

© С. Л. БОРОДИН

Институт теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН  
borodin@ikz.ru

УДК 519.6; 532; 536

**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОЙ РАДИАЛЬНОЙ  
НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА**

**NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLVING  
THE PROBLEM OF ONE-DIMENSIONAL RADIAL  
NONISOTHERMIC GAS FILTRATION**

*При добыче природного газа возможно образование газовых гидратов в призабойной зоне скважин в результате снижения температуры, особенно в тех случаях, когда термобарические пластовые условия изначально близки к условиям образования гидрата пластового газа.*

*С целью проведения вычислительных экспериментов по оценке данного явления в работе построена математическая модель одномерной радиальной неизотермической фильтрации газа. Для численной реализации разработан алгоритм, основу которого составляют неявная разностная схема, методы прогонки и простых итераций.*

*Разработан компьютерный код, позволяющий рассчитывать распределения различных параметров фильтрационного потока при добыче газа для разных пластовых и эксплуатационных условий. Проведены оценки времени и точности расчетов в зависимости от временного шага.*

*When natural gas production, the formation of gas hydrate in the well bottom zone due to the reduction of temperature is possible, especially in the cases, when the reservoir thermobaric conditions initially close to the formation conditions of the hydrate of reservoir gas. For numerical experiments to assess this phenomenon the mathematical model of the one-dimensional radial nonisothermic gas filtration is constructed in this work. For the numerical implementation of the model an algorithm, which is based on an implicit difference scheme, sweep method and the method of simple iterations, is suggested. The computer code to calculate the distribution of different filtration flow parameters for gas production in different reservoir and operating conditions is written. The time and accuracy of calculations depending on the time step are estimated.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Численные методы, неизотермическая фильтрация, гидратообразование.

**KEY WORDS.** Numerical methods, nonisothermic filtration, hydrate formation.

### Введение

При эксплуатации Мессояхского месторождения происходило интенсивное образование газовых гидратов [12] из-за того, что изначально термобарические параметры в пласте были близки к равновесным гидратообразования, а температура призабойной зоны в процессе фильтрации снижалась по причине дросселирования и адиабатического охлаждения газа. Поэтому на сегодняшний день в России к разработке планируются газовые и газоконденсатные залежи, находящиеся в предгидратном состоянии (рис. 1) [11].

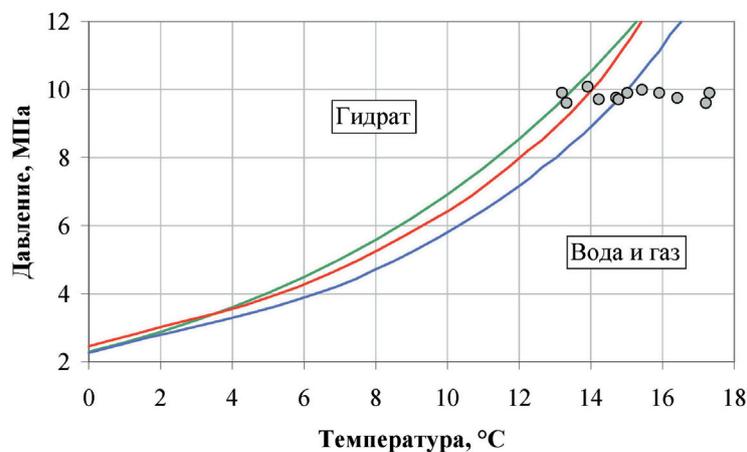


Рис. 1. Верхняя зеленая линия соответствует равновесной кривой гидратообразования для метана; средняя красная отображает состав газа из пласта П1; нижняя синяя — состав газа из пласта П2; серые точки — параметры, замеренные в скважинах

В связи с этим разумно провести численное исследование влияния различных параметров на давление и температуру в пласте при неизотермической фильтрации газа для того, чтобы оценить возможность появления в пласте термобарических условий гидратообразования. Для такого исследования необходимо построить математическую модель и разработать численные методы ее реализации.

### Математическая модель

При исследовании неизотермической фильтрации газа удобно рассматривать область моделирования в цилиндрических координатах (рис. 2). Принимая пласт однородным и изотропным, а также пренебрегая влиянием верхней и нижней границ, можно считать, что задача одномерная и параметры зависят только от радиальной координаты и времени. Допустим, что скелет пористой

среды и вода несжимаемы и неподвижны. Модель строится для процесса фильтрации газа, происходящего при разработке месторождений, и его длительность значительно превышает характерное время выравнивания температур [3, 8], поэтому будем считать, что температуры скелета пористой среды, воды и газа совпадают.

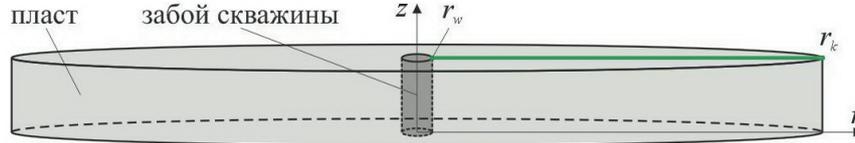


Рис. 2. Схема области моделирования

Пусть пласт, заполненный в исходном состоянии газом и водой, занимает область  $r \in [r_w; r_k]$ :

$$t = 0, r \in [r_w; r_k]: \quad p = p_0, \quad T = T_0. \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время (с);  $r$  — радиальная координата (м);  $r_w$  — радиус скважины (м);  $r_k$  — радиус пласта (м);  $T$  — температура в пласте (К);  $T_0$  — начальная температура в пласте (К);  $p$  — давление в пласте (Па);  $p_0$  — начальное давление в пласте (Па).

Положим, что через левую границу ( $r = r_w$ ) из пласта отбирается газ:

$$t > 0, r = r_w: \quad p = p_w < p_0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

где  $p_w$  — давление на забое газодобывающей скважины (Па).

При этом на правой границе:

$$t > 0, r = r_k: \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Запишем уравнения сохранения массы воды и газа, состояния для газа, Латонова-Гуревича для коэффициента сверхсжимаемости и закон Дарси [6, 8, 17]:

$$\frac{\partial(\rho_w m(1 - S_g))}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho_g m S_g)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_g m S_g \vec{v}) = 0,$$

$$p = z \rho_g R T, \quad (5)$$

$$z = (0,4 \lg(T/T_c) + 0,73)^{p/p_c} + 0,1 p/p_c, \quad (6)$$

$$m S_g \vec{v} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \quad (7)$$

где  $m$  — пористость пласта;  $S_g$  — газонасыщенность;  $\rho_g$  и  $\rho_w$  — плотность газа и воды;  $\vec{v}$  — вектор скорости газа;  $z$  — коэффициент сверхсжимаемости;  $R$  — удельная газовая постоянная;  $T_c$  и  $p_c$  — критические температура и давление газа;  $k$  и  $\mu$  — проницаемость пласта и динамическая вязкость газа.

Преобразовав уравнение сохранения массы газа (4) с учетом сделанных допущений, а также уравнения состояния (5) и закона Дарси (7), получим следующее дифференциальное уравнение для расчета давления:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p}{z} \frac{\partial z}{\partial t} + zRT \frac{k}{mS_g} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\rho_g}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (8)$$

Уравнение баланса энергии в пластах с учетом различных факторов рассматривалось И. А. Чарным, Э. Б. Чекалюком, М. Д. Розенбергом, П. П. Золотаревым, Е. В. Теслюком и др. [1, 3, 7, 11, 13, 14, 15]. Воспользуемся уравнением энергии из [3]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_g c_{gp} m S_g \vec{v} \left( \text{grad} T + \varepsilon_i \text{grad} p - \frac{\vec{g}}{c_{gp}} \right) - \rho_g c_{gp} m S_g \eta_s \frac{\partial p}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T), \quad (9)$$

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{\rho_g c_{gp}} \frac{T}{z} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p, \quad \eta_s = \frac{1}{\rho_g c_{gp}} - \varepsilon_i,$$

$$\rho c = (1 - m) \rho_{sk} c_{sk} + m (S_g \rho_g c_{gp} + (1 - S_g) \rho_w c_w),$$

$$\lambda = (1 - m) \lambda_{sk} + m (S_g \lambda_g + (1 - S_g) \lambda_w),$$

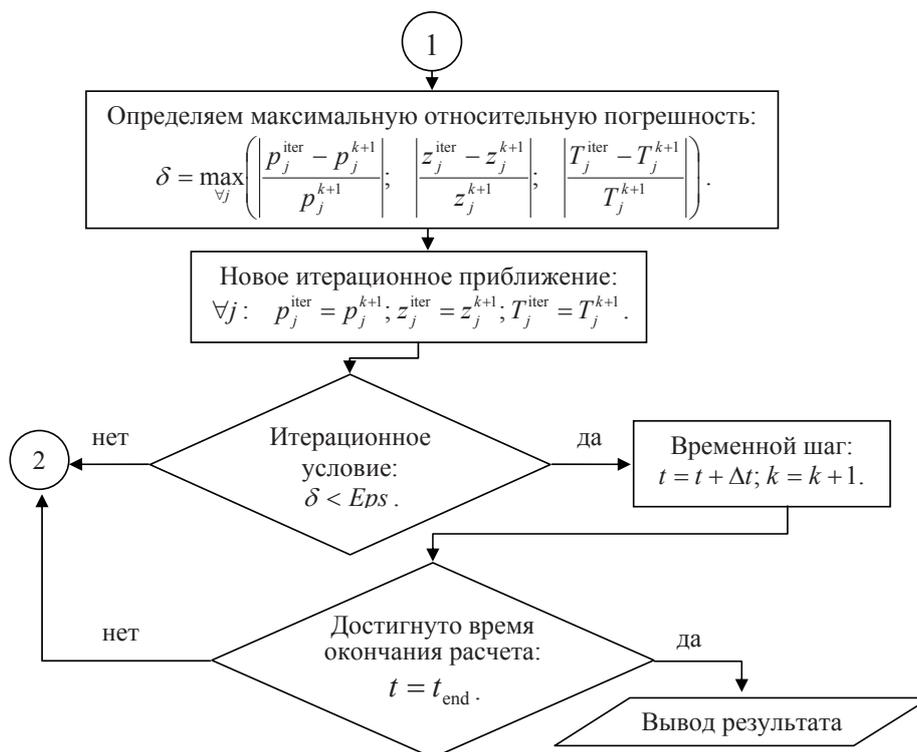
где  $\rho_{sk}$  и  $c_{sk}$  — плотность и удельная теплоемкость скелета пористой среды;  $c_{gp}$  и  $c_w$  — удельная теплоемкость газа и воды;  $\varepsilon_i$  — дифференциальный коэффициент дресселирования;  $\eta_s$  — дифференциальный адиабатический коэффициент;  $\vec{g}$  — ускорение свободного падения;  $\lambda_{sk}$ ,  $\lambda_g$  и  $\lambda_w$  — коэффициент теплопроводности скелета пористой среды, газа и воды. Преобразовав уравнение (9) с учетом сделанных допущений и закона Дарси (7), получим следующее дифференциальное уравнение для расчета температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\rho_g c_{gp}}{\rho c} \left( \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_i \frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + m S_g \eta_s \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (10)$$

Решив систему уравнений (6), (8) и (10) с начальными и граничными условиями (1)-(3), используя при этом уравнение (5) для определения плотности газа, а также какие-либо выражения для зависимостей  $c_{gp}$ ,  $\lambda_g$ ,  $\mu$  от давления и температуры, можно найти давление, температуру и другие параметры при неизотермической фильтрации газа. Данную систему можно решить численно, используя неявную разностную схему, методы прогонки и простых итераций. Алгоритм решения подробно описан далее.

## Численная реализация





Благодаря использованию абсолютно устойчивой неявной схемы можно брать сколь угодно большие временные шаги ( $\Delta t$ ), что приводит к значительной экономии времени расчетов [9, 10]. Рассмотрим, как влияет  $\Delta t$  на время вычислений (рис. 3). При расчете используются следующие значения параметров:  $p_0 = 10$  МПа;  $p_w = 8$  МПа;  $T_0 = 286,7$  К ( $13,55^\circ\text{C}$ );  $m = 0,3$ ;  $S_g = 0,9$ ;  $k = 5e-14$  м<sup>2</sup>;  $\rho_{sk} = 2000$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_{sk} = 1000$  Дж/(кг·К);  $\lambda_{sk} = 1,5$  Вт/(м·К);  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_w = 4200$  Дж/(кг·К);  $\lambda_w = 0,56$  Вт/(м·К);  $p_c = 4,599$  МПа [9];  $T_c = 190,56$  К [9];  $R = 8,3145/16,043e-3$  Дж/(кг·К) [9]; значения  $c_{gp}$ ,  $\lambda_g$ ,  $\mu$  определялись путем интерполяции табличных данных для метана [6, 7];  $r_w = 0,1$  м;  $r_k = 500$  м;  $\Delta r = 0,01$  м при  $r \in [r_w, 10]$ ,  $\Delta r = 0,1$  м при  $r \in (10, 100]$ ,  $\Delta r = 1$  м при  $r \in (100, r_k]$ ;  $t_{\text{end}} = 30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$  с;  $Eps = 1e-15$ .

Из рис. 3 видно, что зависимость времени расчетов от временного шага хорошо аппроксимируется монотонно убывающей степенной функцией. При этом увеличение временного шага в  $N$  раз приводит к уменьшению времени расчетов примерно в  $N^{0,9}$  раз. Если бы уравнения решались без итераций, то объем вычислений был бы обратно пропорционален временному шагу, т. е. его увеличение в  $N$  раз приводило бы к уменьшению времени расчетов в  $N$  раз. Однако в данном случае при увеличении временного шага увеличивается и среднее количество итераций (рис. 4), поэтому время расчета убывает немного медленнее, чем обратно пропорциональное временному шагу.

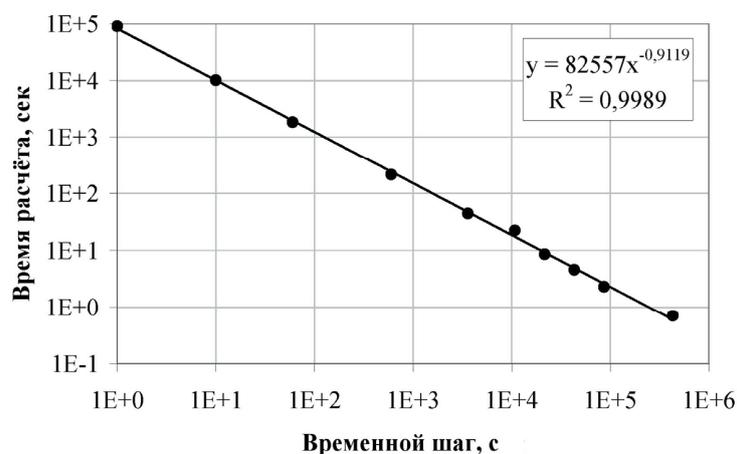


Рис. 3. Время расчета в зависимости от временного шага.  
Точки — замеры; сплошная линия — интерполяция

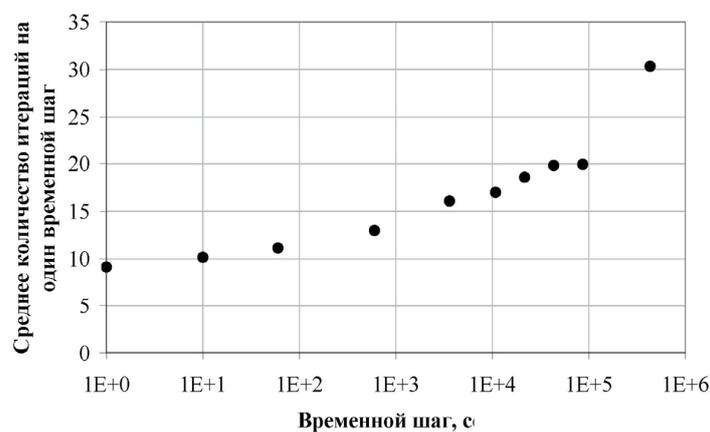


Рис. 4. Среднее количество итераций в зависимости от временного шага

Рассмотрим, как влияет  $\Delta t$  на точность вычислений. Для этого рассчитаем значения давления и температуры во всех узлах сетки по радиальной координате на конечный момент времени при различных  $\Delta t$ . Затем, используя в качестве эталона результаты при  $\Delta t = 1$  с, определим абсолютные погрешности при других  $\Delta t$  во всех узлах сетки по радиальной координате и найдем среди них максимальные значения (рис. 5).

Из рис. 5 видно, что абсолютные погрешности по давлению и температуре растут прямо пропорционально временному шагу. И даже при больших временных шагах принимают приемлемые для расчетов значения (например, при  $\Delta t = 5$  сут:  $\max \Delta_p \approx 11944$  Па,  $\max \Delta_T \approx 0,017$  К, что соответствует относительным погрешностям  $\max \delta_p \approx 0,001$ ,  $\max \delta_T \approx 6e-5$ ).

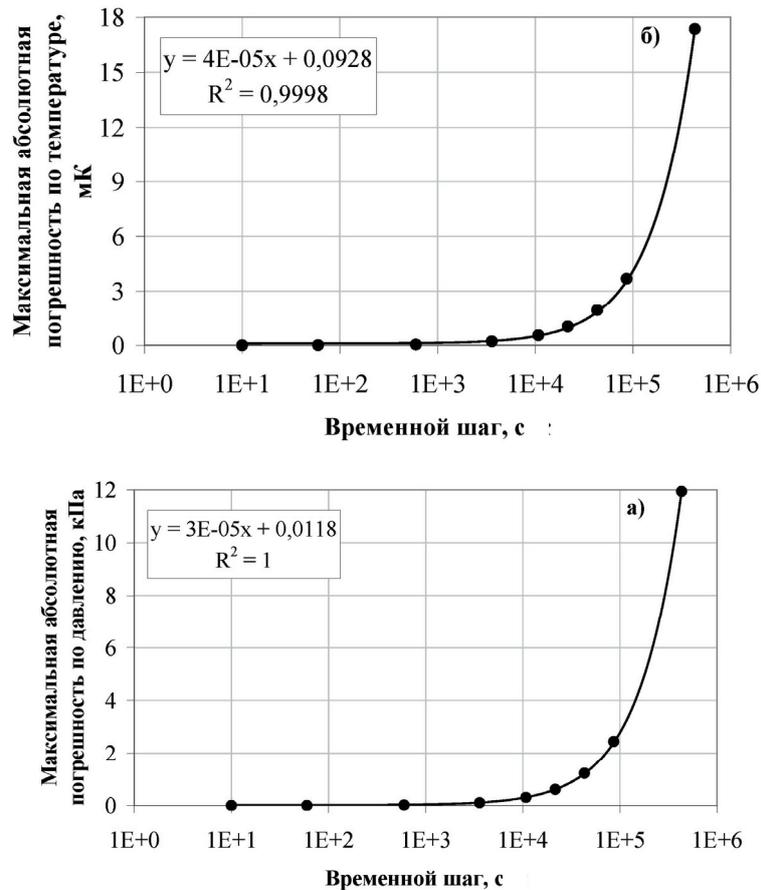


Рис. 5. Максимальная абсолютная погрешность по давлению (а) и температуре (б) в зависимости от временного шага

Приведенный здесь алгоритм можно использовать и для решения других уравнений и систем уравнений.

### Заключение

Предложена математическая модель одномерной радиальной неизотермической фильтрации газа, позволяющая оценить возможности гидратообразования при добыче газа. Разработан компьютерный алгоритм, в котором используются неявная разностная схема, методы прогонки и простых итераций. Благодаря использованию абсолютно устойчивой неявной схемы сходимость решения достигается при любых шагах по времени.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алишаев М. Г. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений / М. Г. Алишаев, М. Д. Розенберг, Е. В. Теслюк. М.: Недра, 1985. 271 с.

2. Аргунова К. К. О математическом моделировании разработки Мессояхского месторождения / К. К. Аргунова, Э. А. Бондарев, В. В. Попов, И. И. Рожин // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2008. Вып. 1. URL: <http://ogbus.ru/>
3. Басииев К. С. Подземная гидромеханика: учебник для вузов / К. С. Басииев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов. М.: Недра, 1993. 416 с.
4. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н. Б. Варгафтик. М.: Изд-во «Наука», 1972. 720 с.
5. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплопроводности жидкостей и газов / Н. Б. Варгафтик, Л. П. Филиппов, А. А. Тарзиманов, Е. Е. Тоцкий. М.: Энергоатомиздат, 1990. 352 с.
6. Латонов В. В. Расчет коэффициента сжимаемости природного газа / В. В. Латонов, Г. Р. Гуревич // Газовая промышленность. 1969. № 2. С. 7-9.
7. Леонтьев Н. Е. Основы теории фильтрации: учебное пособие / Н. Е. Леонтьев. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. 88 с.
8. Мусакаев Н. Г. Математическое моделирование процесса добычи газа из газогидратной залежи с учетом образования льда / Н. Г. Мусакаев, М. К. Хасанов // Вестник Тюменского государственного университета. 2014. № 7. С. 43-50.
9. Мусакаев Н. Г. Численное исследование процесса протаивания многолетних мерзлых пород при работе добывающей скважины с установкой электроцентробежных насосов / Н. Г. Мусакаев, С. Л. Бородин, С. Н. Романюк // Вестник Новосибирского государственного университета. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13. Вып. 2. С. 15-20.
10. Мусакаев Н. Г. Методы решения одномерной радиальной задачи теплопередачи в окружающие скважину мерзлые породы / Н. Г. Мусакаев, С. Л. Бородин, С. Н. Романюк // Вестник Тюменского государственного университета. 2014. № 7. С. 19-26.
11. Николаевский В. Н. Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, К. С. Басииев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов. М.: Недра, 1970. 335 с.
12. Программа и тезисы докладов конференции «Газовые гидраты в экосистеме Земли — 2014» / Ответственный за выпуск к. х. н. Т. В. Родионова. Новосибирск: ИНХ СО РАН, 2014. 104 с.
13. Проектирование разработки и эксплуатация нефтяных месторождений: справочное руководство в 2 т. / под ред. Ш. К. Гиматудинова; 3-е изд. испр. М.: Недра, 1983; Т. 2. Проектирование разработки / Ш. К. Гиматудинов, Ю. П. Борисов, М. Д. Розенберг. 431 с.
14. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика / И. А. Чарный. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
15. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта / Э. Б. Чекалюк. М.: Недра, 1965. 238 с.
16. Poling B. E. The properties of gases and liquids / B. E. Poling, J. M. Prausnitz, J. P. O'Connell; 5<sup>th</sup> Ed, 2001. 803 p.
17. Shagapov V. Sh. Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas / V. Sh. Shagapov, N. G. Musakaev, M. K. Khasanov // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 84. Pp. 1030-1039.

## REFERENCES

1. Alishaev M. G., Rozenberg M. D., Tesljuk E. V. Neizotermicheskaja fil'tracija pri razrabotke neftjanyh mestorozhdenij [Non-isothermal Filtration during the Development of Oil Fields]. M.: Nedra, 1985. 271 p. (In Russian)
2. Argunova K. K., Bondarev E. A., Popov V. V., Rozhin I. I. O matematicheskom modelirovanii razrabotki Messojajnskogo mestorozhdenija [On Simulation of Case History of the Messojajnska Gas Field] // Neftegazovoe delo. [Oil and Gas Business]. 2008. No 1. <http://ogbus.ru/>. (In Russian)
3. Basiiev K. S., Kochina I. N., Maksimov V. M. Podzemnaja gidromehanika: Uchebnik dlja vuzov [Subsurface Hydromechanics]. M.: Nedra, 1993. 416 p. (In Russian)
4. Vargaftik N. B. Spravochnik po teplofizicheskim svojstvam gazov i zhidkostej [Thermophysical Properties of Gases and Liquids]: Handbook. M.: Nauka [Science], 1972. 720 p. (In Russian)
5. Vargaftik N. B., Filippov L. P., Tarzimanov A. A., Tockij E. E. Spravochnik po teploprovodnosti zhidkostej i gazov [Thermal Conductivity of Liquids and Gases]: Handbook. M.: Energoatomizdat, 1990. 352 p. (In Russian)
6. Latonov V. V., Gurevich G. R. Raschet koeficienta szhimaemosti prirodno gaza [Calculation of Compressibility Factor of Natural Gas] // Gazovaja promyshlennost' [Gas Industry Journal]. 1969. No 2. Pp. 7-9. (In Russian)
7. Leont'ev N. E. Osnovy teorii fil'tracii: Uchebnoe posobie [Foundations of the Filter Theory]: Textbook. M.: Izd-vo Centra prikladnyh issledovanij pri mehaniko-matematicheskom fakul'tete MGU [Publisher Center for Applied Studies of Moscow State University], 2009. 88 p. (In Russian)
8. Musakaev N. G., Hasanov M. K. Matematicheskoe modelirovanie processa dobychi gaza iz gazogidratnoj zalezhi s uchetom obrazovaniya l'da [Mathematical Modeling of Gas Extraction from a Gas-hydrate Reservoir with Account of the Ice Formation] // Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta [Tyumen State University Herald]. 2014. No 7. Pp. 43-50. (In Russian)
9. Musakaev N. G., Borodin S. L., Romanjuk S. N. Chislennoe issledovanie processa protaivaniya mnogoletnih merzlyh porod pri rabote dobyvajushhej skvazhiny s ustanovkoj jelektrocentrobezhnyh nasosov [Numerical Research of Frozen Rock Thawing when Operation of the Production well Equipped with an Installation of Electrical Centrifugal Pump] // Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, mehanika, informatika [Novosibirsk State University Herald. Mathematics, Mechanics, Computer Science]. 2013. Vol. 13 (2). Pp. 15-20. (In Russian)
10. Musakaev N. G., Borodin S. L., Romanjuk S. N. Metody reshenija odnomernoj radial'noj zadachi teploperedachi v okruzhajushhie skvazhinu merzlye porody [Solution Methods of One-dimensional Radial Problem of Heat Transfer in the Permafrost Formations Surrounding a Well] // Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta [Tyumen State University Herald]. 2014. No 7. Pp. 19-26. (In Russian)
11. Nikolaevskij V. N., Basniev K. S., Gorbunov A. T., Zotov G. A. Mehanika nasyshennyh poristyh sred [Mechanics of Saturated Porous Media]. M.: Nedra, 1970. 335 p. (In Russian)

12. Programma i tezisy dokladov konferencii “Gazovye gidraty v jekosisteme Zemli – 2014” [The Program and Abstracts of the Conference “Gas Hydrates in the Ecosystem of the Earth – 2014”]. Novosibirsk: INH SO RAN, 2014. 104 p. (In Russian)
13. Proektirovanie razrabotki i jekspluatacija neftjanyh mestorozhdenij [Design of Oil Field Development and Exploitation]: Instruction Manual / Sh. K. Gimatudinova (Ed.). M.: Nedra, 1983. T. 2: Proektirovanie razrabotki [Vol. 2 Design of Oil Field Development]. 431 p. (In Russian)
14. Charnyj I. A. Podzemnaja gidrogazodinamika [Subsurface Fluid Dynamics]. M.: Gostoptehizdat, 1963. 396 p. (In Russian)
15. Chekaljuk Je. B. Termodinamika neftjanogo plasta [Thermodynamics of Oil Formations]. M.: Nedra, 1965. 238 p. (In Russian)
16. Bruce E. Poling, John M. Prausnitz, John P. O’Connell. The properties of gases and liquids. 5th Ed. 2001. 803 p.
17. Shagapov V. Sh., Musakaev N. G., Khasanov M. K. Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 84. Pp. 1030-1039.

**Автор публикации**

**Бородин Станислав Леонидович** — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Тюменского филиала Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

**Author of the publication**

**Stanislav L. Borodin** — Cand. Sci. (Phys. and Math.), Researcher at the Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences