

© В.А. БАРИНОВ, К.Ю. БАСИНСКИЙ

vbarinov@utmn.ru, kbasinsky@mail.ru

УДК 532.59: 532.529.5

НЕЛИНЕЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

АННОТАЦИЯ. Рассмотрена нелинейная краевая задача о распространении волн по свободной поверхности двухфазной (дисперсной) смеси. Для ее решения применен метод переменной во времени частоты, который был разработан для решения нелинейных волновых задач с диссипацией. Получено решение с точностью третьего приближения по малому амплитудному параметру. Аналитически определены нелинейная частота волны и скорость приповерхностного течения Стокса. Они являются функциями времени и зависят от длины и высоты волны (как в классическом случае), а также от концентрации дисперсной фазы. Найдены нелинейные траектории частиц несущей и дисперсной фазы. На основе полученных выражений для траекторий дисперсных частиц аналитически описан нелинейный эффект: при волновом движении более тяжелые по сравнению с несущей фазой дисперсные частицы всплывают, а более легкие притапливаются.

АННОТАЦИЯ. The paper discusses a nonlinear boundary value problem of wave propagation on the free surface of a two-phase (disperse) mixture. To solve the problem, a method of time-variant frequency is applied, which was devised for the solution of nonlinear wave problems with dissipation. A solution has been found to a third order approximation using a small-amplitude parameter. Nonlinear wave frequency and near-surface Stokes flow rate have been defined. They are time functions depending on the wave length and elevation (as in the classical case) and on the dispersed phase concentration. Nonlinear paths of carrier and dispersed phase particles have been found. Basing on the obtained expression for the dispersed particles paths, the nonlinear effect has been described: in wave motion dispersed particles that are heavier than carrier phase particles float, while lighter particles sink.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Нелинейные поверхностные волны, двухфазная среда.

KEY WORDS. Nonlinear surface waves, a two-phase medium.

Исследования распространения волн по свободной поверхности многофазных (в частности, двухфазных или дисперсных) сред представляют теоретический и практический интерес. Они могут быть использованы как для учета влияния примесей на волновые характеристики, так и для изучения переноса взвесей волновым течением (наносов) в прибрежных зонах морей и океанов [1, 2]. Кроме того, определение зависимости концентрации примеси от волновых характеристик является основой расчета степени загрязнения водного бассейна [3]. Двухскоростные модели распространения волн по свободной поверхности слоя дисперсной смеси, в которых учитывались различные межфазные силы, были построены в работах [4, 5]. В них же получены решения соответствующих

краевых задач в линейном приближении, а также аналитические зависимости частоты и декремента затухания волны от концентрации дисперсной фазы. Было установлено, что волновое возмущение концентрации является величиной более высокого порядка малости по сравнению с остальными возмущениями, поэтому для его определения необходимо решение нелинейной задачи. Аналитическое выражение для волнового возмущения концентрации было найдено в работах [3, 6], в них получено решение нелинейной задачи с точностью второго приближения по амплитудному параметру. Это решение позволило аналитически определить нелинейный эффект, который ранее наблюдали только экспериментально. Заключается он в следующем: при волновом движении более легкие по сравнению с несущей фазой дисперсные частицы притапливаются, а более тяжелые всплывают. Однако для более точного определения нелинейных эффектов даже для моножидкостей необходимо находить асимптотические приближения более высокого порядка. Для однородных жидкостей известны нелинейные эффекты Стокса: зависимость частоты от высоты волны; наличие приповерхностного течения, обуславливающего разомкнутость траекторий движения [7, 8]. В отличие от идеальной моножидкости применение прямого метода Стокса к решению нелинейной задачи для двухфазной смеси невозможно из-за наличия диссипативной силы межфазного трения. Для решения нелинейных волновых задач с диссипацией в работах [9, 10] был разработан метод переменной во времени частоты, являющийся обобщением метода Стокса. В настоящей работе этот метод применен к решению нелинейной задачи о волновом движении двухфазной смеси.

Рассматривается бесконечно глубокий слой двухфазной смеси, ограниченный сверху свободной поверхностью $z^* = \zeta^*(t^*, x^*)$. Предполагается: несущая фаза — идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе; дисперсная фаза — сферические частицы радиуса a ; волна длиной λ ($\lambda \gg \zeta_{max}^*$, $\lambda \gg a$) распространяется в направлении оси x^* ; $k/\zeta_{max}^* = \varepsilon$ — малый волновой параметр, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Звездочкой, где необходимо, обозначены физические (размерные) величины. Полагая частоту (фазовую скорость) волны — неизвестной функцией времени, запишем нелинейную краевую задачу [4] в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_0}{(t/c)'} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0) \nabla \cdot \mathbf{v}_1 - \varepsilon \alpha_0 \nabla \cdot (\gamma \mathbf{v}_1) = 0, \quad \frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_2 + \varepsilon \nabla \cdot (\gamma \mathbf{v}_2) = 0, \\
 & \left(\mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_0 \right) \frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - \frac{s \mu_1 \alpha_0}{2(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - r \alpha_0 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \nabla p + \varepsilon \left[\mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_0 \right) (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - \right. \\
 & \left. - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_0 (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2 - r \alpha_0 \gamma (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \frac{s \mu_1 \alpha_0 \gamma}{2(t/c)'} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \right] + \varepsilon^2 \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_0 \gamma [(\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - \\
 & - (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2] = 0,
 \end{aligned}$$

$$\left[\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right] \frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{s \mu_1 (1 - \alpha_o)}{2(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + r(1 - \alpha_o)(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \nabla p + \varepsilon \left\{ \left[\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right] (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2 - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - r \alpha_o \gamma (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \frac{s \mu_1 \alpha_o \gamma}{2(t/c)'} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \right\} + \quad (1)$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma [(\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2] = 0, \quad \mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1z}), \quad \mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2z}),$$

$$\frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \alpha_o) v_{1z} - \alpha_o v_{2z} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} [(1 - \alpha_o) v_{1x} + \alpha_o v_{2x}] - \alpha_o \gamma (v_{2z} - v_{1z}) \right\} +$$

$$+ \varepsilon^2 \alpha_o \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} (v_{2x} - v_{1x}) = 0, \quad z = \varepsilon \xi(t, x),$$

$$p - v_o^2 \xi + \varepsilon \alpha_o (\mu_1 - \mu_2) v_o^2 \gamma \xi = 0, \quad v_o^2 = g/kc_o^2, \quad z = \varepsilon \xi(t, x),$$

$$v_{iz} \rightarrow 0, \quad v_{ix} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad i = 1, 2.$$

Безразмерные величины связаны с физическими равенствами

$$t^* = kc_o t, \quad x = kx^*, \quad z = kz^*, \quad \mu_i = \rho_i^0 / \rho^0, \quad r = R / \rho^0 kc_o, \quad \rho^0 = (1 - \alpha_o) \rho_1^0 + \alpha_o \rho_2^0, \\ c = c^*(t) / c_o = \omega^*(t) / \omega_o, \quad \alpha^* = \varepsilon \alpha_o \gamma, \quad k \xi^* = \varepsilon \xi, \quad v_i^* = \varepsilon c_o v_i, \quad p^* = P_i - P_a + \rho_i^0 g z^* = \varepsilon \rho^0 c_o^2 p.$$

Здесь ω_o, c_o — частота, фазовая скорость линейной волны; α_o, α^* — концентрация дисперсной фазы, ее возмущение; v_i^*, P_i, ρ_i^0 — вектор скорости, давление, истинная плотность i -й фазы; ρ^0, P_a — плотность покоящейся смеси, атмосферное давление; $R = 9\eta/a^2$ — коэффициент межфазного трения (η — динамическая вязкость); коэффициент $s=1; 0$ в зависимости от учета силы присоединенных масс.

Разложением в ряд Маклорена граничные условия сводятся на поверхность $z=0$. Неизвестные функции определяются в виде рядов ε :

$$\mathbf{v}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \mathbf{v}_{in}, \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} p_n, \quad \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \xi_n, \quad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \gamma_n, \quad c = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n a_n(t). \quad (2)$$

Подставив ряды (2) в уравнения и граничные условия (разложенные в окрестности $z=0$) (1) и приравняв коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$, получаем асимптотическое представление задачи (1) в первых трех приближениях.

В первом приближении задача имеет вид: при ε^0

$$-\alpha_o \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + (1 - \alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_{11} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{21} = 0, \quad (3)$$

$$\left(\mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) + \nabla p_1 = 0,$$

для второго приближения: при ε^1

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_o \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + (1 - \alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_{12} = \alpha_o \nabla \cdot (\gamma_1 \mathbf{v}_{11}), \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{22} = -\nabla \cdot (\gamma_1 \mathbf{v}_{21}), \\
 & \left(\mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{12}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial \mathbf{v}_{22}}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{v}_{12}) + \nabla p_2 = r \alpha_o \gamma_1 (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) - \\
 & - \left(\mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) (\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{11} + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o (\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{21} + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} \right), \\
 & \left(\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{22}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \frac{\partial \mathbf{v}_{12}}{\partial t} + \nabla p_2 + r (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{v}_{12}) = \\
 & = - \left(\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) (\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{21} + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{11} + r \alpha_o \gamma_1 (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) + \quad (4) \\
 & + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{v}_{12} = (v_{1x2}, v_{1z2}), \quad \mathbf{v}_{22} = (v_{2x2}, v_{2z2}), \\
 & \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - (1 - \alpha_o) v_{1z2} - \alpha_o v_{2z2} = \alpha_o \gamma_1 (v_{2z1} - v_{1z1}) - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} [(1 - \alpha_o) v_{1x1} + \alpha_o v_{2x1}] + \\
 & + (1 - \alpha_o) \xi_1 \frac{\partial v_{1z1}}{\partial z} + \alpha_o \xi_1 \frac{\partial v_{2z1}}{\partial z}, \quad z = 0, \\
 & p_2 - v_o^2 \xi_2 = \alpha_o (\mu_2 - \mu_1) v_o^2 \gamma_1 \xi_1 - \xi_1 \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad z = 0;
 \end{aligned}$$

для третьего приближения: при ε^2

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_o \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} + (1 - \alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_{13} = \alpha_o \nabla \cdot (\gamma_1 \mathbf{v}_{12} + \gamma_2 \mathbf{v}_{11}) + \alpha_o \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} (ta_2)', \\
 & \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{23} = -\nabla \cdot (\gamma_1 \mathbf{v}_{22} + \gamma_2 \mathbf{v}_{21}) - \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} (ta_2)', \\
 & \left(\mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{13}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial \mathbf{v}_{23}}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_{23} - \mathbf{v}_{13}) + \nabla p_3 = r \alpha_o \gamma_1 (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{v}_{12}) - \\
 & - \left(\mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) [(\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{12} + (\mathbf{v}_{12} \nabla) \mathbf{v}_{11}] + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o [(\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{22} + (\mathbf{v}_{22} \nabla) \mathbf{v}_{21}] + \\
 & + r \alpha_o \gamma_2 (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{22}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{12}}{\partial t} \right) + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} \right) + \\
 & + \mu_1 \left[\frac{s}{2} \alpha_o \frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_o \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} \right] (ta_2)' - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 [(\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{11} - (\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{21}],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) \frac{\partial v_{23}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \frac{\partial v_{13}}{\partial t} + \nabla p_3 + r(1 - \alpha_o)(v_{23} - v_{13}) = \\
 & = - \left(\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) \left[(v_{21} \nabla) v_{22} + (v_{22} \nabla) v_{21} \right] + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 \left(\frac{\partial v_{22}}{\partial t} - \frac{\partial v_{12}}{\partial t} \right) + \\
 & + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \left[(v_{11} \nabla) v_{12} + (v_{12} \nabla) v_{11} \right] + r \alpha_o \gamma_1 (v_{22} - v_{12}) + r \alpha_o \gamma_2 (v_{21} - v_{11}) + \\
 & + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_2 \left(\frac{\partial v_{21}}{\partial t} - \frac{\partial v_{11}}{\partial t} \right) + \left[\left(\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) \frac{\partial v_{21}}{\partial t} + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \frac{\partial v_{11}}{\partial t} \right] (ta_2)' - \\
 & - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 \left[(v_{11} \nabla) v_{11} - (v_{21} \nabla) v_{21} \right], \quad v_{13} = (v_{1x3}, v_{1z3}), \quad v_{23} = (v_{2x3}, v_{2z3}), \\
 & \frac{\partial \xi_3}{\partial t} - (1 - \alpha_o) v_{1z3} - \alpha_o v_{2z3} = \alpha_o \gamma_1 (v_{2z2} - v_{1z2}) + \alpha_o \gamma_2 (v_{2z1} - v_{1z1}) - \frac{\partial \xi_1}{\partial t} (ta_2)' - \\
 & - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left[(1 - \alpha_o) v_{1x2} + \alpha_o v_{2x2} \right] - \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \left[(1 - \alpha_o) v_{1x1} + \alpha_o v_{2x1} \right] + (1 - \alpha_o) \xi_1 \frac{\partial v_{1z2}}{\partial z} + \\
 & + \alpha_o \xi_1 \frac{\partial v_{2z2}}{\partial z} + (1 - \alpha_o) \xi_2 \frac{\partial v_{1z1}}{\partial z} + \alpha_o \xi_2 \frac{\partial v_{2z1}}{\partial z} + \frac{1}{2} (1 - \alpha_o) \xi_1^2 \frac{\partial^2 v_{1z1}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \alpha_o \xi_1^2 \frac{\partial^2 v_{2z1}}{\partial z^2} \\
 & - \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left[(1 - \alpha_o) \frac{\partial v_{1x1}}{\partial z} + \alpha_o \frac{\partial v_{2x1}}{\partial z} \right] + \alpha_o \gamma_1 \xi_1 \left(\frac{\partial v_{2z1}}{\partial z} - \frac{\partial v_{1z1}}{\partial z} \right) + \alpha_o \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \xi_1 (v_{2z1} - v_{1z1}) - \\
 & - \alpha_o \gamma_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} (v_{2x1} - v_{1x1}), \quad z = 0,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

$$p_3 - v_o^2 \xi_3 = \alpha_o (\mu_2 - \mu_1) v_o^2 \left(\gamma_1 \xi_2 + \gamma_2 \xi_1 + \xi_1^2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \right) - \xi_1 \frac{\partial p_2}{\partial z} - \xi_2 \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}, \quad z = 0.$$

Решение линейной задачи (3) имеет вид [4]:

$$v_{ix1} = A e^{z-bt} (M_i \cos \chi + N_i \sin \chi), \quad v_{iz1} = A e^{z-bt} (M_i \sin \chi - N_i \cos \chi), \quad i = 1, 2,$$

$$\gamma_i = 0, \quad p_i = A e^{z-bt} \cos \chi, \quad \xi_i = A v_o^{-2} e^{-bt} \cos \chi, \quad \chi = x - t + \theta,$$

$$\text{где} \quad M_1 = \frac{1}{b^2 + 1} \left[1 + 2(b^2 + 1) \mu_1 \mu_2 (1 - \mu_1) (s + 2\mu_2) / d \right],$$

$$M_2 = \frac{1}{b^2 + 1} \left[1 + 2(b^2 + 1) \mu_1^2 (1 - \mu_2) (s + 2\mu_2) / d \right],$$

$$N_1 = \frac{1}{b^2 + 1} \left[-b + 2(b^2 + 1) \mu_2 (1 - \mu_1) (2r - b\mu_1 (s + 2\mu_2)) / d \right],$$

$$N_2 = \frac{1}{b^2 + 1} \left[-b + 2(b^2 + 1) \mu_1 (1 - \mu_2) (2r - b\mu_1 (s + 2\mu_2)) / d \right],$$

$$d = (2r - b\mu_1 (s + 2\mu_2))^2 + \mu_1^2 (s + 2\mu_2)^2.$$

Здесь b — безразмерный декремент затухания, $\beta = bkc_0$ — размерный декремент. Для декремента затухания и фазовой скорости в [4] получены выражения:

$$c_o^2 = c_g^2 + c_d^2 + c_r^2,$$

$$\beta = k \left\{ \left[-\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{\delta}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{2R/\rho^o k}{3\mu_1(s+2\mu_2)} \right\},$$

где

$$c_g^2 = \frac{g}{k}, \quad c_d^2 = \frac{2\alpha_o(1-\alpha_o)(\rho_1^o - \rho_2^o)^2}{\rho_1^o(s\rho^o + 2\rho_2^o)} \frac{g}{k}, \quad c_r^2 = \frac{\beta}{k^2} \left(3\beta - \frac{4R\rho^o}{\rho_1^o(s\rho^o + 2\rho_2^o)} \right),$$

$$\psi = \frac{3\mu_1(s+2\mu_2)(s\mu_1 + 2\mu)g/k - 4(R/\rho^o k)^2}{12\mu_1^2(s+2\mu_2)^2},$$

$$\delta = \frac{R/\rho^o k}{54\mu_1^3(s+2\mu_2)^3} \left[4(R/\rho^o k)^2 + 9\mu_1(s+2\mu_2)(s\mu_1 - \mu + 3\mu_1\mu_2)g/k \right],$$

Решение задачи второго приближения (4) записывается следующим образом:

$$v_{ix2} = 0, \quad v_{iz2} = A^2 L_i e^{2z-2bt}, \quad i = 1, 2, \quad p_2 = A^2 e^{-2bt} \left[L_3 (e^{2z} - 1) - \frac{1}{2V_0^2} \right],$$

$$\gamma_2 = A^2 L_4 e^{2z-2bt}, \quad \xi_2 = \frac{A^2}{2V_0^4} e^{-2bt} \cos 2\chi,$$

где

$$L_1 = -\frac{\alpha_o}{(1-\alpha_o)} L_2, \quad L_2 = \frac{(1-\alpha_o)H}{2(r-b(s\mu_1+2\mu))}, \quad L_4 = \frac{(1-\alpha_o)H}{2b(r-b(s\mu_1+2\mu))},$$

$$L_3 = \frac{-(1-\alpha_o)(\mu_1 r - b\mu_1(s+2\mu_2))(M_1^2 + N_1^2) - \alpha_o(\mu_2 r - b\mu_1(s+2\mu_2))(M_2^2 + N_2^2)}{2(r-b(s\mu_1+2\mu))},$$

$$H = \mu_1(s+2)(M_1^2 + N_1^2) - (s\mu_1 + 2\mu_2)(M_2^2 + N_2^2).$$

Подставив выражения первого и второго приближений в уравнения и граничные условия задачи (5), получим задачу для третьего приближения в явном виде

$$\begin{aligned}
& -\alpha_o \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} + (\mathbf{1} - \alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_{13} = 2\alpha_o A^3 e^{3z-3bt} L_4 (M_1 \sin \chi - N_1 \cos \chi), \\
& \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{23} = 2A^3 e^{3z-3bt} L_4 (N_2 \cos \chi - M_2 \sin \chi), \\
& \left(\mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{1x3}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial \mathbf{v}_{2x3}}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_{2x3} - \mathbf{v}_{1x3}) + \frac{\partial p_3}{\partial x} = A e^{z-bt} / 2 \left\{ \mu_1 \left[(2 + s \alpha_o) \cdot \right. \right. \\
& \cdot (N_1 + bM_1) - s \alpha_o (N_2 + bM_2) \left. \right] (ta_2)' + A^2 e^{2z-2bt} \left[s \mu_1 \alpha_o L_4 (N_1 - N_2) - 2 \alpha_o r L_4 \cdot \right. \\
& \cdot (M_1 - M_2) - \mu_1 (2 + s) L_1 M_1 \left. \right] \cos \chi + \left\{ \mu_1 \left[s \alpha_o (M_2 - bN_2) - (2 + s \alpha_o) (M_1 - bN_1) \right] \cdot \right. \\
& \cdot (ta_2)' - A^2 e^{2z-2bt} \left[\mu_1 (2 + s) L_1 N_1 + s \mu_1 \alpha_o L_4 (M_1 - M_2) + 2 \alpha_o r L_4 (N_1 - N_2) \right] \left. \right\} \sin \chi \left. \right\}, \\
& \left(\mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{1z3}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial \mathbf{v}_{2z3}}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_{2z3} - \mathbf{v}_{1z3}) + \frac{\partial p_3}{\partial z} = A e^{z-bt} / 2 \left\{ \mu_1 \left[(2 + s \alpha_o) \cdot \right. \right. \\
& \cdot (M_1 - bN_1) - s \alpha_o (M_2 - bN_2) \left. \right] (ta_2)' + A^2 e^{2z-2bt} \left[s \mu_1 \alpha_o L_4 (M_1 - M_2) + 2 \alpha_o r L_4 \cdot \right. \\
& \cdot (N_1 - N_2) + \mu_1 (6 + s + 2s \alpha_o) L_1 N_1 - 2s \mu_1 \alpha_o L_2 N_2 \left. \right] \cos \chi + \left\{ \mu_1 \left[(2 + s \alpha_o) \cdot \right. \right. \\
& \cdot (N_1 + bM_1) - s \alpha_o (N_2 + bM_2) \left. \right] (ta_2)' + A^2 e^{2z-2bt} \left[s \mu_1 \alpha_o L_4 (N_1 - N_2) - 2 \alpha_o r L_4 \cdot \right. \\
& \cdot (M_1 - M_2) - \mu_1 (6 + s + 2s \alpha_o) L_1 M_1 + 2s \mu_1 \alpha_o L_2 M_2 \left. \right] \left. \right\} \sin \chi \left. \right\}, \\
& \left(\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_2 (1 - \alpha_o) \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{2x3}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_2 (1 - \alpha_o) \frac{\partial \mathbf{v}_{1x3}}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial x} + r (1 - \alpha_o) (\mathbf{u}_{23} - \mathbf{u}_{13}) = \\
& = A e^{z-bt} / 2 \left\{ \left[2 \mu_2 (N_2 + bM_2) - s \mu_2 (1 - \alpha_o) (N_1 + bM_1 - N_2 - bM_2) \right] (ta_2)' + \right. \\
& + A^2 e^{2z-2bt} \left[s \mu_2 \alpha_o L_4 (N_1 - N_2) - (2 \mu_2 + s \mu_2) L_2 M_2 - 2 \alpha_o r L_4 (M_1 - M_2) \right] \cos \chi + \\
& + \left[s \mu_2 (1 - \alpha_o) (M_1 - bN_1 - M_2 + bM_2) + 2 \mu_2 (bN_2 - M_2) \right] (ta_2)' + \\
& \left. - A^2 e^{2z-2b} \left[s \mu_2 \alpha_o L_4 (M_1 - M_2) + (2 \mu_2 + s \mu_2) L_2 N_2 + 2 \alpha_o r L_4 (N_1 - N_2) \right] \sin \chi \right\},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_4 (1 - \alpha_o) \right) \frac{\partial v_{2z3}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_4 (1 - \alpha_o) \frac{\partial v_{1z3}}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial z} + r(1 - \alpha_o)(v_{23} - v_{13}) = \\
 & = A^3 e^{z-bt} / 2 \left\{ \left[2\mu_2 (M_2 - bN_2) - s\mu_4 (1 - \alpha_o) (M_1 - bN_1 - M_2 + bN_2) \right] (ta_2)' + \right. \\
 & + A^2 e^{2z-2bt} \left[s\mu_4 \alpha_0 L_4 (M_1 - M_2) + (6\mu_2 + 3s\mu_4 - 2s\alpha_o \mu_4) L_2 N_2 + 2\alpha_o r L_4 (N_1 - N_2) - \right. \\
 & \left. \left. - 2s\mu_4 (1 - \alpha_o) L_1 N_1 \right] \right\} \cos \chi + \left\{ \left[2\mu_2 (N_2 + bM_2) - s\mu_4 (1 - \alpha_o) (N_1 + bM_2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - N_2 - bN_2) \right] (ta_2)' + A^2 e^{2z-2bt} \left[2s\mu_4 (1 - \alpha_o) L_4 M_1 - 2\alpha_o r L_4 (M_1 - M_2) + s\mu_4 \alpha_0 L_4 \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot (N_1 - N_2) - (6\mu_2 + 3s\mu_4 - 2s\alpha_o \mu_4) L_2 M_2 \right] \right\} \sin \chi, \\
 & \frac{\partial \xi_3}{\partial t} - (1 - \alpha_o) v_{1z3} - \alpha_o v_{2z3} = \frac{A^3 e^{-3bt}}{8v_0^6} \left(9e^{-2bt} [\sin 3\chi - b \cos 3\chi] + \left\{ 8bv_0^4 A^2 e^{2bt} \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot (ta_2)' + 16v_0^4 [\alpha_0 L_2 + (1 - \alpha_o) L_1 - v_0^2 \alpha_0 L_4 d^{-1} (\mu_4 - \mu_2) (2r - b\mu_4 (s + 2\mu_2))] + b \right\} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \cos \chi + \left\{ 5 - 8v_0^4 A^2 e^{2bt} (ta_2)' + 16v_0^6 \alpha_0 \mu_4 L_4 d^{-1} (s + 2\mu_2) (\mu_4 - \mu_2) \right\} \sin \chi \right), \quad z = 0, \\
 & p_3 - v_0^2 \xi_3 = -\frac{A^3 e^{-3bt}}{8v_0^4} \left\{ 3 \cos 3\chi + \left[5 + 16v_0^2 L_3 + 8\alpha_0 v_0^4 L_4 (\mu_4 - \mu_2) \right] \cos \chi \right\}, \quad z = 0.
 \end{aligned}$$

Для решения задачи (6) полагаем амплитудные коэффициенты функциями времени, подлежащими определению. Тогда с точностью третьего приближения решение нелинейной задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 c &= 1 + \varepsilon^2 A^2 \frac{1 - e^{-2bt}}{bt} C_a, \\
 v_{1x} &= A e^{z-bt} (M_1 \cos \chi + N_1 \sin \chi) + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left\{ e^{2z-2bt} Q_1 \sin \chi + \left[D_{v3} (e^{-2bt} - 1) + e^{2z-2bt} R_1 \right] \right\} \cos \chi, \\
 v_{2x} &= A e^{z-bt} (M_2 \cos \chi + N_2 \sin \chi) + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left[\left(e^{2z-2bt} Q_2 - C_{w4} - D_{w4} e^{-2bt} \right) \sin \chi + \right. \\
 & \left. + (C_{v4} + D_{v4} e^{-2bt} + e^{2z-2bt} R_2) \cos \chi \right], \\
 v_{1z} &= A e^{z-bt} (M_1 \sin \chi - N_1 \cos \chi) + \varepsilon A^2 L_1 e^{2z-2bt} + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left[\left(D_{v3} (e^{-2bt} - 1) + e^{2z-2bt} Q_3 \right) \sin \chi + \right. \\
 & \left. + e^{2z-2bt} R_3 \cos \chi \right],
 \end{aligned}$$

$$v_{2z} = Ae^{z-bt}(M_2 \sin \chi - N_2 \cos \chi) + \varepsilon A^2 L_2 e^{2z-2bt} + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left[(C_{v4} + D_{v4} e^{-2bt} + e^{2z-2bt} Q_4) \sin \chi + (C_{w4} + D_{w4} e^{-2bt} + e^{2z-2bt} R_4) \cos \chi \right],$$

$$p = Ae^{z-bt} \cos \chi + \varepsilon A^2 e^{-2bt} \left[L_3 (e^{2z} - 1) - \frac{1}{2V_0^2} \right] + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left[(C_{v5} + D_{v5} e^{-2bt} + e^{2z-2bt} Q_5) \sin \chi + (C_{w5} + D_{w5} e^{-2bt} + e^{2z-2bt} R_5) \cos \chi \right],$$

$$\gamma = \varepsilon A^2 L_4 e^{2z-2bt} + \varepsilon^2 A^3 e^{3z-3bt} [Q_6 \sin \chi + R_6 \cos \chi],$$

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{A}{V_0^2} e^{-bt} \cos \chi + \varepsilon \frac{A^2}{2V_0^4} e^{-2bt} \cos 2\chi + \varepsilon^2 e^{-bt} A^3 \left[3e^{-2bt} A^3 8^{-1} V_0^{-6} \cos 3\chi + \right. \\ & + \left. \left((1+9b^2)^{-1} e^{-2bt} \left\{ 2\alpha_0 d^{-1} L_4 (\mu_1 - \mu_2) \left[6br + (\mu_1 s + 2\mu_2)(1-3b^2) \right] - 2V_0^{-2} \cdot \right. \right. \right. \\ & \cdot (1+3b^2) C_a + (1-\alpha_0)(Q_3 - 3bR_3 + D_{v3}) + \alpha_0(Q_4 - 3bR_4 + D_{v4} - 3bD_{w4}) + 8^{-1} V_0^{-6} \cdot \\ & \cdot (5-3b^2) \left. \right\} + (1+b^2)^{-1} \left[(1-\alpha_0)C_{v3} + \alpha_0(C_{v4} - bC_{w4}) \right] \cos \chi + \left. \left((1+9b^2)^{-1} e^{-2bt} \cdot \right. \right. \\ & \cdot \left. \left\{ 4\alpha_0 d^{-1} L_4 (\mu_1 - \mu_2) \left[r - 2b(\mu_1 s + 2\mu_2) \right] + 4V_0^{-2} b C_a - (1-\alpha_0)(R_3 + 3bQ_3 + \right. \right. \\ & + 3bD_{v3}) - \alpha_0(R_4 + 3bQ_4 + D_{w4} + 3bD_{v4}) + 2V_0^{-6} b \left. \right\} - (1+b^2)^{-1} \left[(1-\alpha_0) b C_{v3} + \right. \\ & \left. \left. + \alpha_0(C_{w4} + bC_{v4}) \right] \right] \sin \chi \left. \right]. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты третьего приближения не приведены из-за своей громоздкости.

Из (7) следует, что с течением времени частота (фазовая скорость) стремится к значению, соответствующему линейной задаче. На рис. 1 приведена зависимость фазовой скорости волны c^* от времени t^* при $\rho^0=1500\text{кг/м}^3$ и $\rho^0=500\text{кг/м}^3$ ($A=1, \lambda=5\text{м}, \rho l^0=1000\text{кг/м}^3, \eta=10^{-3} \text{кг/(м}^*\text{с)}, a=0,15 \cdot 10^{-2} \text{м}$). Фазовая скорость в случае, когда частицы дисперсной фазы имеют большую, чем несущая фаза плотность, больше, чем в случае более легких частиц. При этом из графиков зависимости амплитуды волны от времени, приведенных на рис. 2, видно, что волновое движение затухает быстрее, чем фазовая скорость достигает линейного значения.

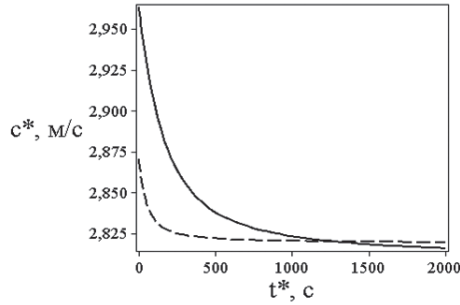


Рис.1. Зависимость $c^*(t^*)$: --- $\rho_2^0=500\text{кг/м}^3$,
— $\rho_2^0=1500\text{кг/м}^3$.

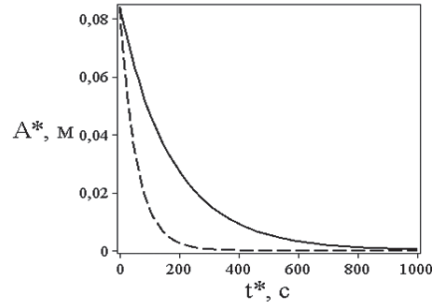


Рис.2. Зависимость амплитуды от t^* :
--- $\rho_2^0=500\text{кг/м}^3$, — $\rho_2^0=1500\text{кг/м}^3$.

Безразмерные координаты частиц несущей и дисперсной фазы удовлетворяют уравнениям

$$x_i = \chi_i + \gamma_i t_i - \theta, \quad \chi_{it} = \varepsilon \left(\frac{t_i \gamma_i}{c} \right)' v_{xi} - (t_i \gamma_i)', \quad z_{it} = \varepsilon \left(\frac{t_i \gamma_i}{c} \right)' v_{zi}, \quad (8)$$

где $\gamma_i(t) = \omega / \sigma_i$, σ_i — частота колебаний частицы i -ой фазы.

Решение (8) находим в виде рядов по малому параметру

$$\chi_i = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \chi_{ij}, \quad z = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_{ij}, \quad \gamma_i = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \gamma_{ij}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (7), ряды (9) в уравнения движения (8), для определения первых трех коэффициентов получим следующие уравнения:

$$\frac{d\chi_{i0}}{dt_i} = -1, \quad \frac{dz_{i0}}{dt_i} = 0,$$

$$\frac{d\chi_{i1}}{dt_i} = A e^{\tilde{z}_{i0} - bt_i} [M_i \cos \chi_{i0} + N_i \sin \chi_{i0}] - (t_i \gamma_{i1})',$$

$$\frac{dz_{i1}}{dt_i} = A e^{\tilde{z}_{i0} - bt_i} [M_i \sin \chi_{i0} - N_i \cos \chi_{i0}], \quad \chi_{i0} = x_{i0} + d,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_{i2}}{dt_i} = A e^{\tilde{z}_{i0} - bt_i} \left\{ \left[N_i x_{i1} + M_i z_{i1} + M_i (t_i \gamma_{i1})' - b M_i t_i \gamma_{i1} \right] \cos \chi_{i0} + \right. \\ \left. + \left[N_i z_{i1} - M_i x_{i1} + N_i (t_i \gamma_{i1})' - b N_i t_i \gamma_{i1} \right] \sin \chi_{i0} - (t_i \gamma_{i2})' \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{dz_{i2}}{dt_i} = Ae^{\tau_{i0}-bt_i} \left\{ \left[N_i x_{i1} + M_i z_{i1} + M_i (t_i \gamma_{i1})' - bM_i t_i \gamma_{i1} \right] \sin \chi_{i0} - \right. \\ \left. - \left[N_i z_{i1} - M_i x_{i1} + N_i (t_i \gamma_{i1})' - bN_i t_i \gamma_{i1} \right] \cos \chi_{i0} + Ae^{\tau_{i0}-bt_i} L_i \right\},$$

Сначала имеем

$$\chi_{i0} = \chi_{iL} - t_i = x_{iL} - t_i + \theta, \quad z_{i0} = z_{iL},$$

где χ_{iL} , z_{iL} — лагранжевы координаты частицы в состоянии покоя.

Определяя периодическое решение для χ_{iL} , z_{iL} , получим

$$\gamma_{i1} = 0, \quad \chi_{i1} = \frac{Ae^{\tau_{iL}-bt_i}}{b^2 + 1} \left[(N_i - bM_i) \cos \chi_{iL} - (M_i + bN_i) \sin \chi_{iL} \right],$$

$$z_{i1} = \frac{Ae^{\tau_{iL}-bt_i}}{b^2 + 1} \left[(M_i + bN_i) \cos \chi_{iL} + (N_i - bM_i) \sin \chi_{iL} \right],$$

Уравнения для определения траектории частицы жидкости во втором приближении примут вид

$$\frac{dx_{i2}}{dt_i} = \frac{A^2 e^{2z_{iL}-2bt_i}}{b^2 + 1} (M_i^2 + N_i^2) - (t_i \gamma_{i2})', \quad \frac{dz_{i2}}{dt_i} = A^2 e^{2z_{iL}-2bt_i} \left(L_i - \frac{bM_i^2 + bN_i^2}{b^2 + 1} \right).$$

Разрешая эти уравнения, получим

$$x_{i2} = 0, \quad z_{i2} = \frac{A^2 e^{2z_{iL}}}{2b} (1 - e^{-2bt_i}) \left(L_i - \frac{bM_i^2 + bN_i^2}{b^2 + 1} \right), \\ \gamma_{i2} = \frac{A^2 e^{2z_{iL}}}{2bt_i (b^2 + 1)} (1 - e^{-2bt_i}) (M_i^2 + N_i^2).$$

Величина $u_{si} = c - \sigma_i/k$ представляет собой переносную скорость. Ее приближенное выражение имеет вид

$$u_{si} = \varepsilon^2 c_0 \frac{A^2 e^{2z_{iL}}}{2bt_i (b^2 + 1)} (1 - e^{-2bt_i}) (M_i^2 + N_i^2).$$

Переносная скорость зависит не только от глубины, на которой находится частица, но и от времени, с течением которого затухает. Движение частиц состоит из двух затухающих движений неперидического и вращательного. На рис. 3, 4 приведены траектории частиц дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$.

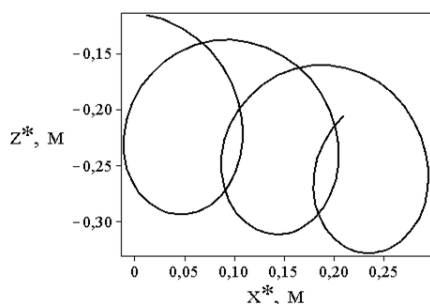


Рис. 3. Траектория движения частицы при $\rho_2^0=500\text{кг/м}^3$

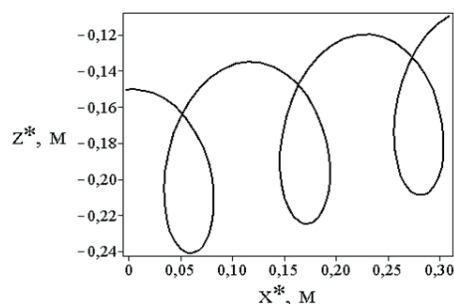


Рис. 4. Траектория движения частицы при $\rho_2^0=1500\text{кг/м}^3$

Из графиков видно, что более легкие частицы заглубляются по мере движения, а более тяжелые, наоборот, поднимаются ближе к свободной поверхности. Что приводит к увеличению

(уменьшению) концентрации более тяжелых (легких) частиц в приповерхностном слое. Это явление, имеющее нелинейный характер, было аналитически обнаружено в работе [3]. Полученное в данной работе более точное решение подтверждает и уточняет этот нелинейный эффект.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешков Ю.З. Распространение примесей в океане // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2001. Вып. 1. С. 12-20.
2. Нуднер И.С., Максимов В.В., Майоров Ю.Б., Бабчик Д.В. Моделирование динамики наносов в прибрежной зоне // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, №S2. С. 60-77.
3. Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Нелинейная задача о поверхностных волнах на двухфазной смеси // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №12. С. 1870-1883.
4. Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Распространение волн по свободной поверхности двухфазной смеси // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2003. №6. С. 94-102.
5. Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Волны на свободной поверхности двухфазной среды // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43, №4. С. 27-35.
6. Алешков Ю.З., Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Нелинейные поверхностные волны на слое двухфазной среды // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2003. Сер. 1. Вып. 4. С. 64-75.
7. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
8. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.
9. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Нелинейные волны Стокса на поверхности слабвязкой жидкости // Вестник Удмуртского университета. 2011. № 2. С. 112-122.
10. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слабвязкой жидкости // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2011. Сер. 10. Вып. 2. С. 9-16.

REFERENCES

1. Aleshkov, Ju.Z. Diffusion of Impurities in the Ocean. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta — Saint Petersburg University Herald*. 2001. Series 1. Issue. 1. Pp. 12-20.
2. Nudner, I.S., Maksimov, V.V., Majorov, Ju.B., Babchik, D.V. Modelling of Pump Dynamics in the Coastal Area. *Vychislitel'nye tehnologii — Computational Technologies*. 2008. Vol. 13, № S2. Pp. 60-77.
3. Barinov, V.A., Butakova, N.N. A Nonlinear Problem of Surface Waves on a Two-Phase Mixture. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2003. Vol. 43, №. 12. Pp. 1870-1883.
4. Barinov, V.A., Butakova, N.N. Propagation of Waves on the Free Surface of a Two-Phase Mixture. *Izvestija RAN — Bulletin of the Russian Academy of Sciences*. 2003. №6. Pp. 94-102.
5. Barinov, V.A., Butakova, N.N. Waves on the Free Surface of a Two-Phase Medium. *Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2002. Vol. 43, № 4. Pp. 27-35.
6. Aleshkov, Ju.Z., Barinov, V.A., Butakova, N.N. Nonlinear Surface Waves on a Layer of a Two-Phase Medium. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta — Saint Petersburg University Herald*. 2003. Series 1. Issue 4. Pp. 64-75.
7. Sretenskij, L.N. *Teorija volnovyh dvizhenij zhidkosti* [Theory of Wave Motion in Fluid]. M.: Nauka, 1977. 816 p.
8. Aleshkov, Ju.Z. *Teorija voln na poverhnosti tjazhelej zhidkosti* [Wave Theory for Heavy Liquid Surface]. L.: Leningrad University Publ., 1981. 196 p.
9. Barinov, V.A., Basinskij, K.Ju. Nonlinear Stokes Waves on the Surface of Low-Viscosity Fluid. *Vestnik Udmurtskogo universiteta — Udmurt University Herald*. 2011. № 2. Pp. 112-122.
10. Barinov, V.A., Basinskij, K.Ju. The Solution of a Nonlinear Problem of Waves on the Surface Weakly-Viscous Fluid. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta — Saint Petersburg University Herald*. 2011. Series 10. Issue. 2. Pp. 9-16.