

ТЕПЛОФИЗИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА

© А. И. ФИЛИППОВ¹, М. А. ЗЕЛЕНОВА¹, Е. П. ЩЕГЛОВА²

¹Стерлитамакский филиал
Башкирского государственного университета

²Уфимский государственный нефтяной
технический университет

filippovai@rambler.ru, marina_ag@inbox.ru,
ekaterina-scheglova@rambler.ru

УДК 532.517.2

АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В СКВАЖИНЕ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ИЗЕГЕРА

ANALYSIS OF TEMPERATURE FIELDS IN THE WELL ON THE BASIS OF THE NUMERICAL ISEGER'S INVERSION

Проведен анализ температурного поля в вертикальной скважине в случае отбора жидкости из нефтенасыщенного пласта. Задача переноса тепла потоком жидкости в стволе скважины и окружающих породах при отборе решена разработанным авторами методом формального асимптотического параметра. Кривые построены на основе решения задачи сопряжения, полученного в пространстве интегральных преобразований Лапласа — Карсона. Обратный переход осуществлен на основе численного обращения (алгоритм ден Изегера), для асимптотики малых времен получены точные аналитические формулы. Произведено сопоставление численной инверсии преобразования Лапласа — Карсона с аналитическими кривыми асимптотики малых времен. Показано, что кривые, полученные на основе асимптотических выражений, хорошо согласуются результатами численной инверсии. Согласие результатов расчетов является, с одной стороны, опорным фактом, определяющим достоверность и применимость алгоритма ден Изегера, а с другой — позволяет найти границы применимости приближенных формул.

The temperature field in a vertical well in case of fluid withdrawal from the oil-saturated reservoir is analyzed. The problem of fluid flow heat transfer in the wellbore and surrounding rocks is solved using the method of asymptotic formal parameter developed by the authors. The curves are built because of the problem solution of con-

jugation obtained in space. The reverse transfer is completed on the basis of numerical inversion (the Den Iseger algorithm); accurate analytical formulas are received for small time asymptotics. Numerical inversion of Laplace — Carson transform is compared to analytical curves of small time asymptotics. It is shown that the curves obtained on the basis of asymptotic expressions are in good agreement with the results of numerical inversion. The agreement of the calculation results, on the one side, is the strong fact determining the validity and applicability of the Den Iseger algorithm, and, on the other side, makes it possible to find the limits of applicability of approximation.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Температурное поле, скважина, преобразование Лапласа — Карсона, численная инверсия, алгоритм ден Изегера.

KEY WORDS. Temperature field, well, Laplace — Carson transform, numerical inversion, Den Iseger algorithm.

Теоретическое и экспериментальное исследование температурных полей при нефтедобыче актуально и активно расширяется [1, 2]. Ранее в работе [3] установлено, что алгоритм ден Изегера [8] может инвертировать преобразования Лапласа функций с неоднородностями и особенностями, и результаты численной инверсии имеют более высокую точность, чем в случае других методов обращения. Применение метода численного обращения к задаче о температурном поле в скважине [4] имеет особую значимость как в силу ее практической важности, так и по причине наличия большого количества решений в пространстве изображений, не имеющих оригиналов.

В данной работе осуществлено применение обратного численного преобразования с использованием гауссовских квадратур (метод ден Изегера) к задаче о температурном поле жидкости, текущей в вертикальной скважине радиуса r_0 , в случае постоянных вертикальных градиентов температур. Постановка и решение данной задачи приведены в работе [5], где удалось построить решение задачи о температурном поле в скважине в пространстве изображения Лапласа — Карсона. В работах [5, 6, 7] оригинал построен только для асимптотики малых времен.

Ниже дан анализ среднего по сечению трубы температурного поля в скважине на основе аналитических выражений, полученных в работе [6], и численной инверсии, описанной в [8].

Задача переноса тепла потоком жидкости в стволе скважины и окружающих породах при отборе имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right) + c\rho v \frac{\partial \theta}{\partial z_d} = 0, \quad 0 < z_d < D, \quad r_d < r_0, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \right) = 0, \quad r_d > r_0, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

$$\theta \Big|_{r_d=r_0} = \theta, \quad \theta \Big|_{\tau=0} = \theta_1 \Big|_{\tau=0} = -\Gamma z_d, \quad (3)$$

$$\theta_1 \Big|_{z_d \rightarrow \infty} \rightarrow -\Gamma z_d, \quad \theta_1 \Big|_{r_d \rightarrow \infty} \rightarrow -\Gamma z_d, \quad (4)$$

$$\theta|_{z_d=0} = \theta_0(\tau). \quad (5)$$

После введения безразмерных переменных $r = r_d/r_0$, $z = z_d/D$, $Fo = a_{1r}\tau/r_0^2$, $v=r_0/D$, $T_j = (\theta_j - \theta_{01})/\theta_0$, $Pe = v_0 r_0/a_{1r}$, $\theta_0 = \Gamma D$, $\chi = c_1 \rho_1 / c\rho$, задача (1)-(5) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} - \frac{\chi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Pe v \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad (7)$$

$$T|_{r=1} = T_1, \quad T|_{Fo=0} = T_1|_{Fo=0} = -z, \quad (8)$$

$$T_1|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow -z, \quad T_1|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -z, \quad (9)$$

$$T|_{z=0} = \frac{\theta_{10}(\tau) - \theta_{01}}{\theta_{11}} = T_0(Fo), \quad (10)$$

где Pe — аналог параметра Пекле, Fo — аналог числа Фурье, $T_0(F_0)$ — температурный сигнал пласта.

Усредним задачу (6) — (10) по радиусу скважины $\langle T \rangle = 2 \int_0^1 T r dr$:

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial Fo} + Pe v \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} = 2\chi \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad 0 < z < 1, \quad r < 1, \quad Fo > 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad r > 1, \quad Fo > 0, \quad (12)$$

$$\langle T \rangle|_{Fo=0} = T_1|_{Fo=0} = -z,$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -z, \quad T_1|_{r=1} = \langle T \rangle,$$

$$T_1|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow -z, \quad \langle T \rangle|_{z=0} = T_0(Fo). \quad (15)$$

С помощью преобразования Лапласа — Карсона:

$$T_j^u = p \int_0^\infty e^{-pFo} T_j(Fo) dFo, \quad (16)$$

запишем задачу (11) — (15) в пространстве изображений, предварительно опустив знак среднего:

$$Pe v \frac{\partial T^u}{\partial z} + p(T^u + z) = 2\chi \frac{\partial T_1^u}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \quad 0 < z < 1, \quad (17)$$

$$p(T_1^u + z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^u}{\partial r} \right), \quad r > 1, \quad (18)$$

$$T_1^u \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -z, \quad T_1^u \Big|_{r=1} = T^u, \quad (19)$$

$$T_1^u \Big|_{z \rightarrow \infty} = -z, \quad T^u \Big|_{z=0} = T_0^u(p). \quad (20)$$

Решение уравнения (18) выражается через функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента:

$$T_1^u + z = C_1 I_0(r\sqrt{p}) + C_2 K_0(r\sqrt{p}). \quad (21)$$

Из условия (20) следует, что постоянный коэффициент C_1 равен нулю, поэтому получим:

$$T_1^u = C_2 K_0(r\sqrt{p}) - z. \quad (22)$$

Для определения C_2 воспользуемся условием (19). Подставив полученное выражение в (22), представим решение и его производную для окружающего массива ($r > 1$) в виде:

$$T_1^u = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}(T^u + z), \quad \frac{\partial T_1^u}{\partial r} = -\sqrt{p} \frac{K_1(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}(T^u + z). \quad (23)$$

При этом справедливо равенство, следующее из (19)

$$\frac{\partial T_1^u}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\sqrt{p} k (T^u + z), \quad (24)$$

где $k = k(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$. С учетом последних равенств уравнение (17) для определения T^{0u} можно представить в виде:

$$\frac{dT^u}{dz} + \left(\frac{p + 2\chi k \sqrt{p}}{\text{Pev}} \right) (T^u + z) = 0, \quad r < 1, \quad z > 0. \quad (25)$$

Решение уравнения (17) с учетом условия (19) представится в виде:

$$T^u = T_0^u(p) e^{-\alpha z} - z + \int_0^z e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi, \quad r < 1, \quad z > 0, \quad (26)$$

где $\alpha = (p + 2\chi k \sqrt{p})/\text{Pev}$.

Подставив (26) в (23), получим решение для внешней области:

$$T_1^u = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[T_0^u(p) e^{-\alpha z} - z + \int_0^z e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi \right], \quad r > 1, \quad z > 0. \quad (27)$$

Выражения (26) и (27) представляют точное решение задачи в нулевом приближении в пространстве изображений. Решение с точностью до коэффициентов совпадает с полученным ранее решением задачи в [6].

Полученные выше зависимости составляют основу для научных исследований и практических расчетов температуры в скважинах и трубопроводах для различных случаев отбора жидкости. Ранее удалось исследовать температурные поля в скважине в случае асимптотики малых времен [5, 6, 7]. Рассмотрим случаи отбора из пласта нефти $\chi = 1.7$ и воды $\chi = 0.67$, а также водонефтяной смеси $\chi = 0.5$.

На рисунке 1 (а, б) приведены результаты расчетов установления температуры $T^* = (T(z, Fo) - T(0, 0)) / (T(D, 0) - T(0, 0))$ в стволе скважины после начала отбора ($Pe v = 0.1$ (а) и $Pe v = 1$ (б)). Параметры скважины и окружающих горных пород предполагаются неизменными с глубиной от верхней точки рассматриваемого интервала $z = z_d / D = 0$ до места поглощения $z = z_d / D = 0$. Действительно, при $Fo < 1$ на расчетных кривых наблюдаются участки с постоянным градиентом, равным фоновому, наблюдающемуся на кривой 1 ($Fo = 0$).

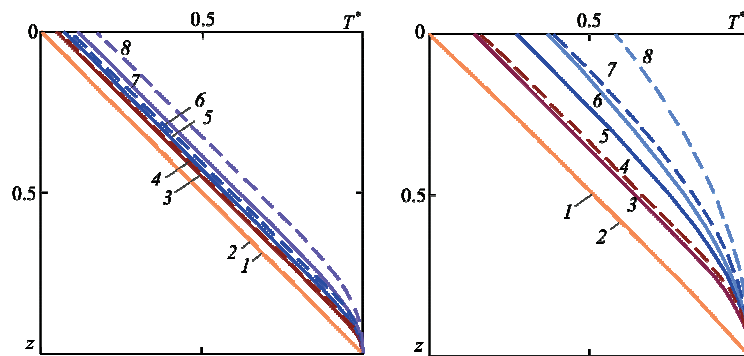


Рис. 1. Распределение температуры при отборе:
 а — $Pe v = 0.1$, $\chi = 0.5$, 1 - $Fo = 0$, 2 - 1, 3 - 2, 4 - 5;
 б — $Pe v = 1$, $\chi = 1.7$, 1 - $Fo = 0$, 2 - 0.5, 3 - 2, 4 - 5

При больших временах $Fo \rightarrow \infty$ распределение температуры приближается к вертикальной линии $T^* = 0$, т. е. температура вдоль ствола скважины становится равной температуре закачиваемой жидкости, а градиент температуры приближается к нулю.

Отметим, что в условиях компрессорного возбуждения притока такие условия как $Fo > 1$ практически не реализуются. Более приемлемыми являются расчеты при $Fo < 1$. В этом случае температурное поле определяется сдвигом фонового распределения за исключением интервала глубин в непосредственной близости к устью скважины.

Наличие других поглощающих интервалов, изменение диаметра ствола скважины и теплофизических характеристик окружающих скважину пород приводит к изменению распределения температуры вдоль ствола скважины.

Из рисунка также видно, что при малых дебитах из пласта $Pe v = 1$ наблюдается зона в удаленных от кровли отдающего пласта интервалах $z > 0.3$, где распределение температуры почти линейное, с наклоном, равным среднему геотермическому градиенту. Вблизи кровли отдающего интервала градиент температуры уменьшается. Однако это справедливо только при отсутствии аномалий баротермического эффекта в пласте.

Рисунок 2 (а, б) иллюстрирует расчетные зависимости относительной температуры T^* от безразмерной вертикальной координаты $z = z_d/D$, где z_d отсчитывается от устья скважины, а точка $z_d = D$ — соответствует забою. Из сопоставления кривых на рисунках 2 а и 2 б следует, что отклонение температуры от геотермической существенно увеличивается с ростом параметра Re или дебита скважины.

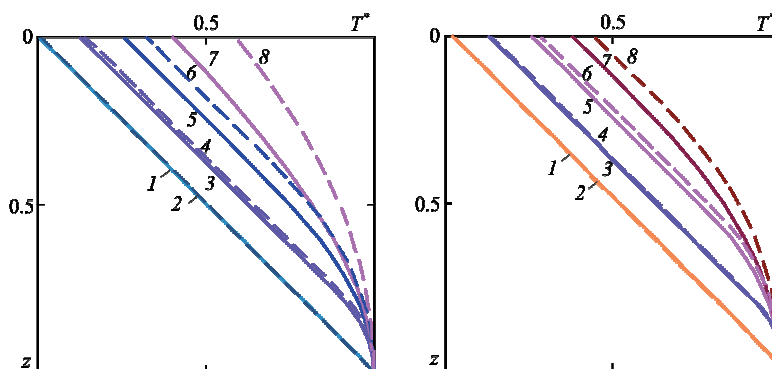


Рис. 2. Распределение температуры при отборе:
 а — $Re v = 0.5$, $\chi = 0.67$, 1 - $Fo = 0.01$, 2 - 0.5, 3 - 1.5, 4 - 4;
 б — $Re v = 1$, $\chi = 0.67$, 1 - $Fo = 0.025$, 2 - 0.2, 3 - 0.5, 4 - 0.9

Как и в предыдущем случае, темп изменения температуры существенно зависит от дебита жидкости — числа Re . Изменение состава поступающей жидкости заметно влияет на распределение температуры.

Численное обращение интегрального преобразования Лапласа — Карсона хорошо согласуется с кривыми, полученными в работе [6]. Это подтверждает достоверность теории, разработанной ранее, и позволяет оценить область применения асимптотики малых времен. В отличие от аналитических выражений, которые удалось построить лишь для предельных случаев времени, численное обращение лишено этого недостатка. Однако численные обращения требуют подбора большого числа параметров, которые могут изменяться в зависимости от области исследования. Сопоставление численной инверсии с асимптотикой малых времен позволяет осуществить коррекцию и грамотный подбор фиксируемых параметров. Таким образом, численное обращение представляет особую ценность не как самостоятельный аппарат при построении графиков, а в совокупности с аналитическими выражениями предельных случаев, и не может полностью заменить аналитические выражения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Купцов С. М. Температурное поле эксплуатационной скважины / С. М. Купцов // Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И. М. Губкина. 2009. № 4. С. 62-68.
2. Рамазанов А. Ш. Температурное поле в пласте с учетом термодинамических эффектов при работе скважины с переменным дебитом / А. Ш. Рамазанов, В. М. Нагимов, Р. К. Ахметов // Нефтегазовое дело. 2013. № 1. С. 527-536.

3. Филиппов А. И. Тестирование программ численного обращения преобразования Лапласа на основе асимптотических формул / А. И. Филиппов, М. А. Зеленова, Е. П. Щеглова // Современные тенденции развития науки и технологий: сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции. Часть 1. С. 44-48.
4. Филиппов А. И. Применение численной инверсии к задаче о температурном поле в скважине / А. И. Филиппов, М. А. Зеленова, Е. П. Щеглова // Юность и Знания — Гарантия Успеха — 2015: сборник научных трудов II Международной научно-практической конференции. Курск, 2015. С. 259-262.
5. Филиппов А. И. Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе в среднем точного решения / А. И. Филиппов, П. Н. Михайлов, О. В. Ахметова, М. А. Горюнова // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51. № 3 (301). С. 84-93.
6. Филиппов А. И. Температурное поле в пласте и скважине / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова. Уфа: АН РБ, Гилем, 2011. 336 с.
7. Щеглова Е. П. Расчет полей температур в скважине на основе асимптотических формул / Е. П. Щеглова, Е. М. Карасев, А. И. Филиппов // Известия Вузов. Нефть и газ, 2010. №3. С. 23-27.
8. Iseger P. D. Numerical transform inversion using Gaussian quadrature / P. D. Iseger // Probability in the in Engineering and Informational Sciences. 2006. No 20. Pp. 1-44.

REFERENCES

1. Kuptsov S. M. Temperaturnoe pole jekspluatacionnoj skvazhiny [Temperature Field of Production Well] // Trudy Rossijskogo gosudarstvennogo universiteta nefti i gaza im. I.M. Gubkina [Proceedings of Gubkin Russian State University of Oil and Gas]. 2009. No 4. Pp. 62-68. (In Russian)
2. Ramazanov A. Sh., Nagimov V. M., Ahmetov R. K. Temperaturnoe pole v plaste s uchetom termodinamicheskikh jeffektov pri rabote skvazhiny s peremennym debitom [Analytical Model of Temperature Prediction for a Given Production History] // Neftegazovoe delo [Oil and Gas Business]. 2013. No 1. Pp. 527-536. (In Russian)
3. Filippov A. I., Zelenova M. A., Shheglova E. P. Testirovanie programm chislenogo obrashhenija preobrazovanija Laplasa na osnove asimptoticheskikh formul [Testing of Programs of Numerical Inversion for the Laplace Transformation based on Asymptotic Formulas] // Sovremennye tendencii razvitija nauki i tehnologij: sbornik nauchnyh trudov po materialam IV Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii. Chast' 1 [Modern Trends in Science and Technology: Proceedings of the IV International Scientific and Practical conference. Part 1]. Pp. 44-48. (In Russian)
4. Filippov A. I., Zelenova M. A., Shheglova E. P. Primenenie chislennoj inversii k zadache o temperaturnom pole v skvazhine [Application of Numerical Inversion to Problem of Temperature Field in Well] // Junost' i Znaniya — Garantija Uspeha — 2015: sbornik nauchnyh trudov II Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii [Youth and Knowledge — Success Guarantee — 2015: Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference]. Kursk, 2015. Pp. 259-262. (In Russian)
5. Filippov A. I., Mihajlov P. N., Ahmetova O. V., Gorjunova M. A. Analiz temperaturnogo polja cilindricheskogo potoka na osnove v srednem tochnogo reshenija [Analysis of the Temperature Field of Cylindrical Flow based on an On-the-Average

- Exact Solution] // Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika [Applied Mechanics and Technical Physics]. 2010. Vol. 51. No 3 (301). Pp. 84-93. (In Russian)
6. Filippov A. I., Ahmetova O. V. Temperaturnoe pole v plaste i skvazhine [Temperature Field in Reservoir and Wellbore]. Ufa: AN RB [Academy of Sciences, Republic of Bashkortostan], Gilem. 2011. 336 p. (In Russian)
 7. Shheglova E.P., Karasev E. M., Filippov A. I. Raschet polej temperatur v skvazhine na osnove asimptotičeskikh formul [Calculation of Temperature Fields in a Well based on Asymptotic Formulas] // Izvestija vuzov. Neft' i gaz [Higher Educational Institutions News. Oil and Gas]. 2010. No 3. Pp. 23-27. (In Russian)
 8. Den Iseger P. Numerical transform inversion using Gaussian quadrature // Probability in the in Engineering and Informational Sciences. 2006. No 20. Pp. 1-44.

Авторы публикации

Филиппов Александр Иванович — доктор технических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета

Зеленова Марина Анатольевна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета

Щеглова Екатерина Павловна — преподаватель кафедры общей физики Уфимского государственного нефтяного технического университета

Authors of the publication

Aleksandr I. Filippov — Dr. Sci. (Tech.), Professor at the Department of General and Theoretical Physics, Sterlitamak Branch of Bashkir State University

Marina A. Zelenova — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Lecturer at the Department of General and Theoretical Physics, Sterlitamak Branch of Bashkir State University

Ekaterina P. Scheglova — Lecturer at the Department of Physics, Ufa State Petroleum Technological University