

© Д. Е. ИГОШИН, А. Ю. МАКСИМОВ

Тюменский филиал Института теоретической
и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Тюменский государственный университет
igoshinde@gmail.com, allevella@gmail.com

УДК 532.5

**ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ
ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ,
ОБРАЗОВАННОЙ КАНАЛАМИ, ИМЕЮЩИМИ
ВРАЩАТЕЛЬНУЮ СИММЕТРИЮ**

**NUMERICAL AND ANALYTICAL ESTIMATES
OF PERMEABILITY OF POROUS MEDIUM FORMED
BY CHANNELS HAVING ROTATIONAL SYMMETRY**

Рассмотрена пористая среда периодической структуры, образованная каналами переменного сечения, имеющими вращательную симметрию. Определена пористость модельной среды. Предложен аналитический способ определения проницаемости такой среды, учитывающий переменную просветность каналов. При помощи использования компьютерного моделирования решена система уравнений гидродинамики в объеме одной поры. Проницаемость пористой среды определена уравнением Дарси при рассчитанном объемном расходе флюида через поровый канал. Компьютерное моделирование проведено с помощью набора пакетов с открытым программным кодом: SALOME-OpenFOAM-Paraview. В пакете SALOME построена параметрическая геометрия и расчетная сетка для каналов пористой среды. Расчеты проведены в пакете OpenFOAM, их визуализация реализована в пакете Paraview. Получено хорошее количественное соответствие между результатами расчетов в пакете OpenFOAM и предложенной в статье аналитической оценкой. Показано, что с уменьшением пористости и ее приближением к предельному значению проницаемость резко уменьшается.

We examine the porous medium of periodic structure formed by varying-area channels having rotational symmetry. The porosity of the modeling medium is defined. An analytical method for determining the permeability of such medium taking into account variable clearance of the channels is introduced. Using computer modeling, the system of hydrodynamic equations is solved in the volume of a single pore. The permeability of the porous medium is determined using Darcy's equation at the calculated volume flow of fluid through the pore channel. Computer modeling is carried out by using open-source packages SALOME-OpenFOAM-Paraview. The SALOME package is used to build parametric geometry and computational grid for the channels of the porous medium.

The calculations are performed in the OpenFOAM package. Visual representation of the calculation results are presented in the Paraview package. A good quantitative agreement is achieved between the calculation results in the OpenFOAM package and the analytical estimation introduced in the paper. It is shown that with the decrease in porosity and its approaching to the limiting value, the permeability sharply decreases.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Пористая среда, проницаемость, пористость, регулярная упаковка, вычислительная гидродинамика.

KEY WORDS. Porous medium, permeability, porosity, regular packing, computational fluid dynamics.

Введение

Изучение поведения флюидов в пористой среде вызывает большой интерес в связи с необходимостью интенсификации добычи природных запасов и разработкой месторождений. Определение фильтрационно-емкостных характеристик в таких средах является важной задачей. Впервые моделирование пористых сред в виде регулярных упаковок было предложено в [11], широкое распространение получили аналитические методы, описанные в [6, 8, 9, 10]. В данной работе эти идеи получили дальнейшее развитие для каналов с переменным сечением.

Также возможно применение современных программных комплексов для моделирования движения флюидов, которые могут быть использованы для получения качественных картин течения и точного расчета характеристик потока.

В качестве математической модели могут быть использованы уравнения Навье-Стокса, реализованные, например, в программе с открытым кодом *OpenFOAM*. При моделировании пористых сред построение качественных сеток представляет собой сложную задачу в связи с многообразием форм пор, образующих поровое пространство. Создание упрощенных моделей является одним из решений данной проблемы [11].

В настоящей работе, на основе компьютерного моделирования в программе *OpenFOAM* и аналитических оценок, получено хорошее количественное соответствие между проницаемостями пористой среды. Предложена схема упрощения геометрии порового пространства, позволяющая быстро и с высокой степенью точности производить расчеты без использования дорогостоящих расчетных станций. Предложенные аналитические оценки позволяют быстро оценить фильтрационно-емкостные характеристики среды с хорошей точностью.

Основные характеристики пористой среды

По определению пористость:

$$m = \frac{V_{\text{п}}}{V}, \quad (1)$$

где $V_{\text{п}}$ — объем пор, V — объем среды. Запишем выражения для объема порового канала длиной L и объема среды, приходящегося на один канал:

$$V_{\text{п}} = \int_0^L S_{\text{п}}(z) dz, \quad V = SL, \quad (2)$$

где $S_{\text{п}}$ — площадь просвета в порах. Подставляя (2) в (1), имеем:

$$m = \frac{1}{SL} \int_0^L S_n(z) dz = \frac{1}{L} \int_0^L n(z) dz. \quad (3)$$

Объемный расход жидкости через прямой канал постоянного сечения описывается в [7] выражением:

$$Q = A \frac{a^4 \Delta p}{\mu L}, \quad (4)$$

где A — безразмерный коэффициент (для круга $A = \pi/8$, для равностороннего треугольника $A = \sqrt{3}/320$, для квадрата $A \approx 9/256$), a — характерный поперечный размер (для круга — радиус, для многоугольника — сторона), Δp — перепад давления на длине канала, μ — коэффициент динамической вязкости, L — длина канала.

Рассмотрим канал, поперечный размер которого слабо меняется вдоль длины $da/dz \ll 1$. Поэтому течение в таком канале будем считать квазиодномерным. Запишем объемный расход через бесконечно тонкий слой толщиной dz :

$$Q = A \frac{a^4(z) dp}{\mu dz}. \quad (5)$$

Записывая выражение (4) для канала длиной L с переменным сечением, положим $a = a_*$ — эффективное значение поперечного размера. Приравнявая выражения (4) и (5), после интегрирования получим:

$$a_*^4 = L \left(\int_0^L \frac{dz}{a^4(z)} \right)^{-1}. \quad (6)$$

В пористой среде длиной L одномерная фильтрация описывается уравнением Дарси:

$$u = \frac{k \Delta p}{\mu L}, \quad (7)$$

где u — скорость фильтрации, k — проницаемость. По определению [8] скорость фильтрации:

$$u = \frac{Q}{S}. \quad (8)$$

Считая в (8) Q расходом через один канал, S понимаем как площадь поперечного сечения среды, приходящаяся на один канал. Подставляя (6) в (4) и (7) в (8), приравняем получившиеся выражения. Выражая k , получим:

$$k = \frac{AL}{S} \left(\int_0^L \frac{dz}{a^4(z)} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Геометрия задачи

Пусть трехмерная периодическая модель пористой среды имеет кубическую либо гексагональную структуру (рис. 1), подробно рассмотренную в [3]. Стороны куба, высота и стороны треугольной призмы одинаковы и имеют размер L .

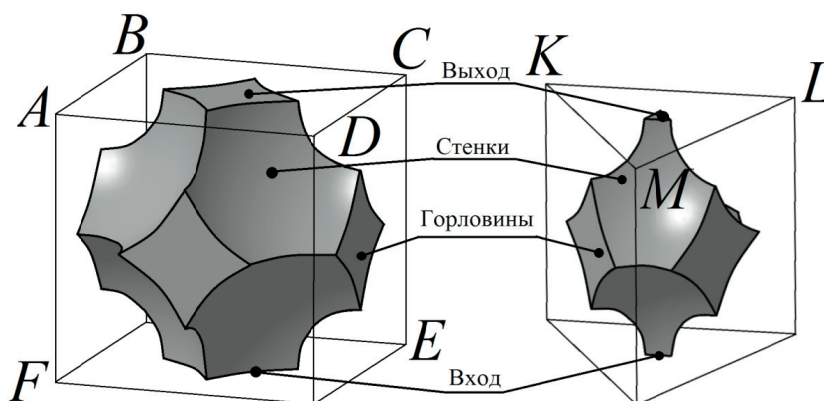


Рис. 1. Схема пор кубической (левой) и гексагональной (правой) структур

Заметим, что канал в поперечном сечении представляет собой фигуру, близкую по форме к многоугольнику, вписанному в горизонтальной плоскости между окружностей (рис. 2). Для кубической структуры канал имеет форму, близкую к квадрату, для гексагональной — к равностороннему треугольнику.

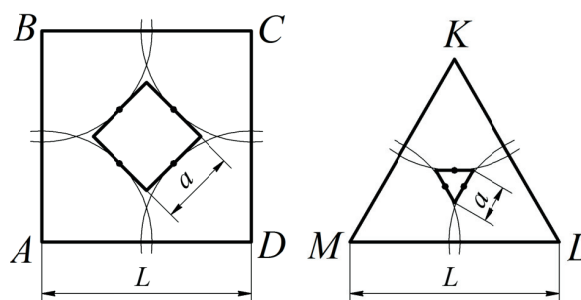


Рис. 2. Сечения ABCD и KLM рис. 1

Сгладим канал в средней части, тогда его стороны рассчитываются по формулам:

$$a_i(z) = \begin{cases} f_i(z), & z \in \left[0, \frac{L}{4}\right] \cup \left[\frac{3L}{4}, L\right], \\ 2f_i\left(\frac{L}{4}\right) - f_i\left(\frac{L}{2} - z\right), & z \in \left(\frac{L}{4}, \frac{3L}{4}\right); \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

где z — вертикальная координата, квадратному сечению соответствует нижний индекс 1, треугольному — 2. Функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= L(\sqrt{2} - \rho(z)), \\ f_2(z) &= L(2 - \rho(z)\sqrt{3}). \end{aligned} \quad (11)$$

Безразмерный радиус окружностей, входящий в (11) и описанный в [3], имеет вид:

$$\rho(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \left(\frac{2z}{L}\right)^2}, & 0 \leq z \leq \frac{L}{2}; \\ \sqrt{\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \left(2 - \frac{2z}{L}\right)^2}, & \frac{L}{2} < z \leq L, \end{cases} \quad (12)$$

где α — безразмерный параметр. Для наглядности примененное сглаживание в средней части канала показано на рис. 3. Участок $z \in \left(\frac{L}{4}, \frac{3L}{4}\right)$ является сглаживанием, полученным при отражении дуг окружностей (сплошная жирная линия, рис. 3) относительно точек 1-4.

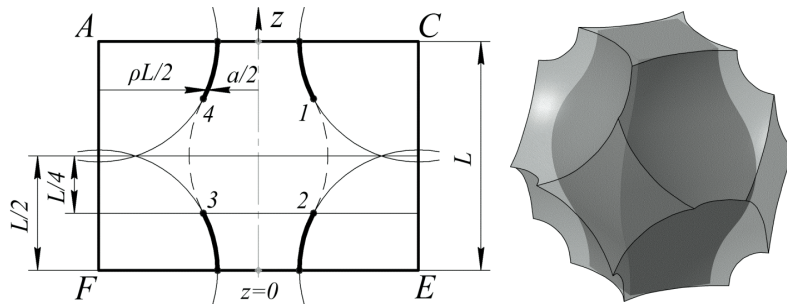


Рис. 3. Сечение ACEF рис. 1 кубической структуры (слева) и сглаженный канал, вписанный в кубическую структуру (справа)

Применительно к рассмотренной геометрии выражение для просветности, входящее в (3), имеет вид:

$$n_i(z) = \left(\frac{a_i(z)}{L}\right)^2. \quad (13)$$

Подставляя его в (3) и учитывая, что в кубической структуре $S = L^2$, а в гексагональной $S = L^2\sqrt{3}/4$, получим выражение для пористости:

$$m_i = \frac{1}{L^3} \int_0^L a_i^2(z) dz. \quad (14)$$

Выражение (9) для проницаемости кубической и гексагональной структур примет вид:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{9}{256L} \left(\int_0^L \frac{dz}{a_1^4(z)}\right)^{-1}, \\ k_2 &= \frac{1}{80L} \left(\int_0^L \frac{dz}{a_2^4(z)}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

На рис. 4 в качестве сравнения приведена зависимость пористости от безразмерного параметра α для рассмотренных структур. Из рисунка видно, что пори-

стость среды, образованной описанными в данной работе сглаженными каналами, существенно меньше (в 1.5-2.5 раза) пористости исходных структур [3].

Численная реализация

Пусть в трехмерной модели пористой среды, образованной вращательной симметрией и подробно описанной в [3], при постоянном перепаде давления протекает несжимаемая жидкость по свойствам, эквивалентным воде. Требуется определить проницаемость каналов при изменяемом безразмерном параметре α .

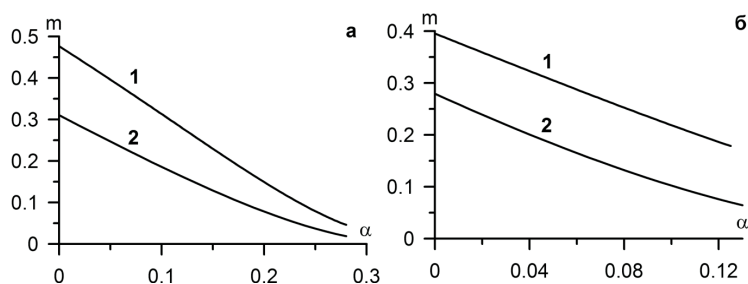


Рис. 4. Зависимость пористости от безразмерного параметра α для кубической (а) и гексагональной (б) структур (линия 1 соответствует геометрии [3], линия 2 — сглаженным каналам рис. 3)

Для нахождения проницаемости каналов можно использовать математическое моделирование. Уравнения Навье-Стокса могут быть использованы в качестве математической модели. Также можно рассмотреть упрощенный подход, при котором выписывается уравнение движения для жидкостей, аналогичное [1, 2]. При использовании первого подхода необходимо построить расчетную сетку, проще всего — образованную тетраэдрами, но, как показано в работе [4], наиболее точный результат можно получить на сетках в форме гексаэдров. Построение таких сеток даже на простых с виду структурах может оказаться проблематичным. Поэтому в данной статье описаны шаги по упрощению геометрии пор (рис. 1).

На рис. 2 и 3 рассмотрена схема, позволяющая упрощенно представить геометрию рис. 1. В самом верхнем сечении трехмерных структур по касательным к сферам проведены линии, образующие вписанные квадрат и равносторонний треугольник соответственно. Такое упрощение позволяет построить качественные сетки на основе гексаэдров (рис. 5).

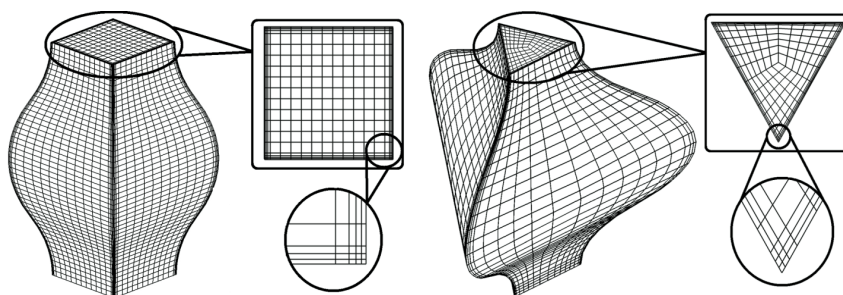


Рис. 5. Расчетные сетки, построенные для кубической (левой) и гексагональной (правой) структур (для наглядности показаны грубые сетки)

На рис. 5 видно, что вблизи стенок было произведено сгущение сетки для лучшего разрешения пристеночной области. Размеры ячеек подбирались таким образом, чтобы при дальнейшем ее сгущении сетка не влияла на определяемые параметры, при этом по вертикали количество элементов составило 400, по горизонтали — 60 элементов для каждой из сторон.

Для численного моделирования течения несжимаемой жидкости с использованием системы уравнений Навье-Стокса выбран программный продукт с открытым исходным кодом *OpenFOAM*, позволяющий определять необходимые параметры течения методом конечных объемов в декартовой системе координат. Был использован алгоритм SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) для связи скорости и давления. При решении системы уравнений гидродинамики для аппроксимации градиента давления использовалась линейная схема Гаусса второго порядка, для дивергенции — схема Гаусса с ограничением *SuperBeeV*, для лапласиана — линейная схема Гаусса второго порядка с коррекцией [4].

Анализ результатов

На рис. 6 показана зависимость проницаемости для кубической и гексагональной структур от безразмерного параметра α и пористости. Из рисунка видно, что оценка из [3] проходит заметно ниже аналитической оценки, предложенной в данной работе. Этого следовало ожидать, поскольку в [3] рассмотрена система каналов постоянного сечения, равного по площади минимальному просвету в порах. Результаты *OpenFOAM* и аналитической оценки данной статьи хорошо согласуются между собой (визуальное отклонение сравнимо с толщиной изображенных линий).

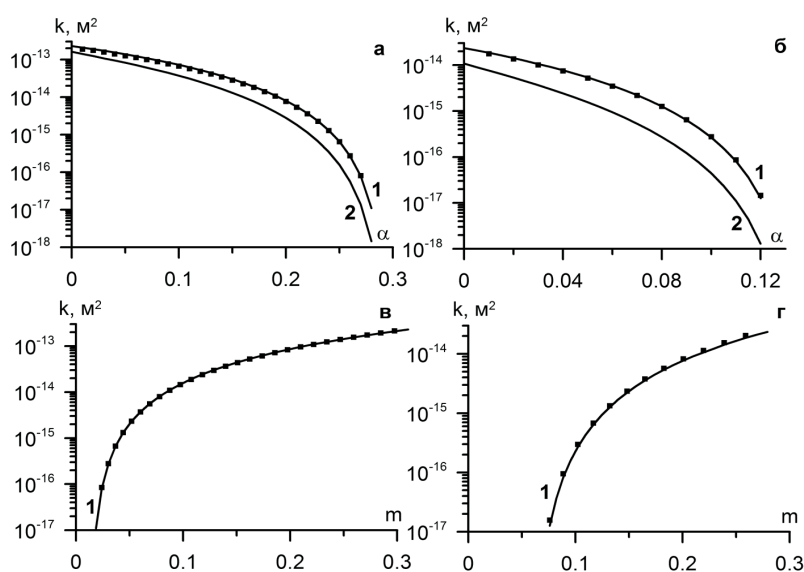


Рис. 6. Зависимость проницаемости для кубической (а, в) и гексагональной (б, г) структур от безразмерного параметра α и пористости.

Линия 1 соответствует аналитической оценке, линия 2 — оценке из [3],

■ — результатам *OpenFOAM*

На рис. 7 показана зависимость погрешности аналитической оценки относительно результатов *OpenFOAM* и отклонение результатов *OpenFOAM* относительно [4] для рассмотренных структур (рис. 1). Видно, что погрешность аналитической оценки стремится к нулю с ростом параметра α . Максимальное значение погрешности для кубической структуры составляет 11%, для гексагональной — 6%. При значениях $\alpha > 0.25$ для кубической структуры и $\alpha > 0.08$ для гексагональной структуры, результаты *OpenFOAM* становятся несколько больше аналитической оценки. Возможно, это связано с возрастающей скошенностью элементов построенных сеток. Отклонение результатов *OpenFOAM*, относительно [4], также приближается к нулю с ростом α . Это связано с тем, что при больших значениях α поперечные сечения каналов в узких местах (рис. 1, сечение ABCD, KLM) практически неотличимы по форме от квадрата и равностороннего треугольника (рис. 2). Именно узкие места вносят основной вклад в гидравлическое сопротивление среды. Замечательно то, что при существенном отличии пористостей модели среды со сглаженными каналами и среды, описанной в [3], показанном на рис. 4, расчетное значение проницаемости в них отличается на несколько процентов. Связано это с тем, что сглаживание каналов отсекает области порового пространства с низким расходом жидкости (застойные области). Для того чтобы создать хорошую аналитическую оценку для среды с разветвляющимися каналами [5], необходимо учесть переменность формы сечения и извилистость каналов.

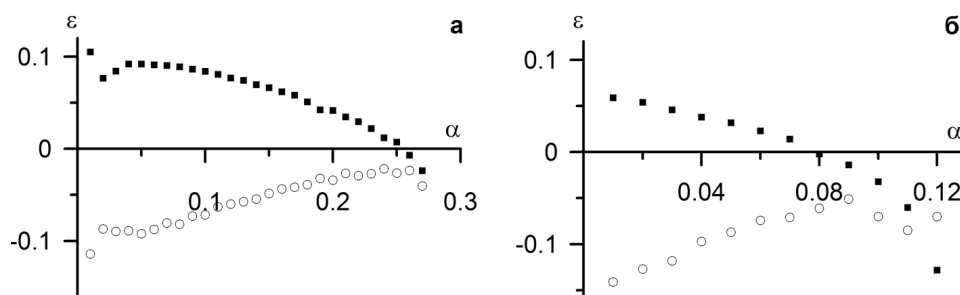


Рис. 7. Зависимость погрешности аналитической оценки относительно результатов *OpenFOAM* (■) и отклонение результатов *OpenFOAM* относительно [4] (○) для кубической (а) и гексагональной (б) структур

Выводы

Для предложенной модели пористой среды, образованной каналами, имеющими вращательную симметрию, получены аналитические оценки для нахождения проницаемости, которые хорошо согласуются с результатами гидродинамического моделирования в пакете *OpenFOAM* и значениями, описанными в литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губайдуллин А. А. Моделирование динамики капли нефти в капилляре с сужением / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. 2013. № 7. С. 71-77.

2. Губайдуллин А. А. Собственные частоты продольных колебаний капли в сужении капилляра / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 2(2). С. 85-91.
3. Игошин Д. Е. Моделирование пористой среды регулярными упаковками пересекающихся сфер / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова, П. Я. Мостовой // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. 2014. № 7. С. 34-42.
4. Игошин Д. Е. Численное исследование зависимости проницаемости от пористой среды, образованной каналами регулярной структуры / Д. Е. Игошин, Р. С. Сабуров // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 1 (1). С. 84-90.
5. Игошин Д. Е. Проницаемость пористой среды периодической структуры с разветвляющимися каналами / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 2 (2). С. 131-141.
6. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л. С. Лейбензон. М., 1947. С. 11-24.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов / Л. Г. Лойцянский; 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
8. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет; пер. с англ. М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 640 с.
9. Ромм Е. С. Структурные модели порового пространства горных пород / Е. С. Ромм. Л.: Недра, 1985. 240 с.
10. Хейфец Л. И., Неймарк А. В. Многофазные процессы в пористых средах / Л. И. Хейфец, А. В. Неймарк. М.: Химия, 1982. С. 29-33.
11. Slichter C. S. Theoretical investigations of the motion of groundwater / C. S. Slichter // 19th Annual Report of the United States Geological Survey. 1899. Part 2. Pp. 295-384.

REFERENCES

1. Gubaidullin A. A., Maksimov A. Yu. Modelirovanie dinamiki kapli nefti v kapilljare s suzheniem [Modeling the Oil Droplet Dynamics in the Capillary with a Constriction] // Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta [Tyumen State University Herald]. 2013. No 7. Pp.71-77. (In Russian)
2. Gubaidullin A. A., Maksimov A. Yu. Sobstvennye chastoty prodol'nyh kolebanij kapli v suzhenii kapilljara [Natural Frequencies of Longitudinal Oscillations of a Droplet in the Constriction of the Capillary Tube] // Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie. Neft', gaz, jenergetika [Tyumen State University Herald. Physico-Mathematical Modeling. Oil, Gas and Energy Engineering]. 2015. Vol. 1. No 2 (2). Pp. 85-91. (In Russian)
3. Igoshin D. E., Nikonova O. A., Mostovoy P. Y. Modelirovanie poristoj sredy reguljarnymi upakovkami peresekajushhihsja sfer [Simulation of the Porous Medium Regular Packages Intersecting Spheres] // Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta [Tyumen State University Herald]. 2014. No 7. Pp. 34-42. (In Russian).
4. Igoshin D. E., Saburov R. S. Chislennoe issledovanie zavisimosti pronicaemosti ot poristoj sredy, obrazovanoj kanalami reguljarnoj struktury [Numerical Research

- of Permeability Dependence of Porosity in Media Formed by Regular Structure Channels] // Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie. Neft', gaz, jenergetika [Tyumen State University Herald. Physico-Mathematical Modeling. Oil, Gas and Energy Engineering]. 2015. Vol 1. No 1(1). Pp. 84-90. (In Russian)
5. Igoshin D. E., Nikonova O. A. Pronicaemost' poristoj sredy periodicheskoj struktury s razvetvljajushhimisja kanalami [The Permeability of the Porous Medium with a Periodic Structure Branching Channels] // Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie. Neft', gaz, jenergetika [Tyumen State University Herald. Physico-Mathematical Modeling. Oil, Gas and Energy Engineering]. 2015. Vol 1. No 2(2). Pp. 131-141. (In Russian)
 6. Leibenzon L. S. Dvizhenie prirodnykh zhidkostei i gazov v poristoi srede [Nature Liquids and Gases Flow through Porous Medium]. M., 1947. Pp. 11-24. (In Russian)
 7. Lojcsjanskij L. G. Mehanika zhidkosti i gaza: Ucheb. dlja vuzov [Fluid Mechanics: Textbook for high schools]. M.: Drofa, 2003. 840 p. (In Russian)
 8. Masket M. Techenie odnorodnykh zhidkostei v poristoi srede [Flow of Homogeneous Fluids through Porous Medium] / Transl. from Eng. M. — Izhevsk. 2006. 640 p. (In Russian)
 9. Romm E. S. Strukturnye modeli porovogo prostranstva gornykh porod [Structural Models of Porous Medium of Rock Formations]. Leningrad, 1985. 240 p. (In Russian)
 10. Kheifets L. I., Neimark A. V. Mnogofaznye protsessy v poristyx sredakh [Multiphase Processes in Porous Medium]. 1982. Pp. 29-33. (In Russian)
 11. Slichter C. S. Theoretical investigations of the motion of groundwater // 19th Annual Report of the United States Geological Survey. 1899. Part 2. Pp. 295-384.

Авторы публикации

Игошин Дмитрий Евгеньевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Механики многофазных систем физико-технического института Тюменского государственного университета, научный сотрудник Тюменского филиала Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Максимов Алексей Юрьевич — старший преподаватель кафедры Механики многофазных систем физико-технического института Тюменского государственного университета, инженер-исследователь Тюменского филиала Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Authors of the publication

Dmitry E. Igoshin — Cand. Sci. (Phys. and Math.), Associate Professor at the Department of Multiphase Systems Mechanics of Institute of Physics and Technology, Tyumen State University, Research Officer at the Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

Aleksei Y. Maksimov — Senior Lecturer at the Department of Multiphase Systems Mechanics of Institute of Physics and Technology, Tyumen State University, Research Engineer at the Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences