© С.П. ПИРОГОВ, Н.Н. УСТИНОВ
piro-gow@yandex.ru, UstinovNikNik@mail.ru

УДК 622.691.4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ МАНОМЕТРИЧЕСКОЙ ТРУБЧАТОЙ ПРУЖИНЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ПО ПЕРИМЕТРУ СЕЧЕНИЯ ТОЛЩИНОЙ СТЕНКИ

АННОТАЦИЯ. Представлена математическая модель напряженно-деформируемого состояния манометрической трубчатой пружины с переменной по периметру сечения толщиной стенки на основании полубезмоментной теории оболочек. Проверена адекватность предложенной модели путем сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными и результатами расчета энергетическим методом.

SUMMARY. A mathematical model of stress-stain state of a manometric tubular spring with the non-constant wall thickness along the perimeter is presented here based on the semi-momentless theory of shells. The adequacy of the proposed model was checked by collating the experimental results by energy method.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Манометрическая трубчатая пружина, математическая модель.

KEY WORDS. Manometric tubular spring, mathematics model.

Манометрические трубчатые пружины широко применяются в качестве упругих чувствительных элементов приборов автоматизированных систем в различных отраслях промышленности. Наряду с пружинами с постоянной толщиной стенки для улучшения метрологических характеристик предложены сечения пружин с различным законом изменения толщины стенки по периметру сечения [1].

Вопросы, связанные с расчетом пружин Бурдона с переменной толщиной стенки, получили развитие в работе [2], где на основе энергетического метода произведен расчет на прочность и жесткость пружин с плоскоовальной формой средней линии и произвольным законом изменения толщины стенки. Предложенное решение, как известно, теряет точность с увеличением кривизны пружины.

Ниже, на основании полубезмоментной теории оболочек [3] приведен расчет тонкостенных манометрических трубчатых пружин с переменной по периметру сечения толщиной стенки.

Напряженно-деформированное состояние пружины описывается дифференциальными уравнениями:

$$\left(\frac{1}{t}\psi'\right)' - \mu_0 \vartheta \cos\alpha_0 = -m\sin\alpha_0,$$

$$\left(t^3 \vartheta'\right)' + \mu_0 \psi \cos\alpha_0 = -qf_0. \qquad (1)$$

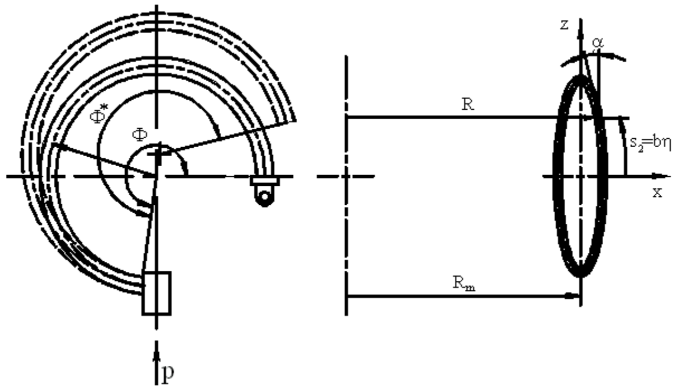

Рис. 1. Манометрическая трубчатая пружина
а) — деформация под действием давления; б) — меридиональное сечение

В этих уравнениях искомыми являются функции ψ и ϑ безразмерной координаты η:

$$\eta = s/r;\ r = \Pi/2\pi, \qquad (2)$$

где s — длина меридиана, отсчитываемого от выбранного начала координат; r — «приведенный радиус» сечения; Π — периметр поперечного сечения срединой поверхности трубки.

Функция ϑ — угол поворота в точке сечения η, то есть изменение начального угла наклона касательной $\alpha_0(\eta)$:

$$\vartheta(\eta) = \alpha_0(\eta) - \alpha(\eta). \qquad (3)$$

Функция $\psi(\eta)$, характеризующая напряжения в стержне, имеет вид:

$$\psi(\eta) = \sqrt{12(1-\nu^2)}\frac{r}{Eh_m^2}\int_0^\eta T_1(\eta)d\eta, \qquad (4)$$

где ν — коэффициент Пуассона материала трубки; E — модуль упругости материала трубки; h_m— толщина стенки пружины в точке с координатой $\eta=\pi/2$; T_1 — нормальное усилие на единицу длины поперечного сечения. Величины с индексом 0 относятся к недеформированному состоянию.

Функция $t(\eta)$ зависит от закона изменения толщины стенки и определяется следующим образом:

$$t(\eta) = h(\eta)/h_m, \qquad (5)$$

где $h(\eta)$ — толщина стенки сечения.

Параметры q, μ и m учитывают соответственно нормальное давление p, кривизну оси и ее изменение:

$$q = 12(1-\nu^2)\frac{pr^3}{Eh_m^3}, \ \mu = \sqrt{12(1-\nu^2)}\frac{r^2}{Rh_m}, \ m = \mu - \mu_0, \qquad (6)$$

где R — радиус центральной оси трубки.

Перерезывающая сила в сечении с r=1 от единичной нагрузки, представлена в (2) функцией:

$$f_0 = -\cos\alpha_0 \int_0^{\eta} \cos\alpha_0 d\eta - \sin\alpha_0 \int_{\pi/2}^{\eta} \sin\alpha_0 d\eta. \qquad (7)$$

Уравнения (1) справедливы, если материал трубки упругий и однородный, угол поворота мал сравнительно с единицей, размеры поперечного сечения малы сравнительно с R.

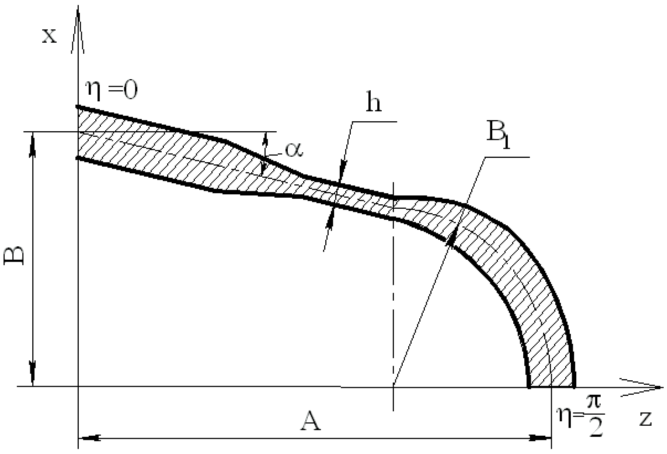

Рис. 2. Модель «универсального» сечения манометрической пружины .

В уравнениях (1) форма средней линии поперечного сечения задается посредством функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Вследствие симметрии сечения относительно осей x и z достаточно определить данные функции на участке $0 \le \eta \le \pi/2$, при этом выражая значения угла $\alpha(\eta)$ через геометрические параметры «универсального» сечения [2] получим:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 = arctg\left(\dfrac{B-B_1}{A-B_1}\right), & 0 \le \eta < \eta_1; \\ \alpha_2 = \dfrac{r(\eta-\eta_1)}{B_1}, & \eta_1 \le \eta < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad (8)$$

В выражении (8):

$$r=\frac{2}{\pi}\sqrt{A^2+2B_1^2+B^2-2B_1(A+B)+B_1},\ \eta_1=\frac{\sqrt{(B-B_1)^2-(A-B_1)^2}}{r}.$$

Для описания известных форм сечений закон изменения толщины стенки по периметру сечения представим в виде:

$$h(\eta)=\begin{cases} h_{\max} & 0\le\eta\le\eta_1\\ h_{\min}+(h_{\max}-h_{\min})(\eta_2-\eta)/(\eta_2-\eta_1) & \eta_1<\eta\le\eta_2\\ h_{\min} & \eta_2<\eta\le\eta_3,\\ h_{\min}+(h_{\max}-h_{\min})(\eta-\eta_3)/(\eta_4-\eta_3) & \eta_3<\eta\le\eta_4\\ h_{\max} & \eta_4<\eta\le\eta_5\end{cases}\tag{9}$$

где h_{max} — максимальная толщина стенки сечения; h_{min} — минимальная толщина стенки сечения; η_1, η_2, η_3, η_4 — координаты, определяющие закон изменения толщины стенки по периметру сечения (рис. 2).

Введем обозначения: $\frac{1}{t}\psi'=\varphi$, $t^3\vartheta'=u$. Тогда система уравнений (1) в нормальной форме запишется в виде:

$$\begin{cases}\varphi'=\mu_0\cos\alpha_0\vartheta-m\sin\alpha_0;\\ u'=-\mu_0\cos\alpha_0\psi-qf_0\\ \psi'=t\varphi\\ \vartheta'=\frac{1}{t^3}u\end{cases}.\tag{10}$$

Система уравнений дополнена граничными условиями:

$$\begin{cases}\psi(0)=0\\ \vartheta(0)=0\end{cases},\ \begin{cases}\psi'(\pi/2)=0\\ \vartheta(\pi/2)=0\end{cases}.\tag{11}$$

В линейном приближении искомые функции представим в виде суммы двух частей, пропорциональных соответственно параметру изменения кривизны m и параметру нормального давления q:

$$\psi=m\psi_m+q\psi_q,\ \vartheta=m\vartheta_m+q\vartheta_q.\tag{12}$$

В результате подстановки выражений (12) в систему (1), получим две системы:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{t}\psi'_m\right)'-\mu_0\vartheta_m\cos\alpha_0=-\sin\alpha_0\\ \left(t^3\vartheta'_m\right)'+\mu_0\psi_m\cos\alpha_0=0\end{cases},\ \begin{cases}\left(\frac{1}{t}\psi'_q\right)'-\mu_0\vartheta_q\cos\alpha_0=0\\ \left(t^3\vartheta'_q\right)'+\mu_0\psi_q\cos\alpha_0=-f_0\end{cases}.\tag{13}$$

Для решения полученной краевой задачи применен метод стрельбы [4], для чего составлена программа в среде *MATLAB* [5].

Для манометрической трубчатой пружины, работающей в режиме свободного хода, когда свободный конец трубки под действием нормального давления имеет возможность свободно перемещаться, система разрешающих уравнений дополняется условием равенства нулю момента в поперечном сечении трубки:

$$M = \frac{Eh_m^2 r}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \oint \psi \sin\alpha_0 d\eta = 0 . \tag{14}$$

Из выражения (12) с учетом (14) определяем относительный угол раскрытия пружины:

$$\frac{\Delta Y}{Yp} = \frac{12(1-\nu^2)}{\mu_0 E}\left(\frac{r}{h_m}\right)^3 \frac{m}{q}, \text{ где } -\frac{m}{q} = \frac{\oint \psi_q \sin\alpha_0 d\eta}{\oint \psi_m \sin\alpha_0 d\eta}. \tag{15}$$

Результаты сопоставления расчетной чувствительности с экспериментальными данными для пружин с переменной по периметру сечения толщиной стенки и результатами расчета энергетическим методом [2] представлены в таблице 1.

Таблица 1

№ образца	Большая полуось сечения A, мм	Малая полуось сечения B, мм	Максимальная толщина стенки h_{max}, мм	Минимальная толщина стенки h_{min}, мм	Радиус центральной оси пружины R, мм	Центральный угол пружины $\gamma°$	Модуль упругости материала E, Мпа	Относительный угол раскрытия $\Delta Y / pY \cdot 10^{-2}$, 1/ МПа				
								Эксперимент	Энергетический метод	Погрешность Δ, %	Расчет по формуле (21)	Погрешность Δ, %
1	9,05	1,81	1,88	1,13	55,0	216	10^5	0,292	0,263	10,0	0,260	10,9
2	9,26	1,97	1,46	0,88	48,0	242	10^5	0,518	0,512	1,2	0,490	5,4
3	9,30	1,98	1,45	0,87	46,6	243	10^5	0,499	0,524	-5,0	0,500	-0,2
4	9,33	1,76	1,88	1,31	53,0	231	10^5	0,264	0,270	-8,2	0,266	-0,75
5	9,34	2,03	1,44	1,01	53,7	233	10^5	0,469	0,439	6,4	0,482	-2,77

Как видно из таблицы, расчет манометрических пружин с переменной по периметру сечения толщиной стенки по изложенной выше методике, дает возможность оценить чувствительность пружин с достаточно высокой точностью по сравнению с энергетическим решением.

Таким образом, предложенная математическая модель с приемлемой для практики точностью позволяет оценить напряженно-деформированное состояние манометрической трубчатой пружины с переменной по периметру сечения толщиной стенки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Манометрическая трубчатая пружина: А.С. 696317 / Г.И. Тыжнов, С.П. Пирогов, В.А. Шибанов. №2690480/18-10; Заявл. 10.04.78; Опубл. 05.11.79; Бюл. № 41. 2 с.

2. Пирогов С.П. Исследование и расчет трубчатых пружин с различной формой поперечного сечения: Дисс. … канд. тех. наук: 01.02.06/ Тюменский индустриальный институт. Тюмень, 1980. 175 с.

3. Аксельрад Э.Л. Гибкие оболочки. М.: Наука, 1976. 376 с.

4. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 200 с.

5. Расчет манометрических трубчатых пружин (пружин Бурдона): №2003611920/ Устинов Н.Н., Пирогов С.П., Смолин Н.И. Заявл. 24.06.2003// Программы для ПЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем. 2004. №4. С. 76-77.