

© С.П. ПИРОГОВ, А.Ю. ЧУБА

*piro-gow@yandex.ru, aleksandr-chuba@mail.ru*

УДК 622.691.4

**СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ ДИНАМИЧЕСКИХ  
МОДЕЛЕЙ МАНОМЕТРИЧЕСКИХ ТРУБЧАТЫХ ПРУЖИН**

*АННОТАЦИЯ.* Представлены две динамические модели манометрической трубчатой пружины, на основании которых получены два способа расчета частот собственных колебаний данных пружин. Приведены зависимости первой частоты собственных колебаний от параметра кривизны и тонкостенности, полученные в результате расчетов обеих моделей.

*SUMMARY.* Two dynamic models of manometric tubular spring are presented here, on which basis two methods of calculation spring fluctuation frequencies are acquired. The dependencies of the first fluctuation frequency on the curvature and thin-shell parameters, are presented, which were acquired as a result of calculations of both models.

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.* Собственные колебания, манометрическая трубчатая пружина, динамическая модель.

*KEY WORDS.* Natural vibrations, manometric tubular spring, dynamic model.

Манометрические приборы часто работают в условиях вибраций, при этом трубчатые пружины, которые являются основными упругими чувствительными элементами, совершают колебательное движение, что негативно сказывается на точности приборов. Поэтому при проектировании манометрических пружин большое внимание должно уделяться динамическим расчетам. Важной характеристикой виброустойчивости является частота собственных колебаний, поэтому необходимо найти оптимальную динамическую модель, на основании которой можно получить приемлемый метод расчета этого параметра.

В первой динамической модели манометрическая трубчатая пружина представлена в виде механической системы с двумя степенями свободы. За обобщенные координаты принимается относительный угол раскрытия пружины  $\varphi = \frac{\Delta y}{\gamma}$  и величина увеличения малой полуоси поперечного сечения трубки  $w_0$

(рисунок 1).

Для вывода дифференциальных уравнений движения использованы уравнения Лагранжа второго рода, которые для системы с двумя степенями свободы принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_0} \right) + \frac{\partial U}{\partial w_0} = \frac{\partial T}{\partial w_0}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы,  $U$  — потенциальная энергия.

При определении потенциальной энергии был принят приближенный закон деформации контура поперечного сечения, такой же, как и у прямой трубки.

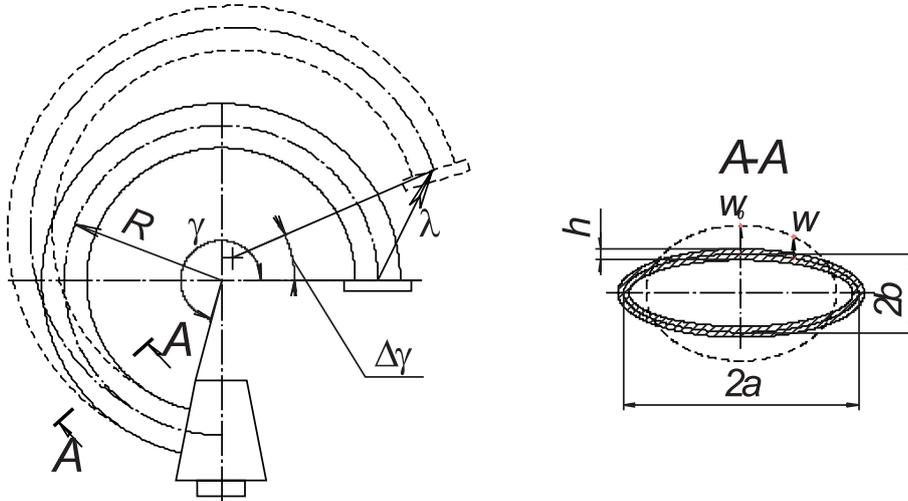


Рис. 1. Выбор обобщенных координат

Выражения для определения кинетической и потенциальной энергий получены в работе [1]. После дифференцирования получается система двух однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{w}_0 + C_{11}w_0 + C_{12}\varphi = 0 \\ a_{22}\ddot{\varphi} + C_{22}\varphi + C_{21}w_0 = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где  $a_{11}, a_{22}, C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21}$  — коэффициенты инерции и жесткости.

Частные решения этой системы можно представить в виде:

$$\varphi = F_1 \sin(kt + \beta), \quad w_0 = F_2 \sin(kt + \beta), \quad (3)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — неизвестные амплитуды колебаний, зависящие от начальных условий;  $k$  — собственная частота;  $\beta$  — начальная фаза колебаний.

После подстановки значений  $\varphi, w_0$  и их производных, получается систему, которая имеет решение отличное от нуля, если

$$\begin{cases} -a_{11}k^2 + C_{11} + C_{12}\eta = 0 \\ -a_{22}\eta \cdot k^2 + C_{22}\eta + C_{21} = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Исключая  $\eta$  из (4), получается уравнение частот:

$$-a_{22}(a_{11}k^2 - C_{11})k^2 + C_{22}(a_{11}k^2 - C_{11}) + C_{12}^2 = 0. \quad (5)$$

Обозначим  $k^2 = Q$ , тогда корни квадратного уравнения есть

$$Q_{1,2} = \frac{-(a_{22}C_{11} + a_{11}C_{22}) \pm \sqrt{(a_{22}C_{11} + a_{11}C_{22})^2 + 4a_{22}a_{11}(C_{12}^2 - C_{11}C_{22})}}{-2a_{22}a_{11}}, \quad (6)$$

откуда частоты собственных колебаний равны

$$k_{1,2} = \sqrt{Q_{1,2}}, \quad \nu_{1,2} = \frac{k_{1,2}}{2\pi}. \quad (7)$$

Вторая динамическая модель трубки Бурдона представлена в виде тонкостенного изогнутого стержня, совершающего колебания в плоскости кривизны центральной оси (рис. 2). Перемещение центра тяжести поперечного сечения с координатой  $\varphi$  разлагается на радиальную  $w$  и окружную  $u$  составляющие.

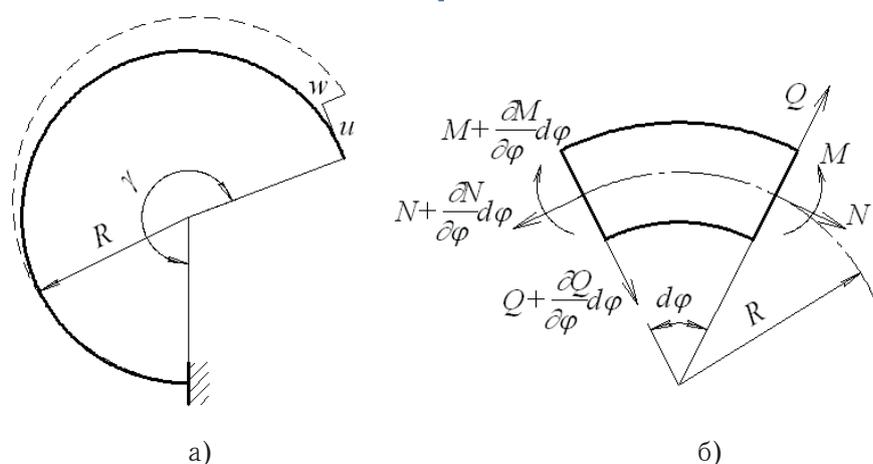


Рис. 2. Изгиб манометрической трубчатой пружины:  
а) кривой стержень; б) бесконечно малый элемент стержня

Угол поворота поперечного сечения трубки в процессе движения определяется формулой (положительный знак  $J$  соответствует повороту против часовой стрелки)

$$J = \frac{u}{R} - \frac{\partial w}{R \partial \varphi}, \quad (8)$$

где  $R$  — радиус кривизны центральной оси,  $u$  — продольное смещение элемента,  $w$  — радиальное смещение элемента.

Изменение кривизны  $\chi$  центральной оси равно производной от угла поворота  $J$  по длине дуги

$$\chi = \frac{\partial J}{R \partial \varphi} = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right). \quad (9)$$

Изгибающий момент в сечении трубки

$$M_u = -B\chi = -\frac{B}{R^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad (10)$$

где  $B = \frac{E \cdot J(\varphi) \cdot K_k(\varphi)}{(1 - \mu^2)}$  — жесткость сечения трубки на изгиб;  $E$  — модуль

упругости материала трубки;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $J(\varphi)$  — момент инерции сечения;  $K_k(\varphi)$  — коэффициент Кармана, учитывающий деформацию сечения и определенный с помощью полубезмоментной теории оболочек [2].

В соответствии с принципом Даламбера, уравнения движения элемента трубки принимают вид:

$$\begin{aligned} -\frac{N}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{M}{R} \right) &= m_i(\varphi) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial M}{\partial \varphi} &= m_i(\varphi) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}, \quad (11)$$

где  $N$  — продольная сила;  $N = D\varepsilon$ ,  $D$  — жесткость сечения на растяжение;  $D = \frac{ES(\varphi)}{1 - \mu^2}$ ;  $\varepsilon$  — удлинение продольной оси элемента  $\varepsilon = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{w}{R} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right)$ ;

$S(\varphi)$  — площадь поперечного сечения трубки;  $\frac{\partial M}{\partial \varphi} = Q$  — поперечная сила;

$m_i(\varphi)$  — масса единицы длины трубки.

Система уравнений решалась при следующих граничных условиях: в сечении жесткого закрепления пружины ( $\varphi=0$ ) касательное, нормальное перемещение и угол поворота поперечного сечения трубки равны нулю, а на противоположном конце ( $\varphi=\gamma$ ) изгибающий момент, перерезывающие, растягивающие усилия обращаются в нуль. Решение производилось методом Бубнова-Галеркина [3] и реализовано с помощью комплекса программ [4].

Сравнение результатов расчетов произведено на примере трех рядов латунных пружин постоянного сечения с соотношениями полуосей поперечного сечения равными двум, пяти и восьми. В каждом ряду пружины отличаются толщиной стенки, которая варьируется от 0,1 мм до 1,6 мм. Пружины характеризуются следующими параметрами: радиус трубки-заготовки  $r=8$  мм, радиус кривизны центральной оси  $R=50$  мм, центральный угол пружины  $\gamma=220^\circ$ . Графики зависимостей частот колебаний от параметра кривизны и тонкостенности

$\mu_0 = \sqrt{12(1 - \mu^2)} \frac{r^2}{Rh}$  при различных отношениях полуосей показаны на рисунках 3.

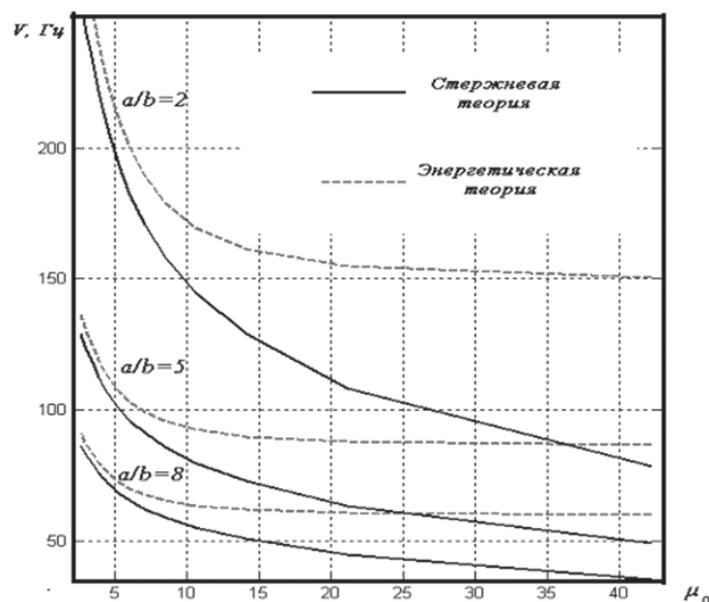


Рис. 3. Сравнение двух методов расчета

Из графиков видно, что во всем рассмотренном диапазоне трубчатых пружин значения собственной частоты колебаний, полученные по энергетической теории (первая динамическая модель) несколько выше значений, полученных по стержневой (вторая динамическая модель). Сравнение расчетных значений для одних и тех же образцов, полученных данными методами показало, что оба метода хорошо согласуются между собой при значениях параметра кривизны и тонкостенности  $\mu_0 < 8-10$ . При увеличении значений этого параметра, отклонение между частотами, полученными обоими методами, увеличивается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуба А.Ю., Смолин Н.И., Пирогов С.П. // Изв. вузов. Нефть и газ. 2007. №1. С. 77-82.
2. Аксельрад Э.Л. Гибкие оболочки. М.: Наука, 1976. 376 с.
3. Чуба А.Ю., Пирогов С.П., Дорофеев С.М. // Изв. вузов. Нефть и газ. 2007. №2. С. 70-74.
4. Свидетельство об официальной регистрации программы ЭВМ 2007612005 РФ. Программный комплекс «ПКРМТП» для расчета манометрических трубчатых пружин / А.Ю. Чуба, С.С. Самакалев, С.П. Пирогов — № 2007611194 ; заявл. 2.04.2007 ; опубл. 17.05.2007.