# МАТЕМАТИКА

© **А.Н. ДЕГТЕВ**
*a.degtev@list.ru*

**УДК 519.5**

## *НОВОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПОСТА*

*АННОТАЦИЯ. Построено полурекурсивное рекурсивно перечислимое множество, чья тьюрингова степень находится между 0 и 1, с использованием того факта, что* $A \leq_m B \Leftrightarrow A \leq_Q B$ *для рекурсивно перечислимых множеств.*

*SUMMARY. The article demonstrates the construction of semirecursive recursively enumerable set B, Turing degree of which is between 0 and 1, with the consideration of the fact that* $A \leq_m B \Leftrightarrow A \leq_Q B$ *for recursively enumerable sets A.*

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Проблема Поста, Q-сводимость.*
*KEY WORDS. Post problem, Q-reducibility.*

В статье [1] Е. Пост сформулировал проблему: существуют ли рекурсивно перечислимое множество (РПМ), чья тьюрингова ($T$-) степень будет промежуточной между **0** и **1**. Здесь 0 — $T$-степень рекурсивных множеств и **1** — $T$-степень $T$-полных множеств, например, $m$-универсального $K = \{\langle x, y\rangle : x \in W_y\}$, где $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер пары $(x, y), x, y \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$, а $y$ — постовский номер РПМ $W_y$. Эта проблема была независимо решена А. Мучником [2] и Р. Фридбергом [3]. Ими были построены, с использованием машин Тьюринга с оракулами, два $T$-сравнимых РПМ. Понятно, что любое из них решает проблему Поста.

Хорошо известно [4, стр. 203], что для РПМ $A$ и $B$ имеет место эквивалентность.

$$A \leq_T B \Leftrightarrow \overline{A} \leq_e \overline{B}, \text{ где } \overline{X} = N \setminus X.$$

Пусть $\overline{B}$ — *полурекурсивное* множество. Это означает существование общерекурсивной функции (ОРФ) $f$ такой, что [5]

$$(\forall x)\left(D_x \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B}\right),$$

и тогда $e$-сводимость $\overline{A}$ к $\overline{B}$ вырождается в $s$-сводимость, т.е.

$$\in \overline{A} \Leftrightarrow (\exists y)(\langle x, y\rangle \in W \wedge f(y) \in \overline{B}))$$

равносильно $(\exists g - \text{ОРФ})\left(x \in \overline{A} \Leftrightarrow W_{g(x)} \cap \overline{B} \neq \emptyset\right)$

или $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \subseteq B \Leftrightarrow A \leq_Q B$.

Ниже будет определена некоторая ОРФ $h$ такая, что множество

$$B = \{x : (\exists y)(y > x \wedge h(y) \leq h(x))\}$$

будет полурекурсивным [5], $K \nleq_Q B$ и прямой пересчет $b_n = \max\{x : h(x) = n\}, n \geq 0$

множества $\overline{B}$ не будет мажорироваться никакой ОРФ. Следовательно, $B$ нерекурсивное множество.

Обозначим через $B^t$ множество

$$\{x : x \leq t \wedge (\exists y)(x < y \leq t \wedge h(y) \leq h(x))\}$$

и $W_n^t$ — конечное число элементов, вычисленное в $W_n$ к шагу $t$. Пусть $\varphi_n$

— одноместная частично рекурсивная функция (ЧРФ) с клиниевским номером $n$. Необходимо удовлетворить следующие требования

$T_{2n}$ : $K \nleq_Q B$ посредством ЧРФ $\varphi_n$;

$T_{2n+1}$ : $\overline{B}$ не мажорируется ЧРФ $\varphi_n$,

Для удовлетворения требования $T_{2n}$ потребуются метки $[n], n \geq 0$. То число, которому метка [n] сопоставлена перед шагом $t$ обозначим через $(n, t)$. Говорим, что требование $T_{2n}$ на шаге $t$ *привлекает внимание*, если для любого числа $x \leq (n,t)$ значение $\varphi_n(n, t)$ к шагу $t$ вычислено и выполнены условия

$$\text{(a)} \in K^t \Rightarrow W^t_{\varphi_n(x)} \subseteq B^t;$$

$$\text{(б)}\ x \notin K^t \Rightarrow W^t_{\varphi_n(x)} \cap \overline{B^t} \neq \emptyset,$$

где $K^t$ — конечное число элементов множества $K$, перечисленных в $K$ к шагу $t$.

Требование $T_{2n+1}$ на шаге $t$ *привлекает внимание*, если для любого числа $x \leq (n, t+1)$ значение $\varphi_n(x)$ к шагу $t$ вычислено и $\varphi_n(x)$ больше, чем $x$-ый элемент прямого пересчета $\overline{B^t}$.

Перейдем к определению ОРФ $h$. Оно будет таким, что $h(t+1) \leq h(t) + 1$.

ШАГ 0. Сопоставляем метку [0] числу 0, полагаем $h(0)$=0 и переходим к следующему шагу.

ШАГ $t$ $(t \geq 1)$. Ищем требование $T_s$ с наименьшим номером $s$, которое на шаге $t$ привлекает внимание. Если такого числа $s$ нет, то метку $[m]$ с наименьшим номером $m$, которая еще не сопоставлена никакому числу, сопоставляем ее числу $t$, полагаем $h(t)$=m и переходим к следующему шагу.

Иначе рассматриваем тот случай, который имеет место.

Случай $m=2n$ для подходящего числа $n$.

Метку [n] сопоставляем числу $t$, метки [$k$] при $k > m$ убираем, полагаем $h(t)=n$ и переходим к шагу $t$+1.

Случай $m=2n+1$ для подходящего числа $n$.

Метки [$k$] при $k \geq n+1$ убираем, метку [n+1] сопоставляем числу $t$, полагаем $h(t)$=n+1 и переходим к шагу $t$+1.

Докажем, что каждое требование $T_m$ оказывается удовлетворенным. Для этого покажем, что для всех $m \geq 1$ метка [$m$] *стабилизируется*, т.е. на подходящем шаге будет сопоставлена некоторому числу $t_0$ и останется сопоставленной ему на всех дальнейших шагах. Тогда $K \nleq_Q B$ посредством $\varphi_m$. Иначе, пусть $n$ — наименьший номер метки, для которой это не так. Следовательно, будучи сопоставленной на подходящем шаге числу $t_0$, она в дальнейшем не убирается, но последовательно на шагах $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ сопоставляется этим числам, причем $n = h(t_0) = h(t_1) = \cdots$. Поэтому множество $B$ оказывается конечным и $K \leq_Q B$ посредством ОРФ $\varphi_n$. Это противоречит $Q$-сводимости нерекурсивного множества к рекурсивному.

Вспомним, что $b_n = \max\{x: h(x) = n\}$ является $n$-ым элементом прямого пересчета $\overline{B}$. Далее, если на шаге $t$ имел место случай $m=2n+1$, то $h(t)=n+1$. Таких шагов $t$ не может быть бесконечно много, т.к. для достаточно большого $t$ окажется $\varphi_n(n+1) < t$ и в дальнейшем требование $T_{2n+1}$ не будет привлекать внимание.

Автор уверен, что использование $Q$-сводимости и гиперпростых множеств $B$, для которых существует представляющая ОРФ $h$ и которые содержаться в любой рекурсивно перечислимой $T$-степени [5], позволит передоказать (или получить) некоторые другие результаты о таких $T$-степенях. Вопрос специалистам: будут ли эти доказательства более понятными?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Post, E.L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problem // Bull. Amer. Math. Soc. 1944, V.50, N 5, Pp. 284-318.

2. Мучник А.А. Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов //ДАН СССР, 1956, Т.108, С. 194-197.

3. Friedberg, R.M. Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of insolvability// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1957, V.43, Pp. 236-238.

4. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М.: Мир, 1972.

5. Jockusch C.J. Semirecursive sets and positive reducibility //Trans. Amer. Math. Soc. 1968, V. 131, N2, Pp. 420-436

## REFERENCES

1. Post, E.L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problem. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1944. Vol. 50. № 5. Pp. 284-318.

2. Muchnik, A.A. Unsolvability of the problem of reducibility for the theory of algorithms. *DAN SSSR — DAN USSR*. 1956, Vol.108, Pp. 194-197. (in Russian).

3. Friedberg, R.M. Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of insolvability. *Proc. Natl. Acad. Sci.* USA. 1957. Vol.43, Pp. 236-238.

4. Rodzhers, H. *Teorija rekursivnyh funkcij i jeffektivnaja vychislimost'* [Theory of recursive functions and effective computability], M.: Mir, 1972. (in Russian).

5. Jockusch, C.J. Semirecursive sets and positive reducibility. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1968. Vol. 131. № 2. Pp. 420-436.