

© С.П. ПИРОГОВ, А.Ю. ЧУБА, С.М. ДОРОФЕЕВ

*piro-gow@yandex.ru, aleksandr-chuba@mail.ru*

УДК 622.691.4

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ МАНОМЕТРИЧЕСКОЙ ТРУБЧАТОЙ ПРУЖИНЫ С УЧЕТОМ МАССЫ ЖЕСТКОГО НАКОНЕЧНИКА**

*АННОТАЦИЯ. Представлена математическая модель манометрической трубчатой пружины, на основании которой можно рассчитать частоты собственных колебаний данных пружин с учетом массы жесткого наконечника.*

*Экспериментальные исследования собственных частот колебаний трубчатых пружин с различной толщиной стенки показали отклонения расчетных значений от экспериментальных. Это объясняется тем, что к концу трубки припаивается жесткий наконечник, а масса жесткого наконечника оказывает значительное влияние на собственную частоту колебаний пружины. Поэтому возникла необходимость при расчетах собственных частот колебаний манометрических трубчатых пружин учитывать массы наконечников.*

*Трубчатая пружина рассматривается как изогнутый стержень, совершающий движение в плоскости кривизны центральной оси. Один конец стержня жестко закреплен, а другой жестко соединен с грузом.*

*Уравнения движения элемента  $Rd\varphi$  трубки получены в проекциях на нормаль и касательную в соответствии с Принципом Даламбера (с учетом силы инерции). Для учета массы наконечника плотность пружины считается переменной по длине (в месте закрепления наконечника плотность возрастает скачкообразно на определенную величину). В сечении жесткого закрепления пружины касательное, нормальное перемещения и угол поворота поперечного сечения трубки равны нулю, а на свободном (противоположном) конце изгибающий момент, перерезывающие, растягивающие усилия равны нулю.*

*Для решения полученных уравнений применяется метод Бубнова-Галеркина.*

*SUMMARY. The article contains a mathematic model of manometric tubular spring, which is used to calculate proper oscillation frequency of these spring with respect to the mass of the rigid point.*

*Experimental studies of proper oscillation frequency of tubular springs with various wall thickness have shown the deviations of calculated values from experimental. It can be explained by the rigid point, which is welded to the end of the tube, and the mass of the rigid point largely interferes with the proper oscillation frequencies of the spring. So, it is necessary to account for the mass of the rigid point when calculating proper oscillation frequency of manometric tubular springs.*

*The tubular spring is described as a bent rod moving in the curvature plain of the central axis. One end of the rod is rigidly fixed and the other end is rigidly loaded.*

*The equation models for a tubular element were obtained for normal and tangent projections in line with the D'Alembert's principle (which allows for the inertial forces). To take into account the mass of the point, the density of the string is considered changeable throughout the whole length — at the bedding point of the load it increases intermittently by a certain value. At the section of the rigid string fixture*

plane the tangent and normal transitions as well as the angle of rotation of tubular cross-section are equal to zero, and at the free (opposite) end the bending moment, cutting and tensile strains are equal to zero, too.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Собственные колебания, манометрическая трубчатая пружина, математическая модель.

**KEY WORDS.** Proper oscillation, manometric tubular spring, mathematical model.

Трубчатая манометрическая пружина представляет собой изогнутую трубку некругового сечения, способную деформироваться под действием давления, поэтому используется в качестве датчиков приборов для измерения и регулирования давления и температуры.

В работах [1,2] для определения собственных частот колебаний трубчатой пружины использовалась ее динамическая модель, представляющая собой полый изогнутый стержень. Для определения достоверности расчетов были проведены экспериментальные исследования собственных частот колебаний трубчатых пружин с различной толщиной стенки, предназначенных для измерения давления от 0,1 до 25 МПа [3].

Экспериментальные исследования показали, что отклонения расчетных значений от теоретических систематически возрастают с уменьшением толщины стенки трубки (табл.1).

Таблица 1

Значения частот собственных колебаний стальных пружин

Номинальное давление, $P_{ном}$ , МПа	0,1	0,25	0,4	0,6	1,0	1,6	2,5	4,0	6,0	10,0
Толщина стенки $h$ , мм	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,6	0,7	0,8	1
$\nu$ , Гц (опыт)	49,3	75	95,5	109	157	127	197	235	251	277
$\nu$ , Гц (расчет)	89,3	139	160	175	198	180	235	274	275	301
Отклонение, %	81,1	85,3	67,5	60,6	26,1	41,7	19,3	16,6	9,6	8,7
$m_{након} / M_{труб}$	0,965	0,635	0,523	0,388	0,197	0,287	0,132	0,116	0,101	0,08

Это явление объясняется тем, что к концу трубки припаивается жесткий наконечник, служащий для герметизации полости и соединения с исполнительным механизмом. Оказалось, что масса жесткого наконечника, величина которой, как видно из таблицы, была в пределах от 0,08 до 0,965 от массы трубки, оказывает значительное влияние на собственную частоту колебаний пружины. После удаления наконечника совпадение частот было в пределах 5-10% во всем диапазоне давлений. Поэтому возникла необходимость при расчетах собственных частот колебаний манометрических трубчатых пружин учитывать массы наконечников.

В данной работе предлагается математическая модель для определения собственных частот манометрической трубчатой пружины с наконечником. Практический интерес представляют лишь несколько низших собственных ча-

стот. В основу модели положены уравнения, использованные в [4]. В этих уравнениях не учитывается осевая деформация пружины. Для реальных манометрических пружин осевая жесткость на несколько порядков превосходит изгибную, поэтому и собственные частоты осевых и изгибных колебаний также отличаются на порядки. А это накладывает ограничения на выбор метода решения. Если пренебречь деформацией оси, то исключаются осевые колебания и несколько упрощается решение.

Будем рассматривать трубчатую пружину как изогнутый стержень, совершающий движение в плоскости кривизны центральной оси (рис.1).

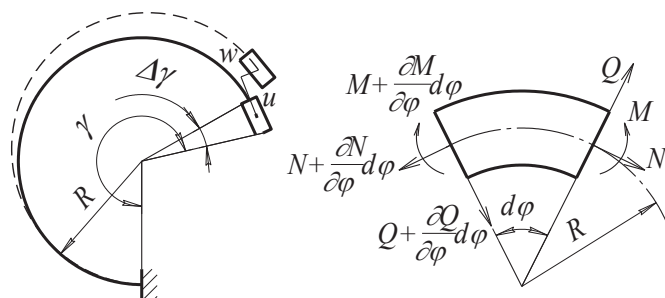


Рис. 1. Трубчатая пружина и ее элемент

Один конец стержня жестко закреплен, а на другом находится груз массой  $m_{нак}$ .

Из условия нерастяжимости оси трубки  $\epsilon=0$  следует, что продольное  $u$  и радиальное  $w$  перемещения связаны зависимостью [4]

$$\frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{w}{R} = 0,$$

где  $R$  — радиус кривизны центральной оси.

Угол поворота поперечного сечения трубки в процессе движения определяется формулой

$$\vartheta = \frac{u}{R} - \frac{\partial w}{R \partial \varphi}.$$

Изменение кривизны  $\chi$  центральной оси равно производной от угла поворота по длине дуги

$$\chi = \frac{\partial \vartheta}{R \partial \varphi} = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right).$$

Изгибающий момент в сечении трубки

$$M = - \frac{\chi E J K_k}{(1 - \mu^2)} = - \frac{E J K_k}{R^2 (1 - \mu^2)} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right),$$

где  $E$  — модуль упругости материала трубки;  $J$  — момент инерции сечения;  $K_k$  — коэффициент Кармана;  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Составим уравнение движения элемента  $R d\varphi$  трубки.

В соответствии с принципом Даламбера [5, 6] проектируя приложенные к элементу силы (с учетом силы инерции —  $m_0 R d\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ , где  $m_0$  — погонная масса) на нормаль, получаем

$$m_0 R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + N = 0, \quad (1)$$

где,  $Q$  — поперечная сила;  $N$  — продольная сила.

Равенство нулю суммы проекций сил на направление касательной приводит к уравнению

$$m_0 R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q - \frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0. \quad (2)$$

Уравнение моментов

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = QR. \quad (*)$$

Продифференцируем уравнение (1) по  $\varphi$ , при этом учтем, что в общем случае погонная масса может быть переменной, получим

$$\frac{d}{d\varphi} \left( m_0 R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0.$$

Выразим отсюда  $\partial N / \partial \varphi$  и подставим в (2):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (m_0 R^2 w) + m_0 R^2 u \right) + \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} + Q = 0.$$

Подставим сюда выражение для  $Q$  из (\*), получим уравнение в перемещениях

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (m_0 R^2 w) + m_0 R^2 u \right) - \frac{EJK_k}{R^3(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right) = 0.$$

Исключим  $w$  с помощью условия нерастяжимости и поделим уравнение на  $-\frac{EJK_k}{R^3(1-\mu^2)}$ , придем к уравнению, в которое входит только переменная  $u$ :

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( H \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - Hu \right) = 0, \quad (3)$$

здесь  $H = \frac{\rho S R^4 (1-\mu^2)}{EJK_k}$ .

Полученное уравнение подобно уравнению для кругового кольца [7, 8]. Для учета массы наконечника имеется два варианта.

*Первый:* к концу трубки можно приложить силы инерции, действующие на наконечник, [9], но в этом случае сильно усложняются граничные условия на свободном конце.

*Второй:* считать погонную плотность трубки переменной по длине. Здесь применяется именно этот вариант.

Возьмем зависимость  $\rho(\varphi)$  в виде:

$$\rho(\varphi) = \begin{cases} \rho_0, & 0 \leq \varphi \leq \gamma - \Delta\gamma \\ \rho_0 + \rho_1, & \gamma - \Delta\gamma \leq \varphi \leq \gamma \end{cases}$$

где  $\rho_0$  — плотность материала трубки,  $\rho_1$  — удельная масса наконечника,  $\Delta\gamma$  — угол, ограничивающий наконечник.

В точке  $\varphi=0$  перемещения и угол поворота поперечного сечения трубки равны нулю, что приводит к следующим граничным условиям:

При  $\varphi=0$  :  $u = 0$ ,  $w = 0$ ,  $\vartheta = 0$ .

Учитывая условие нерастяжимости и выражение для  $\vartheta$ , получим главные границы условия:

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4)$$

На свободном конце  $\varphi=\gamma$  изгибающий момент, перерезывающая и осевая силы равны нулю, что приводит к единственным граничным условиям:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \frac{\partial^5 u}{\partial \varphi^5} + \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} + H \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (5)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде [5]:

$$u(\varphi, t) = \sum U(\varphi) \cdot \sin(\omega t), \quad (6)$$

$\omega$  — собственная частота колебаний.

Подставляя (6) в уравнение (3) и в граничные условия (4), (5), получим

$$\frac{\partial^6 U}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \omega^2 \frac{d}{d\varphi} \left( H \frac{dU}{d\varphi} \right) + \omega^2 H U = 0. \quad (7)$$

$$\text{Граничные условия при } \varphi=0: \quad U = 0, \quad U' = 0, \quad U'' = 0 \quad (8)$$

$$\text{при } \varphi=\gamma: \quad \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^4 U}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \frac{\partial^5 U}{\partial \varphi^5} + \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} - \omega^2 H \frac{dU}{d\varphi} = 0. \quad (9)$$

В этих уравнениях  $H = H_0 + H_1 \cdot \eta(\varphi - \varphi_0)$  — зависит от  $\varphi$ ,  $H_0$  и  $H_1$  — const,  $\eta(\varphi)$  — единичная функция.

Задача (7), (8), (9) — задача на собственные значения. Для ее решения применим метод Бубнова-Галеркина [10, 11]. Функцию  $U(\varphi)$  представим в виде:

$$U(\varphi) = \sum a_i v(\varphi), \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $a_i$  — неизвестные коэффициенты,  $v_j(\varphi)$  — заданные функции, которые должны удовлетворять главным граничным условиям (8).

Домножим (7) на  $v_j(\varphi)$ ,  $j=1, \dots, n$  и проинтегрируем от 0 до  $\gamma$ .

$$\int_0^\gamma \left\{ \frac{\partial^6 U}{\partial \varphi^6} v_j + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial \varphi^4} v_j + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} v_j - \omega^2 \frac{d}{d\varphi} \left( H \frac{dU}{d\varphi} \right) v_j + \omega^2 H U v_j \right\} d\varphi = 0.$$

С помощью интегрирования по частям преобразуем это выражение.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^5 U}{\partial \varphi^5} + 2 \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \omega^2 H \cdot \frac{dU}{d\varphi} \right) v_j \Big|_0^\gamma - \left( \frac{\partial^4 U}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial v_j}{\partial \varphi} \Big|_0^\gamma + \left( \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial^2 v_j}{\partial \varphi^2} \Big|_0^\gamma - \\ & - \int_0^\gamma \left\{ \left( \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \cdot \left( \frac{\partial^3 v_j}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v_j}{\partial \varphi} \right) + \omega^2 H \left( \frac{dU}{d\varphi} \frac{\partial v_j}{\partial \varphi} + U v_j \right) \right\} d\varphi = 0. \end{aligned}$$

В силу граничных условий (8) и (9) внеинтегральные члены равны нулю, получим:

$$\int_0^\gamma \left\{ \left( \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \cdot \left( \frac{\partial^3 v_j}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v_j}{\partial \varphi} \right) + \omega^2 H \left( \frac{dU}{d\varphi} \frac{\partial v_j}{\partial \varphi} + U v_j \right) \right\} d\varphi = 0.$$

Для решения задачи остается подобрать пробные функции  $v_j(\varphi)$ .

Предлагаемая математическая модель движения манометрической трубчатой пружины позволяет определить частоты собственных колебаний с учетом массы жесткого наконечника.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пирогов С.П., Чуба А.Ю. Расчет частот собственных колебаний манометрических трубчатых пружин // Известия вузов. Приборостроение. 2012. №1. С. 39-43.
2. Пирогов С.П., Чуба А.Ю. Сравнительный анализ динамических моделей трубчатых манометрических пружин // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. №4. Серия «Физико-математические науки. Информатика». С. 114-118.
3. Гетц А.Ю., Долгушин Ю.С., Мачкин В.И., Чуба А.Ю., Пирогов С.П., Смолин Н.И. Экспериментальное исследование собственных частот колебаний манометрических пружин // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2008. №2. С. 105-107.
4. Гриднев М.П. Исследование и разработка манометрического прибора, устойчивого в условиях вибрации и пульсации давления: Автореф... канд. техн. наук. Томск, 1969. 18 с.
5. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1988. 712 с.
6. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1990. 607 с.
7. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
8. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. В.Н. Челомей. Т.3. Колебания машин, конструкций и их элементов / Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1980. 544 с.
9. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. 2-е изд., переработ. и доп. М.: Наука, 1984. 384 с.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 200 с.
11. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

## REFERENCES

1. Pirogov, S.P., Chuba, A.Ju. Calculation of proper oscillation frequency of manometric tubular springs. *Izvestija vuzov. Priborostroenie — Proceedings of Institutions of Higher Education. Instrument Engineering*. 2012. №1. Pp. 39-43. (in Russian).
2. Pirogov, S.P., Chuba, A.Ju. Comparative analysis of manometric springs models. *Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universitet — Tyumen State University Herald*. №4. 2012, Pp. 114-118. (in Russian).
3. Getc, A.Ju., Dolgushin, Ju.S., Machkinis, V.I., Chuba, A.Ju., Pirogov, S.P., Smolin, N.I. Experimental research on proper oscillation frequency of manometric springs. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Neft' i gaz. — Proceedings of Institutions of Higher Education. Oil and Gas*. 2008. №2. Pp. 105-107. (in Russian).
4. Gridnev, M.P. *Issledovanie i razrabotka manometricheskogo pribora, ustojchivogo v uslovijah vibracii i pul'sacii davlenija (diss. kand.)* [Design and development of a manometric device, resistant to oscillation and pulse pressure (Cand. Diss.)]. Tomsk., 1969. 18 p. (in Russian).
5. Rabotnov, Ju.N. *Mehanika deformiruemogo tverdogo tela: Ucheb. posobie dlja vuzov* [Mechanics of rigid body deformation. Textbook for colleges]. M.: Nauka, 1988. 712 p. (in Russian).
6. Nikitin, N.N. *Kurs teoreticheskoj mehaniki* [Theoretical Mechanics]. M.: Vysshaja shkola, 1990. 607 p. (in Russian).
7. Biderman, V.L. *Teorija mehanicheskikh kolebanij* [Mechanic oscillation theory]. M.: Vysshaja shkola, 1980. 408 p. (in Russian).
8. *Vibracii v tehnike: Spravochnik. V 6-ti t. / Red. V.N. Chelomej. T.3. Kolebanija mashin, konstrukcij i ih jelementov / Pod red. F.M. Dimentberga i K.S. Kolesnikova* [Oscillation in technics: Reference book. 6 volumes / Edited by V.N. Chelomei. V. 3. Oscillation of machines, oscillation and their components / Edited by F.M. Dimentberg and K.S. Kolesnikova]. M.: Mashinostroenie, 1980. 544 p. (in Russian).
9. Arsenin, V.Ja. *Metody matematicheskoj fiziki i special'nye funkcii. 2-e izd., pererabot. i dop.* [Mathematical physics methods and particular functions. 2<sup>d</sup> edition, revised]. M.: Nauka, 1984. 384 p. (in Russian).
10. Kalitkin, N.N. *Chislennye metody* [Calculus of approximations]. M.: Nauka, 1978. 200 p. (in Russian).
11. Mihlin, S.G. *Variacionnye metody v matematicheskoj fizike* [Variation methods in mathematical physics]. M.: Nauka, 1970. 512 p. (in Russian).