

© С.П. БАУТИН, А.Г. ОБУХОВ

SBautin@math.usurt.ru, aobukhov@tsogu.ru

УДК 519.63 + 533.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЙ В ПРИДОННОЙ ЧАСТИ ТРОПИЧЕСКОГО ЦИКЛОНА*

АННОТАЦИЯ. В работе модифицированным методом характеристик численно строятся решения системы уравнений газовой динамики в условиях действия силы Кориолиса. Рассчитанные течения описывают процесс закрутки газа под действием силы Кориолиса в придонных частях восходящих закрученных потоков, таких как тропические циклоны.

SUMMARY. In this work the solutions of gas dynamic system equations construct in numerical form by a modified method of the characteristic in condition the force of Coriolis. The calculated flows describe a process curling of a gas due to a force of Coriolis in a lower part of a tropical cyclone.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса, метод характеристик, тропический циклон.

KEY WORDS. System of equation of gas dynamics, worse of Coriolis, method of the characteristic, tropical cyclone.

К числу часто встречающихся в природе интересных и величественных явлений можно отнести восходящие закрученные потоки (ВЗП) воздуха. Примером таких потоков являются регулярно возникающие тропические циклоны. Несмотря на большое число исследователей, активно занимающихся проблемой ВЗП, к настоящему времени отсутствует достаточно убедительная теория, объясняющая причины возникновения, функционирования и естественного исчезновения таких течений и подтвержденная как экспериментально, так и адекватным математическим моделированием.

Основная идея, лежащая в основе предложенной в [1] схемы, заключается в том, что для продолжительного существования ВЗП обязательно должен быть постоянный приток внешней энергии в разгон газа и осевую его закрутку.

Единственное значительное движение, которое обладает вращательным моментом, постоянно присутствует и имеет большой запас энергии — собственное вращение планеты и сопутствующая ему сила Кориолиса (СК).

Из-за горизонтального движения воздуха в формирующейся придонной части, благодаря действию СК, возникает также и окружное движение, называемое закруткой газа. Для Северного полушария закрутка газа идет в положительном направлении, т.е. против хода часовой стрелки, и в отрицательном направлении — для Южного полушария [2]. Начальная стадия формирования ВЗП и его закрутка в соответствующем направлении подтверждены экспериментами [3].

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-01-00198.

Целью данной работы является аналитическое и численное описание течения в придонной части тропического циклона с помощью соответствующих решений системы уравнений газовой динамики (СУГД) и обоснование степени влияния СК на эти течения. Тем самым с помощью математического моделирования будет подтверждена схема функционирования ВЗП, предложенная в [1].

СУГД для изэнтропических плоских течений политропного газа при учете силы Кориолиса имеет следующий вид [1]:

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{(\gamma - 1)}{2} c \left(u_r + \frac{u}{r} \right) = 0, \\ u_t + uu_r - \frac{v^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} cc_r = av, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} = -au. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1): t – время; в плоскости переменных x, y введена полярная система координат (r, φ) и предполагается, что $\partial/\partial\varphi=0$; $c=\rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука газа; $\gamma=\text{const} > 1$ – показатель политропы газа в уравнении состояния $p=\rho^\gamma/\gamma$; u, v – радиальная и окружная составляющие вектора скорости газа соответственно; $a=2\Omega\sin\psi$ – параметр Кориолиса; Ω – модуль угловой скорости вращения Земли; ψ – широта точки O на поверхности Земли, в которой находится начало координатной плоскости xOy , касающейся поверхности Земли в точке O и вращающейся вместе с Землей. Если точка O лежит в Северном полушарии, то $0 < \psi \leq \pi/2$. Если в Южном, то $-\pi/2 \leq \psi < 0$. Если точка O лежит на экваторе, то $\psi=0$.

В системе (1) стандартным образом введены безразмерные переменные с учетом равенств: $u_{00}=r_{00}/t_{00}=c_{00}$.

В работе [1] построено стационарное решение

$$c=c^0(r), \quad u=u^0(r), \quad v=v^0(r)$$

системы (1), когда в ней положено $\partial/\partial t=0$.

Восстановление конкретной линии тока стационарного течения в виде зависимости $\varphi=\varphi(r)$ осуществляется численно при построении решения задачи

$$\text{Коши: } \frac{d\varphi}{dr} = \frac{v^0}{ru^0}; \quad \varphi(r_{in})=\varphi_0; \quad \varphi_0=\text{const}. \quad (2)$$

Приведенная в [4] теорема обеспечивает существование нестационарного течения со стоком в некоторых окрестностях как точки $(t=0, r=r_0)$, так и звуковой характеристики S^+ , в том числе и в моменты времени, близкие к моменту начала плавного стока из однородного покоящегося газа, сопровождающегося возникновением закрутки газа.

Описание спирального течения со стоком от начального момента $t=0$ до достаточно больших значений времени возможно численно. И при построении такого течения определится его выход на стационарный режим.

В работе [5] описана одна модификация известного метода характеристик [6], [7]. Система (1) имеет две звуковые характеристики C^\pm и одну контактную C^0

$$C^\pm : \frac{dr}{dt} = u \pm c; \quad C^0 : \frac{dr}{dt} = u,$$

вдоль каждой из которых вводится свое дифференцирование

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{C^\pm} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial r}, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{C^0} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r},$$

и система (1) записывается в эквивалентном виде – как система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \left. \frac{dR}{dt} \right|_{C^+} = f_1(r, c, u, v)|_{C^+}, \\ \left. \frac{dL}{dt} \right|_{C^-} = f_2(r, c, u, v)|_{C^-}, \\ \left. \frac{dv}{dt} \right|_{C^0} = f_3(r, u, v)|_{C^0}, \end{cases} \quad (3)$$

где инварианты Римана R, L задаются стандартным образом:

$$R(t, r) = u + \frac{2}{(\gamma - 1)}c, \quad L(t, r) = u - \frac{2}{(\gamma - 1)}c,$$

а правые части системы (3) имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(r, c, u, v) &= v \left(\frac{v}{r} + a \right) - \frac{cu}{r}, \\ f_2(r, c, u, v) &= v \left(\frac{v}{r} + a \right) + \frac{cu}{r}, \\ f_3(r, u, v) &= -u \left(\frac{v}{r} + a \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Определение газодинамических параметров по значениям инвариантов Римана осуществляется с помощью следующих соотношений:

$$c = \frac{(\gamma - 1)}{4}(R - L), \quad u = \frac{1}{2}(R + L). \quad (5)$$

В данной работе, как и в работе [5], система (3) решается на прямоугольной сетке и поэтому используется стандартное для разностных схем обозначение \mathbf{U}_i^n вектора значений искомых функций в точке $(t=t_n, r=r_i)$, где $t_n = n\tau, r_i = r_0 + ih$.

На рис. 1 приведены две ячейки расчетной сетки.

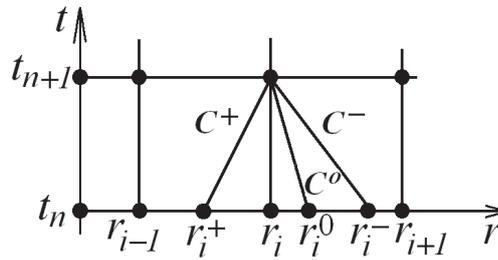


Рис. 1

Шаг сетки по пространственной переменной постоянен: $\Delta r = h$. Выбор величины шага по временной переменной $\Delta t = \tau$ определяется из неравенства

$$\tau \leq \frac{h}{|u| + c}. \tag{6}$$

Выполнение неравенства (6) гарантирует то, что все три характеристики, выходящие из точки (t_{n+1}, r_i) , пересекают прямую $t = t_n$ в пределах отрезка $[r_{i-1}, r_{i+1}]$ (рис. 1). По значениям газодинамических параметров, заданных в точках (t_n, r_{i-1}) , (t_n, r_i) , (t_n, r_{i+1}) параметры газа в точке (t_{n+1}, r_i) находятся по следующему алгоритму. Вначале вычисляются λ^+ , λ^0 и λ^- по формулам:

$$\lambda^+ = \frac{\alpha(u_i^n + c_i^n)}{1 + \alpha[(u_i^n + c_i^n) - (u_{i-1}^n + c_{i-1}^n)]},$$

$$\lambda^0 = \frac{-\alpha u_i^n}{1 + \alpha(u_{i+1}^n - u_i^n)},$$

$$\lambda^- = \frac{-\alpha(u_i^n - c_i^n)}{1 + \alpha[(u_{i+1}^n - c_{i+1}^n) - (u_i^n - c_i^n)]},$$

где $\alpha = \frac{\tau}{h}$.

С их помощью определяются значения

$$r_i^+ = r_i - \lambda^+ h, r_i^0 = r_i - \lambda^0 h, r_i^- = r_i - \lambda^- h$$

координат точек, лежащих при $t = t_n$ на отрезке $[r_{i-1}, r_{i+1}]$ (рис. 1).

Значения искомых функций в найденных точках с координатами (t_n, r_i^+) , (t_n, r_i^0) и (t_n, r_i^-) : $U(t_n, r_i^+) = U_{r_i^+}^n$; $U(t_n, r_i^0) = U_{r_i^0}^n$; $U(t_n, r_i^-) = U_{r_i^-}^n$

вычисляются с помощью линейной интерполяции по значениям U_{i-1}^n, U_i^n для

точки (t_n, r_i^+) и по значениям U_i^n, U_{i+1}^n для точек $(t_n, r_i^0), (t_n, r_i^-)$:

$$U_{r_i^+}^n = U_i^n + \lambda^+ (U_{i-1}^n - U_i^n),$$

$$U_{r_i^0}^n = U_i^n + \lambda^0 (U_{i+1}^n - U_i^n),$$

$$U_{r_i^-}^n = U_i^n + \lambda^- (U_{i+1}^n - U_i^n).$$

Таким образом, все три прямые, выходящие из точек (t_n, r_i^+) , (t_n, r_i^0) , (t_n, r_i^-) , с наклонами C^+ , C^0 - и C^- -характеристик, которые подсчитаны по значениям $U_{r_i^+}^n$, $U_{r_i^0}^n$, $U_{r_i^-}^n$ соответственно, проходят через точку (t_{n+1}, r_i) .

После этого с помощью разностной аппроксимации системы (3) находятся значения инвариантов Римана и функции v на следующем временном слое в точке (t_{n+1}, r_i) :

$$R_i^{n+1} = R_{r_i^+}^n + \tau f_1(r_i^+, U_{r_i^+}^n),$$

$$L_i^{n+1} = L_{r_i^-}^n + \tau f_2(r_i^-, U_{r_i^-}^n),$$

$$v_i^{n+1} = v_{r_i^0}^n + \tau f_3(r_i^0, U_{r_i^0}^n),$$

с помощью которых определяются

$$c_i^{n+1} = \frac{(\gamma - 1)}{4} (R_i^{n+1} - L_i^{n+1}), \quad u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (R_i^{n+1} + L_i^{n+1}).$$

Для улучшения точности расчета осуществляется пересчет значений искомых функций в точке (t_{n+1}, r_i) с переложением идеи традиционного для метода характеристик пересчета [6], [7] на данную модификацию.

Для этого сначала пересчитываются значения:

$$\tilde{\lambda}^+ = \frac{\alpha [(u_i^{n+1} + c_i^{n+1}) + (u_i^n + c_i^n)]}{2 + \alpha [(u_i^n + c_i^n) - (u_{i-1}^n + c_{i-1}^n)]},$$

$$\tilde{\lambda}^0 = \frac{-\alpha (u_i^{n+1} + u_i^n)}{2 + \alpha (u_{i+1}^n - u_i^n)},$$

$$\tilde{\lambda}^- = \frac{-\alpha [(u_i^{n+1} - c_i^{n+1}) + (u_i^n - c_i^n)]}{2 + \alpha [(u_{i+1}^n - c_{i+1}^n) - (u_i^n - c_i^n)]}.$$

По этим величинам находятся следующие уточненные значения:

$$\tilde{r}_i^+ = r_i - \tilde{\lambda}^+ h, \quad \tilde{r}_i^0 = r_i + \tilde{\lambda}^0 h, \quad \tilde{r}_i^- = r_i + \tilde{\lambda}^- h,$$

а также в уточненных точках (t_n, \tilde{r}_i^+) , (t_n, \tilde{r}_i^0) , (t_n, \tilde{r}_i^-) вычисляются уточненные значения газодинамических параметров:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{r_i^+}^n = \mathbf{U}_i^n + \tilde{\lambda}^+ (\mathbf{U}_{i-1}^n - \mathbf{U}_i^n),$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{r_i^0}^n = \mathbf{U}_i^n + \tilde{\lambda}^0 (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n),$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{r_i^-}^n = \mathbf{U}_i^n + \tilde{\lambda}^- (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n).$$

Далее определяются пересчитанные значения инвариантов Римана и функции v в точке (t_{n+1}, r_i) по формулам

$$\tilde{R}_i^{n+1} = \tilde{R}_{\tilde{r}_i^+}^n + \frac{\tau}{2} \left[f_1(\tilde{r}_i^+, \tilde{\mathbf{U}}_{\tilde{r}_i^+}^n) + f_1(r_i, \mathbf{U}_i^{n+1}) \right],$$

$$\tilde{L}_i^{n+1} = \tilde{L}_{\tilde{r}_i^-}^n + \frac{\tau}{2} \left[f_2(\tilde{r}_i^-, \tilde{\mathbf{U}}_{\tilde{r}_i^-}^n) + f_2(r_i, \mathbf{U}_i^{n+1}) \right],$$

$$\tilde{v}_i^{n+1} = \tilde{v}_{\tilde{r}_i^0}^n + \frac{\tau}{2} \left[f_3(\tilde{r}_i^0, \tilde{\mathbf{U}}_{\tilde{r}_i^0}^n) + f_3(r_i, \mathbf{U}_i^{n+1}) \right].$$

Затем определяются

$$\tilde{c}_i^{n+1} = \frac{(\gamma - 1)}{4} (\tilde{R}_i^{n+1} - \tilde{L}_i^{n+1}), \quad \tilde{u}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\tilde{R}_i^{n+1} + \tilde{L}_i^{n+1})$$

и производится переобозначение: $\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} \rightarrow \mathbf{U}_i^{n+1}$. Тем самым расчет значений газодинамических параметров в точке (t_{n+1}, r_i) заканчивается.

Расчет параметров газа на левой границе расчетной области при $r=r_0$ (рис. 2) выполняется стандартным для метода характеристик способом. Значение u_0^{n+1} задано из начального условия. Вдоль C^0 -характеристики из точки $(t = t_n, r = r_0^0)$ переносится значение функции $v(t, r)$ и тем самым определяется значение v_0^{n+1} . Вдоль C^- -характеристики из точки $(t = t_n, r = r_0^-)$ переносится значение инварианта $L(t, r)$ и находится значение L_0^{n+1} . С использованием формулы (5) сначала по заданным u_0^{n+1} и L_0^{n+1} определяется значение R_0^{n+1} , а затем значение c_0^{n+1} . Для окончательного определения \mathbf{U}_0^{n+1} также осуществляется соответствующий пересчет.

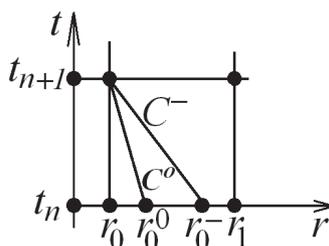


Рис. 2

В работе [8] приведены данные статистической обработки показателей интенсивности тропических циклонов, и в первую очередь по скоростям движения в них воздушных масс.

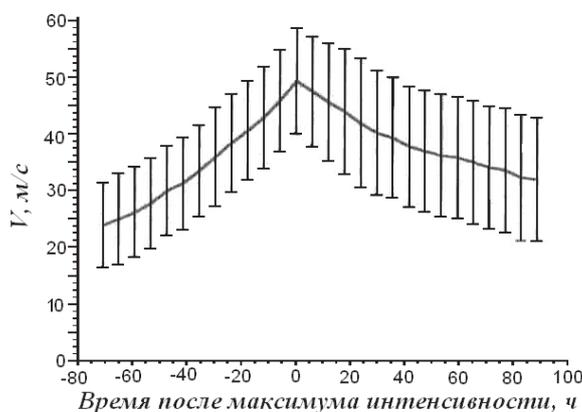


Рис. 3

На рис. 3, взятом из работы [8], приведены усредненные значения скорости ветра в тропическом циклоне. Числовые показатели на оси абсцисс связаны с такими статистическими выводами: увеличение скорости ветра в циклоне до максимального значения происходит в среднем за 72 ч., т.е. за трое суток; после достижения этого максимума среднее время затухания циклона составляет 96 ч., т.е. четверо суток. Следовательно, жизненный цикл среднестатистического циклона – семь суток. Некоторые необходимые для расчетов параметры тропического циклона приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
c_{00}	333 м/с	1
r_{00}	73000 м	1
$t_{00} = r_{00} / c_{00}$	219,219 с	1
Ω	0.0000727 с ⁻¹	0,01593
$\sin\psi$	0,5	0,5
r_{in}	73000 м	1

Окончание табл. 1

r_0	6570 м	0,09
$c(r_{in})$	333 м/с	1
$c(r_0)$	322,2 м/с	0,99764
$u(r_{in})$	-0,41292 м/с	-0,00124
$u(r_0)$	-7,488 м/с	-0,022487
$v(r_{in})$	0 м/с	0
$v(r_0)$	50.63 м/с	0,15204
h	73 м	0,001
τ	0,1096 с	0,0005

В начальные моменты времени течения газа вблизи радиуса стока r_0 наблюдается резкое уменьшение скорости звука. Эта немонотонность постепенно смещается в сторону увеличения радиуса и приблизительно за 15 мин. достигает радиуса притока r_{in} . В результате в этой точке образуется скачок скорости звука, который с течением времени уменьшается и, в конце концов, исчезает. К моменту времени 24,4 ч. газодинамические параметры приняли стационарные значения и больше не изменялись. Это подтверждается контрольным расчетом до 600 тыс. шага по времени.

Таким образом, в работе модифицированным методом характеристик численно построены решения системы уравнений газовой динамики в условиях действия силы Кориолиса. Расчеты выявили времена, за которые под действием силы Кориолиса в указанных течениях возникают свои характерные скорости движения воздушных масс. Полученные числовые характеристики согласуются с имеющимися данными наблюдений за циклонами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1983. Т. 2. 640 с.
3. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. М.: Физматлит, 2011. 344 с.
4. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Задача о плавном стоке газа в переменных t, φ, z при учете сил тяжести и Кориолиса // Проблемы прикладной математики, механики и информатики: сб. науч. тр. Екатеринбург: УрГУПС, 2011. № 77(160). С. 6–18.
5. Баутин С.П., Рошупкин А.В. Аналитическое и численное построение решений системы уравнений газовой динамики, имеющих спиральный характер // Вычисл. технологии. 2011. Т. 16. № 1. С. 18-29.
6. Жуков А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 58. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 151 с.
7. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 529 с.
8. Tatom, F.B., Witton, S.J. The transfer of energy from tornado into the ground // Seismological Research Letter. 2001. V. 72. № 1. P. 12-21.