Вестник Тюменского государственного университета.
Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 1(1). 146-154

© Е.А. НОВИКОВ[1], А.А. ЗАХАРОВ[2]
[1] *Институт вычислительного моделирования СО РАН*
[2] *Тюменский государственный университет*
novikov@icm.krasn.ru, azaharov@utmn.ru

УДК 519.622

*АЛГОРИТМ ПЕРЕМЕННОГО ШАГА С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ТИПА РОЗЕНБРОКА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ**

VARIABLE STRUCTURE ALGORITHM WITH THE ROSENBROCK METHOD OF A THIRD-ORDER APPROXIMATION APPLIED

Разработан L-устойчивый трехстадийный метод типа Розенброка третьего порядка точности для решения жестких задач. Построено неравенство для контроля точности вычислений, основанное на оценке аналога глобальной ошибки. Оценка осуществляется с привлечением ранее вычисленных стадий, что позволяет выбирать величину шага интегрирования фактически без увеличения вычислительных затрат. Получено неравенство для контроля точности вычислений. Сформулирован алгоритм интегрирования переменного шага.

An L-stable three-step method of the Rosenbrock type of a third-order approximation has been developed to solve stiff problems. To control the accuracy of calculations, we have written the inequation based on analogous global error estimation. The estimation is performed according to the previous calculations. It allows choosing the integration step size without extensive computation. The study results in the inequation to control the accuracy of calculations, and leads to the variable structure integration algorithm.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Жесткая задача, метод типа Розенброка, контроль точности, алгоритм переменного шага.

KEY WORDS. Stiff problem, Rosenbrock method, accuracy control, variable structure algorithm.

Введение. Во многих важных приложениях разведки, добычи и транспорта углеводородного сырья возникает проблема решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Учет большого числа факторов при построении математических моделей приводит к расширению класса задач, описываемых жесткими системами [1-4]. Сложность практических задач приводит к возрастающим требованиям к вычислительным алгоритмам. Основные тенденции при построении численных методов связаны с решением

* *Работа поддержана РФФИ (проект 14-01-00047).*

систем большой размерности [4]. Для численного решения жестких задач обычно применяются L-устойчивые методы [1]. При реализации таких численных схем на каждом шаге решается линейная система алгебраических уравнений с применением LU-разложения некоторой матрицы, размерность которой совпадает с размерностью вектора решения. В силу плохой обусловленности решение осуществляется с выбором главного элемента по строке или столбцу, а иногда и по всей матрице. При большой размерности исходной задачи общие вычислительные затраты фактически полностью определяются временем декомпозиции данной матрицы.

Во второй половине прошлого столетия в ряде областей техники появились сложные системы управления динамическими объектами [4-7]. Поведение таких систем характеризуется как непрерывной, так и дискретной составляющей. При анализе таких систем необходимо учитывать наличие быстрых и медленных процессов, большую размерность, нелинейность математических моделей с разрывными функциями, жесткость непрерывных моделей. В современной терминологии системы с перечисленными особенностями принято называть гибридными системами [4]. Иногда их называют непрерывно-дискретными системами, системами с переменной структурой или событийно-непрерывными системами. Применение многошаговых методов для решения таких задач проблематично, потому что в точках смены режима по понятным причинам происходит потеря исторической информации. Даже в случае использования одношаговых методов необходимы дополнительные ограничения на выбор величины шага в зависимости от поведения событийной функции.

В работе разработан L-устойчивый трехстадийный метод типа Розенброка третьего порядка точности для решения жестких задач, для которого построено неравенство контроля точности вычислений, основанное на оценке аналога глобальной ошибки, которая осуществляется с привлечением ранее вычисленных стадий, что позволяет выбирать величину шага интегрирования фактически без увеличения вычислительных затрат.

Метод типа Розенброка. Рассмотрим задачу Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$y' = f(y),\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k, \tag{1}$$

где y и f — вещественные N-мерные вектор-функции; t — независимая переменная. Рассмотрение автономной системы (1) не снижает общности. В случае неавтономной системы $y' = f(t, y)$ введением дополнительной переменной $y'_{N+1} = 1,\ y_{N+1}(t_0) = t_0$ она приводится к автономному виду.

Идея методов типа Розенброка заключается во введении матрицы Якоби непосредственно в численную формулу, что приводит на каждом шаге к необходимости решения линейной системы алгебраических уравнений. Это существенно упрощает программную реализацию алгоритмов интегрирования, но приводит к негативным последствиям — возникают проблемы с использованием одной матрицы Якоби на нескольких шагах интегрирования. Отметим, что в неявных и полуявных схемах типа Рунге-Кутта необходим итерационный процесс типа ньютоновского.

Рассмотрим численную формулу вида:

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3,$$
$$D_n k_1 = hf\left(y_n\right),\; D_n k_2 = hf\left(y_n + \beta_{21} k_1\right), \tag{2}$$
$$D_n k_3 = hf\left(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2\right),$$

где h — шаг интегрирования; $D_n = E + ahf'_n$;
E — единичная матрица;
$f'_n = \partial f\left(y_n\right)/\partial y$ — матрица Якоби системы (1);
a, p_i и β_{ij} — числовые коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости схемы (2).

Условия порядка. Разложим стадии k_i, $1 \le i \le 3$, по степеням h до членов с h^4 включительно:

$$k_1 = hf_n + ah^2 f'_n f_n + a^2 h^3 f'^2_n f_n + a^3 h^4 f'^3_n f_n + O(h^5),$$

$$k_2 = hf_n + \left(a + \beta_{21}\right) h^2 f'_n f_n + h^3 \left[\left(a^2 + 2a\beta_{21}\right) f'^2_n f_n + \frac{1}{2}\beta^2_{21} f''_n f^2_n\right] +$$

$$+ h^4 \left[\left(a^3 + 3a^2\beta_{21}\right) f'^3_n f + a\beta^2_{21} f''_n f'_n f^2_n + \frac{1}{6}\beta^3_{21} f'''_n f^3_n\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} a\beta^2_{21} h^4 f'_n f''_n f^2_n + O\left(h^5\right),$$

$$k_3 = hf_n + \left(a + \beta_{31} + \beta_{32}\right) h^2 f'_n f_n + \left[a^2 + 2a\left(\beta_{31} + \beta_{32}\right) + \beta_{21}\beta_{32}\right] h^3 f'^2_n f_n +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\beta_{31} + \beta_{32}\right)^2 h^3 f''_n f^2_n + \left[a^3 + 3a^2\left(\beta_{31} + \beta_{32}\right) + 3a\beta_{21}\beta_{32}\right] h^4 f'^3_n f_n +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\beta^2_{21}\beta_{32} + a\left(\beta_{31} + \beta_{32}\right)^2\right] h^4 f'_n f''_n f^2_n + \left(\beta_{31} + \beta_{32}\right)\left[a\left(\beta_{31} + \beta_{32}\right) + \beta_{21}\beta_{32}\right] h^4 f''_n f'_n f^2_n +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\beta_{31} + \beta_{32}\right)^3 h^4 f'''_n f^3_n + O\left(h^5\right).$$

Подставляя полученные разложения в первую формулу (2), получим ряд Тейлора для приближенного решения y_{n+1}. Ряд Тейлора для точного решения $y(t_{n+1})$ в окрестности точки t_n имеет вид:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{1}{2} h^2 f'f + \frac{1}{6} h^3 \left[f'^2 f + f''f^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{24} h^4 \left[f'^3 f + f'f''f^2 + 3f''f'f^2 + f'''f^3\right] + O\left(h^5\right).$$

Полагая $y_n = y(t_n)$ и сравнивая ряды для точного и приближенного решений до членов с h^3 включительно, получим условия третьего порядка точности:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

$$ap_1 + \left(a + \beta_{21}\right) p_2 + \left(a + \beta_{31} + \beta_{32}\right) p_3 = \frac{1}{2},$$

$$\beta_{21}^2 p_2 + \left(\beta_{31} + \beta_{32}\right)^2 p_3 = \frac{1}{3}.$$

$$a^2 p_1 + \left(a^2 + 2a\beta_{21}\right) p_2 + \left[a^2 + 2a\left(\beta_{31} + \beta_{32}\right) + \beta_{21}\beta_{32}\right] p_3 = \frac{1}{6}.$$

Исследование условий порядка. После несложных преобразований полученная система записывается в виде:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

$$\beta_{21} p_2 + \left(\beta_{31} + \beta_{32}\right) p_3 = \frac{1}{2} - a,$$

$$\beta_{21}^2 p_2 + \left(\beta_{31} + \beta_{32}\right)^2 p_3 = \frac{1}{3},$$

$$\beta_{21}\beta_{32} p_3 = \frac{1}{6} - a + a^2.$$

В этом случае локальная ошибка $\delta_{n,3}$ численной формулы (2) имеет вид:

$$\delta_{n,3} = \left(\frac{1}{24} + 2a^3 - \frac{3}{2}a^2 - 3a\beta_{21}\beta_{32}p_3\right) h^4 f'^3 f +$$

$$+ \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{3}a - \beta_{21}\left(\beta_{31} + \beta_{32}\right)\beta_{32}p_3\right] h^4 f''f'f^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3}a - \beta_{21}^2\beta_{32}p_3\right) h^4 f'f''f^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{4} - \beta_{21}^3 p_2 - \left(\beta_{31} + \beta_{32}\right)^3 p_3\right] h^4 f'''f^3 + O\left(h^5\right).$$

Равномерное вычисление производных решения на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ приводит к повышению надежности расчетов. Положим $\beta_{21} = 0.5$ и $\beta_{31} + \beta_{32} = 1$. Тогда стадии k_1, k_2 и k_3 вычисляются в точках t_n, $t_n + 0.5h$ и $t_n + h$ соответственно. В результате коэффициенты схемы (2) можно вычислить по формулам:

$$p_1 = \frac{18a + 1}{6},\ p_2 = \frac{4 - 24a}{6},$$

$$p_3 = \frac{6a + 1}{6},\ \beta_{21} = \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$\beta_{31} = \frac{18a - 12a^2 - 1}{1 + 6a},\ \beta_{32} = \frac{12a^2 - 12a + 2}{1 + 6a},$$

где a — свободный параметр.

Устойчивость. Исследование устойчивости численной формулы (2) проведем на тестовом уравнении Дальквиста:

$$y' = \lambda y\,,\ y(0) = y_0\,,\ t \geq 0\,,$$

где λ есть комплексное число, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Смысл λ — произвольное собственное число матрицы Якоби системы (1). Записывая стадии метода (2) применительно к решению тестовой задачи, имеем:

$$k_1 = \frac{x}{1-ax}\cdot y_n\,,\ k_2 = \frac{x+(\beta_{21}-a)x^2}{(1-ax)^2}\cdot y_n\,,$$

$$k_3 = \frac{x+(1-2a)x^2+(a^2-a+\beta_{21}\beta_{32})x^3}{(1-ax)^3}\cdot y_n\,,$$

где $x = h\lambda$. Подставляя полученные представления стадий в первую формулу (2), получим $y_{n+1} = Q(x)y_n$, где $Q(x)$ называют функцией устойчивости. Она имеет вид:

$$Q(x) = \frac{1+(1-3a)x+(3a^2-2a+\beta_{21}p_2+p_3)x^2}{(1-ax)^3} -$$

$$-\frac{\left[a^3-a^2p_1+a(\beta_{21}-a)p_2-(a^2-a+\beta_{21}\beta_{32})p_3\right]x^3}{(1-ax)^3}.$$

Функция устойчивости $Q(x)$ представима в виде $Q(x) = G(x)/R(x)$, где $G(x)$ и $R(x)$ — многочлены третьей степени относительно переменной x. Необходимым условием L-устойчивости является требование того, чтобы степень многочлена в числителе была на единицу меньше степени полинома в знаменателе. Нетрудно видеть, что это требование будет выполнено, если имеет место соотношение:

$$a^3-a^2p_1+a(\beta_{21}-a)p_2-(a^2-a+\beta_{21}\beta_{32})p_3 = 0\,.$$

Учитывая вид коэффициентов (3), получим необходимое условие L-устойчивости схемы (2) вида:

$$a^3-3a^2+\frac{3}{2}a-\frac{1}{6} = 0.$$

Данное уравнение имеет три вещественных корня:

$$a_1 = 2.40514957850286,\ a_2 = 0.158983899988677,$$
$$a_3 = 0.435866521508459.$$

Согласно [8] схема (2) будет дополнительно A-устойчивой, если параметр a удовлетворяет неравенству $1/3 \leq a \leq 1.0685790$. Выбирая $a = a_3$, получим коэффициенты (3) L-устойчивой схемы (2) третьего порядка точности.

Контроль точности. В жестких задачах поведение ошибки определяется элементарным дифференциалом $f'^3 f$ [10; 11]. Поэтому при построении оценки аналога глобальной ошибки будем учитывать только первое слагаемое в локальной ошибке. Для контроля точности вычислений и автоматического выбора величины шага интегрирования используем идею вложенных методов. Для этого рассмотрим двухстадийный метод:

$$y_{n+1,1} = y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2, \; D_n k_1 = hf\left(y_n\right), \; D_n k_2 = hf\left(y_n + \beta_{21} k_1\right), \tag{4}$$

где приближение y_n вычислено по формуле (2). Отметим, что в численной формуле (4) применяются стадии метода (2), поэтому (4) практически не приводит к увеличению вычислительных затрат. С использованием разложений стадий в ряды Тейлора нетрудно видеть, что при значениях коэффициентов:

$$b_1 = 2a, \; b_2 = 1 - 2a$$

схема (4) имеет второй порядок точности, а ее локальная ошибка $\delta_{n,2}$ записывается следующим образом:

$$\delta_{n,2} = \frac{6a^2 - 6a + 1}{6} h^3 f'^2 f + O\left(h^3\right).$$

Локальная ошибка $\delta_{n,3}$ схемы (2) имеет вид:

$$\delta_{n,3} = \frac{1 - 24a^3 + 36a^2 - 12a}{24} h^4 f'^3 f + O\left(h^4\right).$$

Учитывая вид локальных ошибок $\delta_{n,2}$ и $\delta_{n,3}$ в неравенстве для контроля точности можно применять оценку ошибки ε_n вида [10; 11]:

$$\varepsilon_n = \frac{1 - 12a + 36a^2 - 24a^3}{4(6a^2 - 6a + 1)} (y_{n+1} - y_{n+1,1}).$$

Подчеркнем особенность построенной оценки. Из вида функции устойчивости $Q(x)$ следует, что при $x \to -\infty$ выполняется соотношение $\left|Q(x)\right| \to 0$. Для точного решения $y\left(t_{n+1}\right) = \exp\left(x\right) y\left(t_n\right)$ задачи $y' = \lambda y, \; y\left(0\right) = y_0, \; t \geq 0$ выполняется аналогичное свойство. Тогда естественным будет требование стремления к нулю оценки ошибки ε_n при $x \to -\infty$. Однако для построенной оценки имеет место $\varepsilon_n = (1)$, потому что метод второго порядка не является L-устойчивым. Для исправления асимптотического поведения ошибки вместо ε_n рассмотрим оценки вида:

$$\varepsilon_n\left(j_n\right) = \frac{1 - 12a + 36a^2 - 24a^3}{4\left(6a^2 - 6a + 1\right)} D_n^{1-j_n} \left(y_{n+1} + y_{n+1,1}\right).$$

При $j_n = 1$ оценка $\varepsilon_n(j_n)$ совпадает с ε_n и будет A-устойчивой, а при $j_n = 2$ — L-устойчивой. Теперь неравенство для контроля точности имеет вид [10]:

$$\left\| D_n^{1-j_n} \left(y_{n+1} + y_{n+1,1}\right) \right\| \leq c \cdot \varepsilon, \; 1 \leq j_n \leq 2, \tag{5}$$

где $c = 4 \cdot \left| \left(6a^2 - 6a + 1\right) / \left(1 - 12a + 36a^2 - 24a^3\right) \right| \approx 3$; ε — требуемая точность интегрирования, а значение параметра j_n выбирается наименьшим, при котором выполняется неравенство (5). Заметим, что в смысле главного члена оценки $\varepsilon_n(1)$ и $\varepsilon_n(2)$ совпадают. Неравенство (5) при $j_n = 2$ проверяется редко, в основном при резком увеличении шага интегрирования. Применение $\varepsilon_n(j_n)$ вместо ε_n к значительному росту вычислительных затрат не приводит. Более того, за счет применения $\varepsilon_n(j_n)$, вместо ε_n, эффективность расчетов повышается примерно на 10÷15%.

Алгоритм интегрирования. Норма $||\xi||$ в левой части неравенства (5) вычисляется по формуле:

$$\|\xi\| = \max_{1\le i\le N}\left\{\left|\xi_i\right| / \left(\left|y_n^i\right| + v\right)\right\},$$

где v — положительный параметр. В случае выполнения неравенства $\left|y_n^i\right| < v$ по i-й компоненте решения контролируется абсолютная ошибка $v \cdot \varepsilon$. В противном случае контролируется относительная ошибка ε. Иногда с целью повышения надежности расчетов задают набор параметров v_i, $1 \le i \le N$, что позволяет более квалифицированно контролировать точность расчетов.

Приведем некоторые соображения по выбору шага численного дифференцирования. При численном вычислении матрицы Якоби данный шаг r_i, $1 \le i \le N$, выбирается по формуле:

$$r_j = \max\left[r_{\min}, \sqrt{r_{\min}} \cdot \left|y_n^j\right|\right],\ 1 \le j \le N,$$

где $r_{\min}$ — минимальный шаг численного дифференцирования, зависит от разрядности ЭВМ. При расчетах с двойной точностью величина $r_{\min}$ полагалась равной 10^{-14}. Тогда j-й столбец a_n^j численной матрицы Якоби вычисляется по формуле:

$$a_n^j = \frac{f\left(y_1, \cdots, y_j + r_j, \cdots, y_N\right) - f\left(y_1, \cdots, y_j, \cdots, y_N\right)}{r_j},$$

т. е. для задания матрицы Якоби требуется N вычислений правой части системы дифференциальных уравнений (1).

Теперь сформулируем алгоритм интегрирования по аналогии [12]. Пусть приближение y_n к решению $y(t_n)$ задачи (1) вычислено в точке t_n с шагом h_n. Учитывая $\varepsilon_n\left(j_n\right) = O\left(h_n^3\right)$, $1 \le j_n \le 2$, алгоритм интегрирования формулируется следующим образом:

Шаг 1. Вычисляется матрица Якоби.

Шаг 2. Формируется матрица $D_n = E + ahf'_n$.

Шаг 3. Вычисляются стадии k_1, k_2 и k_3 по формулам (2).

Шаг 4. Вычисляется оценка ошибки $\varepsilon_n(1)$.

Шаг 5. Вычисляется величина q_1 по формуле $q_1^3\left\|\varepsilon_n(1)\right\| = c \cdot \varepsilon$.

Шаг 6. Если $q_1 < 1$, т. е. требуемая точность не выполнена, то вычисляется $\varepsilon_n(2)$. В противном случае $\varepsilon_n(2)$ полагается равным $\varepsilon_n(1)$.

Шаг 7. Вычисляется значение параметра q_2 по формуле $q_2^3\left\|\varepsilon_n(2)\right\| = c \cdot \varepsilon$.

Шаг 8. Если $q_2 < 1$, то h_n полагается равным $\min\left(q_1, q_2\right) \cdot h_n$, и происходит повторное вычисление решения — возврат на шаг 2.

Шаг 9. Вычисляется приближение к решению в точке t_{n+1} по формуле (2).

Шаг 10. Вычисляется значение параметра h_{n+1} по формуле:

$$h_{n+1} = \min(q_1, q_2) \cdot h_n.$$

Шаг 11. Выполняется следующий шаг интегрирования.

Выводы. Построенный алгоритм интегрирования переменного шага основан на L-устойчивом трехстадийном методе типа Розенброка третьего порядка точности. В данной численной схеме на каждом шаге один раз вычисляется матрица Якоби, один раз выполняется декомпозиция матрицы D_n (прямой ход в методе Гаусса с выбором главного элемента), три раза вычисляется функция f и три раза выполняется обратный ход в методе Гаусса. Для выбора величины шага интегрирования применяется оценка аналога глобальной ошибки, вычисленная с помощью вложенной численной формулы второго порядка точности. Из результатов тестовых расчетов следует, что наибольшая эффективность алгоритма достигается при задаваемой точности расчетов $\varepsilon = 10^{-4}$. Это является следствием третьего порядка точности численной формулы. Из расчетов также следует надежность неравенства для контроля точности вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.

2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

3. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 321 с.

4. Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем. Новосибирск: НГТУ, 2012. 451 с.

5. Бенькович Е.С., Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Практическое моделирование динамических систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 464 с.

6. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем. Объектно-ориентированный подход. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 192 с.

7. Колесов Ю.Б. Объектно-ориентированное моделирование сложных динамических систем. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. 239 с.

8. Демидов Г.В., Юматова Л.А. Исследование некоторых аппроксимаций в связи с А-устойчивостью полуявных методов // Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8, № 3. С. 68-79.

9. Новиков А.Е., Новиков Е.А. Численное решение жестких задач с небольшой точностью // Математическое моделирование. 2010. Т.22, № 1. С. 46-56.

10. Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997. 197 с.

11. Новиков Е.А., Захаров А.А. Явные методы Рунге-Кутта: алгоритмы с контролем точности вычислений // Вестник Тюменского государственного университета. 2010. № 6. С. 101-107.

12. Новиков Е.А., Захаров А.А. Алгоритм переменного порядка на основе стадий метода Ческино // Вестник Тюменского государственного университета. 2013. № 7. С. 116-123.

REFERENCES

1. Hairer, E., Norsett, S.P., Wanner, G. Solving ordinary differential equations. Stiff and differential-algebraic problems. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 528 p.

2. Hairer, E., Wanner, G. Solving ordinary differential equations. Non stiff problems. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 601 p.

3. Dekker, K., Verwer, J.G. Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. North-Holland: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 1984. 321 p.

4. Novikov, E.A., Shornikov, Yu.V. Computer simulation of stiff hybrid systems. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2012. 451 p. (in Russian).

5. Benkovich, E.C., Kolesov, Yu.B., Senichenkov, Yu.B. Practical simulation of dynamic systems. Saint Petersburg: BXV-Petersburg, 2002. 464 p. (in Russian).

6. Kolesov, Yu.B., Senichenkov, Yu.B. Simulation systems. Object-oriented approach. Saint Petersburg: BXV-Petersburg, 2006. 192 p. (in Russian).

7. Kolesov, Yu.B. Object-oriented modeling of complex dynamic systems. Saint Petersburg: SPbGPU Publisher, 2004. 239 p. (in Russian).

8. Demidov, G.V., Yumatova, L.A. Investigation of some approximations in connection with the A-stable semi-explicit method // Numerical methods for continuum mechanics. 1977. Vol. 8. № 3. Pp. 68-79. (in Russian).

9. Novikov, A.E., Novikov, E.A. Numerical Integration of Stiff Systems with Low Accuracy // Mathematical Models and Computer Simulations. 2010. Vol. 2. № 4. Pp. 443-452. (in Russian).

10. Novikov, E.A. Explicit methods for stiff systems. Novosibirsk: Nauka, 1997. 197 p. (in Russian).

11. Novikov, E.A., Zakharov, A.A. Explicit Runge-Kutta methods: algorithms to control the accuracy of the calculations // Tyumen State University Herald. Physics and Mathematics. Tyumen, 2010. № 6. Pp. 101-107. (in Russian).

12. Novikov, E.A., Zakharov, A.A. Algorithm on variable order based Cheskino method steps // Tyumen State University Herald. Physics and Mathematics. Tyumen, 2013. № 7. Pp. 116-123. (in Russian).

Авторы публикации

Новиков Евгений Александрович — главный научный сотрудник Института вычислительного моделирования СО РАН, доктор физико-математических наук, профессор

Захаров Александр Анатольевич — профессор кафедры информационной безопасности Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, доктор технических наук, профессор

Authors of the publication

Evgeny A. Novikov — Dr. Phys. and Math. Sci., Professor, Chief Research Scientist, Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of The Russian Academy of Sciences

Alexander A. Zakharov — Dr. Tech. Sci., Professor, Tyumen State University