

© Н.Г. МУСАКАЕВ^{1,2}, М.К. ХАСАНОВ³

¹Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН (Тюменский филиал)

²Тюменский государственный университет

³Башкирский государственный университет (Стерлитамакский филиал)
musakaev@ikz.ru, hasanovmk@mail.ru

УДК 532.546, 536.421

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДОБЫЧИ ГАЗА
ИЗ ГАЗОГИДРАТНОЙ ЗАЛЕЖИ С УЧЕТОМ ОБРАЗОВАНИЯ ЛЬДА***

**MATHEMATICAL MODELING OF GAS EXTRACTION
FROM A GAS-HYDRATE RESERVOIR WITH ACCOUNT
OF THE ICE FORMATION**

АННОТАЦИЯ. Проведено теоретическое исследование особенностей диссоциации газовых гидратов на газ и лед при добыче газа из газогидратной залежи, которая в исходном состоянии насыщена газом и газогидратом. Построены автомодельные решения этой задачи в осесимметричной постановке, описывающие распределения основных параметров в пласте. Получено условие возникновения протяженной области фазовых переходов. Определены критические значения массового расхода отбора газа, определяющего возникновение объемной области разложения газового гидрата. Установлено, что фронтальный режим диссоциации газового гидрата реализуется в высокопроницаемых пористых средах, а также в пластах с низкой исходной пластовой температурой.

SUMMARY. It has been conducted a theoretical study of the features of gas hydrates decomposition to gas and ice during gas extraction from a gas-hydrate reservoir which is saturated with gas and gas hydrate in the initial state. Self-similar solutions of this problem in the axial-symmetric formulation are derived. These solutions are describing distributions of the main parameters in the reservoir. The condition of formation of the phase transitions extended zone was obtained. The critical values of the mass flow rate of gas extraction, at which the extended zone occurs, were defined. It has been determined that the frontal mode of the gas hydrate dissociation is realized in the porous medium with high permeability and in the reservoirs with low initial temperature.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Газовый гидрат, диссоциация, автомодельное решение, пористая среда.

KEY WORDS. Gas hydrates, dissociation, self-similar solution, porous medium.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-31089).

Введение. Проблема энергетических ресурсов существовала во все времена, поэтому приходится осваивать все новые их виды. В настоящее время одним из таких ресурсов являются газовые гидраты, которые могут составить реальную конкуренцию традиционным месторождениям углеводородного сырья в силу широкого распространения, огромных ресурсов, неглубокого залегания и концентрированного состояния газа [1], [2]. Для решения различных проблем, возникающих при добыче газа из газогидратных залежей, требуется тщательная теоретическая проработка [3].

В работах [3-7] предложены математические модели разложения газогидрата на газ и воду в прямолинейно-параллельном приближении. Однако если разложение гидрата происходит не на газ и воду, а на газ и лед, то это позволяет уменьшить энергетические затраты на разработку газогидратных месторождений, т.к. удельная теплота фазового перехода «гидрат-лед» значительно ниже теплоты фазового перехода «гидрат-вода».

Постановка задачи и основные уравнения. Пусть имеется горизонтальный пористый пласт, насыщенный газом и газогидратом. Через скважину, вскрывшую пласт на всю его толщину, происходит отбор газа. Для описания процессов тепломассопереноса примем следующие допущения. Скелет пористой среды, газогидрат и лед несжимаемы и неподвижны, пористость постоянна, газ является калорически совершенным. Гидрат есть двухкомпонентная система с массовой концентрацией газа G .

Система основных уравнений, описывающая процессы фильтрации и теплопереноса при диссоциации газогидрата, представляет собой законы сохранения масс и энергии, закон Дарси и уравнение состояния для газа. При сделанных допущениях в осесимметричном случае она имеет вид [8], [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g m S_g + \rho_h m S_h G) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r S_g m v_g \rho_g) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(m \rho_i S_i + m(1-G) \rho_h S_h) &= 0, \quad m S_g v_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \rho_g c_g m S_g v_g \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(m \rho_h S_h L_h), \quad p = \rho_g R_g T, \end{aligned} \quad (1)$$

где m — пористость; ρ_j и S_j ($j = h, i, g$) — истинные плотности и насыщенности пор j -й фазы; v_g , k_g , c_g и μ_g — соответственно скорость, проницаемость, удельная теплоемкость и динамическая вязкость газовой фазы; p — давление; T — температура; L_h — удельная теплота гидратообразования; ρc и λ — удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы; нижние индексы h, i, g относятся к параметрам гидрата, льда и газа соответственно.

Для коэффициента проницаемости газа k_g примем формулу Козени:

$$k_g = k_* \frac{(m S_g)^3}{(1 - m S_g)^2} \approx k_0 S_g^3 \quad (k_0 = k_* m^3).$$

Вследствие неподвижности фаз, а также малого отличия плотности гидрата метана от плотности льда, можно пренебречь изменением значения газонасыщенности, а значит, и проницаемости при диссоциации газогидрата.

Значения температуры и давления в области диссоциации гидрата связаны условием фазового равновесия: $T_s(p) = T_0 + T_* \ln(p/p_{s0})$, где T_0 — исходная температура пласта, p_{s0} — равновесное давление, соответствующее температуре T_0 , T_* — эмпирический параметр, зависящий от вида газогидрата и фаз, на который он диссоциирует.

При разложении газогидрата на газ и лед в пористом пласте возникают зоны, в которых газ, лед и гидрат могут находиться в различных сочетаниях. На поверхностях разрыва между этими зонами, где терпят скачки насыщенности фаз, а также потоки массы и тепла, выполняются соотношения, следующие из условий баланса массы и тепла:

$$\begin{aligned} & \left[m(S_h \rho_h (1-G) + S_l \rho_l) \bar{D}_{(s)} \right] = 0, \\ & \left[m(\rho_g S_g (\bar{v}_g - \bar{D}_{(s)}) - \rho_h S_h G \bar{D}_{(s)}) \right] = 0, \quad [\lambda \text{ grad } T] = [m \rho_h L_h S_h \bar{D}_{(s)}] \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $[\psi]$ — скачок параметра ψ на границе между зонами; $\bar{D}_{(s)}$ — скорость движения этой границы. Температура и давление на этих границах полагаются непрерывными.

Пусть пласт в начальный момент времени насыщен газом и гидратом, давление p_0 и температура T_0 которых в исходном состоянии соответствуют условиям существования их в свободном состоянии:

$$t = 0: T = T_0, p = p_0 \quad (r > r_w).$$

Пусть через скважину, вскрывшую пласт на всю толщину, отбирается газ с постоянным массовым расходом Q (на единицу высоты скважины) при условии отсутствия кондуктивного потока тепла на границе скважины. Вблизи скважины из-за снижения давления ниже равновесного образуется область, насыщенная газом и льдом. Рассматривая достаточно большие времена после начала отбора газа, когда радиус данной области $r_{(s)}$ значительно превышает радиус скважины r_w , можно полагать, что размер скважины слабо сказывается на особенностях протекания процесса. Тогда условия на границе скважины имеют вид:

$$r = r_w: \frac{k_g \pi}{\mu_g R_g T} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) = Q, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (r_w \rightarrow 0, t > 0).$$

Автомодельное решение. Рассмотрим решение с фронтальной поверхностью разложения гидратов. В этом случае возникает две характерные области: ближняя (первая), насыщенная газом и льдом, и дальняя (вторая), заполненная газом и гидратом. Исходная гидратонасыщенность пласта v равна гидратонасыщенности второй области и постоянна во всех точках этой зоны. Разложение гидрата происходит на подвижной фронтальной поверхности, разделяющей эти области. Введем автомодельную переменную $\xi = r / \sqrt{\chi^{(T)} t}$ где $\chi^{(T)} = \lambda / \rho c$ — коэффициент температуропроводности пласта.

Вследствие неподвижности фаз, а также малого отличия плотности гидрата метана от плотности льда, можно пренебречь изменением значения газонасыщенности, а значит, и проницаемости при диссоциации газогидрата. Тогда на основе уравнений (1) и условия фазового равновесия можно записать уравнения пьезопроводности и температуропроводности:

$$\xi \frac{dp^2}{d\xi} = -\frac{2\chi^{(p)}}{\chi^{(T)}} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dp^2}{d\xi} \right), \quad \xi \frac{dT}{d\xi} = -\frac{Pe}{p_0^2} \frac{dp^2}{d\xi} \frac{dT}{d\xi} - \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dT}{d\xi} \right),$$

где $\chi^{(p)} = \frac{k_g p}{m S_g \mu_g}$, $Pe = \frac{\rho_{g0} p_0 c_g k_g}{\lambda \mu_g}$, ρ_{g0} — плотность газа при давлении p_0 .

Для получения приближенного аналитического решения воспользуемся методом линеаризации Лейбензона [10], т.е. переменное давление p в коэффициенте пьезопроводности $\chi^{(p)}$ примем постоянным и равным исходному давлению p_0 . Тогда, учитывая, что в каждой из двух областей гидратонасыщенность S_h постоянна, решения могут быть записаны в виде:

$$p_{(1)}^2 = p_{(s)}^2 - \frac{Q \mu_g R_g T_{(s)}}{\pi k_{(1)}} \int_{\xi}^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(1)}}\right) d\xi, \quad T_{(1)} = T_{(s)}, \quad (3)$$

$$p_{(2)}^2 = p_0^2 + \frac{(p_{(s)}^2 - p_0^2) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi}{\int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi}, \quad (4)$$

$$T_{(2)} = T_0 + \frac{(T_{(s)} - T_0) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{Pe_{(2)}}{2p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi}{\int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{Pe_{(2)}}{2p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi},$$

где $\eta_{(j)} = \chi_{(j)}^{(P)} / \chi_{(j)}^{(T)}$, $\chi_{(j)}^{(P)} = \frac{k_{(j)} p_0}{m S_{g(j)} \mu_g}$, $Pe_{(2)} = \frac{\rho_{g0} p_0 c_g k_{(2)}}{\lambda \mu_g}$, $k_{(j)} = k_0 S_{g(j)}^j$;

параметры областей снабжены нижним индексом в скобках $j = 1, 2$.

На поверхности, разделяющей ближнюю и дальнюю области, происходит скачок гидратонасыщенности от $S_h^- = 0$ до $S_h^+ = \nu$, где ν — исходная гидратонасыщенность пласта.

На основе условий (2) с учетом построенных решений (3) и (4) можно записать соотношения уравнения для определения координаты границы фазовых переходов ($\xi = \xi_{(s)}$) и значений параметров на ней:

$$\frac{Q \mu_g R_g T_{(s)}}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) - k_{(2)} \frac{p_0^2 - p_{(s)}^2}{\int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(2)}}\right) = K \nu \xi_{(s)}^2,$$

$$\frac{(T_0 - T_{(s)}) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(2)}}{2p_0^2} p_{(s)}^2\right)}{\int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(2)}}{2p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi} = \frac{\Delta T v}{2} \xi_{(s)}^2, \quad T_{(s)} = T_0 + T_* \ln(p_{(s)}/p_{s0}),$$

где $\Delta T = \frac{m\rho_h L_h}{\rho c}$, $K = m\mu_g \chi^{(T)} p_0 \left(\frac{\rho_h G}{\rho_{g0}} + \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_l} - 1 \right)$.

Результаты расчетов. На основе данных уравнений, а также решений (3) и (4), были проведены расчеты для случая газогидрата на основе метана. Полученные решения исследовались на условие термодинамической непротиворечивости, которое состоит в том, что локальная температура в первой области должна быть выше локальной температуры разложения гидрата, вычисляемой по найденному в процессе решения распределению давления; во второй области — должна быть ниже равновесной температуры.

На рис. 1 приведены распределения температуры и давления для разных значений массового расхода отбора газа из гидратосодержащего пласта, имеющего в начальном состоянии отрицательную температуру $T_0 = 271$ К.

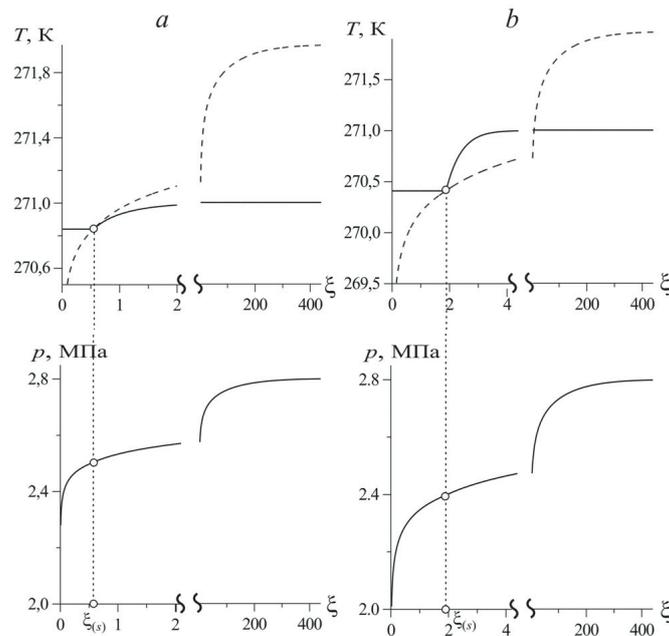


Рис. 1. Изменение в зависимости от автомодельной координаты ξ температуры и давления. $Q = 0,003$ (a) и $0,005$ (b) кг/(м·с)

Для параметров, характеризующих систему, приняты следующие значения: $m = 0,1$, $G = 0,12$, $v = 0,2$, $p_0 = 2,8$ МПа, $T_* = 30$ К, $p_{s0} = 2,54$ МПа, $R_g = 520$ Дж/(К·кг), $k_0 = 10^{-14}$ м², $\rho_h = \rho_l = 900$ кг/м³, $\rho c = 2,5 \cdot 10^6$ Дж/(К·кг), $c_g = 1560$ Дж/(К·кг), $\lambda = 2$ Вт/(м·К), $\mu_g = 10^{-5}$ кг/(м·с), $L_h = 1,66 \cdot 10^5$ Дж/кг. Штриховая линия

показывает равновесную температуру, соответствующую вычисленному распределению давления. Из рис. 1 видно, что при небольшом значении отбора газа (случай *a*) температура пласта перед фронтом разложения гидрата выше равновесной температуры, а за фронтом — ниже. Следовательно, в этом случае решение с фронтальной поверхностью диссоциации гидрата является непротиворечивым. При более высоком массовом расходе (случай *b*) температура пласта за фронтом разложения гидрата поднимается выше равновесной температуры, что соответствует «перегреву» гетерогенной смеси газа и гидрата в этой области. Следовательно, в этом случае модель с фронтальной поверхностью не позволяет построить физически непротиворечивое решение. Для устранения этого противоречия необходимо вводить объемную область разложения.

Протяженная область диссоциации газогидрата возникает в том случае, когда на границе фазовых переходов ($\xi = \xi_{(s)}$) выполняется условие:

$$dT_{(2)}/d\xi > dT_{(2)s}/d\xi. \text{ Из условия фазового равновесия можно записать } \frac{dT_{(2)s}}{d\xi} = \frac{T_*}{2p_{(s)}^2} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi}. \text{ Тогда с учетом соотношений (2)-(4) имеем следующее}$$

условие возникновения объемной области разложения гидрата:

$$\frac{\Delta T \cdot v}{2} \xi_{(s)}^2 \geq \frac{T_*}{2k_{(2)}p_{(s)}^2} A_\xi \left(A_\xi = \frac{Q_g \mu_g R_g T_{(s)}}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) - K_V \xi_{(s)}^2 \right).$$

На основе данного неравенства были проведены вычислительные эксперименты в широком диапазоне параметров для определения критического значения массового расхода отбора газа Q_{cr} , при превышении которого необходимо рассматривать объемную область разложения гидрата. В результате расчетов установлено, что основными параметрами, влияющими на величину Q_{cr} , являются проницаемость пласта, исходное давление p_0 и температура T_0 в пласте.

На рис. 2 приведены зависимости величины Q_{cr} от абсолютной проницаемости пласта при разных значениях исходной температуры в пласте в случае отбора газа из пласта с исходным давлением $p_0 = 3$ МПа. Видно, что при увеличении проницаемости критическое значение массового расхода возрастает, причем тем быстрее, чем ниже исходная температура пласта. Таким образом, при фиксированном массовом расходе отбора газа фронтальный режим реализуется в высокопроницаемых пористых средах, а также в пластах с низкой исходной пластовой температурой, т.е. в пластах, исходное состояние которых далеко от условий разложения газового гидрата. Это объясняется тем, что снижение проницаемости пласта при фиксированном массовом расходе отбора газа обуславливает основной перепад давления непосредственно вблизи скважины (т.е. в сравнительно узкой ближней области), тем самым приводя к уменьшению давления $p_{(s)}$ на границе разложения гидрата. А в соответствии с рис. 1 для возникновения объемной области диссоциации гидрата давление $p_{(s)}$ (соответственно и температура $T_{(s)}$) на фронтальной границе фазовых переходов должны опуститься до достаточно низких значений по сравнению с исходными величинами p_0 и T_0 .

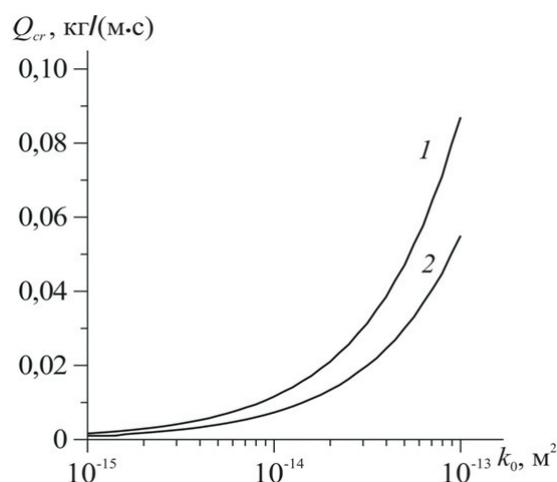


Рис. 2. Зависимость критического значения расхода от проницаемости при разных значениях начальной температуры пласта: 1 — $T_0=268\text{K}$, 2 — $T_0=272\text{K}$

Выводы. Для задачи разложения газового гидрата в пористом пласте на лед и газ показано, что в зависимости от массового расхода отбора газа и параметров, характеризующих исходное состояние системы, возможны два принципиально различных вида решения. Установлено, что для величины массового расхода отбора газа существует некоторое максимальное значение, зависящее от проницаемости, исходной температуры и начального давления, при превышении которого невозможно в рамках фронтальной модели построить непротиворечивое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бык С.Ш., Макогон Ю.Ф., Фомина В.И. Газовые гидраты. М.: Химия, 1980. 296 с.
2. Истомина В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992. 236 с.
3. Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009. 232 с.
4. Цыпкин Г.Г. Математическая модель диссоциации газовых гидратов, сосуществующих с газом в пластах // ДАН. 2001. Т. 381. № 11. С.56-59.
5. Васильев В.И., Попов В.В., Цыпкин Г.Г. Численное исследование разложения газовых гидратов, сосуществующих с газом в природных пластах // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 127-134.
6. Цыпкин Г.Г. Аналитическое решение нелинейной задачи о разложении газового гидрата в пласте // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 5. С. 133-142.
7. Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Гималтдинов И.К., Столповский М.В. Особенности разложения газовых гидратов в пористых средах при нагнетании теплого газа // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 3. С. 347-354.
8. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
9. Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Мусакаев Н.Г. Образование газогидрата в пористом резервуаре, частично насыщенном водой, при инъекции холодного газа // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 462-472.
10. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.

REFERENCES

1. Byk, S.Sh., Makogon, Iu.F., Fomina, V.I. *Gazovye gidraty* [Gas hydrates]. Moscow, 1980. 296 p. (in Russian).
2. Istomin, V.A., Iakushev, V.S. *Gazovye gidraty v prirodnykh usloviakh* [Gas hydrates in nature]. Moscow, 1992. 236 p. (in Russian).
3. Tsypkin, G.G. *Techeniia s fazovymi perekhodami v poristykh sredakh* [Flows with phase transitions in porous media]. Moscow, 2009. 232 p. (in Russian).
4. Tsypkin, G.G. Mathematical model for dissociation of gas hydrates coexisting with gas in strata. *DAN — Proceedings of the Russian Academy of Sciences*. 2001. V. 381. № 11. Pp. 806-809. (in Russian).
5. Vasil'ev, V.I., Popov V.V., Tsypkin G.G. Numerical research of the decomposition of gas hydrates coexisting with gas in natural reservoirs. *Izvestiia RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics. Journal of the Russian Academy of Sciences*. 2006. № 4. Pp. 127-134 p. (in Russian).
6. Tsypkin, G.G. Analytical solution of the nonlinear problem of gas hydrate dissociation in a formation. *Izvestiia RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics. Journal of the Russian Academy of Sciences*. 2007. № 5. Pp. 133-142. (in Russian).
7. Shagapov, V.Sh., Khasanov, M.K., Gimaltdinov, I.K., Stolpovskii, M.V. The features of gas hydrate dissociation in porous media at warm gas injection. *Teplofizika i aeromekhanika — Thermophysics and Aeromechanics*. 2013. V. 20. № 3. Pp. 347-354. (in Russian).
8. Nigmatulin, R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow, 1987. (in Russian).
9. Shagapov, V.Sh., Khasanov, M.K., Musakaev, N.G. Formation of a gas hydrate due to injection of a cold gas into a porous reservoir partly saturated by water. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaiia fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physcs*. 2008. V. 49. № 3. Pp. 462-472. (in Russian).
10. Basniev, K.S., Kochina, I.N., Maksimov, V.M. *Podzemnaia gidromekhanika* [Subsurface hydromechanics]. Moscow, 1993. 416 p. (in Russian).

Авторы публикации

Мусакаев Наиль Габсалямович — заведующий лабораторией гидродинамики многофазных сред Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (Тюменский филиал); профессор кафедры механики многофазных систем Тюменского государственного университета, доктор физико-математических наук, доцент

Хасанов Марат Камилович — доцент кафедры прикладной математики и механики Башкирского государственного университета (Стерлитамакский филиал), кандидат физико-математических наук

Authors of the publication

Nail G. Musakaev — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Laboratory of Hydrodynamics of multiphase Media, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics (Tyumen branch), Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Tyumen State University

Marat K. Khasanov — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Bashkir State University (Sterlitamak Branch)