

Амир Анварович ГУБАЙДУЛЛИН<sup>1</sup>  
Дмитрий Евгеньевич ИГОШИН<sup>2</sup>  
Надежда Александровна ХРОМОВА<sup>3</sup>

УДК 532.5

## ОБОБЩЕНИЕ ПОДХОДА КОЗЕНИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОНИЦАЕМОСТИ МОДЕЛЬНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД ИЗ ТВЕРДЫХ ШАРОВЫХ СЕГМЕНТОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> доктор физико-математических наук, профессор,  
Тюменский государственный университет;  
директор, Тюменский филиал Института теоретической  
и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
gubai@tmn.ru

<sup>2</sup> кандидат физико-математических наук, научный сотрудник,  
Тюменский филиал Института теоретической  
и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН;  
доцент кафедры математического моделирования  
и кафедры механики многофазных систем,  
Тюменский государственный университет  
igoshinde@gmail.com

<sup>3</sup> инженер-исследователь, Тюменский филиал  
Института теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН  
khromova.n.a@gmail.com

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-29-15119.

---

**Цитирование:** Губайдуллин А. А. Обобщение подхода Козени к определению проницаемости модельных пористых сред из твердых шаровых сегментов / А. А. Губайдуллин, Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Т. 2. № 2. С. 105–120.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-105-120

**Аннотация**

Для установления связи между пористостью, проницаемостью и размером пор или зерен пористой среды Козени рассматривал фиктивный грунт в виде засыпки шаров. Однако в реальных породах форма частиц, составляющих скелет, может существенно отличаться от сферы. Целью данной работы является обобщение подхода Козени на случай пористой системы, скелет которой образован примыкающими друг к другу шаровыми сегментами. В качестве примера рассмотрены модельные периодические структуры, для которых значение проницаемости было определено ранее на основе численного решения системы уравнений Навье–Стокса. Приведены модельные периодические структуры четырех типов: кубическая простая, гексагональная простая, кубическая объемноцентрированная и кубическая гранецентрированная. Степень пересечения сфер является безразмерным модельным параметром, определяющим пористость и просветность среды. Для рассмотренных четырех типов структур обобщенным подходом получены оценки проницаемости и сопоставлены с соответствующими численными решениями. Показано, что предложенный подход дает хороший результат в случае кубической объемноцентрированной структуры в широком диапазоне пористости ( $0,32 \geq m \geq 0,04$ ). Для кубической гранецентрированной структуры результат является удовлетворительным в диапазоне пористости ( $0,26 \geq m \geq 0,14$ ). В случае кубической простой и гексагональной простой структур для оценки проницаемости предпочтительнее использовать метод минимальной просветности.

**Ключевые слова**

Пористая среда, пористость, проницаемость, метод Козени, периодическая структура, идеальный грунт, фиктивный грунт, шаровой сегмент.

**DOI:** 10.21684/2411-7978-2016-2-2-105-120

**Введение.** В теории грунтов вводятся понятия фиктивного и идеального грунтов. Под фиктивным грунтом понимается пористая среда, образованная твердыми шариками (засыпка шаров). Под идеальным грунтом понимается среда с порами в виде пучка капилляров. Уравнение Козени–Кармана отражает связь между пористостью слоя, удельной поверхностью частиц в среде, перепадом давления, протяженностью среды и скоростью фильтрации. Если удельная поверхность частиц в слое является неизвестной величиной, то ее можно определять из соотношения Козени–Кармана по полученным из эксперимента всем другим величинам [2]. В [1; 19] приведены результаты исследования удельной поверхности порошков цеолита методом Кармана–Козени с помощью микропроцессорной системы измерения. На основе экспериментальных данных в [7] показано, что точность измерения удельной поверхности частиц составляет 1,5–2% при замене эталонного порошка на порошок из дробленого кварца с заранее известным грануляционным составом. В [6] приведены результаты исследований коэффициента фильтрации несвязных грунтов различного состава в условиях слабого гидравлического уклона. Показано, что результаты расчетов по формуле Козени–Кармана согласуются с результатами лабораторных исследований и могут быть использованы для оценки коэффициента фильтрации несвязных грунтов.

Теоретическое обобщение метода Козени проведено в ряде работ. В [5] дается обобщение формулы Козени для определения диаметра капилляра в идеальной пористой среде эквивалентной по проницаемости и пористости фиктивной среде и показывается, что диаметр капилляра определяется неоднозначно. В [4] выполнена оценка применимости модели Козени. Показано, что эффективность ее применения зависит от линейной плотности волокон и от фазового состояния фильтруемой среды. В [17] уточнена модель Козени–Кармана: предложена формула проницаемости породы, аппроксимированной извилистыми трубками. Предложен параметр, однозначно связывающий теоретические значения проницаемости по данным исследований керна с теоретическими значениями по данным гидродинамических исследований скважин. В [21] разработана модификация метода Козени–Кармана для глинистых почв. В [20] предложена аналитическая формула проницаемости, эмпирические коэффициенты которой найдены по результатам численного моделирования течения несжимаемой жидкости в пористой среде.

Пористые среды, составляющие горные породы, часто характеризуются пористостью в пределах 0,1–0,2 [16]. В моделях фиктивных пористых сред, полученных на основе засыпки шаров одного диаметра, невозможно получить значение пористости ниже 0,25 [14]. Если разрешить шарам пересекаться (система шаровых сегментов), то пористость может стать много меньше 0,25. В данной работе предложено обобщение метода Козени для определения проницаемости пористых сред, скелет которых образован примыкающими друг к другу шаровыми сегментами. В качестве иллюстрации предложенного подхода получены оценки проницаемости для четырех типов периодических пористых структур, описанных в [8; 10].

**Метод Козени.** Козени предложил следующий способ перехода от фиктивного грунта к идеальному [14]. В заданном объеме пористой среды  $V$  выполняются следующие соотношения:

1. сумма объемов пор  $V_n$  фиктивного грунта равна сумме объемов поровых трубок идеального грунта  $NV_n^0$ ;
2. сумма поверхностей всех шаровых частиц фиктивного грунта  $S_n$  равна сумме боковых поверхностей поровых трубок идеального грунта  $NS_n^0$

$$V_n = NV_n^0, \quad S_n = NS_n^0, \quad (1)$$

где  $N$  — число поровых трубок идеального грунта, приходящихся на объем  $V$ .

Обобщим подход Козени на случай скелета, образованного шаровыми сегментами. Шаровой сегмент назовем большим, если он содержит центр шара и малым, если нет. Пусть в объеме  $V$  фиктивного грунта скелет образован  $N_0$  одинаковыми частицами в форме больших шаровых сегментов, примыкающих друг к другу плоскими поверхностями, при этом  $N_1$  — общее число основных отсеченных малых сегментов,  $N_2$  — дополнительных (появляются в объемноцентрированной структуре при  $\alpha > 1 - \sqrt{3}/2$ ). Тогда площадь внутренней поверхности каналов порового пространства в этом объеме

$$S_{\Pi} = N_0 \cdot S - N_1 \cdot S_1 - N_2 \cdot S_2, \quad S = 4\pi r^2, \quad r = \frac{r_0}{1 - \alpha}, \quad (2)$$

$$S_1 = 2\pi r h_1, \quad h_1 = \alpha r, \quad S_2 = 2\pi r h_2, \quad h_2 = \alpha_2 r, \quad \alpha_2 = (1 - 2(1 - \alpha)/\sqrt{3}),$$

где  $r$ ,  $S$  — радиус и площадь поверхности исходных сфер;  $S_1$ ,  $h_1$  — площадь и высота основного малого сегмента;  $S_2$ ,  $h_2$  — площадь и высота дополнительного малого сегмента;  $r_0$  — радиус сфер в случае касания;  $\alpha$  — степень перекрытия сфер [8; 10]. Учтем, что у поровой трубки (канала) с площадью основания  $\omega$  и периметром основания  $\chi$  объем  $V_{\Pi}^0 = \gamma L \omega$  и площадь боковой поверхности  $S_{\Pi}^0 = \gamma L \chi$ ,  $L$  — протяженность пористой среды,  $\gamma$  — извилистость канала. Тогда условия (1) с учетом соотношений (2) примут вид

$$mV = N\gamma L\omega, \quad \frac{2\pi r_0^2(2N_0 - \alpha N_1 - \alpha_2 N_2)}{(1 - \alpha)^2} = N\gamma L\chi. \quad (3)$$

Из (3) получим выражение для гидравлического диаметра  $\delta$  поровых трубок:

$$\delta = \frac{4\omega}{\chi} = \frac{2(1 - \alpha)^2 mV}{\pi r_0^2(2N_0 - \alpha N_1 - \alpha_2 N_2)}. \quad (4)$$

Гидравлический диаметр трубки с поперечным сечением в виде квадрата со стороной  $a$ :

$$\delta = \frac{4a^2}{4a} = a, \quad (5)$$

для трубки с поперечным сечением в виде равностороннего треугольника со стороной  $a$ :

$$\delta = \frac{4\sqrt{3}a^2}{4 \cdot 3a} = \frac{a}{\sqrt{3}}. \quad (6)$$

Из первого уравнения в (3) найдем выражение для количества трубок  $N$ :

$$N = \frac{mV}{\gamma L\omega}. \quad (7)$$

Применяя подход Козени к периодическим структурам, рассмотренным в [8; 10], учтем что  $V$  — объем одной ячейки,  $N$  — число каналов в ячейке. В Таблице 1 приведены основные геометрические характеристики указанных структур: кубическая простая (КП), гексагональная простая (ГП), кубическая объемно-центрированная (КОЦ), кубическая гранецентрированная (КГЦ). Кроме того, учтено, что в КП структуре поперечное сечение каналов имеет форму квадрата, в остальных — форму равностороннего треугольника со стороной  $a$ . Приведены используемые в [15] безразмерные параметры  $A$  и  $\omega/a^2$ . Для КОЦ и КГЦ структур извилистость  $\gamma$  принята равной  $\pi/2$ , поскольку каналы в них проходят вдоль окружностей, по которым пересекаются сферы.

**Проницаемость по Козени.** Одномерная фильтрация флюида через пористую среду описывается уравнением Дарси:

$$u = \frac{k \Delta p}{\mu L}, \quad (8)$$

Таблица 1

Основные геометрические свойства структур и каналов

Table 1

The basic geometrical properties of structures and channels

Упаковка	$V/L^3$	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$r_0/L$	$A$	$\omega/a^2$	$\gamma$
КП	1	1	6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{256}$	1	1
ГП	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{320}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	1
КОЦ	1	2	16	12	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{320}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
КГЦ	1	4	48	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{320}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

где  $\Delta p = p_1 - p_2$  — перепад давления,  $L$  — протяженность среды,  $k$  — проницаемость среды,  $\mu$  — динамическая вязкость флюида. Скорость фильтрации по определению:

$$u = \frac{Q}{S} = \frac{NQ_k}{S}, \quad (9)$$

где  $Q$  — объемный расход флюида через поперечное сечение среды площадью  $S$ . Здесь учтено, что общий расход можно представить как суммарный расход  $NQ_k$  через  $N$  каналов,  $Q_k$  — объемный расход через один канал. Из (8)–(9) получим выражение для проницаемости:

$$k = \frac{\mu NLQ_k}{S\Delta p}. \quad (10)$$

В [15] показано, что для каналов цилиндрической формы объемный расход:

$$Q_k = \frac{Aa^4\Delta p}{\mu L}, \quad (11)$$

где  $A = \sqrt{3}/320$  для канала с поперечным сечением в виде треугольника,  $A \approx 9/256$  — в виде квадрата. Уточним значение расхода с учетом извилистости каналов:

$$Q_k = \frac{Aa^4\Delta p}{\mu\gamma L}. \quad (12)$$

Подставляя (12) и (7) в (10), получим

$$k = \frac{\mu NL}{S\Delta p} \cdot \frac{Aa^4\Delta p}{\mu\gamma L} = \frac{NAa^4}{\gamma S} = \frac{mV}{\gamma L\omega} \cdot \frac{Aa^4}{\gamma S} = |V = LS| = \frac{Am}{\gamma^2} \cdot \frac{a^4}{\omega}. \quad (13)$$

Для пористой среды, образованной каналами квадратного сечения, с учетом (5) и данных из Таблицы 1 имеем

$$k = \frac{9m}{256\gamma^2} \cdot \frac{a^4}{a^2} = \frac{9ma^2}{256\gamma^2} = |a^2 = \delta^2| = \frac{9m\delta^2}{256\gamma^2}. \quad (14)$$

Для пористой среды, образованной каналами треугольного сечения, с учетом (6) и данных из Таблицы 1 имеем

$$k = \frac{\sqrt{3}m}{320\gamma^2} \cdot \frac{4a^4}{\sqrt{3}a^2} = \frac{ma^2}{80\gamma^2} = |a^2 = 3\delta^2| = \frac{3m\delta^2}{80\gamma^2}. \quad (15)$$

В Таблице 2 приведены значения для гидравлического диаметра  $\delta$ , количества каналов  $N$  на ячейку объема  $V$  и проницаемости по Козени. Выражение для гидравлического диаметра  $\delta$  получено из (4) с учетом модельных параметров из Таблицы 1, выражение для  $N$  получено из (7) на основе (5), (6) и параметров из Таблицы 1, проницаемость определена из (14) и (15).

На Рис. 1 показана зависимость гидравлического диаметра и количества капилляров в ячейке от степени пересечения сфер. При расчетах принято  $L = 10^{-5}$  м. Видно, что с увеличением степени пересечения сфер  $\alpha$  гидравлический диаметр  $\delta$  монотонно уменьшается вместе с пористостью  $m$ . Для простых структур (КП и ГП) количество каналов в ячейке  $N$  меняется не существенно, но в КГЦ структуре начинает существенно снижаться при больших  $\alpha$ . В КОЦ структуре зависимость от  $\alpha$  немонотонная, поскольку при  $\alpha \approx 0,134$  появляются дополнительные малые сегменты, что приводит к резкому уменьшению пористости  $m$  и резкому уменьшению  $N$ .

Таблица 2

Проницаемость по Козени

Table 2

Kozeny Permeability

Упаковка	$\delta$	$N$	$k$
КП	$\frac{4mL(1-\alpha)^2}{\pi(1-3\alpha)}$	$\frac{m}{16\gamma} \left( \frac{\pi(1-3\alpha)}{m(1-\alpha)^2} \right)^2$	$\frac{9m}{16} \left( \frac{mL(1-\alpha)^2}{\pi\gamma(1-3\alpha)} \right)^2$
ГП	$\frac{2\sqrt{3}mL(1-\alpha)^2}{\pi(1-4\alpha)}$	$\frac{m}{36\gamma} \left( \frac{\pi(1-4\alpha)}{m(1-\alpha)^2} \right)^2$	$\frac{9m}{20} \left( \frac{mL(1-\alpha)^2}{\pi\gamma(1-4\alpha)} \right)^2$
КОЦ	$\frac{8mL(1-\alpha)^2}{3\pi(1-4\alpha-3\alpha_2)}$	$\frac{\sqrt{3}m}{16\gamma} \left( \frac{\pi(1-4\alpha-3\alpha_2)}{m(1-\alpha)^2} \right)^2$	$\frac{4m}{15} \left( \frac{mL(1-\alpha)^2}{\pi\gamma(1-4\alpha-3\alpha_2)} \right)^2$
КГЦ	$\frac{2mL(1-\alpha)^2}{\pi(1-6\alpha)}$	$\frac{\sqrt{3}m}{9\gamma} \left( \frac{\pi(1-6\alpha)}{m(1-\alpha)^2} \right)^2$	$\frac{3m}{20} \left( \frac{mL(1-\alpha)^2}{\pi\gamma(1-6\alpha)} \right)^2$

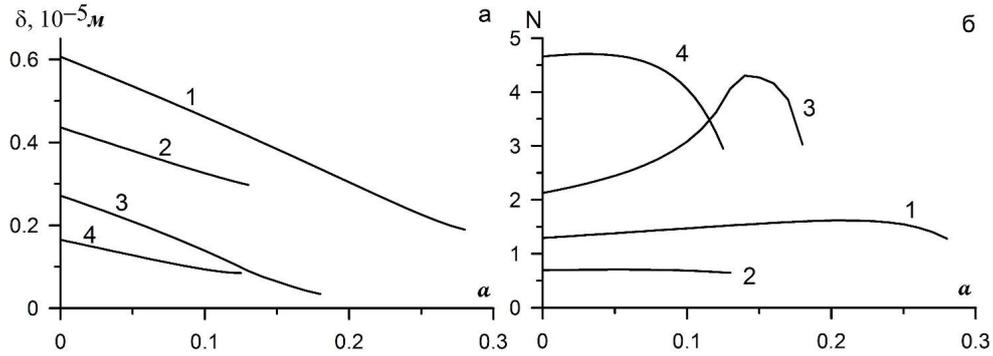


Рис. 1. Гидравлический диаметр (а) и количество капилляров в ячейке (б) в зависимости от степени пересечения сфер для рассматриваемых структур: КП (линия 1), ГП (линия 2), КОЦ (линия 3), КГЦ (линия 4)

Fig. 1. The hydraulic diameter (a) and the number of capillaries in the cell (b) depending on the extent of crossing areas for the following structures: simple cubic (SC, line 1), simple hexagonal (SH, line 2), body-centered cubic (BCC, line 3), and face-centered cubic structures (FCC, line 4)

Таблица 3

Пористость и проницаемость по минимальной просветности

Table 3

Porosity and permeability according to the minimal luminality

Упаковка	Пористость, $m$	$\alpha_*$	$m(\alpha_*)$	Проницаемость по минимальной просветности, $k$
КП	$1 - \frac{\pi(2 - 3\alpha^2(3 - \alpha))}{12(1 - \alpha)^3}$	0,2929	0,0349	$\left(\frac{3n_{min}L}{16}\right)^2$
ГП	$1 - \frac{\pi(1 - 2\alpha^2(3 - \alpha))}{3\sqrt{3}(1 - \alpha)^3}$	0,134	0,1649	$\frac{(n_{min}L)^2}{80}$
КОЦ	$1 - \frac{\pi\sqrt{3}(1 - 2\alpha^2(3 - \alpha))}{8(1 - \alpha)^3} + \frac{3\pi\sqrt{3}\alpha_2^2(3 - \alpha_2)}{16(1 - \alpha)^3}$	0,1835	0,0055	$\frac{(n_{min}L)^2}{80\sqrt{3}}$
КГЦ	$1 - \frac{\pi(1 - 3\alpha^2(3 - \alpha))}{3\sqrt{2}(1 - \alpha)^3}$	0,13397	0,0359	$\frac{(n_{min}L)^2}{160\sqrt{3}}$

**Анализ результатов.** В Таблице 3 приведены выражения для пористости и оценка проницаемости, полученная на основе метода минимальной просветности из [8; 10] с учетом того, что поровое пространство в ячейках заменяется на прямые каналы постоянного сечения и формы: в КП структуре — один канал квадратного сечения, в ГП структуре — один канал треугольного сечения, в КОЦ структуре — четыре канала треугольного сечения, в КГЦ структуре — восемь каналов треугольного сечения. Указаны значения безразмерного параметра  $\alpha_*$ , при котором поры становятся замкнутыми, и пористость при этом значении равна  $m(\alpha_*)$ . Отметим, что для КОЦ структуры  $\alpha_2 = 0$  при  $\alpha < 1 - \sqrt{3}/2$ .

На Рис. 2 показана зависимость проницаемости от степени пересечения сфер для рассматриваемых структур. Для простых структур даже в случае касания

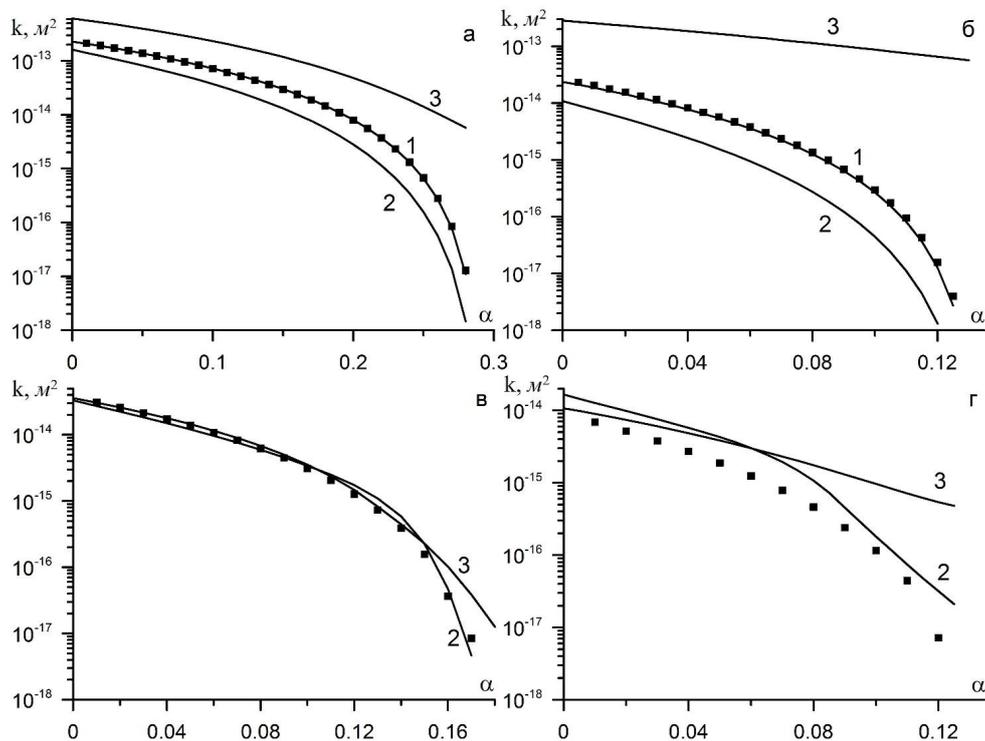


Рис. 2. Проницаемость в зависимости от безразмерного параметра  $\alpha$  для структур: КП (а), ГП (б), КОЦ (в), КГЦ (г); квадраты — численное решение [11; 12]. Линия 1 соответствует оценке с учетом переменного сечения канала [13], линия 2 — оценке по минимальной просветности, линия 3 — оценке по методу Козени

Fig. 2. The permeability depending on the sizeless parameter  $\alpha$  for the following structures: SC (a), SH (б), BCC (в) and FCC structures (г); squares — numerical solution. Line 1 corresponds to the evaluation based on the variable section of the channel, line 2 — the evaluation of the minimum luminal, line 3 — assessment method for Kozeny

сфер отличие полученной оценки по Козени и численного решения составляет несколько раз: в 2,5 раза (КП) и на порядок (ГП). Связано это с тем, что значительная доля объема каналов представляет собой застойные области со слабо-выраженным течением. Для КОЦ структуры видно хорошее согласие аналитической оценки по методу Козени и значения проницаемости, полученного на основе численного решения системы уравнений Навье–Стокса (при  $\alpha \leq 0,14$  отклонение составляет не более 15%). Для КГЦ структуры при  $\alpha = 0,01$  отклонение составляет 30%, при  $\alpha = 0,05$  — в 2 раза и растет далее. При  $\alpha > 0,06$  лучше пользоваться оценкой на основе метода минимальной просветности.

На Рис. 3 показана зависимость проницаемости от пористости для рассмотренных структур. Отметим, что максимальное значение пористости реализуется в КП структуре при  $\alpha = 0$  ( $m = 47,6\%$ ). Применение метода Козени

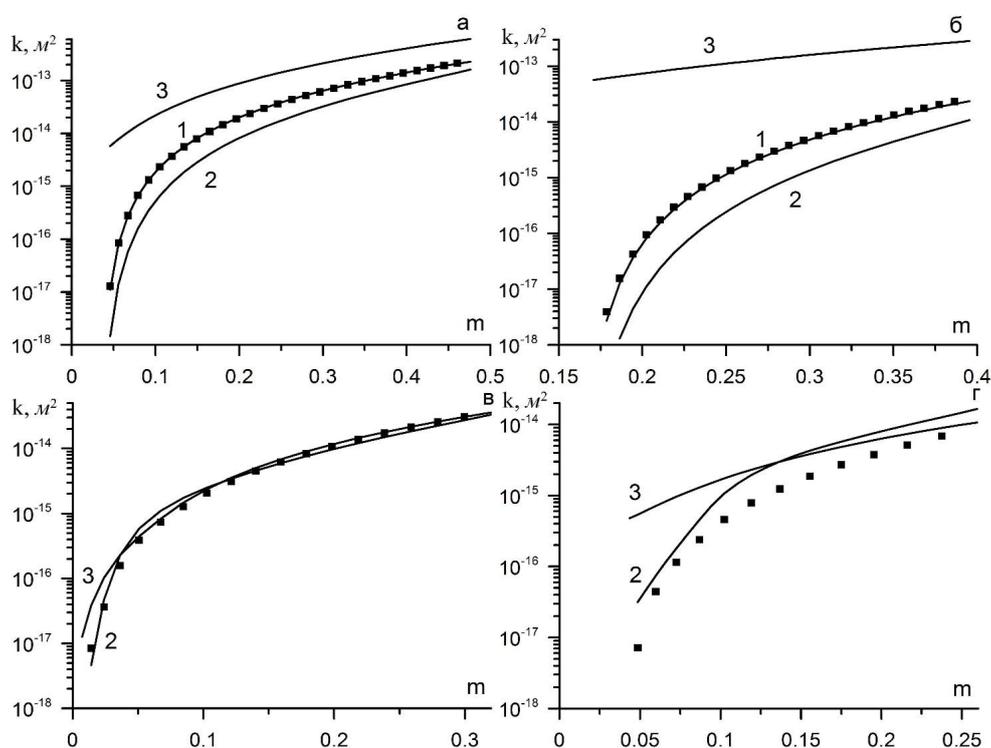


Рис. 3. Проницаемость в зависимости от пористости для структур: КП (а), ГП (б), КОЦ (в), КГЦ (г); квадраты — численное решение [11; 12]. Линия 1 соответствует оценке с учетом переменного сечения канала [13], линия 2 — оценке по минимальной просветности, линия 3 — оценке по методу Козени

Fig. 3. The permeability depending on the porosity of the following structures: SC (а), SH (б), BCC (в) and FCC structures (г); squares — numerical solution. Line 1 corresponds to the evaluation based on the variable section of the channel, line 2 — the evaluation of the minimum luminal, line 3 — assessment method for Kozeny

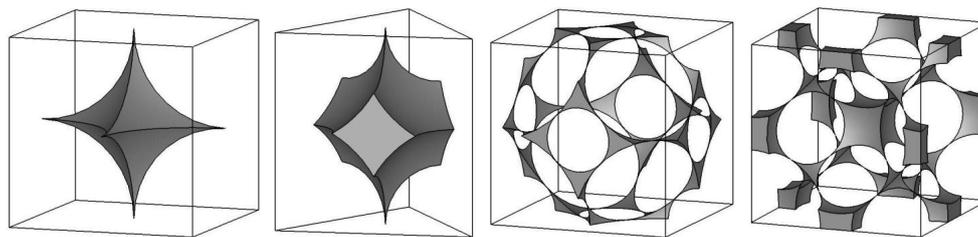


Рис. 4. Поровое пространство в рассматриваемых структурах при  $\alpha = \alpha_*$  (слева направо): КП ( $\alpha_* = 0,2929$ ), ГП ( $\alpha_* = 0,1340$ ), КОЦ ( $\alpha_* = 0,1835$ ), КГЦ ( $\alpha_* = 0,1340$ )

Fig. 4. Porous space in the structures under study at  $\alpha = \alpha_*$  (from left to right): SC ( $\alpha_* = 0.2929$ ), SH ( $\alpha_* = 0.1340$ ), BCC ( $\alpha_* = 0.1835$ ), and FCC ( $\alpha_* = 0.1340$ )

для высокопористых материалов [9], пористых сред, образованных осесимметричными каналами [3] и сред, образованных капиллярными кластерами [18], требует дополнительного исследования. Из Рис. 2 и 3 при  $\alpha \rightarrow \alpha_*$  ( $m \rightarrow m_* \neq 0$ ) поры становятся закрытыми, при этом  $k \rightarrow 0$ , хотя формально оценка по методу Козени дает отличное от нуля значение, поскольку объем поры и площадь ее внутренней поверхности в ячейке больше нуля. На Рис. 4 приведены изображения порового пространства в соответствующих ячейках для рассмотренных структур при  $\alpha = \alpha_*$ , иллюстрирующие изолированные поры.

**Выводы.** Предложено обобщение подхода Козени для пористой среды периодической структуры, скелет которой образован примыкающими друг к другу шаровыми сегментами. Получены оценки проницаемости для четырех типов такой среды. Показано, что предложенный подход дает хороший результат в случае кубической объемноцентрированной структуры в широком диапазоне пористости ( $0,32 \geq m \geq 0,04$ ). Для кубической гранецентрированной структуры результат является удовлетворительным в диапазоне пористости ( $0,26 \geq m \geq 0,14$ ). В случае кубической простой и гексагональной простой структур для оценки проницаемости предпочтительнее использовать метод минимальной просветности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атюцкая Л. Ю. Контроль удельной поверхности цеолита методом Кармана-Козени в процессе механической активации / Л. Ю. Атюцкая, А. Г. Бебия, И. В. Милкокова // Ползуновский альманах. 2013. № 1. С. 95–97.
2. Василевский М. В. Характеристики состояния дисперсной среды на фильтрующей подложке обеспыливающего устройства / М. В. Василевский, В. И. Романдин, Е. Г. Зыков // Известия высших учебных заведений. Физика. 2013. Т. 56. № 9-3. С. 40–42.
3. Губайдуллин А. А. Моделирование динамики капли нефти в капилляре с сужением / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. 2013. № 7. С. 71–77.

4. Дедов А. В. Использование модели Козени для прогнозирования проницаемости нетканых иглопробивных материалов / А. В. Дедов // *Материаловедение*. 2013. № 5. С. 15–17.
5. Дмитриев М. Н. К определению фильтрационного числа Рейнольдса и характерного линейного размера для идеальных и фиктивных пористых сред / М. Н. Дмитриев, Н. М. Дмитриев // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2005. № 4. С. 97–104.
6. Должик К. Расчетная оценка фильтрации несвязных грунтов / К. Должик, И. Хмелевска // *Основания, фундаменты и механика грунтов*. 2014. № 5. С. 2–5.
7. Евсеев Ф. А. Экспериментальная проверка точности метода Кармана-Козени для измерения удельной поверхности частиц / Ф. А. Евсеев, А. Э. Алиев, Е. В. Богданова // *Новый университет. Серия: Технические науки*. 2015. № 9–10 (43–44). С. 53–58.
8. Игошин Д. Е. Моделирование пористой среды регулярными упаковками пересекающихся сфер / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова, П. Я. Мостовой // *Вестник Тюменского государственного университета. Серия «Физико-математические науки. Информатика»*. 2014. № 7. С. 34–42.
9. Игошин Д. Е. Основные фильтрационные свойства пористой среды, образованной сообщающимися осесимметричными каналами / Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2015. Т. 1. № 4 (4). С. 69–79.
10. Игошин Д. Е. Проницаемость пористой среды периодической структуры с разветвляющимися каналами / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова // *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2015. Т. 1. № 2 (2). С. 131–141.
11. Игошин Д. Е. Численное исследование зависимости проницаемости от пористой среды, образованной каналами регулярной структуры / Д. Е. Игошин, Р. С. Сабуров // *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2015. Т. 1. № 1 (1). С. 84–90.
12. Игошин Д. Е. Численное определение проницаемости в среде периодической структуры, образованной разветвляющимися каналами / Д. Е. Игошин // *Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности*. 2015. № 12. С. 30–33.
13. Игошин Д. Е. Численные и аналитические оценки проницаемости пористой среды, образованной каналами, имеющими вращательную симметрию / Д. Е. Игошин, А. Ю. Максимов // *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2015. Т. 1. № 3 (3). С. 112–121.
14. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л. С. Лейбензон. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 244 с.
15. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
16. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. М.-Ижевск: Ин-т комп. иссл.-ний, 2004. 628 с.

17. Сорокин А. Г. Теоретическое моделирование коэффициента проницаемости при фильтрации несжимаемых жидкостей / А. Г. Сорокин // Известия высших учебных заведений. Геология и разведка. 2012. № 6. С. 47–54.
18. Степанов С. В. Вычислительная технология для определения функции межфазного взаимодействия на основе моделирования течения в капиллярном кластере / С. В. Степанов, А. Б. Шабаров, Г. С. Бембель // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Т. 2. № 1. С. 63–71.
19. Филиппова К. Е. Контроль удельной поверхности цеолитсодержащих горных пород Сунтарского месторождения Хонгуруу методом Кармана-Козени в процессе механической активации / К. Е. Филиппова, Ю. Ю. Лукина // Актуальные направления научных исследований: от теории к практике. 2015. № 1 (3). С. 260–262.
20. Ren X. A Relation of Hydraulic Conductivity — Void Ratio for Soils Based on Kozeny-Carman Equation / X. Ren, Y. Zhao, Q. Deng, J. Kang, D. Li, D. Wang // Engineering Geology. 2016. Vol. 213. Pp. 89–97.
21. Tang T. A Theoretical Model for the Porosity–Permeability Relationship / T. Tang, J. M. McDonough // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 103. Pp. 984–996.

Amir A. GUBAIDULLIN<sup>1</sup>  
Dmitriy Ye. IGOSHIN<sup>2</sup>  
Nadezhda A. KHROMOVA<sup>3</sup>

**THE GENERALIZATION OF THE KOZENY APPROACH  
TO DETERMINING THE PERMEABILITY  
OF THE MODEL POROUS MEDIA  
MADE OF SOLID SPHERICAL SEGMENTS<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Dr. Sci. (Phys-Math.), Professor, Tyumen State University;  
Director, Tyumen Branch of Khristianovich Institute  
of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS  
gubai@tmn.ru

<sup>2</sup> Cand. Sci. (Phys-Math.), Researcher,  
Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical  
and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS;  
Associate Professor, Department of Mechanics of Multiphase Systems,  
Department of Mathematical Modeling, Tyumen State University  
igoshinde@gmail.com

<sup>3</sup> Research Engineer, Tyumen Branch of Khristianovich Institute  
of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS  
khromova.n.a@gmail.com

**Abstract**

To establish the connection between the porosity, permeability, and pore or grains size of the porous medium, Kozeny considered fictitious soil-pile as some kind of a filling with balls. However, in real earth material the shape of the particles, which make up the skeleton, may differ substantially from the spherical one.

---

<sup>1</sup> The research has been carried out with the financial help of the Russian Foundation for Basic Research in terms of the project no 16-29-15119.

---

**Citation:** Gubaidullin A. A., Igoshin D. Ye., Khromova N. A. 2016. “The Generalization of the Kozeny Approach to Determining the Permeability of the Model Porous Media Made of Solid Spherical Segments”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 2, pp. 105–120.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-105-120

The aim of this paper is to generalize the Kozeny approach to take into consideration the case of the porous system, the skeleton of which is formed with spherical segment adjacent to each other. As an example, the authors consider the model periodic structure, the permeability values of which have been previously defined on the basis of numerical solution of the Navier–Stokes equations. The model periodic structure patterns of four types are presented: simple cubic, hexagonal simple, body-centered cubic, and face-centered cubic. The sphere intersection degree is a dimensionless modeling parameter that determines the environment porosity and voidage.

The generalized approach allowed to obtain the permeability values for the four types of the considered structures, and to compare them with the corresponding numerical solutions. The results show that the proposed approach suggests good results in the case of body-centered cubic structure in a wide range of porosity ( $0.32 \geq m \geq 0.04$ ). For the face-centered cubic structure the result is satisfactory in the porosity range of  $0.26 \geq m \geq 0.14$ . In the case of the simple cubic and hexagonal structures the method of minimal voidage more preferred to assess the permeability.

### Keywords

Porous medium, porosity, permeability, Kozeny method, periodic structure, perfect soil, fictitious soil, spherical segment.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-105-120

### REFERENCES

1. Atyutskaya L. Yu., Bebiya A. G., Milyukova I. V. 2013. “Kontrol udelnoy poverkhnosti tseolita metodom Karmana-Kozeni v protsesse mekhanicheskoy aktivatsii” [Control of the Specific Surface Area of the Zeolite by Karman-Kozeny Method in the Process of Mechanical Activation]. *Polzunovskiy almanakh*, no 1, pp. 95–97.
2. Dedov A. V. 2013. “Ispolzovanie modeli Kozeni dlya prognozirovaniya pronitsaemosti netkanykh igloprovivnykh materialov” [Using Kozeny Models to Predict the Permeability of Needle-Punched Nonwoven Materials]. *Inorganic Materials: Applied Research*, no 5, pp. 15–17.
3. Dmitriev M. N., Dmitriev N. M. 2005. “K opredeleniyu filtratsionnogo chisla Reynoldsa i kharakternogo lineynogo razmera dlya idealnykh i fiktivnykh poristykh sred” [Determination of the Filtration of the Reynolds Number and the Characteristic Linear Dimension of the Ideal and Fictitious Porous Media]. *Fluid Dynamics*, no 4, pp. 97–104.
4. Dolzhik K., Khmelevska I. 2014. “Raschetnaya otsenka filtratsii nesvyaznykh gruntov” [The Estimated Filtering Loose Soils]. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, no 5, pp. 2–5.
5. Filippova K. E., Lukina Yu. Yu. 2015. “Kontrol udelnoy poverkhnosti tseolitsoderzhashchikh gornykh porod Suntarskogo mestorozhdeniya Khonguruu metodom Karmana-Kozeni v protsesse mekhanicheskoy aktivatsii” [Control the Specific Surface Area of Zeolite Rocks Suntarsky Field Khonguruu by Karman-Kozeny in the Process of Mechanical Activation]. *Aktualnye napravleniya nauchnykh issledovaniy: ot teorii k praktike*, no 1 (3), pp. 260–262.

6. Gubaydullin A. A., Maksimov A. Yu. 2013. "Modelirovanie dinamiki kapli nefi v kapillyare s suzheniem" [Modeling the Dynamics of the Oil Droplets in the Capillary with the Restriction]. Tyumen State University Herald, no 7, pp. 71–77.
7. Igoshin D. E. 2015. "Chislennoe opredelenie pronitsaemosti v srede periodicheskoy struktury, obrazovannoy razvetvlyayushchimisya kanalami" [Numerical Determination of Permeability in the Medium with a Periodic Structure Formed by Branching Channels]. Avtomatizatsiya, telemekhanizatsiya i svyaz v neftyanoi promyshlennosti, no 12, pp. 30–33.
8. Igoshin D. E., Khromova N. A. 2015. "Osnovnye filtratsionnye svoystva poristoy sredy, obrazovannoy soobshchayushchimisya osesimmetrichnymi kanalami" [Main Filtration Properties of the Porous Medium Formed Communicating Axially Symmetric Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 4, pp. 69–79.
9. Igoshin D. E., Maksimov A. Yu. 2015. "Chislennyye i analiticheskie otsenki pronitsaemosti poristoy sredy, obrazovannoy kanalami, imeyushchimi vrashchatelnuyu simmetriyu" [Numerical and Analytical Assessment of the Permeability of a Porous Medium Formed by Channels Having Rotational Symmetry]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 3, pp. 112–121.
10. Igoshin D. E., Nikonova O. A. 2015. "Pronitsaemost poristoy sredy periodicheskoy struktury s razvetvlyayushchimisya kanalami" [Permeability of the Porous Medium Periodic Structure with Branching Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 2, pp. 131–141.
11. Igoshin D. E., Nikonova O. A., Mostovoy P. Ya. 2014. "Modelirovanie poristoy sredy regulyarnymi upakovkami peresekayushchikhsya sfer" [Modeling Porous Medium Regular Packages Intersecting Spheres]. Tyumen State University Herald, no 7, pp. 34–42.
12. Igoshin D. E., Saburov R. S. 2015. "Chislennoe issledovanie zavisimosti pronitsaemosti ot poristoy sredy, obrazovannoy kanalami regulyarnoy struktury" [Numerical Study Depending on the Permeability of the Porous Medium, Formed a Regular Structure of Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 1, pp. 84–90.
13. Leybenzon L. S. 1947. Dvizhenie prirodnykh zhidkostey i gazov v poristoy srede [Movement of Natural Fluids in Porous Media]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury.
14. Loytsyanskiy L. G. 2003. Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of Liquid and Gas]. Moscow: Drofa.
15. Muskat 2004 (1946). Teheniyе odnorodnykh zhidkostey v poristoy srede [The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media]. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Science.
16. Ren X., Zhao Y., Deng Q., Kang J., Li D., Wang D.. 2016. A Relation of Hydraulic Conductivity — Void Ratio for Soils Based on Kozeny-Carman equation. Engineering Geology, vol. 213, pp. 89–97.
17. Sorokin A. G. 2012. "Teoreticheskoe modelirovanie koeffitsienta pronitsaemosti pri filtratsii neszhimaemykh zhidkostey" [Theoretical Modeling of the Permeability Coefficient of Filtration of Incompressible Liquids]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Geologiya i razvedka, no 6, pp. 47–54.
18. Stepanov S. V., Shabarov A. B., Bembel G. S. 2016. "Vychislitel'naya tekhnologiya dlya opredeleniya funktsii mezhfaznogo vzaimodeystviya na osnove modelirovaniya

- techeniya v kapillyarnom klasterе” [Computing Technology to Determine the Function of Interfacial Interaction on the Basis of Flow Simulation in a Capillary Cluster]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 1, pp. 63–71.
19. Tang T., J.M. McDonough. 2016. A Theoretical Model For The Porosity–Permeability Relationship. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 103, pp. 984–996.
20. Vasilevskiy M. V., Romandin V. I., Zykov E. G. 2013. “Kharakteristiki sostoyaniya dispersnoy sredy na filtruyushchey podlozhke obespylivayushchego ustroystva” [The Features of the Dispersed State of the Environment on the Filter Substrate of De-Dusting Devices]. *Russian Physics Journal*, no 9-3, pp. 40–42.
21. Yevseev F. A., Aliev A. E., Bogdanova E. V. 2015. “Eksperimentalnaya proverka tochnosti metoda Karmana-Kozeny dlya izmereniya udelnoy poverkhnosti chastits” [Experimental Verification of the Accuracy of the Karman-Kozeny Method for Measuring the Specific Surface Area of Particles]. *Novyy universitet. Seriya: Tekhnicheskie nauki*, no 9–10 (43–44), pp. 53–58.