

© С.П. БАУТИН, И.Ю. КРУТОВА

SBautin@usurt.ru, irma-levv@mail.ru

УДК 517.95+533.6

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПРИДОННОЙ ЧАСТИ ТРОПИЧЕСКОГО ЦИКЛОНА \*

**АННОТАЦИЯ.** Математически моделируются трехмерные стационарные течения идеального политропного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, имеющие место для тропического циклона средней интенсивности. Для системы уравнений газовой динамики поставлена начально-краевая задача, решение которой описывает течение, возникающее при плавном притоке газа через поверхность вертикального цилиндра заданного ненулевого радиуса в окрестности непроницаемой плоскости  $z=0$ . Доказано, что данная задача является характеристической задачей Коши стандартного вида и поэтому при условии аналитичности входных данных у нее существует единственное аналитическое решение. Начальный отрезок ряда, задающий это аналитическое решение, используется для построения трехмерных стационарных придонных течений таких природных вихрей как тропические циклоны. Коэффициенты начальных отрезков рядов численно строятся при решении соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Распределения газодинамических параметров исследуемых течений представлены в числовом и в графическом виде. Они соответствуют данным натурных наблюдений за тропическими циклонами.

**SUMMARY.** The mathematically modeled three-dimensional stationary flows of an ideal polytropic gas under the action of gravity and Coriolis forces have a place for the average intensity of tropical cyclones. For the system of equations of gas dynamics initial boundary value problem is posed, the solution of which describes the flow that occurs in the smooth flow of gas through the surface of a vertical cylinder of a given non-zero radius in the vicinity of an impermeable plane  $z = 0$ . It is proved that this problem is a characteristic Cauchy problem and therefore subject to analytic input it has a unique analytic solution. The initial segment of the series that defines this analytic solution is used to construct three-dimensional steady bottom currents of natural vortices such as tropical cyclones. The coefficients of the initial segments of the series are constructed by numerically solving the systems of ordinary differential equations. The distributions of gasdynamic parameters of studied currents are presented numerically and graphically. They are consistent with field observations of tropical cyclones.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса и сила тяжести, закрутка газа, тропический циклон.

**KEYWORDS.** System of gas dynamics equations, the Coriolis force and gravity, spin of gas, tropical cyclone.

\* Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00198) и Министерства образования и науки РФ (проект № 1.8490.2013).

**Постановка начально-краевой задачи.** Система уравнений газовой динамики (СУГД) для изэнтропических стационарных общих пространственных течений политропного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса имеет следующий вид [1, 2]

$$\begin{cases} uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c\left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z\right) = 0 \\ uw_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z - \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av + bw\cos\varphi \\ uv_r + \frac{uw}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw\sin\varphi \\ uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu\cos\varphi - bv\sin\varphi - g \end{cases} \quad (1)$$

где:  $x, y, z$  — декартовы независимые переменные, и в плоскости переменных  $x, y$  введена полярная система координат  $(r, \varphi)$ ;  $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$  — скорость звука газа;  $\gamma = \text{const} > 1$  — показатель политропы газа в уравнении состояния  $p = \rho^\gamma / \gamma$ , где  $p$  и  $\rho$  — давление и плотность газа;  $u, v, w$  соответственно радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа;  $a = \Omega \sin \Psi$ ;  $b = \Omega \cos \Psi$ ;  $\Omega = |\Omega|$  — модуль угловой скорости вращения Земли;  $\Psi$  — широта точки  $O$  на поверхности Земли, в которой находится начало прямоугольной системы координат, вращающейся вместе с Землей. Если точка  $O$  лежит в Северном полушарии, то  $0 < \Psi \leq \pi/2$ ; если в Южном, то  $\pi/2 \leq \Psi < \pi$ ; на экваторе  $\Psi = 0$ ;  $g = \text{const} > 0$  — постоянное ускорение свободного падения.

В данной работе, как и в [1, 2], в системе (1) не учитывается центробежное ускорение:  $-\Omega \times (\Omega \mathbf{R} + \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{R}$  — вектор, соединяющий центр Земли и точку  $O$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор текущей точки в системе координат  $x, y, z$ .

Для системы (1) на плоскости  $z=0$  ставятся следующие начальные данные:

$$\begin{cases} c(r, \varphi, z)|_{z=0} = c_0(r, \varphi) \\ u(r, \varphi, z)|_{z=0} = u_0(r, \varphi) \\ v(r, \varphi, z)|_{z=0} = v_0(r, \varphi) \\ w(r, \varphi, z)|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Последнее из начальных условий (2) обеспечивает условие непротекания газа через плоскость  $z=0$ .

Решения рассматриваемой задачи (1), (2) строятся в виде бесконечного ряда

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r, \varphi) \frac{z^k}{k!}; U_k(r, \varphi) = \left. \frac{\partial^k U(r, \varphi, z)}{\partial z^k} \right|_{z=0}, \quad (3)$$

где вектор  $U$  имеет в качестве координат искомые функции  $c, u, v, w$ .

К задаче (1), (2) добавляются условия

$$\begin{cases} u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{0r} = a v_0 \\ u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma-1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -a u_0 \end{cases} \quad (4)$$

которые являются необходимыми условиями разрешимости рассматриваемой характеристической задачи Коши (ХЗК) (1), (2) [1—6].

Если предполагать существование решения задачи (1), (2), то эти два выписанных соотношения (4) должны выполняться. То есть:  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  не могут быть произвольными, а должны удовлетворять этим двум выписанным соотношениям (4).

Возникновение условий (4) связано с тем, что задача (1), (2) является ХЗК и плоскость  $z=0$  в этой задаче есть характеристика кратности два [3, 4].

Теорема о существовании и единственности аналитического решения у ХЗК стандартного вида для системы уравнений газовой динамики с начальными данными на контактной поверхности (то есть поверхности, через которую газ не течет, в данном случае  $z=0$ ) приведена в [4].

Поскольку в данной работе будут рассматриваться течения с условиями заданного притока на цилиндре ненулевого радиуса, то формулировка теоремы из [4] для данного случая следующая:

**Теорема.** *Задача (1), (2) есть ХЗК стандартного вида с данными на характеристике кратности два, имеющая в случае аналитичности всех входных данных единственное аналитическое решение при выполнении необходимых условий разрешимости ХЗК (4) и задании двух дополнительных условий, вида*

$$\begin{cases} u(r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u^0(\varphi, z) < 0, \\ v(r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = v^0(\varphi, z); \quad r_{in} = const > 0 \end{cases} \quad (5)$$

с аналитическими функциями  $u^0(\varphi, z)$ ,  $v^0(\varphi, z)$ , согласованными с условиями (2) при  $z=0$ ,  $r=r_{in}$ :

$$\begin{cases} u_0(r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u^0(\varphi, z)|_{z=0} \\ v_0(r, \varphi)|_{r=r_{in}} = v^0(\varphi, z)|_{z=0} \end{cases} \quad (6)$$

Далее в расчетах полагается:

$$\begin{cases} u^0(\varphi, z) \equiv u^{00} = const < 0, \\ v^0(\varphi, z) \equiv 0 \end{cases} \quad (7)$$

#### Построение первых коэффициентов ряда.

В работах [1, 2, 5, 6] приведено описание построения коэффициентов  $c_0=c_0(r)$ ;  $u_0=u_0(r)$ ;  $v_0=v_0(r)$ , как решений соответствующей СОДУ с конкретными начальными условиями.

С помощью коэффициентов  $\mathbf{U}_0$  коэффициенты  $w_1, c_1$  определяются единственным образом [5, 6]. Там же выписаны задачи Коши для СОДУ, из которых определяются  $u_{11}(r), u_{12}(r), v_{11}(r), v_{12}(r)$ , где

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{11}(r)\cos\varphi + u_{12}(r)\sin\varphi, \\ v_1 &= v_{11}(r)\cos\varphi + v_{12}(r)\sin\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

С помощью этих функций однозначно определяются  $w_2, c_2$ . После этого коэффициенты  $u_2, v_2$  строятся в виде

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{20}(r) + u_{21}(r)\cos\varphi + u_{22}(r)\sin\varphi + u_{23}(r)\cos 2\varphi + u_{24}(r)\sin 2\varphi, \\ v_2 &= v_{20}(r) + v_{21}(r)\cos\varphi + v_{22}(r)\sin\varphi + v_{23}(r)\cos 2\varphi + v_{24}(r)\sin 2\varphi. \end{aligned}$$

и по ним однозначно определяются  $w_3, c_3$ .

В результате получается СОДУ из десяти уравнений для десяти искомым функций  $u_{20}(r), u_{21}(r), u_{22}(r), u_{23}(r), u_{24}(r), v_{20}(r), v_{21}(r), v_{22}(r), v_{23}(r), v_{24}(r)$  (конкретный вид этой СОДУ приведен в [6]).

После решения этой СОДУ начальных данных (2) для приближенного описания течений газа в окрестности плоскости  $z=0$  используются следующие представления:

$$\begin{aligned} c(r, \varphi, z) &\approx c_0(r) + [c_{10}(r) + c_{11}(r)\cos\varphi + c_{12}(r)\sin\varphi] \cdot z + \\ &+ \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{1}{c_0(r)} \left[ bu_1(r)\cos\varphi - bv_1(r)\cos\varphi - \frac{2}{(\gamma-1)} \times \right. \\ &\left. \times (c_{10}(r) + c_{11}(r)\cos\varphi + c_{12}(r)\sin\varphi)^2 \right] \cdot \frac{z^2}{2} + c_3(r, \varphi) \cdot \frac{z^3}{6}; \\ u(r, \varphi, z) &\approx u_0(r) + [u_{11}(r)\cos\varphi + u_{12}(r)\sin\varphi] \cdot z + \\ &+ [u_{20} + u_{21}(r)\cos\varphi + u_{22}(r)\sin\varphi + u_{23}(r)\cos 2\varphi + u_{24}(r)\sin 2\varphi] \cdot \frac{z^2}{2}; \\ v(r, \varphi, z) &\approx v_0(r) + [v_{11}(r)\cos\varphi + v_{12}(r)\sin\varphi] \cdot z + \\ &+ [v_{20} + v_{21}(r)\cos\varphi + v_{22}(r)\sin\varphi + v_{23}(r)\cos 2\varphi + v_{24}(r)\sin 2\varphi] \cdot \frac{z^2}{2}; \\ w(r, \varphi, z) &\approx w_2(r, \varphi) \cdot \frac{z^2}{2} + w_3(r, \varphi) \cdot \frac{z^3}{6}. \end{aligned} \quad (9)$$

Наличие слагаемых с различными степенями  $z$  (для  $c$  и  $w$  по  $z^3$ , а для  $u, v$  по  $z^2$ ) обусловлено процедурой построения решений исходной начально-краевой задачи. Для удовлетворения системы (1) при  $z=0$  строятся коэффициенты  $c_\varphi, u_\varphi, v_\varphi, w_0$ , а также  $w_1, c_1$ . Для удовлетворения первого дифференциального следствия системы (1) при  $z=0$  необходимо построить коэффициенты  $u_1, v_1$ , по которым определяются коэффициенты  $w_2, c_2$ . Для удовлетворения дифференциального следствия второго порядка системы (1) при  $z=0$  необходимо построить коэффициенты  $u_2, v_2, w_3, c_3$ . Следовательно, использование представления (9) обеспечивает выполнимость системы (1) с точностью до слагаемых, содержащих  $z^3$ .

Естественно, что построение решений задачи Коши для приведенных выше СОДУ можно осуществить численным образом [5, 6].

**Результаты расчетов.** В работе [7] приведены данные статистической обработки показателей интенсивности тропических циклонов, и в первую очередь по скоростям движения в них воздушных масс — по скорости ветра. Также в этой работе сделаны некоторые общие выводы об отдельных особенностях функционирования тропических циклонов:

1. Тропические циклоны в Атлантике и в северо-западной части Тихоокеанского региона имеют почти одинаковую интенсивность, а также совпадающие времена возрастания и убывания скорости ветра.

2. Существует примерно равная вероятность того, что любой тропический циклон может достичь любой интенсивности (любой скорости ветра), но не более своей потенциальной интенсивности.

Под потенциальной интенсивностью подразумевается верхняя оценка максимума скорости ветра. Она, в свою очередь, «диктуется балансом между энергией генерации и диссипации поверхностных потоков, большинство из которых происходят в атмосфере пограничного слоя».

3. Данные наблюдений свидетельствуют о том, что причиной большой интенсивности тропических циклонов в западной части Тихого океана является большая длина пути циклона над теплой водой.

4. По результатам исследований установлено, что средние темпы снижения интенсивности тропических циклонов над теплой и холодной водой очень похожи. Кроме того, около половины снижения интенсивности тропического циклона приходится на сушу.

Поскольку тропические циклоны ежегодно приносят многочисленные разрушения и, к сожалению, жертвы, различными исследованиями этого природного явления занимаются достаточно давно, вкладывая значительные интеллектуальные, технические и финансовые ресурсы.

Однако приходится, к сожалению, констатировать, что дальше детальных измерений различных параметров отдельных циклонов, сбора многочисленных статистических данных и попыток надежно прогнозировать появления очередных тропических циклонов дело не идет. А главное: осмысление причин возникновения тропических циклонов и определение природных источников энергии для их устойчивого функционирования практически остается на уровне гипотез, не подтвержденных ни экспериментами, ни надежным математическим моделированием.

По формулам (9) были произведены расчеты газодинамических параметров и траекторий движения отдельных частиц газа для тропического циклона при следующих масштабных значениях скорости и скорости звука  $u_0=c_0=333$  м/с и расстояния  $r_0=73$  км. В этом случае в расчетах полагались следующие безразмерные значения входных параметров:  $\sin \Psi=0.5$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $\Gamma_{in}=1$ ,  $c(r_{in})=1$ ,  $u(r_{in})=-0.00124$ ,  $v(r_{in})=0$ ,  $r_0=0.05$  [1, 2].

На рис. 1, 2 приведены проекции отдельной траектории движения частицы газа, выходящей с цилиндра притока  $r=r_{in}$  на высоте  $z=0.001$ . При этом закрутка газа в тропическом циклоне существенно больше, чем в торнадо всех классов [2]. Кроме того, в тропическом циклоне при приближении к цилиндру стока  $r=r_0$  движение частиц газа идет то вверх, то вниз (рис. 1).

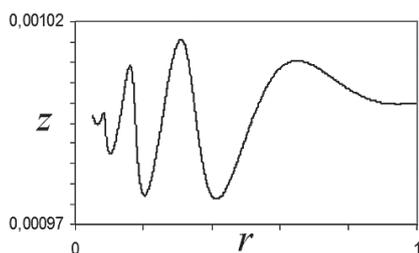


Рис. 1

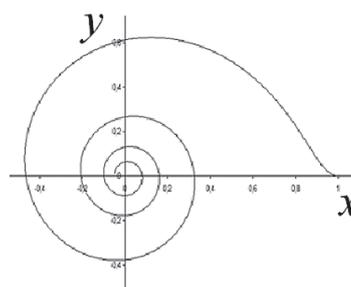


Рис. 2

Далее приведены поверхности газодинамических параметров тропического циклона при заданной высоте  $z=0.001$ , соответствующей размерному значению в 73 м (рис. 2).

На рис. 3 приведена поверхность скорости звука. Основные изменения эта функция претерпевает в окрестности цилиндра стока  $r = r_0$ , что соответствует размерному значению в 3650 м. При этом при приближении к цилиндру стока значения скорости звука убывают, то есть происходит разрежение газа. Это разрежение больше, чем в торнадо всех классов [2], но также не очень значительное. Скорость звука меняется от единичного значения до значения 0.997, что соответствует изменению плотности от единичного значения на пятнадцать тысячных, то есть менее двух десятых процента.

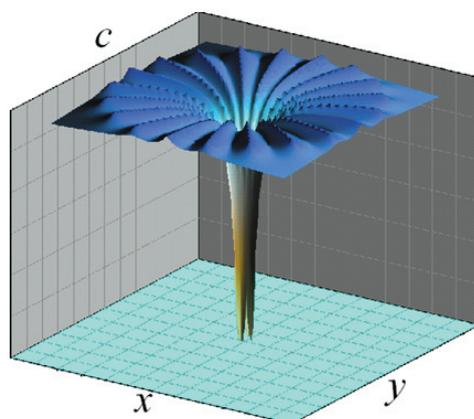


Рис. 3

На рис. 4 представлена поверхность радиальной скорости. Значения этой составляющей вектора скорости газа отрицательные, то есть газ движется к цилиндру стока.

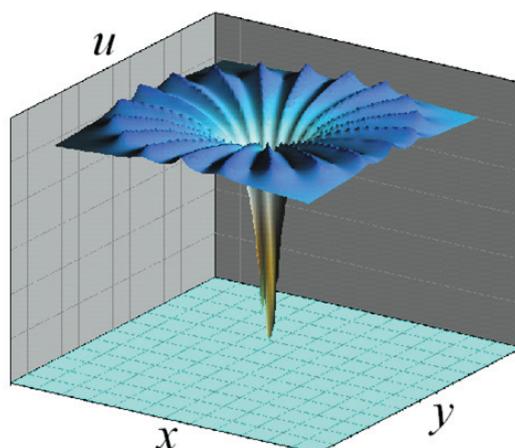


Рис. 4

Основные изменения и эта функция претерпевает в окрестности цилиндра стока  $r = r_0$ . Если на цилиндре притока значения радиальной скорости были порядка  $-0.001$ , то на цилиндре стока они достигают значений  $-0.025$ , что соответствует размерному значению  $-8.37$  м/с.

На рис. 5 представлена поверхность окружной скорости. Значения этой составляющей вектора скорости газа положительные, то есть газ вращается в положительном направлении.

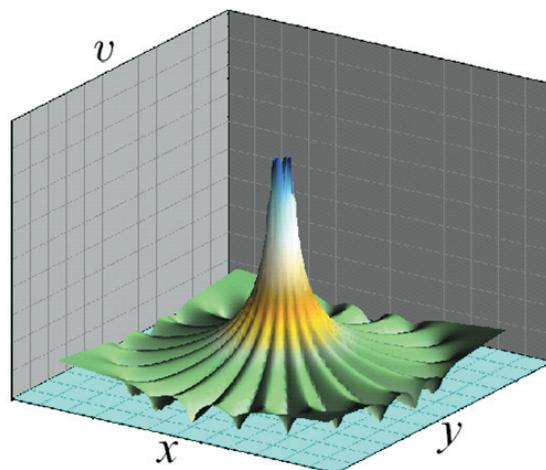


Рис. 5

Основные изменения окружная скорость также претерпевает в окрестности цилиндра стока  $r = r_0$ . На цилиндре притока окружная скорость равна нулю, а на цилиндре стока ее значения достигают величины  $0.17$ , что соответствует размерному значению  $52.9$  м/с — это шторм.

На рис. 6 представлена поверхность вертикальной скорости  $w$ .

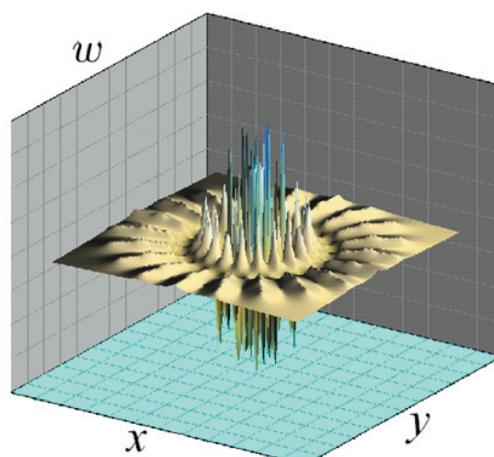


Рис. 6

По абсолютной величине значения  $w$  не очень большие, порядка 0.002, что соответствует размерному значению 0.666 м/с. Однако хорошо видно, что при приближении к цилиндру стока  $r = r_0$ , значения функции  $w$  меняют знак. То есть в своей окрестности цилиндра стока газ движется то вверх, то вниз. Но это происходит уже при значениях  $r \approx 0.3-0.4$ .

**Заключение.** В работе развит метод построения трехмерных стационарных течений, моделирующих течение воздуха в придонных частях природных восходящих закрученных потоках, таких как тропические циклоны. Проведено сравнение основных газодинамических характеристик воздушных потоков в среднем тропическом циклоне, в том числе построены траектории движения отдельных частиц воздуха, имеющие локальные немонотонности по высоте. Однако воздушная масса в придонном течении до высоты 50-100 метров движется практически горизонтально.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
2. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
3. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения, 1976. Т. 12, № 11. С. 2052-2063.
4. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
5. Крутова И.Ю. Задача о движении газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2012. № 1 (13). С. 14-21.
6. Крутова И.Ю. Трехмерный стационарный поток газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2012. № 3 (15). С. 16-23.
7. Emanuel K.A. A statistical Analysis of Tropical Cyclone Intensity // Journ. of the Atmospheric Sciences. 2000. V. 128. P. 1139-1152.

8. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части тропического циклона // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. № 4. Серия «Физико-математические науки. Информатика». С. 175-182.

9. Обухов А.Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части торнадо // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. № 4. Серия «Физико-математические науки. Информатика». С. 183-188.

10. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1. М.: Физматгиз, 1963. 403 с.

#### REFERENCES

1. Bautin, S.P. *Tornado i sila Koriolisa* [Tornado and the Coriolis force]. Novosibirsk: Nauka, 2008. 96 p. (in Russian)

2. Bautin, S.P., Obuhov, A.G. *Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nykh atmosferynykh vihrej* [Mathematical modeling of destructive atmospheric vortices]. Novosibirsk: Nauka, 2012. 152 p. (in Russian)

3. Bautin, S.P. The characteristic Cauchy problem for the quasi-linear analysis system. *Differencial'nye uravnenija — Differential equations*. 1976. Vol. 12. № 11. Pp. 2052-2063. (in Russian).

4. Bautin, S.P. *Harakteristicheskaja zadacha Koshi i ee prilozhenija v gazovoj dinamike* [The characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka, 2009. 368 p. (in Russian).

5. Krutova, I.Ju. The problem of the motion of a gas under the action of gravity and Coriolis forces in the vicinity of an impermeable horizontal surface. *Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putej soobshhenija — Ural State University of Railway Transport Bulletin*. 2012. № 1 (13). Pp. 14-21. (in Russian).

6. Krutova, I.Ju. Three-dimensional steady-state flow of gas under the action of gravity and Coriolis forces in the vicinity of an impermeable horizontal surface. *Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putej soobshhenija — USURT Herald*. 2012. №3 (15). Pp. 16-23. (in Russian).

7. Emanuel, K.A. A statistical Analysis of Tropical Cyclone Intensity. *Journ. of the Atmospheric Sciences*. 2000. Vol. 128. Pp. 1139-1152.

8. Bautin, S.P., Obuhov, A.G. Mathematical modeling and numerical calculations of the flow in the bottom of a tropical cyclone. *Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta — Tyumen State University Herald*. 2012. № 4. Pp. 175-182. (in Russian).

9. Obuhov, A.G. Mathematical modeling and numerical calculations of the flow in the bottom of the tornado. *Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta — Tyumen State University Herald*. 2012. № 4. Pp. 183-188. (in Russian).

10. Kochin, N.E., Kibel', I.A., Roze, N.V. *Teoreticheskaja gidromehhanika* [Theoretical hydromechanics]. Part 1. M.: Fizmatgiz, 1963. 403 p. (in Russian).