

© А.А. ГУБАЙДУЛЛИН, А.С. ГУБКИН

timms@tmn.ru, alexshstil@gmail.com

УДК 532.5; 531.39

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПУЗЫРЬКОВОГО КЛАСТЕРА\***

*АННОТАЦИЯ. Поведение в волнах сжатия отдельного пузырька в коллективе пузырьков может отличаться от поведения одиночного пузырька в безграничной жидкости за счет коллективного гидродинамического взаимодействия. Приведена математическая модель, описывающая динамику системы пузырьков изменяющихся радиусов в безграничной жидкости с учетом ее сжимаемости и вязкости, а также учитывающая гидродинамическое взаимодействие между пузырьками. Теплообмен газовых пузырьков с жидкостью учтен в рамках двухтемпературной схемы. Приведено выражение для потока тепла к единице поверхности пузырька, позволяющее описывать теплообмен газовых пузырьков с жидкостью в достаточно широком диапазоне значений давлений и температур жидкости. Выполнено численное моделирование нелинейной динамики пузырьков кластеров различных конфигураций при воздействии на них волны сжатия. Исследовано поведение в волнах сжатия отдельного пузырька в коллективе пузырьков. Показано, что в определенных условиях для некоторых пузырьков достигаются значительные степени сжатия и, как следствие, высокие давления и температуры. На примере кластера из трех вложенных додекаэдров линейного кластера показано, что конфигурация кластера может оказывать сильное влияние на его динамику.*

*SUMMARY. The behavior of a single bubble in the compression waves in the group of bubbles may differ from the behavior of a single bubble in the infinite liquid due to the collective hydrodynamic interaction. The mathematical model describing the dynamics of the system of changing radii bubbles in the infinite fluid with its compressibility and viscosity, as well as taking into account the hydrodynamic interaction between bubbles is given. Heat exchange of gas bubbles with liquid is considered within a two-temperature scheme. The expression for the heat flux per unit surface of the bubble which allows to describe a heat exchange of the gas bubbles with liquid in a wide range of pressures and temperatures of the liquid is presented. A numeric simulation of the nonlinear dynamics of various configurations of bubble clusters when subjected to pressure waves is done. The behavior of the single bubble into the group of bubbles under effect of compression waves is studied. It is shown that under certain conditions some bubbles need significant degree of compression, as a consequence, there are high pressures and temperatures. The example of clusters with three nested dodecahedrons of linear cluster shows that the cluster configuration can have a strong influence on its dynamics.*

\* Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (Грант НШ-834.2012.1).

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Пузырьковый кластер, волны сжатия, модель динамики системы пузырей, теплообмен пузырька с жидкостью.

**KEY WORDS.** Bubble cluster, compression waves, model of bubble system dynamics, heat exchange of a bubble with liquid.

Поведение в волнах сжатия отдельного пузырька в коллективе пузырьков может отличаться от поведения одиночного пузырька в безграничной жидкости за счет коллективного гидродинамического взаимодействия. Существуют различные подходы и модели, учитывающие указанное взаимодействие пузырьков в кластере [1-5]. Чем меньше расстояние между пузырьками по сравнению с их размерами, тем точнее нужно учитывать гидродинамическое их взаимодействие. Например, модели [2-4] имеют, соответственно, 2-й и 3-й порядок точности, а модель с произвольным порядком точности в настоящее время отсутствует.

В работах [6, 7] приведены результаты экспериментов, в которых зарегистрировано производство нейтронов и ядер трития при акустическом воздействии на кластеры пузырьков. При этом замечено, что появление нейтронной эмиссии зависит от формы кластера.

Целью данной работы является компьютерное моделирование динамики пузырькового кластера в зависимости от его конфигурации.

**Постановка задачи.** Рассмотрим пузырьковый кластер, состоящий из  $N$ -газовых пузырьков, как компактное образование в достаточно большом объеме жидкости [1-4, 8, 9]. Очевидно, что в достаточно плотном кластере гидродинамическое взаимодействие может приводить к сильной деформации поверхности пузырьков, трудно поддающейся теоретическому учету. Поэтому будем предполагать кластер достаточно разреженным, чтобы пузырьки сохраняли свою сферическую форму.

При моделировании динамики пузырькового кластера используем следующие допущения:

*Жидкость несжимаемая  $\rho_l = \text{const}$ .*

*Течение жидкости потенциальное.*

*Кластер разреженный.*

*Температура жидкости постоянна в силу большой теплоемкости жидкости по сравнению с газом  $T_l = \text{const}$ .*

*Газ в пузырьках совершенный с показателем адиабаты  $\gamma$ .*

*Давление газа в пузырьках однородное.*

Систему уравнений динамики кластера составим из уравнений движения пузырьков в жидкости с учетом их гидродинамического взаимодействия [4] и дополнительно учтем теплообмен пузырьков с окружающей жидкостью, сохранив при этом обозначения [4].

Потенциал течения идеальной несжимаемой жидкости  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности  $j$ -ого пузырька и вдали от кластера:

$$\vec{n}_j \cdot \vec{\nabla}\varphi = \dot{R}_j + \dot{\vec{p}}_j \cdot \vec{n}_j \quad \text{при} \quad \vec{r} = \vec{p}_j + R_j \vec{n}_j, \quad (2)$$

$$|\vec{\nabla}\varphi| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\vec{r} - \vec{p}_j| \rightarrow \infty \quad (3)$$

Уравнение состояния совершенного газа примем в виде:

$$P_{gn} = \frac{\rho_{gn} T_{gn} c_{pg} (\gamma - 1)}{\gamma}. \quad (4)$$

Уравнения движения пузырьков имеют вид:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{R}_n}{c_l}\right) R_n \ddot{R}_n + \left(\frac{3}{2} - \frac{\dot{R}_n}{2c_l}\right) \dot{R}_n^2 - \frac{P_n}{\rho_l} \left(1 + \frac{\dot{R}_n}{c_l}\right) - \frac{R_n}{\rho c_l} \frac{dP_n}{dt} = \\ & = \frac{\dot{P}_n^2}{4} - \sum_{l=1, l \neq n} \left\{ \frac{R_l^2 \ddot{R}_l + 2R_l \dot{R}_l^2}{d_{nl}} + \frac{R_l^2}{2d_{nl}^3} (\bar{p}_n - \bar{p}_l) (R_l \ddot{p}_l + \dot{R}_l \dot{p}_n + 5\dot{R}_l \dot{p}_l) - \right. \\ & \left. - \frac{R_l^3}{4d_{nl}^3} \left[ \dot{p}_l (\dot{p}_n + 2\dot{p}_l) + \frac{3}{d_{nl}^2} [\dot{p}_l (\bar{p}_l - \bar{p}_n)] [(\bar{p}_n - \bar{p}_l) (\dot{p}_n + 2\dot{p}_l)] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} R_n \ddot{p}_n + \dot{R}_n \dot{p}_n = \frac{\bar{F}_n}{2\pi\rho_l R_n^2} + \sum_{l=1, l \neq n} \left\{ \frac{\bar{p}_n - \bar{p}_l}{d_{nl}^3} (R_n R_l^2 \ddot{R}_l + 2R_n R_l \dot{R}_l^2 + \dot{R}_n \dot{R}_l R_l^2) - \right. \\ & - \frac{R_l^2}{2d_{nl}^3} \left[ R_n R_l \ddot{p}_l + (\dot{R}_n R_l + 5R_n \dot{R}_l) \dot{p}_l \right] + \\ & \left. + \frac{3R_l^2 (\bar{p}_n - \bar{p}_l)}{2d_{nl}^5} [(\bar{p}_n - \bar{p}_l) [R_n R_l \ddot{p}_l + (\dot{R}_n R_l + 5R_n \dot{R}_l) \dot{p}_l]] \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где уравнение (5) описывает радиальные пульсации  $n$ -го пузырька, а уравнение (6) — его поступательное движение.

Через  $P_n$  обозначено выражение [4, 10]:

$$P_n = P_{gn} - \frac{2\sigma}{R_n} - \frac{4\eta\dot{R}_n}{R_n} - P_0 - P_{ex}(\bar{p}_n), \quad (7)$$

где  $P_{gn}$  — давление газа в пузырьке,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости,  $P_0$  — гидростатическое давление,  $P_{ex}$  — внешнее акустическое давление в пределах  $n$ -го пузырька.

Давление газа в пузырьке можно выразить с помощью уравнения состояния (4) через соответствующие начальные параметры:

$$P_{gn} = \left( P_0 + \frac{2\sigma}{R_{n0}} \right) \left( \frac{R_{n0}}{R_n} \right)^{3\gamma} \quad (8)$$

где  $R_{n0}$  — радиус  $n$ -го пузырька в состоянии равновесия.

Межфазная сила представляет собой силу вязкого трения Левича [11]:

$$\bar{F}_n = \bar{F}_{\dot{a}n} = -12\pi\eta R_n \left( \dot{p}_n - \sum_{l=1, l \neq n}^N \bar{v}_{ln} \right), \quad (9)$$

где  $v_{ln}$  — скорость жидкости, генерируемая  $l$ -м пузырьком в центре  $n$ -го пузырька. С точностью до членов  $1/(d_{jl})^3$ , скорость  $v_{ln}$  имеет вид:

$$\bar{v}_{ln} = \frac{R_l^2 \dot{R}_l (\bar{p}_n - \bar{p}_l)}{d_{nl}^3} + \frac{R_l^3}{2d_{nl}^3} \left\{ \frac{3(\bar{p}_n - \bar{p}_l)}{d_{nl}^2} [\dot{p}_l (\bar{p}_n - \bar{p}_l)] - \dot{p}_l \right\}. \quad (10)$$

При описании теплообмена газовых пузырьков с жидкостью будем использовать двухтемпературную схему, в рамках которой уравнение для давления газа внутри пузырьков имеет следующий вид [12]:

$$\frac{dP_{gn}}{dt} = \frac{3(\gamma-1)}{4\pi R_n^3} q_n - \frac{3\gamma P_{gn}}{R_n} \dot{R}_n. \quad (11)$$

Выражение для потока тепла к единице поверхности  $n$ -го пузырька  $q_n$  примем в виде [12]:

$$q_n = 2\pi R_n \lambda_g \text{Nu}_{gn} (T_l - T_{gn}), \quad (12)$$

$$\text{Nu}_{gn} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}_{gn}}, & \text{Pe}_{gn} \geq 100 \\ 10, & \text{Pe}_{gn} < 100 \end{cases}, \quad (13)$$

$$\text{Pe}_{gn} = 12(\gamma-1) \frac{T_l}{|T_{gn} - T_l|} \frac{R_n |\dot{R}_n|}{D_{gn}},$$

$$D_{gn} = \frac{\lambda_g}{c_{pg} \rho_{gn}},$$

где  $\text{Nu}_{gn}$  — число Нуссельта,  $\text{Pe}_{gn}$  — число Пекле,  $T_{gn}$  — температура газа в  $n$ -ом пузырьке,  $D_{gn}$  — коэффициент температуропроводности газа,  $\lambda_g$  — коэффициент теплопроводности газа,  $c_{pg}$  — теплоемкость газа при постоянном давлении,  $\rho_g$  — плотность газа.

Для решения системы уравнений (5)—(10) необходимо задать начальные координаты, скорости, радиусы, радиальные скорости пузырьков, давление газа в пузырьках, а также закон изменения давления жидкости вдали от пузырькового кластера.

**Результаты.** Исследована динамика пузырьков кластеров различных конфигураций. Результаты исследования проиллюстрированы на примере двух конфигураций (рис. 1).

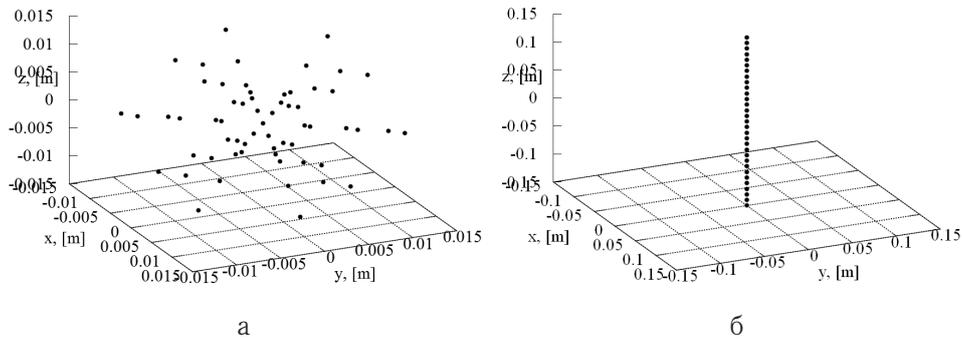


Рис. 1. Кластер в виде трех вложенных друг в друга додекаэдров (а) и линейный кластер (б)

В первом случае кластер представлял собой совокупность трех концентрически вложенных друг в друга додекаэдров (рис. 1 (а)), во втором — линейный стриммер (рис. 1 (б)). Пусть додекаэдры вписаны в сферы радиусов 5, 10, 15 мм соответственно. Начальная длина линейного кластера равна 30 мм.

Начальные радиусы центрального и периферических пузырьков одинаковы и равны  $R_0 = 0.25$  мм. Общее количество пузырьков в обоих случаях одинаково и равно 61.

В качестве внешнего воздействия  $P_{ex}$  в (7) задавалась волна сжатия типа «ступенька», когда давление в жидкости вдали от кластера повышалось следующим образом:

$$P_{ex}(\bar{P}_n) = \begin{cases} P_0, & t < 0, \\ P_0 + \Delta P, & t \geq 0, \end{cases}$$

где перепад давления  $\Delta P$  принимался равным  $0.3$  МПа.

Начальное давление — атмосферное:  $P_0 = 0.1$  МПа, температура жидкости  $T_l = 293$  К.

Параметры жидкости и газа полагались следующими: жидкость — 60%-ый раствор глицерина в воде (скорость звука  $c_l = 1500$  м/с, плотность  $\rho_l = 1156$  кг/м<sup>3</sup>, кинематическая вязкость  $\nu = 9.52 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}$  Н/м), газ — воздух (показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ , удельная изобарная теплоемкость  $c_{pg} = 1007$  Дж/(кг·К), коэффициент теплопроводности  $\lambda_g = 0.0258$  Вт/(м·К)).

В качестве характерного времени для обезразмеривания параметров возьмем величину  $t^* = R_0 \cdot (\rho_l / P_0)^{1/2} = 2.7 \cdot 10^{-5}$  с, которое соответствует времени схлопывания пустой сферы радиуса  $R_0$  в жидкости с плотностью  $\rho_l$  и давлением  $P_0$ .

На рисунке 2 приведены результаты расчетов для кластера из трех додекаэдров: зависимости безразмерного радиуса  $R/R_0$  и безразмерного давления  $P/P_0$  от безразмерного времени  $t/t^*$  для центрального (а) и периферического (б) пузырьков. Видно, что для центрального пузырька достигаются значительные амплитуды сжатия и, как следствие, значительное увеличение давления по сравнению с периферийными пузырьками. Максимальная температура для центрального пузырька составляла  $\approx 2000$  К. Характерная длительность пика составляет  $\sim 10^{-8}$  —  $10^{-9}$  с.

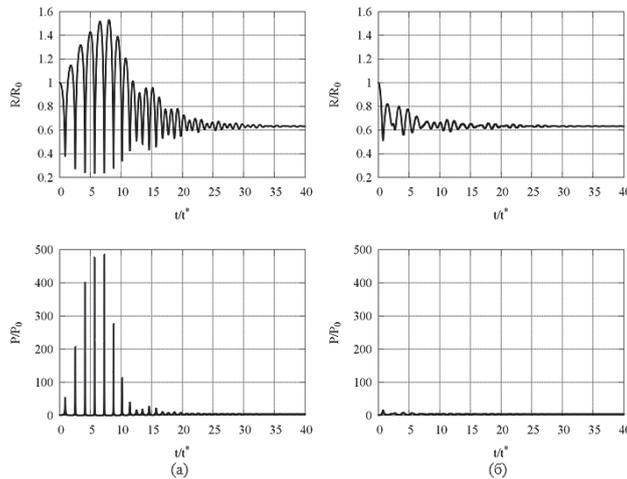


Рис. 2. Зависимость от времени давления и радиуса центрального (а) и периферийного (б) пузырька в случае пузырькового кластера в форме трех вложенных друг в друга додекаэдров

На рисунке 3 приведены результаты расчетов в случае линейного кластера: зависимости безразмерного радиуса  $R/R_0$  и безразмерного давления  $P/P_0$  от безразмерного времени  $t/t^*$  для центрального (а) и периферического (б) пузырьков. В этом случае центральный пузырек сжимается меньше, чем в случае трех додекаэдров. Максимальное значение давления, достигаемое в этом случае, как для центрального, так и для периферийного пузырька, не превосходит 22-х атмосфер. Амплитуда колебаний на протяжении всего времени моделирования не превосходит начального радиуса пузырька.

В обоих случаях колебания пузырьков затухают за счет межфазного теплообмена (11)—(13) и акустического излучения.

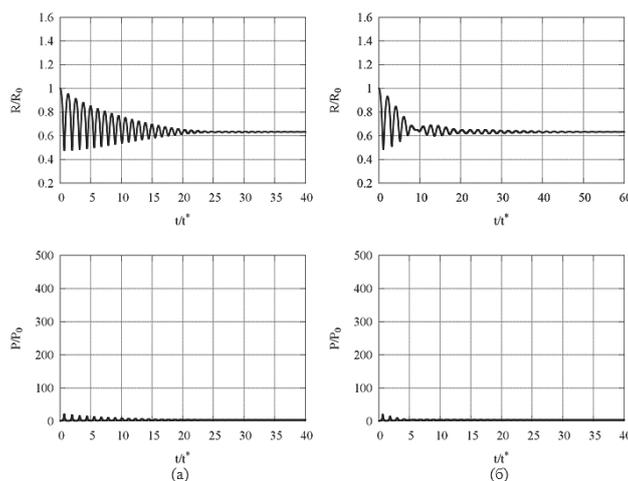


Рис. 3. Зависимость от времени давления и радиуса центрального (а) и периферийного (б) пузырька в случае стриммера

**Выводы.** Исследована динамика пузырьков кластеров различных конфигураций. Выполнено численное моделирование нелинейной динамики пузырьков кластеров различных конфигураций при воздействии на них волны сжатия типа «ступенька». Показано, что в кластере, пузырьки которого расположены в вершинах додекаэдра и его центре, для центрального пузырька достигаются значительные амплитуды сжатия и, как следствие, значительное увеличение давления и температуры, по сравнению с периферийными пузырьками.

Конфигурация кластера может сильно влиять на его динамику. Давления, достигаемые в кластере из додекаэдров, многократно превосходят давления в стриммере, что качественно согласуется с экспериментальными данными.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аганин А.А., Давлетшин А.И. Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 6. С. 89-102.
2. Войнов О.В., Головин А.М. Уравнения Лагранжа для системы пузырей изменяющихся радиусов в жидкости малой вязкости // Известия АН СССР. МЖГ. 1970. №3. С. 117-123.
3. Luther, S., Mettin, R. and Lauterborn, W. Modeling Acoustic Cavitation by a Lagrangian Approach.

4. Doinikov, A.A. Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields // *Acoustical Society of America*. 2004. P. 821-827.
5. Gubaidullin, A.A., Nigmatulin, N.I. Numerical simulation of Propagation of Shock Waves in Bubbly Liquids // *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Multiphase Flow '95*. Kyoto, April 3-7, 1995.
6. Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Cho, J.S., Lahey, R.T. (Jr), Nigmatulin, R.I., Block, R.C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science*, 2002. V.295. Pp. 1868-1873.
7. Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Lahey, R.T. (Jr), Nigmatulin, R.I., Block, R.C., Xu, Y. Nuclear Emissions During Self-Nucleated Acoustic Cavitation // *Phys. Review Let.*, 2006. Vol. 96.
8. Амелькин С.В., Санников И.Н. Динамика пузырьков в кластере при акустическом воздействии // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Институт гидродинамики СО РАН*. 2002. Вып. 121. С. 7-11.
9. Губайдуллин А. А., Санников И. Н. Волны в жидкости с облаками пузырьков // *Аннотации докл. IX Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике*. Т. 2. Нижний Новгород, 2006.
10. Рождественский В.В. Кавитация. Л.: Судостроение, 1977.
11. Reddy, J. and Szeri, A. J. Coupled dynamics of translation and collapse of acoustically driven microbubbles // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. № 112. Pp. 1346-1352.
12. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.

## REFERENCES

1. Aganin, A.A., Davletshin, A.I. Modeling of gas bubbles interaction in a liquid with regard to their small asphericity. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical modeling*. 2009. Vol. 21. № 6. Pp. 89-102. (in Russian).
2. Voinov, O.V., Golovin, A.M. Lagrange equations for the system of varying radii bubbles in a liquid of low viscosity. *Izvestija AN SSSR — Bulletin Academy of Sciences of the USSR*. 1970. № 3. Pp. 117-123. (in Russian).
3. Luther, S., Mettin, R. and Lauterborn, W. Modeling Acoustic Cavitation by a Lagrangian Approach.
4. Doinikov, A.A. Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields. *Acoustical Society of America*. 2004. Pp. 821- 827.
5. Gubaidullin, A.A., Nigmatulin, N.I. Numerical simulation of Propagation of Shock Waves in Bubbly Liquids. (*Proceedings of The 2<sup>d</sup> Int. Conf. on Multiphase Flow '95-Kyoto* April 3-7, 1995).
6. Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Cho, J.S., Lahey, R.T. (Jr), Nigmatulin, R.I., Block, R.C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation. *Science*. 2002. Vol. 295. Pp. 1868-1873.
7. Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Lahey, R.T. (Jr), Nigmatulin, R.I., Block, R.C., Xu, Y. Nuclear Emissions During Self-Nucleated Acoustic Cavitation. *Phys. Review Let.* 2006. Vol.96.
8. Amel'kin, S.V., Sannikov, I.N. The dynamics of bubbles in the cluster under the acoustic action // *Dinamika sploshnoj sredy* [Dynamics of Continuous Media]. Coll. Of Scientific papers. Institute of Hydrodynamics RAS. 2002. Issue 121. Pp. 7-11. (in Russian).
9. Gubajduллин, А.А., Санников, И.Н. Waves in a fluid with clouds of bubbles // *Annotacii dokl. IX Vserossijskogo s ezda po teoreticheskoj i prikladnoj mehanike* (IX All-Russian Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstracts). Vol. 2. Nizhnij Novgorod, 2006. (in Russian).
10. Rozhdestvenskij, V.V. *Kavitacija* [Cavitation]. L: Sudostroenie. 1977. (in Russian).
11. Reddy, J. and Szeri, A.J. Coupled dynamics of translation and collapse of acoustically driven microbubbles. *J. Acoust. Soc. Am.* 112. 2002. Pp. 1346-1352.
12. Nigmatulin, R.I. *Dinamika mnogofaznyh sred* [Dynamics of multiphase media]. M.: Nauka, 1987. (in Russian).