

Сергей Павлович РОДИОНОВ<sup>1</sup>  
Андрей Юрьевич БОТАЛОВ<sup>2</sup>  
Дмитрий Юрьевич ЛЕГОСТАЕВ<sup>3</sup>

УДК 532.685

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

<sup>1</sup> доктор физико-математических наук, профессор,  
Тюменский государственный университет;  
заведующий лабораторией нефтегазовой механики,  
Тюменский филиал Института теоретической  
и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
rodionovsp@bk.ru

<sup>2</sup> кандидат физико-математических наук, научный сотрудник,  
Тюменский филиал Института теоретической  
и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
aybotalov@bk.ru

<sup>3</sup> студент бакалавриата, Физико-технический институт,  
Тюменский государственный университет  
legostaevdmitrii@icloud.com

### Аннотация

Горные породы, вмещающие углеводороды, находятся в напряженном состоянии из-за нагрузки от вышележащих слоев. Процессы разработки месторождений оказывают влияние на напряженно-деформированное состояние пласта, что влечет за собой изменение фильтрационно-емкостных свойств горных пород. Для учета влияния процессов, происходящих в скелете горной породы, на добычу углеводородов используется совместное геомеханическое и гидродинамическое моделирование.

---

**Цитирование:** Родионов С. П. Моделирование процесса двухфазной фильтрации с учетом воздействия периодической нагрузки / С. П. Родионов, А. Ю. Боталов, Д. Ю. Легостаев // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Т. 2. № 2. С. 73–83.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-73-83

---

Целью настоящей статьи является исследование влияния периодических нагрузок на процесс фильтрации флюидов. Примером периодических нагрузок в реальных пластовых системах могут быть гравитационные приливы земной коры. В работе представлены результаты решения одномерной задачи о вытеснении нефти водой. Гравитационные приливы земной коры моделировались периодической боковой нагрузкой на пласт, изменяющейся по гармоническому закону.

На основе расчетов установлено, что в условиях периодической нагрузки на нефтеотдачу влияет режим закачки воды. Установлено, что существует оптимальный режим закачки, при котором нефтеотдача максимальна.

### Ключевые слова

Моделирование пластовых систем, геомеханика, напряженно-деформированное состояние, гравитационные приливы земной коры.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-73-83

### Введение

Совместное гидродинамическое и геомеханическое моделирование [7; 8] пластовых систем дает возможность оценить влияние напряженно-деформированного состояния пласта на процессы фильтрации. Одним из факторов, изменяющих напряженное состояние пласта, являются гравитационные приливы земной коры. Влияние гравитационных приливов земной коры на процессы разработки месторождений рассмотрены в [4; 5].

В данной статье представлены результаты исследования влияния периодических нагрузок, имитирующих гравитационные приливы земной коры, на процесс вытеснения нефти, показана возможность оптимизации процесса закачки воды для увеличения добычи нефти.

### Модель Био

В геомеханике рассматриваются горные породы, находящиеся под нагрузкой  $\sigma$  от вышележащих слоев. В скелете горной породы возникают эффективные напряжения  $\sigma'$ , а в насыщающем флюиде поровое давление  $p$ .

В рамках концепции эффективных напряжений Био [7; 8] для насыщенной пористой среды эффективное напряжение может быть записано в виде

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + bp\delta_{ij}, \quad (1)$$

где  $\sigma'_{ij}$  — тензор эффективных напряжений;  $\sigma_{ij}$  — тензор полных напряжений;  $p$  — поровое давление;  $b = 1 - \frac{K_{dr}}{K_s}$  — коэффициент Био;  $K_{dr}$  — объемный модуль среды в условиях дренажа;  $K_s$  — объемный модуль скелета.

Объемные модули определяются соответственно как [10]

$$\frac{1}{K_{dr}} = \frac{1}{V_b} \left( \frac{\partial V_b}{\partial \sigma} \right)_p, \quad \frac{1}{K_s} = \frac{1}{V_b} \left( \frac{\partial V_b}{\partial \sigma} \right)_{\sigma-p}.$$

Для нахождения деформаций в скелете горной породы используем обобщенный закон Гука. Т. к. на скелет, согласно (1), действуют не полные напряжения, а только их эффективная часть  $\sigma_{ij} + bp\delta_{ij}$ , то в общем случае запишем

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}(\sigma_{ij} + bp\delta_{ij}), \quad (2)$$

где  $C_{ijkl}$  — тензор коэффициентов упругостей;  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  — тензор малых деформаций.

В случае изотропной среды, главные оси которой совпадают с осями координат, (2) можем записать в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + bp - \nu((\sigma_y + bp) + (\sigma_z + bp))], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y + bp - \nu((\sigma_x + bp) + (\sigma_z + bp))], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z + bp - \nu((\sigma_x + bp) + (\sigma_y + bp))], \end{cases} \quad (3)$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

В любой момент времени состояние скелета горной породы должно описываться уравнением равновесия деформированного тела

$$\nabla \sigma + \rho_b \mathbf{g} = 0, \quad (4)$$

где  $\rho_b = \varphi \rho_f + (1 - \varphi) \rho_s$  — плотность системы «флюид + скелет»;  $\rho_f$  — плотность флюида;  $\rho_s$  — плотность скелета горной породы;  $\sigma$  — полное напряжение;  $\mathbf{g}$  — вектор гравитации.

Описание процесса фильтрации флюида основывается на законе сохранения массы и законе Дарси. Закон сохранения массы для случая двухфазной фильтрации имеет вид

$$\frac{\partial m \rho_f S_f}{\partial t} + \nabla(m \rho_f v_f) = 0, \quad (5)$$

где  $\rho_f$  — плотность фазы  $f$ ;  $m$  — пористость;  $v_f$  — скорость движения фазы  $f$ .

Движение в поровом пространстве описывается законом Дарси

$$v_f = - \frac{k k_{rf}}{\mu_f} (\nabla p + \rho_f \mathbf{g}), \quad (6)$$

где  $k$  — абсолютная проницаемость;  $k_{rf}$  — относительная фазовая проницаемость фазы  $f$ ;  $\mu_f$  — вязкость фазы  $f$ ;  $p$  — поровое давление.

Изменение напряженно-деформационного состояния пласта приводит к изменению фильтрационно-емкостных характеристик. В частности, как показано в [10], изменение пористости можно выразить через изменения объемной деформации  $\varepsilon_v$  и порового давления:

$$dm = \frac{m - b}{K_s} dp + (b - m) d\varepsilon_v, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ .

### Тестирование

При использовании описанного подхода моделирования пластовых систем появляется необходимость в совместном решении уравнений гидродинамики и геомеханики. Решение данной системы уравнений осуществлялось итерационным методом: на каждом шаге по времени поочередно решались уравнения фильтрации и геомеханики до достижения сходимости.

Тестирование данного подхода для однофазной задачи проводилось на основе задачи Терцаги, постановка и аналитическое решение которой приведены в [8]. На Рис. 1–2 приведены результаты сравнения решений.

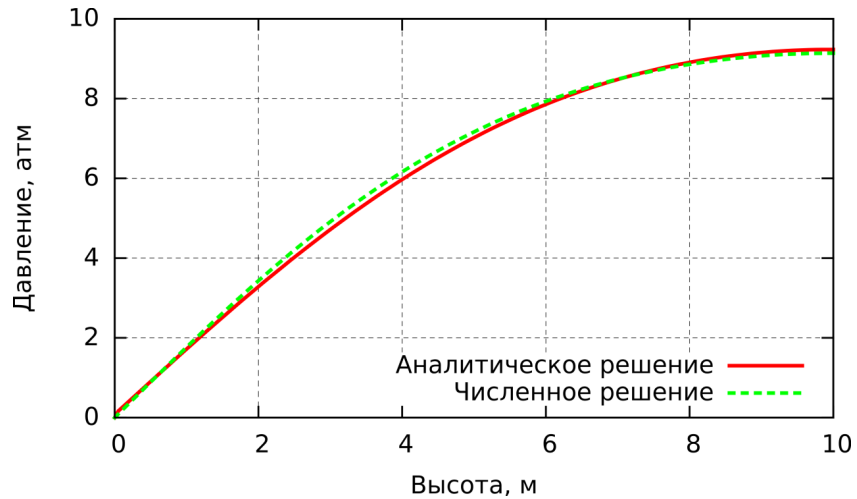


Рис. 1. Распределение порового давления в образце для численного и аналитического решения

Fig. 1. The pore pressure distribution in the sample for analytical and numerical solutions

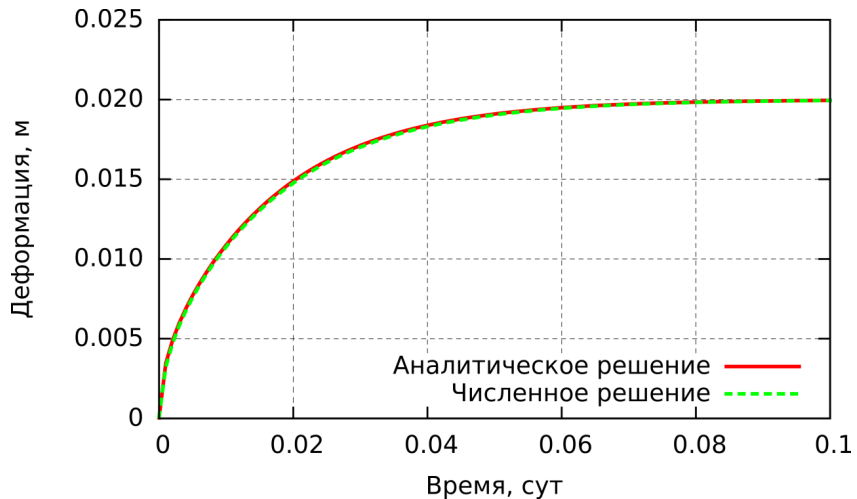


Рис. 2. Деформации образце для численного и аналитического решения

Fig. 2. Deformation of the sample for analytical and numerical solutions

Получена хорошая сходимость с аналитическим решением, на основании чего сделан вывод о корректности используемого алгоритма решения.

При решении задачи двухфазной фильтрации использовался IMPES-метод [1; 3], имеющий широкое распространение при моделировании пластовых систем. Для аппроксимации относительных фазовых проницаемостей использовался метод «вверх по потоку», описанный в [1]. Система линейных алгебраических уравнений, полученная при дискретизации дифференциальных уравнений, решалась методом Гаусса-Зейделя [6].

**Постановка задачи**

Рассмотрим влияние гравитационных приливов земной коры на примере одномерной задачи вытеснения нефти водой [2]. Будем считать, что в рассматриваемом пласте по всему объему равномерно распределены трещины. При построении модели пренебрегаем влиянием силы тяжести и капиллярных сил.

На левой границе ( $x = 0$ ) и правой границе ( $x = L$ ) зададим давление  $p_l$  и  $p_r$ , соответственно ( $p_l > p_r$ ). В начальный момент времени пласт насыщен нефтью ( $S_w = 0$ ), на левой границе зададим ( $S_w = 1$ ).

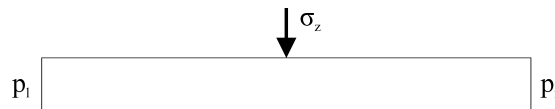


Рис. 3. Постановка задачи

Fig. 3. The problem statement

Влияние гравитационных приливов земной коры модельно представим в виде гармонических колебаний внешней нагрузки, действующей на пласт с суточным периодом:

$$\sigma_z = A_\sigma \sin(\omega t),$$

где  $A_\sigma$  — амплитуда колебаний, м;  $\omega = 2\pi$  1/сут.

Оптимизация процесса заводнения может быть произведена путем изменения давления закачки воды. Изменение давления будем осуществлять по гармоническому закону

$$p = p_0 + A_p \sin(\omega t + \varphi).$$

Рассмотрим 3 случая:

- постоянное деление ( $p = p_0$ ),
- изменение давления синфазно изменению нагрузки ( $\varphi = 0$ ),
- изменение противофазно изменению нагрузки ( $\varphi = \pi$ ).

При моделировании течения жидкости в трещиновато-пористых средах фильтрационные свойства будут складываться из свойств трещин и матрицы. Для модели трещиноватой среды упорядоченной системой трещин проницаемость трещин  $k_{frac}$  может быть найдена из формулы

$$k_{frac} = \frac{h^2}{12},$$

где  $h = h_0 + \epsilon_y$  - раскрытость трещины (Рис. 4).

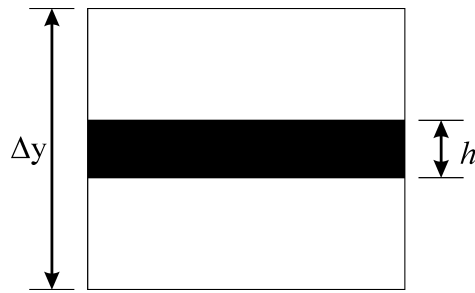


Рис. 4. Модель трещины

Fig. 4. The crack model

Проницаемость ячейки  $k_{cell}$  содержащей трещины, матрица которой имеет проницаемость  $k_{mat}$ , может быть найдена из

$$k_{cell} = \frac{k_{frac}h + k_{mat}(\Delta y - h)}{\Delta y},$$

где  $\Delta y$  — размер рассматриваемой ячейки (Рис. 4).

Для двухфазной фильтрации с учетом напряжений в скелете горной породы основные уравнения могут быть сведены к следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{1}{M_w} S_w \frac{\partial p}{\partial t} + \varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w b \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = f_w, \\ \frac{1}{M_o} S_o \frac{\partial p}{\partial t} + \varphi \frac{\partial S_o}{\partial t} + S_o b \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = f_o, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u}{\partial x} - b(1 - 2\nu)p \right) = 0, \end{cases}$$

где  $S_{w,o}$  — насыщенности соответственно водой и нефтью ( $S_w + S_o = 1$ );  $k_{rw,o}$  — относительные фазовые проницаемости для нефти и воды;  $\frac{1}{M_{w,o}} = C_{w,o} \varphi + \frac{b - \varphi}{K_s}$  — модуль Био для воды и нефти.

### Результаты расчетов

Расчеты проводились на сетке с шагом в  $\Delta x = 2$  м, общая длина расчетной области составляет  $L = 100$  м. Значения параметров пласта и флюидов, используемые при расчетах приведены в Таблице 1.

Таблица 1

Значения параметров пласта  
и флюидов

Table 1

The parameters values of reservoir  
and fluids

Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
$E$	29 000 атм	$\varphi$	0,1	$C_{w,o}$	0,0002 атм
$\nu$	0,1	$k_{mat}$	100 мД	$\mu_w$	1 сП
$b$	1	$h_0$	0,0001 м	$\mu_o$	1 сП

На графиках представлена зависимость дебитов флюидов при различных способах задания давления на левой границе расчетной области. Видно, что для данной модели оптимальным является вариант изменения давления в противофазе ( $\varphi = \pi$ ) к гравитационным колебаниям, в то время как синфазное заводнение несколько снижает скорость извлечения углеводородов.

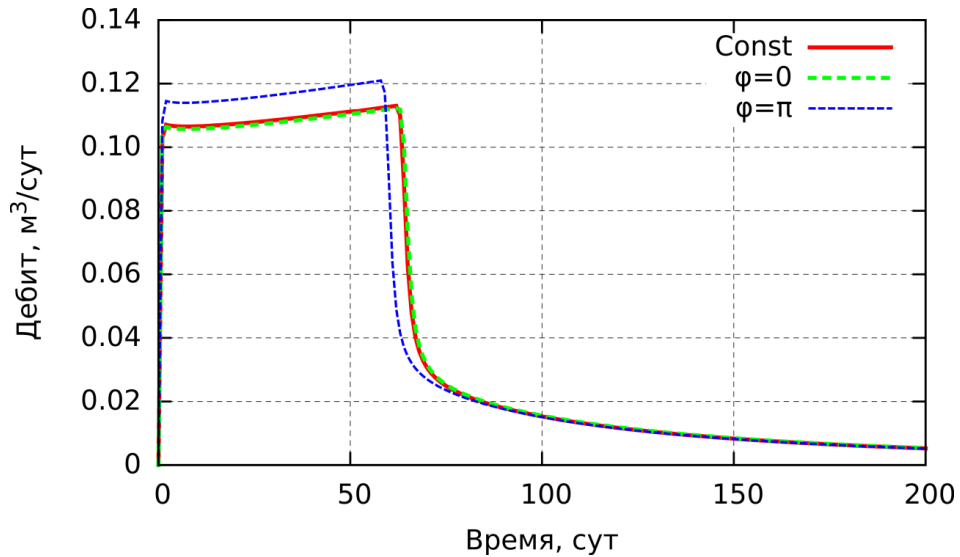


Рис. 5. Средний за сутки дебит нефти для различных вариантов заводнения

Fig. 5. The average (per day) oil production debit for the various flooding options

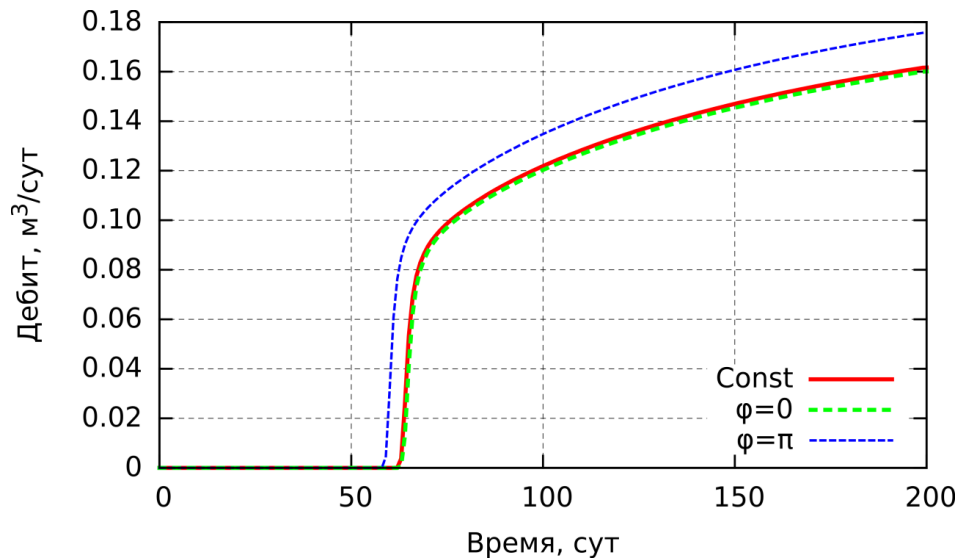


Рис. 6. Средний за сутки дебит воды для различных вариантов заводнения

Fig. 6. The average (per day) flow rate of water for different flooding options

Противофазное заводнение увеличивает скорость движения водяного фронта, в результате чего он достигает правой границы расчетной области за 60 суток (за 64 суток без применения циклического заводнения), что в свою очередь увеличивает скорость роста накопленной добычи. На Рис. 7 проведено сравнение накопленных добыч для разных вариантов заводнения.

Расчеты показали, что в данной постановке, оптимизируя процесс заводнения, возможно увеличить скорость роста накопленной добычи нефти. До момента прорыва водяного фронта накопленная добыча возрастает на 7%, а после прорыва на 1–2%.

На Рис. 8 представлен график деформаций  $\varepsilon_z$  скелета горной породы, которые влияют на фильтрационные свойства пласта. Как мы можем видеть из (3),  $\varepsilon_z$

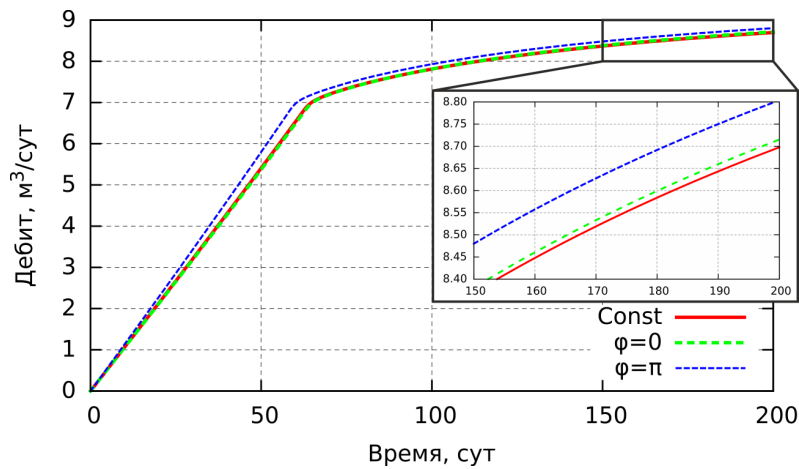


Рис. 7. Накопленная добыча нефти для различных вариантов заводнения

Fig. 7. Cumulative oil production for the various flooding options

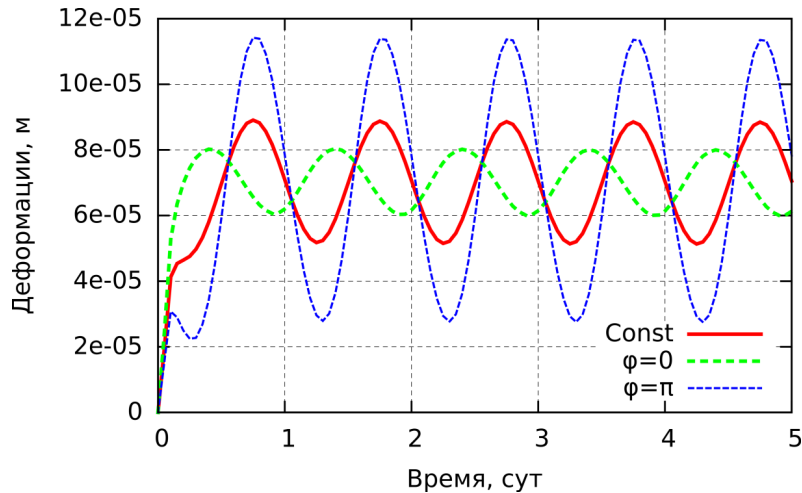


Рис. 8. Деформации  $\varepsilon_z$  в пласте

Fig. 8. The  $\varepsilon_z$  deformation in the plate



зависит от внешней нагрузки и порового давления. В случае взаимодействия двух факторов: внешней периодической нагрузки и воздействия нагнетающей скважины, значительно улучшаются ФЕС, что сказывается на добыче.

### **Вывод**

На основе выполненных расчетов одномерного процесса заводнения нефтяного пласта в условиях периодической боковой нагрузки показано, что в этих условиях на нефтеотдачу влияет режим закачки воды. Установлено, что существует оптимальный режим закачки, при котором нефтеотдача принимает наибольшее значение. В рамках данной модели оптимальный вариант заводнения соответствует сдвигу колебаний давления по фазе на  $\varphi = \pi$ . Получена количественная оценка возможности увеличения дебита нефти.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари; пер. с англ. М.: Недра, 1982. 407 с.
2. Басниев К. С. Подземная гидромеханика. Учебник для вузов / К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов. М.: Недра, 1993. 416 с.
3. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов / Р. Д. Каневская. Ижевск: ИКИ, 2003. С. 121.
4. Мирзоев К. М. Способы увеличения добычи нефти с учетом приливных движений Земли / К. М. Мирзоев, А. В. Николаев, В. К. Мирзоев, А. А. Лукк, А. И. Харламов, А. В. Дещеревский // Экспозиция Нефть Газ. 2014, апрель. № 2/Н (34). С. 93–96.
5. Муслимов Р. Х. Влияние гравитационных лунно-солнечных приливов земной коры на добычу нефти / Р. Х. Муслимов, К. М. Мирзоев, Р. Г. Ахмадиев, В. А. Агафонов, Р. Р. Хузин, В. С. Тимиро, В. К. Мирзоев, А. А. Лукк, А. В. Дещеревский // Нефтяное хозяйство. 2006. № 8. С. 111–115.
6. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар; пер. с англ.; М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
7. Biot M. A. General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material / M. A. Biot // Journal of Applied Mechanics. 1956. No 78. Pp. 91–96.
8. Biot M. A. General Theory of Three-Dimensional Consolidation / M. A. Biot // Journal of Applied Physics. 1941. No 12. Pp. 155–164.
9. Coussy O. Poromechanics / O. Coussy. Chichester, England: John Wiley and Sons, 2004. 298 pp.
10. Geertsma J. The Effect of Fluid Pressure Decline on Volumetric Change of Porous Rocks / J. Geertsma // Transactions of the Metallurgical Society of AIME. 1957. No 210. Pp. 331–340.

**Sergey P. RODIONOV<sup>1</sup>**  
**Andrei Yu. BOTALOV<sup>2</sup>**  
**Dmitry Yu. LEGOSTAEV<sup>3</sup>**

## **SIMULATION OF TWO-PHASE FILTRATION CONSIDERING THE EFFECT OF THE PERIODIC LOAD**

<sup>1</sup> Dr. Sci. (Phys-Math.), Professor,  
Department of Multiphase Systems Mechanics,  
Tyumen State University;  
Head of Laboratory of Oil and Gas Mechanics,  
Tyumen Branch of Khristianovich Institute  
of Theoretical and Applied Mechanics  
of the Siberian Branch of the RAS  
rodionovsp@bk.ru

<sup>2</sup> Cand. Sci. (Phys-Math.), Researcher,  
Tyumen Branch of Khristianovich Institute  
of Theoretical and Applied Mechanics  
of the Siberian Branch of the RAS  
aybotalov@bk.ru

<sup>3</sup> Undergraduate Student, Institute of Physics  
and Technical Science, Tyumen State University  
legostaevdmitrii@icloud.com

### **Abstract**

The geological materials containing hydrocarbons are under strain due to the pressure of the overlying layers. Field development processes have an impact on the reservoir stress-strain state, which leads to a change in reservoir properties of geological materials. To account for the influence of the processes occurring in the skeleton of the material on hydrocarbons production, the coupled geomechanical and hydrodynamic modeling of hydrocarbon extraction is used.

The purpose of this article is to study the influence of periodic pressures on the fluid filtration process. An example of such pressure in real reservoir systems can be seen in the gravitational tides of the earth's crust. The paper presents the results of a one-dimensional solution of

---

**Citation:** Rodionov S. P., Botalov A. Yu., Legostaev D. Yu. 2016. "Simulation of Two-Phase Filtration Considering the Effect of the Periodic Load". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 2, pp. 73–83.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-73-83

---

the problem of the displacement of oil by water. Harmonically changing gravitational tides of the earth's crust were simulated by periodic lateral load on the reservoir.

Based on the calculations, it has been found that water injection mode has an impact on oil recovery under the conditions of periodic pressure. It is established that there is an optimum injection mode at which the maximum oil recovery is achieved.

### **Keywords**

Reservoir simulation, geomechanics, stress-strained state, gravity tides of Earth Crust.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-73-83**

### **REFERENCES**

1. Aziz K., Settari E. 1982 (1979). *Matematicheskoye modelirovaniye plastovyykh sistem* [Petroleum Reservoir Simulation]. Translated from English by A. V. Korolyov, V. P. Kestner; edited by M. M. Maksimov. Moscow: Nedra.
2. Basniev K. S., Kochina I. N., Maksimov V. M. 1993. *Podzemnaya gidromekhanika. Uchebnik dlya vuzov* [Underground Hydromechanics. University Textbook]. Moscow: Nedra.
3. Biot M. A. 1941. "General Theory of Three-Dimensional Consolidation". *Journal of Applied Physics*, no 12, pp. 155–164.
4. Biot M. A. 1956. "General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material". *Journal of Applied Mechanics*, no 78, pp. 91-96,
5. Coussy O. 2004. *Poromechanics*. Chichester, England: John Wiley and Sons.
6. Geertsma J. 1957. "The Effect of Fluid Pressure Decline on Volumetric Change of Porous Rocks". *Transactions of the Metallurgical Society of AIME*, no 210, pp. 331–340.
7. Kanevskaya R. D. 2003. *Matematicheskoye modelirovaniye gidrodinamicheskikh protsessov razrabotki mestorozhdeniy uglevodorodov* [Mathematical Modeling of Hydrodynamic Processes of Hydrocarbon Field Development], p. 121. Izhevsk: IKI.
8. Mirzoyev K. M., Nikolayev A. V., Mirzoyev V. K., Lukk A. A., Kharlamov A. I., Deshcherevskiy A. V. 2014. "Sposoby uvelicheniya dobychi nefi s uchetom prilivnykh dvizheniy Zemli" [Ways to Increase Oil Production in View of the Tidal Movements of the Earth]. *Ekspozitsiya Neft Gaz*, no 2/H (34), April, pp. 93–96.
9. Muslimov R. Kh., Mirzoev K. M., Akhmadiev R. G., Agafonov V. A., Khuzin R. R., Timirov V. S., Mirzoev V. K., Lukk A. A., Deshcherevskiy A. V. 2006. "Vliyaniye gravitatsionnykh lunno-solnechnykh prilivov zemnoy kory na dobychu nefi" [The Influence of Gravity Lunar-Solar Tides of the Earth's Crust on Oil Production]. *Neftyanoye khozyaystvo*, no 8, pp. 111–115.
10. Patankar S. 1984. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical Heat Transfer and Fluid Flow]. Translated from English. Moscow: Energoatomizdat.