{\frac{1}{2}}.$$

**Второе решение**

Условие вытекания жидкости под постоянным давлением имеет вид:

$$h(0, t) = h_0.$$

Переходя к автомодельным переменным (7), получим граничное условие для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8):

$$H(0) = I; \quad (14)$$

связь между параметрами  $k, l, n$

$$n = 0; \quad (15)$$

и еще одну связь между размерными постоянными

$$H^* = h_0. \quad (16)$$

Из алгебраических уравнений (9) и (15) найдем

$$k=-1/2, l=1/2, n=0,$$

а из уравнений (10) и (16) найдем:

$$V^* = mE^* = \sqrt{\frac{k\rho g m h_0}{\mu}},$$

$$H^* = h_0.$$

Распределение безразмерных функций автомодельной переменной не изменилось.

**Третье решение**

Условие постоянного объема растекающейся жидкости имеет вид:

$$V = \int_0^r 2\pi r(h + H)dr = \text{const.}$$

Переходя к автомодельным переменным (4), получим граничное условие для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8):

$$\int_0^{\xi_0} \xi H(\xi) d\xi = 1; \quad (17)$$

связь между безразмерными параметрами:

$$n + 2l = 0; \quad (18)$$

и еще одну связь между размерными постоянными

$$\pi H^* E^{*2} = V. \quad (19)$$

Из алгебраических уравнений (9) и (18) находим

$$k = -3/4, \quad l = 1/4, \quad n = -1/2,$$

а из уравнений (10) и (19)

$$V^* = mE^* = \left( \frac{k\rho g m^3 V}{2\varepsilon\mu\pi} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad H^* = \left( \frac{\mu V}{2\varepsilon\pi k\rho g m^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В данном случае задача имеет аналитическое решение

$$\begin{cases} H(\xi) = -\frac{1}{8}\xi^2 + \frac{\sqrt[2]{2}}{2}, \\ V(\xi) = \frac{\xi}{4}. \end{cases}$$

Решение показывает, что при постоянном объеме пятно жидкости растет по закону

$$L(t) = \frac{\sqrt[2]{2}}{2} \sqrt[4]{\frac{k\rho g V}{2\varepsilon\mu\pi t}} t^{\frac{1}{4}}.$$

**Заключение.** Найдена группа автомодельных решений, позволяющих проанализировать распространение жидкости в пористой среде вдоль поверхности насыщения при условиях постоянного расхода, давления или объема закачки. Показана эквивалентность первого и второго условий для радиального течения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lyle, S., Huppert, H.E., Hallworth, M., Bickle, M., Chadwick A. Axisymmetric gravity currents in a porous medium // *J. Fluid Mech.* 2005, V. 543, P. 293-302.
2. Соловьев С.Е., Вольперт В.А., Давтян С.П. Радиально-симметричное течение вязкой жидкости между параллельными плоскостями // *Инженерно-физический журнал.* 1990. Т.59. С.85-91.
3. Хабибуллин И.Л. Моделирование поверхностного стока жидкости с учетом ее инфильтрации в грунт // *Обозрение прикл. и промышл. математики.* 2003. Т.10. В.2. С. 430-431.
4. Есин Н.И., Загриценко Н.Н., Потетюнко Э.Н. Динамика нефтяного пятна при его растекании по водной поверхности // *Успехи современного естествознания.* 2009. №10. С. 43-45.
5. Иксанов Р.Г. Задача Стефана о впитывании влаги в почву. Проблемы научного обеспечения развития эколого-экономического потенциала России: Сб. науч. трудов МГУП. М., 2004. 344 с.
6. Гильманов С.А. Моделирование распространения и накопления жидких сбросов; дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 2011.
7. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* М.: ГИТТЛ, 1950.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
9. Баренблатт Г.И. *Движение жидкости и газов в природных пластах.* М.: Недра, 1984.
10. Татосов А.В. Заполнение пропантом трещины гидроразрыва // *Вестник ТюмГУ.* 2004. №4. С. 256-261.