

© Д.Е. ИГОШИН

timms@tmn.ru

УДК 536.37

МОДЕЛИРОВАНИЕ СУШКИ ТОНКОГО СЛОЯ ВЛАЖНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

АННОТАЦИЯ. Рассмотрен процесс нагрева пористой среды, содержащей жидкость и ограниченной с одной стороны проницаемой, а с другой — непроницаемой для потоков массы и тепла границами. Представлена система уравнений, описывающих тепло- и массоперенос при сушке тонкого слоя пористой среды. Анализ численных решений показал, что время сушки тонкого слоя, как правило, меньше, чем время образования сухой зоны такого же размера в неограниченной среде. Однако эта зависимость может нарушаться в двух случаях: если относительная массовая концентрация пара на внешней границе близка к 1, то во влажной зоне со временем устанавливается высокая температура, что ослабляет подвод тепла снаружи; если исходная температура среды близка к температуре кипения воды, то быстро прекращается подвод тепла из глубины.

SUMMARY. The process of heating a porous medium which contains liquid and is limited by walls permeable to mass and heat flows on one side and impermeable on the other, is considered. The system of equations describing the heat and mass transfer during thin layer drying of a porous medium is introduced. The numerical solutions showed that drying time for a thin layer is usually less than the time of formation of a dry zone of the same size in an unbounded medium. However, there are two cases when this dependence doesn't work: if the relative mass concentration of vapor at the outer wall is close to 1, a high temperature is set in due course in the wet zone reducing the heat input from the outside; if the initial temperature of a medium is close to the steam point, the heat input from the depths is promptly cut off.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Пористая среда, влага, сушка, лента.

KEY WORDS. Porous medium, moisture, drying, ribbon.

Во многих технологических процессах широко распространена сушка ленточных пористых материалов, таких как бумага, ткань, каучук. В связи с этим возникает необходимость учитывать влияние границ на динамику температурных и концентрационных полей. В работе [1] рассмотрены процессы высокотемпературной сушки капиллярно-пористых материалов, сопровождающиеся углублением зоны испарения при сушке. Объективная оценка адекватности описания внешнего переноса с использованием известных критериальных зависимостей приводит к значению допустимой погрешности -20% [2]. С учетом [3] представляется вполне оправданным не предъявлять более жесткие требования к строгости математического описания внутреннего переноса, а упростить

задачу. В [4] показано, что активизация гидродинамических режимов — один из путей повышения эффективности процессов сушки. В то же время необходимо отметить, что полученные в [5] автомодельные решения могут служить для оценки полученных приближенных и численных решений.

Динамика тепломассопереноса. Рассмотрим случай нагрева пористой среды, содержащей жидкость и ограниченной с одной стороны проницаемой, а с другой — непроницаемой для потоков массы и тепла границами (рис. 1). Будем считать справедливыми допущения: процесс однотемпературный, т.е. температуры пористой среды и насыщающего флюида в каждой точке совпадают, скелет пористой среды и жидкость несжимаемы и неподвижны, пористость постоянна, сушка происходит за счет диффузии пара, а теплоперенос — за счет теплопроводности по жидкости и скелету, давление парогазовой смеси однородно и равно атмосферному. По мере высыхания материала со стороны внешней границы образуется сухая зона, лишенная воды в жидком виде.

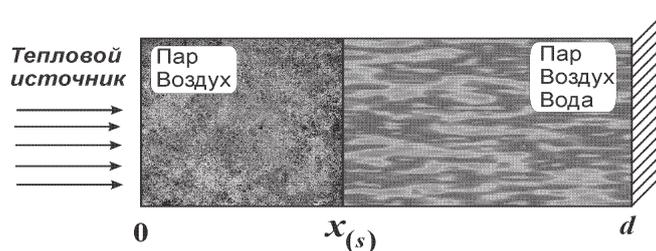


Рис. 1. Геометрия задачи

Автомодельные решения, построенные в [1], применяются для случаев, когда пористая среда имеет бесконечную протяженность или для времен $t < d^2 / 4\kappa$, где d — характерные размеры пористой среды, κ — коэффициент теплопроводности, т.е. пока на процесс распространения тепла не начнет оказывать влияние дальняя граница среды. На практике все материалы, подвергаемые сушке, имеют конечную длину. В связи с этим возникает необходимость учитывать ограниченность размеров тел и влияние их границ на динамику температурных и концентрационных полей. В то же время необходимо отметить, что полученные выше автомодельные решения могут служить для оценки полученных приближенных и численных решений.

Процесс тепломассопереноса будем описывать в рамках механики сплошных сред [6] системой уравнений из [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial x^2}, \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$(0 < x < x_{(s)})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} &= \frac{(1-S_1)}{\rho_1} D \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial x^2}, \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + mL\rho_1 \frac{\partial S_1}{\partial t}, \quad (x_{(s)} < x < \infty) \\ \rho_v &= \frac{\mu_v p_*}{RT} \exp\left(-\frac{T_*}{T}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Условия баланса массы и тепла на границе раздела сухой и влажной зон:

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial x} \right)_{(s)}^- - (1-S_{1(s)}) D \frac{\rho_v}{T} \left(\frac{T_*}{T} - 1 \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(s)}^+ &= \rho_1 S_{1(s)} \dot{x}_{(s)}, \\ \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(s)}^+ - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(s)}^- &= mL\rho_1 S_{1(s)} \dot{x}_{(s)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные и граничные условия представим в виде

$$\begin{aligned} T &= T_0, \quad S_1 = S_{10} \quad (t=0), \\ T &= T_e, \quad \rho_v = \rho_{ve} \quad (x=0), \\ \frac{dT}{dx} &= 0 \quad (x=d). \end{aligned} \quad (4)$$

Поставленная краевая задача относится к классу нелинейных краевых задач математической физики. Поскольку данная задача определена в областях с неизвестной подвижной границей, будем использовать метод ловли фронта в узел сетки [7], так как он позволяет аккуратно следить за перемещениями искомой границы. Основная идея данного метода заключается в том, что до момента, когда температурное возмущение достигнет правой границы, распределения влагосодержания и температуры аппроксимируются автомодельным решением. После этого очередной шаг временной сетки вычисляется в ходе решения поставленной задачи совместно с равновесными значениями влагосодержания и температуры.

Численная реализация. Приступим к описанию разностной схемы. На отрезке $[0, d]$, где $d = x_{(s)}(t_*)$, t_* — конечный момент времени, строим равномерную пространственную сетку, состоящую из узлов с шагом h так, чтобы точка $x_{(s)}(0)$ совпадала с одним из узлов:

$$x_j = jh, \quad j = \overline{0, n}, \quad x_0 = 0, \quad x_n = d.$$

На сегменте $[0, t_*]$ строится неравномерная сетка

$$t_i = t_{i-1} + \tau_i, \quad i = \overline{1, i_0}, \quad t_{i_0} = t_*, \quad \tau_i > 0.$$

Шаг сетки по времени τ_i выбирается таким образом, чтобы за каждый шаг по времени фронт фазового перехода перемещался по координате x ровно на один шаг, т.е. $x_{(s)}(t_i) - x_{(s)}(t_{i-1}) = h$.

Уравнения (1) и (2) запишем в виде конечно-разностных соотношений [8].

Для $j = \overline{1, i-1}$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_j - \hat{\rho}_j}{\tau_i} &= D \frac{\rho_{j+1} - 2\rho_j + \rho_{j-1}}{h^2}, \\ \frac{T_j - \hat{T}_j}{\tau_i} &= \kappa \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{h^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

для $j = \overline{i+1, n-1}$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{S_j - \hat{S}_j}{\tau_i} &= \frac{D}{h^2} \left[\left(1 - \frac{\hat{S}_{j+1} + \hat{S}_j}{2} \right) (\hat{\rho}_{j+1} - \hat{\rho}_j) - \left(1 - \frac{\hat{S}_j + \hat{S}_{j-1}}{2} \right) (\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_{j-1}) \right], \\ \frac{T_j - \hat{T}_j}{\tau_i} &= \kappa \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{h^2} + \frac{mL\rho_1}{\rho c} \frac{\Delta \hat{S}_j}{\tau_i}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и далее символ « $\hat{}$ » показывает значение величины на предыдущем временном слое. Полагаем, что $\Delta S = S_j - \hat{S}_j$. Начально-граничные условия в дискретной форме примут вид:

$$\begin{aligned} T_j^0 &= T_0, \quad S_j^0 = S_0, \quad (j = \overline{0, n}), \\ T_j^0 &= T_0, \quad S_j^0 = S_0, \quad (j = \overline{0, n}), \\ T_j^0 &= T_0, \quad S_j^0 = S_0, \quad (j = \overline{0, n}). \end{aligned} \quad (7)$$

Система (3) примет вид:

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial x} \right)_i^- - (1 - S_i) D \left(\frac{d\rho_v}{dT} \right)_i^+ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^+ &= \rho_1 S_i \dot{x}_i, \\ ((1 - m)\lambda_m + m\lambda_1 S_i) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^+ - (1 - m)\lambda_m \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^- &= mL\rho_1 S_i \dot{x}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Решая ее относительно S_i и $(\partial T / \partial x)_i^+$, получим:

$$\begin{aligned} a S_i^2 + b S_i + c &= 0, \quad a = \frac{DL}{\lambda_l} \left(\frac{d\rho_v}{dT} \right)_i^+ - 1, \\ b &= \frac{D}{\rho_l \dot{x}_i} \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial x} \right)_i^- - \frac{(1 - m)\lambda_m}{m\lambda_l} + \left(\frac{D}{\rho_l \dot{x}_i} \frac{(1 - m)\lambda_m}{m\lambda_l} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^- - \frac{DL}{\lambda_l} \right) \left(\frac{d\rho_v}{dT} \right)_i^+, \\ c &= \frac{D}{\rho_l \dot{x}_i} \frac{(1 - m)\lambda_m}{m\lambda_l} \left(\left(\frac{\partial \rho_v}{\partial x} \right)_i^- - \left(\frac{d\rho_v}{dT} \right)_i^+ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^- \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^+ = \frac{mL\rho_l \dot{x}_i S_i + (1-m)\lambda_m \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^-}{(1-m)\lambda_m + m\lambda_l S_i}.$$

Производные, входящие в (9), в конечно-разностном представлении имеют вид

$$\left(\frac{\partial \rho_v}{\partial x}\right)_i^- \approx \frac{\hat{\rho}_{j-1} - \hat{\rho}_{j-2}}{h}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^- \approx \frac{\hat{T}_{j-1} - \hat{T}_{j-2}}{h}, \quad \dot{x}_i \approx \frac{h}{\tau_i}. \quad (10)$$

Реализацию построенной разностной схемы (5)—(7), (9), (10), представляющую собой систему нелинейных алгебраических уравнений, на каждом временном слое целесообразно решать с помощью метода простых итераций, суть которого заключается в следующем.

Задаем счетчику итераций значение $s=0$, а также значения $T_j^s = T_j$, $S_j^s = S_j$, $\rho_j^s = \rho_j$ ($j = \overline{0, n}$) и временного шага $\tau_0 = (dh) / (2\kappa_{(s)}^{\xi} \xi_{(\infty)})$ из автомодельного решения. Увеличиваем значение счетчика итераций на единицу, решаем систему (9) относительно S_j^s и $(\partial T / \partial x)_i^s$, затем находим новое приближение T_j^{s+1} с учетом начальных и граничных условий (7). При этом систему уравнений (5) и (6) можно записать в виде:

$$T_{j+1}^{s+1} - \left(2 + \frac{\rho_r c_r h^2}{\lambda_r \tau_i}\right) T_j^{s+1} + T_{j-1}^{s+1} = -\frac{\rho_r c_r h^2}{\lambda_r \tau_i} T_j^s \quad (11)$$

$$\rho_{j+1}^{s+1} - \left(2 + \frac{h^2}{D\tau_i}\right) \rho_j^{s+1} + \rho_{j-1}^{s+1} = -\frac{h^2}{D\tau_i} \rho_j^s \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T_{j+1}^{s+1} - \left(2 + \frac{(1-m)\rho_r c_r + m\rho_l c_l S_j^s h^2}{(1-m)\lambda_r + m\lambda_l S_j^s \tau_i}\right) T_j^{s+1} + T_{j-1}^{s+1} = \\ = -\frac{(1-m)\rho_r c_r + m\rho_l c_l S_j^s h^2}{(1-m)\lambda_r + m\lambda_l S_j^s \tau_i} \left(T_j^s + \frac{mL\rho_l \Delta S_j^s}{\rho c \tau_i}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$S_j = \hat{S}_j + \frac{\tau_i D}{\rho_l h^2} \left[\left(1 - \frac{\hat{S}_{j+1} + \hat{S}_j}{2}\right) (\hat{\rho}_{j+1} - \hat{\rho}_j) - \left(1 - \frac{\hat{S}_j + \hat{S}_{j-1}}{2}\right) (\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_{j-1}) \right] \quad (14)$$

Уравнения (11)—(13) решаются неявно, а (14) — явно. После того, как найдено распределение температуры (13), значения ρ_j^{s+1} определяем по следующей формуле:

$$\rho_j^{s+1} = \frac{\mu_v P_*}{RT_j^{s+1}} \exp\left(-\frac{T_*}{T_j^{s+1}}\right). \quad (15)$$

Очередной временной шаг определим как среднее геометрическое из условий на подвижной границе (8)

$$\tau_i^{s+1} = \sqrt{\tau_1 \tau_2}, \quad \tau_1 = \frac{h^2 \rho_1 S_i}{D[(\rho_{i-1}^s - \rho_{i-2}^s) - (1 - S_i)(\rho_{i+1}^{s+1} - \rho_i^{s+1})]} \quad (16)$$

$$\tau_2 = \frac{mh^2 \rho_1 S_i}{((1 - m)\lambda_r + m\lambda_1 S_i)(T_{i+1}^{s+1} - T_i^{s+1}) - (1 - m)\lambda_r (T_{i-1}^s - T_{i-2}^s)}$$

Повторяем указанные действия до достижения заданной точности по давлению и по температуре, после чего переходим на следующий временной шаг.

Анализ решений. На рис. 2 приведены профили температуры (a), объемного влагосодержания (b), сравнение положения координаты подвижной границы $x_{(s)}$ (c) и среднего влагосодержания по материалу S_{INT} (d) при следующих внешних параметрах, определяющих исходное состояние пористой среды: $T_e = 160^\circ\text{C}$, $k_{ve} = 0$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $S_{l0} = 0.5$, полутолщина слоя $d = 5\text{ мм}$. Остальные параметры выбирались по аналогии с [5] из [9, 10]. Решение, полученное для автомодельной задачи, показано пунктирной линией, задачи в конечном слое — сплошной линией. Видно, что распределение температур во влажной зоне для конечного слоя становится со временем практически однородным и превышает значение температуры подвижной границы в случае автомодельной задачи, что связано с быстрым прогревом ограниченной зоны. Это приводит к выравниванию плотности пара в глубине материала и ослаблению диффузии. Поэтому максимум влагосодержания на границе влажной зоны имеет меньшее значение по сравнению с автомодельным решением.

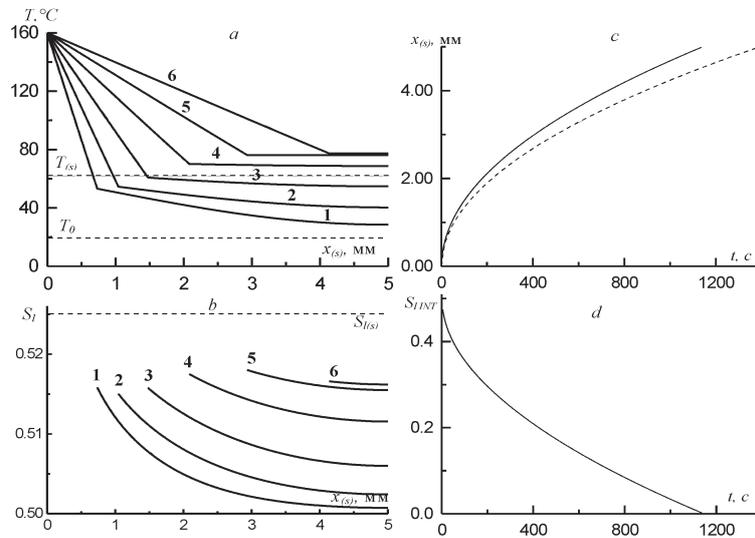


Рис. 2. Профили температуры (a), объемного влагосодержания (b) в различные моменты времени, соответствующие линиям 1 — 25с, 2 — 50с, 3 — 100с, 4 — 200с, 5 — 400с, 6 — 800с; зависимость координаты подвижной границы $x_{(s)}$ (c) и среднего влагосодержания в слое S_{INT} (d) от времени для случая $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $S_{l0} = 0.5$, $T_e = 160^\circ\text{C}$, $k_{ve} = 0$ (сухой пар). Штриховая линия соответствует автомодельному решению.

На рис. 2 с видно, что время сушки материала в конечном слое существенно меньше (порядка 20%), чем время образования сухой зоны такого же размера в полубесконечном, что связано с отсутствием оттока тепла вглубь материала. Выравнивание температур во влажной зоне происходит за время порядка 200с, а прогрев всей влажной зоны в целом — за 400с. Далее все тепло, подводимое к подвижной границе, идет на испарение воды при установившейся температуре около 77°C. Транспорт пара во влажной зоне к этому времени заканчивается. Изменение среднего влагосодержания со временем приведено на рис. 2 d, откуда видно, что оно снижается все более медленными темпами. Это свидетельствует об уменьшении интенсивности процесса сушки со временем.

Интегрально множество решений представлено на рис. 3 в виде зависимости времени сушки от начально-граничных условий. При изменении внешней температуры T_e (рис. 3 a) в интервале 30 ÷ 160°C время сушки материала в 1.2-1.3 раза меньше, чем время образования сухой зоны таких же размеров в автомоделной постановке, что связано с меньшими затратами тепла на нагрев материала.

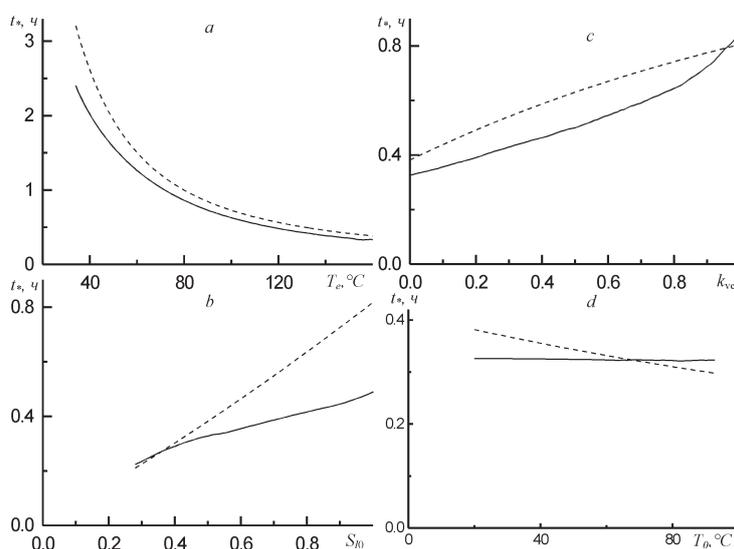


Рис. 3. Зависимость времени сушки t^* от внешней температуры T_e (a), от исходного влагосодержания S_{i0} (b); от концентрации пара k_{ve} (c) на внешней границе ($x=0$), от исходной температуры T_0 (d). При этом постоянные параметры принимают следующие значения: $T_0=20^\circ\text{C}$, $T_e=160^\circ\text{C}$, $k_{ve}=0$, $S_{i0}=0.5$. Автомоделное решение показано пунктиром.

Из рис. 3.b видно, что с увеличением влагосодержания время сушки растет, причем, различие между решением в конечном слое и автомоделным становится более существенным. Связано это с тем, что доля тепла, расходуемая на прогрев среды, растет с исходным влагосодержанием. Следует отметить, что с ростом исходного влагосодержания уменьшается “живая” пористость во влажной зоне, в связи с чем фазовые переходы в ней практически прекращаются,

реализуется фронтальная схема испарения на подвижной границе. С увеличением влажности пара на внешней границе (рис. 3 *c*) время сушки слоя при $k_{ve} \approx 1$ становится больше, чем в автотельной постановке. Из-за уменьшения теплового потока извне, который определяется градиентом температуры в сухой зоне. На рис. 3 *d* представлена аналогичная зависимость от исходной температуры T_0 . Из графиков видно, что время сушки материала конечной толщины и температуры в глубине него к моменту высыхания слабо зависит от исходной температуры. Это вызвано противоположным влиянием двух факторов: увеличение исходной температуры T_0 с одной стороны ведет к большему теплосохранению слоя, а с другой — к меньшему градиенту температуры в сухой зоне, который определяет интенсивность теплопереноса снаружи.

Выводы. Установлено, что время сушки тонкого слоя, как правило, меньше, чем время образования сухой зоны такого же размера в неограниченной среде, т.к. тепло, подводимое с внешней границы, в большей степени идет на испарение, в меньшей — на прогрев материала. Эта закономерность нарушается для двух случаев, если: 1) концентрация пара на внешней границе близка к 1, то во влажной зоне со временем устанавливается высокая температура, что ослабляет тепловой поток снаружи; 2) исходная температура среды близка к температуре кипения воды, то быстро прекращается подвод тепла из глубины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лыков А. В. Теория сушки. М.: Энергия, 1968. 471 с.
2. Харин В. М., Агафонов Г. В., Горяинов А. А. Внутренний влаго- и теплоперенос в капиллярнопористых телах // ТОХТ, 2000. Т. 34, № 5. С. 520-525.
3. Харин В. М., Агафонов Г. В. Внешний влаго- и теплообмен капиллярнопористого тела с газопаровой средой. // ТОХТ, 1999. Т. 33, № 2. С. 144.
4. Сажин Б. С., Сажин В. Б., Отрубянников Е. В., Кочетов Л. М. Сушка в активных гидродинамических режимах // ТОХТ, 2008. Т.42, №6, С. 638-653.
5. Ильясов У.Р., Игошин Д.Е. Математическое моделирование сушки влажного пористого материала в диффузионном приближении // Теплофизика и аэромеханика, 2008. Т. 15, №4. С. 689-697.
6. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1, 2.
7. Васильев В. И., Попов В. В., Тимофеева Т. С. Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. Новосибирск, 2000. 127 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В., Численные методы: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 432 с.
9. Бабенко В. Е., Бувевич Ю. А., Шепчук Н. М. Квазистационарный режим сушки сферической частицы // ТОХТ. 1975, № 2. С. 247-277.
10. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.

REFERENCES

1. Lykov, A.V. *Teorija sushki* [The Theory of Drying]. M.: Energia, 1968. 471 p. (in Russian).
2. Harin, V.M., Agafonov, G.V., Gorjainov, A.A. Internal Moisture- and Heat Transfer in Capillary-Porous Bodies. *Teoreticheskie osnovy himicheskoy tehnologii — Theoretical basics of chemical engineering*, 2000. Vol. 34. № 5. Pp. 520-525. (in Russian).
3. Harin, V.M., Agafonov, G.V. External Moisture- and Heat Exchange of the Capillary-Porous Body with steam-and-gas environment. *Teoreticheskie osnovy himicheskoy tehnologii — Theoretical basics of chemical engineering*, 1999. Vol. 33. № 2. P. 144. (in Russian).

4. Sazhin, B. S., Sazhin, V. B., Otrubjannikov, E. V., Kochetov, L. M. Drying Process in Active Hydro-Dynamic Modes. *Teoreticheskie osnovy himicheskoy tehnologii — Theoretical basics of chemical engineering*, 2008. Vol. 42. № 6. Pp. 638-653. (in Russian).

5. Il'jasov, U.R., Igoshin, D.E. Mathematical Simulation of the Process of Drying of the Wet Material in Diffusive Approximation. *Teplofizika i aeromehanika — Thermophysics and Aeromechanics*, 2008 Vol. 15, № 4. Pp. 689-697. (in Russian).

6. Nigmatulin, R.I. *Dinamika mnogofaznyh sred* [Dynamics of Multiphase Media]. M.: Nauka. 1987. Vol. 1, 2. (in Russian).

7. Vasil'ev, V.I., Popov, V.V., Timofeeva, T.S. *Vychislitel'nye metody v razrabotke mestorozhdenij nefti i gaza* [Computational Methods in oil and gas field development]. Novosibirsk, 2000. 127 p. (in Russian).

8. Samarskij, A.A., Gulin, A.V. *Chislennyye metody: Uchebnoe posobie dlja vuzov* [Numerical Methods: Textbook for University Students]. M.: Nauka, 1989. 432 p. (in Russian).

9. Babenko, V.E., Buevich, Ju.A., Shepchuk, N.M. Quasi-Stationary Mode of Spherical Particle Drying. *Teoreticheskie osnovy himicheskoy tehnologii — Theoretical basics of chemical engineering*, 1975. № 2. Pp. 247-277. (in Russian).

10. Vargaftik, N.B. *Spravochnik po teplofizicheskim svojstvam gazov i zhidkostej* [Reference book on thermophysical properties of gases and fluids]. M.: Nauka, 1972. 720 p. (in Russian).