

Дмитрий Евгеньевич ИГОШИН¹
Надежда Александровна ХРОМОВА²

УДК 532.5

**ФИЛЬТРАЦИОННО-ЕМКОСТНЫЕ СВОЙСТВА
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ
РОМБОЭДРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ
СО СКЕЛЕТОМ ИЗ ШАРОВЫХ СЕГМЕНТОВ¹**

¹ кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник, Тюменский филиал
Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН;
доцент кафедры математического моделирования
и кафедры механики многофазных систем,
Тюменский государственный университет
igoshinde@gmail.com

² инженер-исследователь, Тюменский филиал
Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН
khromova.n.a@gmail.com

Аннотация

В прошлых работах авторами рассмотрены двухпараметрические модели периодических пористых сред. В качестве модельных параметров в них участвуют размер элементарной ячейки и безразмерный параметр — степень пересечения сфер. При фиксированном размере элементарной ячейки пористость материала в таких моделях

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-29-15119.

Цитирование: Игошин Д. Е. Фильтрационно-емкостные свойства периодической пористой среды ромбоэдрической структуры со скелетом из шаровых сегментов / Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 3. С. 107-127.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-107-127

взаимнооднозначно связана с проницаемостью, т. е. графически множество точек среды в осях «пористость-проницаемость» располагается на кривой. Однако в реальных породах экспериментально определенные значения пористости и проницаемости даже для материала одного литологического типа, взятого из одной скважины, располагаются в указанных осях в виде «облака». В связи с этим актуальной становится разработка трехпараметрической модельной пористой среды, область значений проницаемости для которой будет лучше совпадать с экспериментальными данными. Целью данной работы является расширение ранее рассмотренных моделей на случай угла трансляции, отличающегося от прямого угла. В качестве примера рассмотрена модельная периодическая структура на основе ромбоэдрической системы решетки. Для рассмотренной структуры аналитически получено точное значение пористости и минимальной просветности. Получены оценки проницаемости с учетом извилистости каналов. Показано, что при $\theta = 90^\circ$ значение проницаемости хорошо согласуется с соответствующим значением для кубической простой структуры, а при $\theta = 60^\circ$ — с соответствующим значением для кубической гранецентрированной структуры.

Ключевые слова

Пористая среда, просветность, пористость, проницаемость, периодическая структура, идеальный грунт, фиктивный грунт, шаровой сегмент, ромбоэдрическая ячейка, извилистость.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-107-127

Введение

В последние годы увеличение доли трудноизвлекаемых запасов нефти в общей добыче [21] стимулирует интерес к развитию математических моделей, описывающих течение флюидов в пористой среде. Существует несколько способов представления пористой среды. Первыми моделями были идеальный грунт, состоящий из параллельных цилиндрических капилляров, и фиктивный грунт, состоящий из одинаковых шаровых частиц [17]. Там же описан метод Козени, позволяющий перейти от фиктивного грунта к идеальному. Обобщением модели идеального грунта является модель, состоящая из осесимметричных каналов [1; 3; 9] либо каналов, имеющих вращательную симметрию [13]; модель, составленная из примыкающих друг к другу шаровых сегментов [8; 10] обобщает модель фиктивного грунта. Обобщение подхода Козени на случай грунта, составленного из шаровых сегментов, проведено в [2]. Там же приведены примеры расчетов для структур, описанных в [8; 10]. В [20] приведена методика расчета потерь давления при течении водонефтяной смеси в поровых каналах с помощью разработанной в [19] сетевой кластерной модели пористой среды. Авторами [4] разработан алгоритм построения порового пространства в рамках двумерной сетевой стохастической модели на основе кривых капиллярного давления, снятых с керн.

При описании течения флюидов в пористой среде широкое распространение получили методы прямого гидродинамического моделирования. Основные

классы методов вычислительной гидродинамики сводятся либо к прямому интегрированию уравнений Навье–Стокса [22], либо к моделированию потока ньютоновской жидкости дискретным кинетическим уравнением Больцмана [23]. В [11; 12] проведено численное определение проницаемости периодических структур, описанных в [8; 10] с помощью открытого пакета прямого гидродинамического моделирования, использующего метод конечных объемов. Следует отметить, что на макроуровне фильтрационно-емкостные параметры пористых сред существенно неоднородны. Численное исследование влияния этих неоднородностей на процессы миграции и аккумуляции нефти проведено в [5] применительно к двумерному модельному геологическому объекту.

Экспериментальные методы определения параметров микроструктуры пористой среды все чаще используют томографию. В [15] описана методика измерения функции распределения микро- и нанопор по размерам с помощью ЯМР-релаксометрии в процессе прогрева предварительно замороженного, насыщенного водой образца пористой среды (керна); выполнены эксперименты на природном образце по измерению температуры и времени объемной релаксации воды, в которых подтверждена возможность измерения функции распределения пор диаметром менее 100 микрон по размерам и спектру времен релаксации. В [14] описан метод определения максимального размера сквозного канала, основанный на измерении температуры начала кристаллизации воды в водонасыщенной пористой керамике; выполнены соответствующие эксперименты.

Геометрия задачи

Рассмотренные в [8; 10] пористые структуры со скелетом из шаровых сегментов имеют высокую степень симметрии, поскольку описываются двумя модельными параметрами, один из которых безразмерный. Можно предположить, что модельные пористые структуры, обладающие меньшей симметрией, будут в большей степени соответствовать геологическим типам пород. Применим указанный принцип построения скелета из шаровых сегментов к ромбоэдрической системе решетки [6] аналогично тому, как это сделал Сликтер применительно к упаковке шаров [17].

Рассмотрим ромбоэдр с ребрами длины L и острым углом θ . Пусть в вершинах ромбоэдра расположены образующие скелет одинаковые частицы в форме больших шаровых сегментов, примыкающих друг к другу плоскими поверхностями, при этом общее число отсеченных малых сегментов — $N_{\text{ср}}$. Степень перекрытия сфер зададим безразмерным параметром

$$\alpha = \Delta/r, \quad (1)$$

где Δ — высота малого шарового сегмента, r — радиус сферы (рис. 1а). Расстояние между центрами ближайших сфер, расположенных в узлах ячейки, примем постоянным и равным $2r_0$, где r_0 — радиус, соответствующий случаю касания сфер ($\alpha = 0$). Из рис. 1а видно, что $r = r_0 + \Delta$, откуда

$$r = r_0/(1 - \alpha). \quad (2)$$

На рис. 1 белым цветом показан скелет, серым — поровое пространство. Из рис. 1 имеем:

$$L = 2r_0, \quad d_1 = 2L \cos \theta, \quad d_2 = 2L \sin \theta, \quad r_k = L \sin \frac{\theta}{2}. \quad (3)$$

Отметим, что при $r = r_k$ окружности с центрами на противоположных вершинах малой диагонали грани касаются (рис. 1в), при этом $\alpha_k = 1 - \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$.

При $r > r_k$ окружности при указанных вершинах пересекаются, что приводит к образованию в объеме ячейки дополнительных малых шаровых сегментов высотой $\Delta_2 = r\alpha_2$, $\alpha_2 = 1 - 2(1 - \alpha) \sin \frac{\theta}{2}$. При $r < r_k$ ($\alpha > \alpha_k$) $\alpha_2 = 0$.

С увеличением степени перекрытия сфер α объем пор уменьшается, вместе с этим уменьшается площадь поперечного сечения порового объема на гранях ромбоэдра (площадь горловин пор). Рассмотрим случай, когда поры становятся замкнутыми. Из рис. 1г найдем предельное значение $\alpha = \alpha_*$, при котором модельная пористая среда перестает быть проницаемой.

Из равнобедренного треугольника AGB с основанием L и боковыми сторонами r_* с учетом (2) и (3) имеем:

$$r_* = r_0 / \cos \frac{\theta}{2} = L / (2 \cos \frac{\theta}{2}), \quad \text{откуда } \alpha_* = 1 - \cos \frac{\theta}{2}. \quad (4)$$

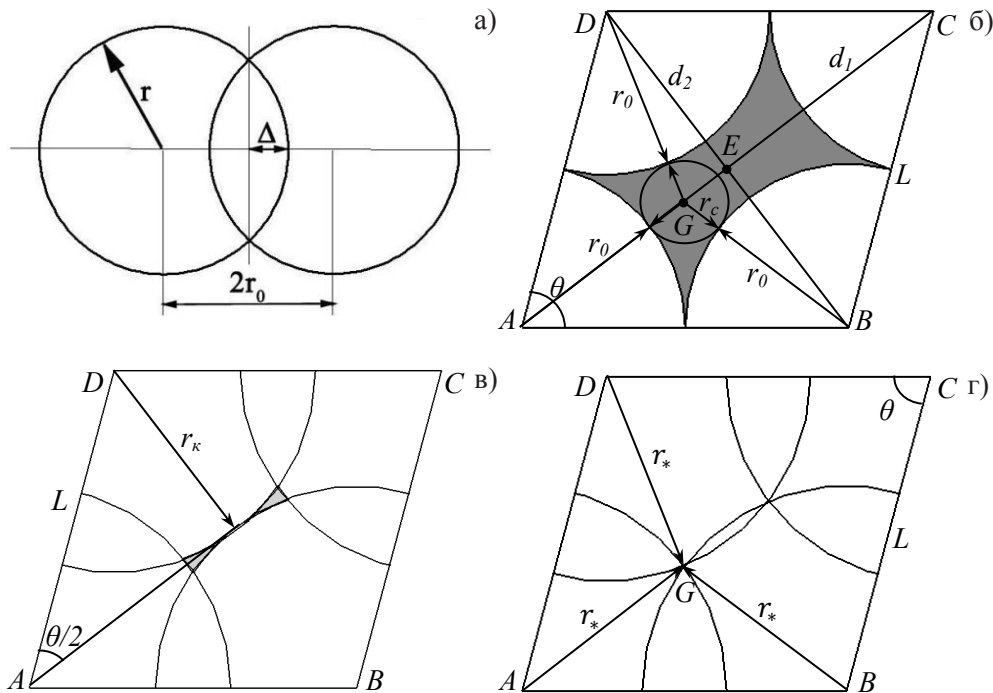


Рис. 1. Основные модельные параметры ромбоэдрической структуры

Fig. 1. Basic model parameters of rhombohedral structure

На рис. 2 показаны поровые объемы ромбоэдрической структуры при $\alpha = 0; 0,05; 0,1$ и $\theta = 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$. Видно, что с уменьшением угла θ растет скошенность ребер ячейки. При $\theta = 60^\circ$ и на каждой грани расположены две горловины, соединяющие поры в соседних ячейках, при $\theta = 75^\circ$ и $\theta = 90^\circ$ при рассмотренных значениях α на каждой грани расположена одна горловина.

Грани рассмотренных ромбоэдров отдельно показаны на рис. 3. Видно, что с увеличением параметра α площадь сечения горловин уменьшается. При $\theta = 60^\circ$ сечение горловины представляет собой 2 равных криволинейных треугольника, в каждый из которых можно вписать правильный треугольник. При $\theta = 90^\circ$ сечение горловины представляет собой криволинейный четырехугольник, в который можно вписать квадрат. При увеличении угла θ от 60° до 90° сечение горловины постепенно переходит от первой формы ко второй.

Пористость

По определению пористость

$$m = \frac{V_{\text{п}}}{V} = 1 - \frac{V_{\text{с}}}{V}, \quad (5)$$

где V , $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{с}}$ — объемы пористой среды, пор и скелета соответственно.

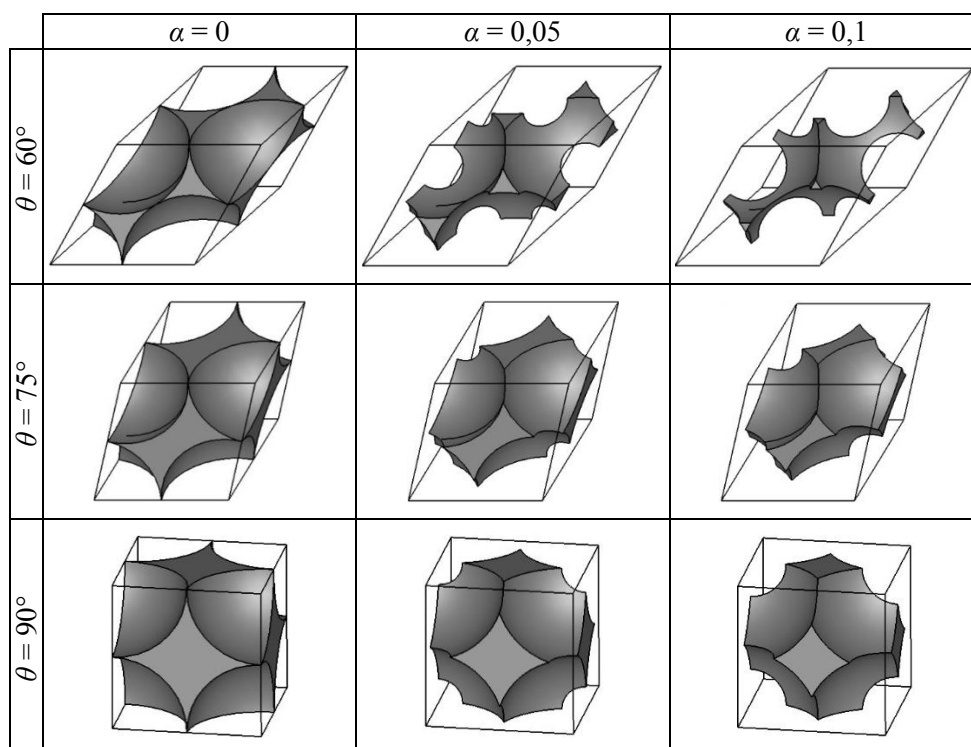


Рис. 2. Поровое пространство в ячейке при различных α и θ

Fig. 2. Porous space in the cell with different α and θ

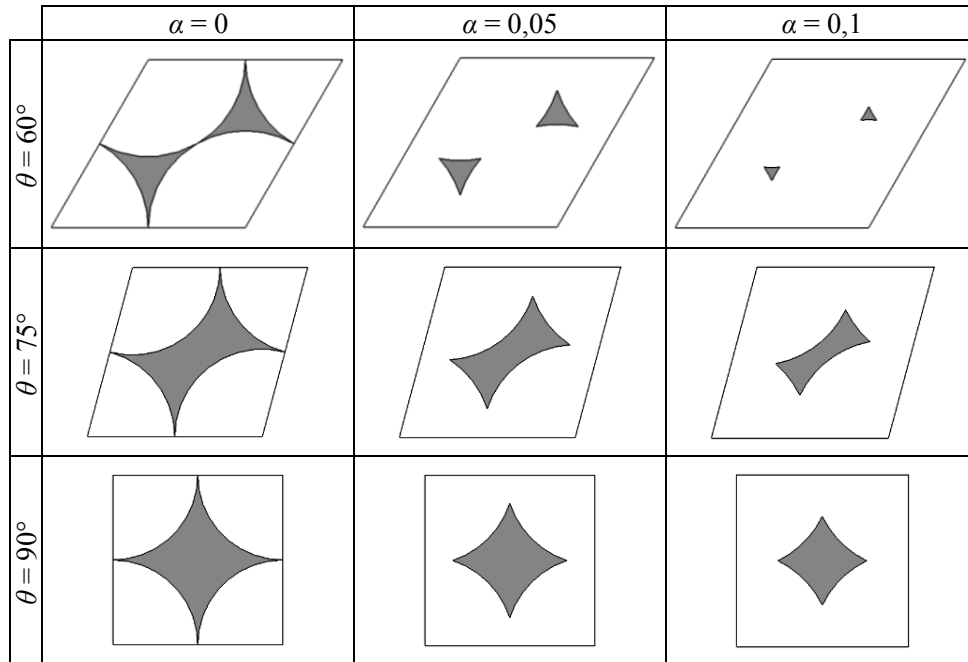


Рис. 3. Порový просвет на гранях

Fig. 3. Porous gap on the edges

Из [17] объем ромбоэдра с учетом введенных обозначений

$$V = \frac{L^3 \sin^2 \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{1 + \cos \theta}. \quad (6)$$

Скелет составлен из больших шаровых сегментов, т. е. сфер за вычетом их пересечений в виде малых сегментов. Тогда объем скелета:

$$V_c = NV_{\text{сф}} - N_1 V_{\text{ср}} - N_2 V_{\text{ср}2},$$

$$V_{\text{сф}} = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad V_{\text{ср}} = \frac{\pi r_0^3 \alpha^2 (3 - \alpha)}{3(1 - \alpha)^3}, \quad V_{\text{ср}2} = \frac{\pi r_0^3 \alpha_2^2 (3 - \alpha_2)}{3(1 - \alpha)^3}, \quad (7)$$

где $V_{\text{сф}}$, $V_{\text{ср}}$ и $V_{\text{ср}2}$ — объемы сферы и сегментов в ячейке соответственно. На одну ячейку приходится в целом $N = 1$ большой шаровой сегмент, $N_1 = 6$ малых сегментов первого типа (образованы пересечением сфер при соседних вершинах) и $N_2 = 6$ малых сегментов второго типа (образованы пересечением сфер с центрами в противоположащих вершинах на каждой грани). Выражения для объема сегментов записаны с учетом (1)–(3).

Подставив (6) и (7) в (5), получим обобщение фундаментальной формулы Сликтера для пористости среды, составленной из шаровых сегментов:

$$m = 1 - \frac{\pi (2 - 3\alpha^2(3 - \alpha) - 3\alpha_2^2(3 - \alpha_2))}{12(1 - \alpha)^3(1 - \cos \theta)\sqrt{1 + 2 \cos \theta}} \quad (8)$$

На рис. 4 в виде изолиний показана зависимость пористости от угла θ и степени пересечения сфер α . Видно, что с уменьшением угла θ пористость

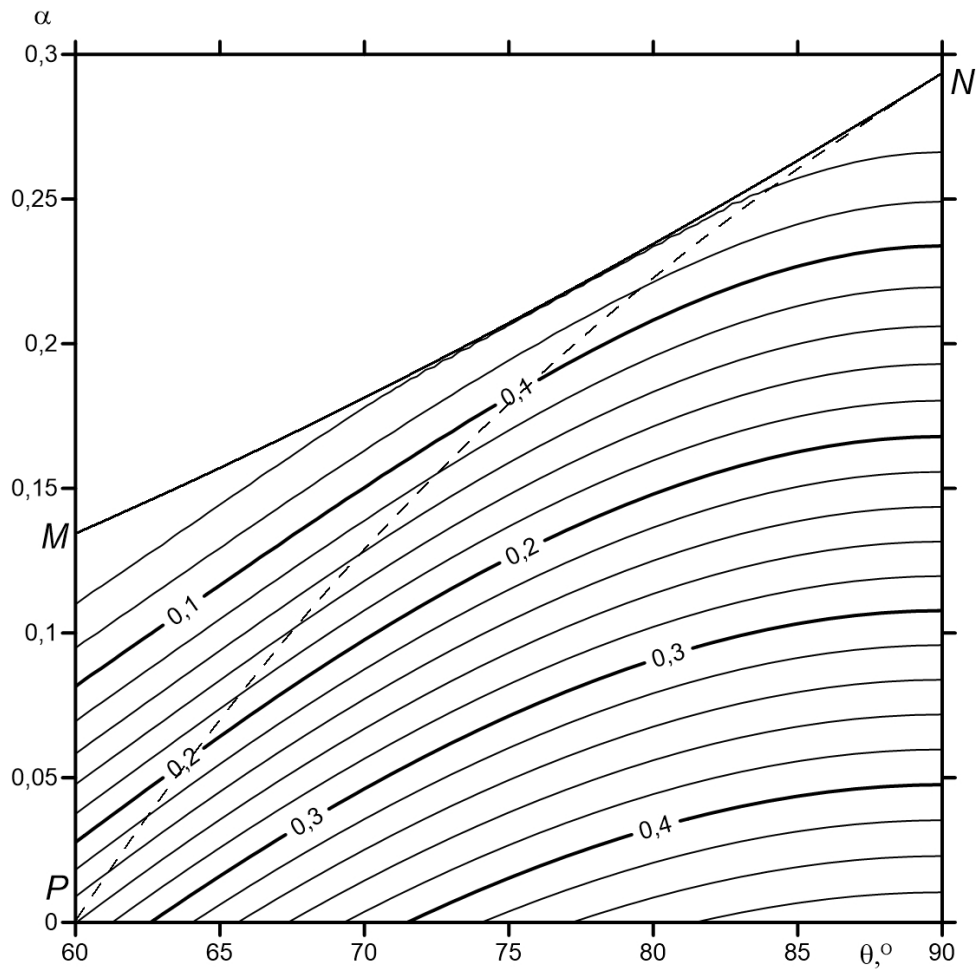


Рис. 4. Пористость в зависимости от угла θ и степени пересечения сфер α в виде изолиний

Fig. 4. Porosity depending on the angle θ and spheres cross-section degree α in the form of isolines

уменьшается, поскольку упаковка шаровых сегментов становится более плотной. С увеличением степени пересечения сфер α пористость уменьшается. Линия MN на рис. 4, 5 и 9 описывается вторым выражением из (4) и соответствует замкнутым порам. Точка M соответствует случаю замкнутых пор в кубической гранецентрированной структуре [10] ($m \approx 3,6\%$). Точка N соответствует случаю замкнутых пор в простой кубической структуре [8] ($m \approx 3,5\%$). Область MNP на рис. 4, 5 и 9 соответствует случаю появления дополнительных малых шаровых сегментов.

Просветность

Отношение площади пор в поперечном сечении к общей площади сечения называется просветностью (поверхностной пористостью):

$$n = \frac{S_{\Pi}}{S} = 1 - \frac{S_c}{S}, \quad (9)$$

где S , S_c , S_n — площади поперечных сечений ячейки, скелета и пор соответственно. Наибольший интерес представляет минимальное значение просветности, достигаемое на гранях элементарной ячейки. Площадь грани

$$S = L^2 \sin \theta. \quad (10)$$

Площадь скелета в сечении составляют площади окружностей за вычетом площади их пересечений в виде круговых сегментов

$$\begin{aligned} S_c &= N' S_{\text{ок}} - N'_1 S_{\text{ср}} - N'_2 S_{\text{ср}2}, \\ S_{\text{ок}} &= \pi r^2, \quad S_{\text{ср}} = r^2 f(\varphi), \quad S_{\text{ср}2} = r^2 f(\varphi_2), \\ f(\varphi) &= \varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2}, \quad \varphi = \arccos(1 - \alpha), \\ f(\varphi_2) &= \varphi_2 - \frac{\sin(2\varphi_2)}{2}, \quad \varphi_2 = \begin{cases} \arccos \left[2(1 - \alpha) \sin \frac{\theta}{2} \right], & \alpha \leq 1 - \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

На одну ячейку приходится в целом $N' = 1$ окружность, $N'_1 = 4$ круговых сегмента первого типа (образованы пересечением окружностей при соседних вершинах) и $N'_2 = 2$ круговых сегмента второго типа (образованы пересечением окружностей при противоположных вершинах на каждой грани). Подставляя (10) и (11) в (9) с учетом (2) и (3), получим:

$$n = 1 - \frac{\pi - 4f(\varphi) - 2f(\varphi_2)}{4 \sin \theta (1 - \alpha)^2}. \quad (12)$$

На рис. 5 в виде изолиний показана зависимость минимальной просветности от угла θ и степени пересечения сфер α . Видно, что с увеличением угла θ минимальная просветность увеличивается, а с увеличением степени пересечения сфер α уменьшается. Минимальная просветность на линии MN равна нулю.

Извилистость

Извилистостью тонкого канала (линии тока) назовем отношение длины направляющей канала к длине отрезка, соединяющего его вход и выход

$$\tau = \frac{L_{\text{к}}}{H}. \quad (13)$$

Увеличение извилистости приводит к росту гидравлического сопротивления [7]. На рис. 6 изображена ромбоэдрическая ячейка. Серым цветом показано сечение порового канала в диагональной плоскости AA_1C_1C ромбоэдра, темно-серым цветом показаны поровые просветы на верхней и нижней гранях и сечение порового канала в плоскости BDA_1 . Анализ извилистости проведем по рис. 7, где отдельно показана диагональная плоскость AA_1C_1C при $\theta = 75^\circ$ и $\alpha = 0,1$.

На рис. 7 схематично изображены две основные линии тока. Из соображений симметрии они равны, поэтому подробнее рассмотрим одну из них — GG_1 . Точки G_1 и G равноудалены от скелета в плоскости верхней и нижней граней соот-

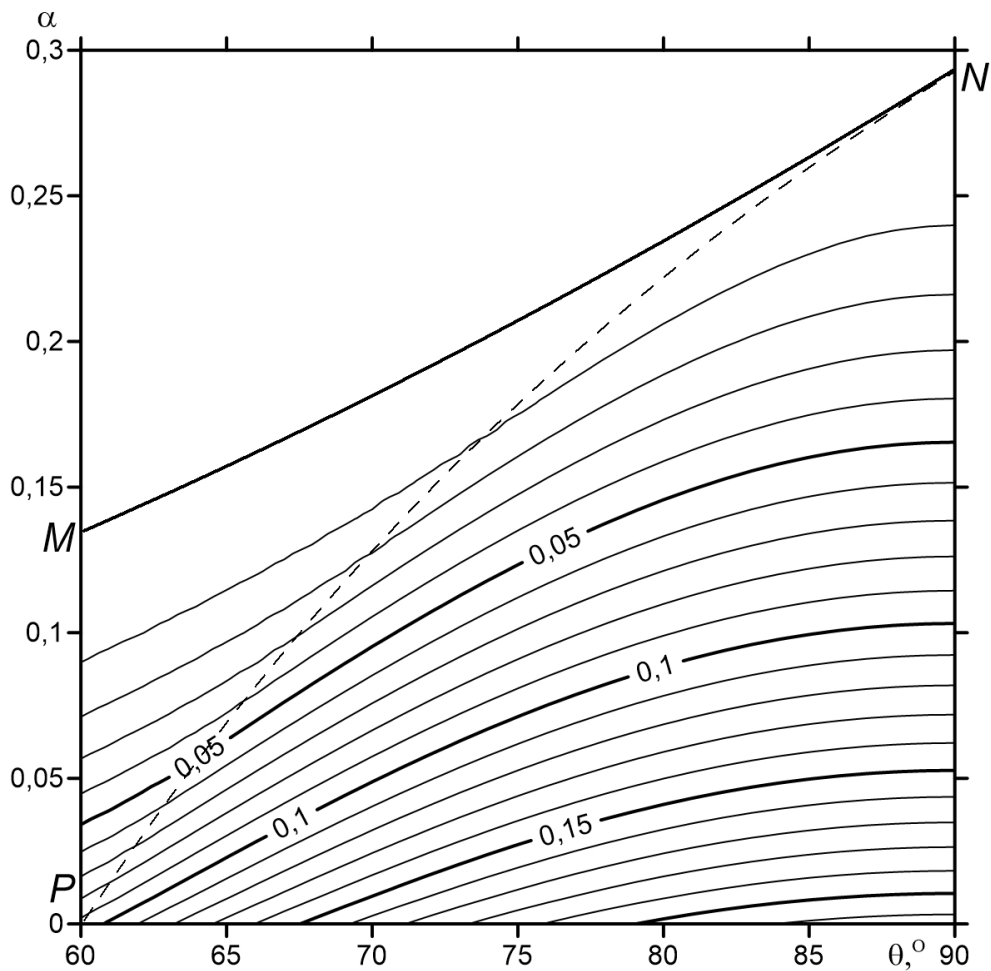


Рис. 5. Минимальная просветность в зависимости от угла θ и степени пересечения сфер α в виде изолиний

Fig. 5. Minimum voidage depending on the angle θ and spheres cross-section degree α in the form of isolines

ответственно (см. также рис. 1б). Точка E — пересечение диагоналей нижней грани и середина AC . Кривая GG_1 должна быть гладкой, касательные к которой в точках G_1 и G перпендикулярны граням. В силу симметрии при $\theta = 60^\circ$ кривые переходят в дуги окружностей, при $\theta = 90^\circ$ — в отрезки. Этим условиям удовлетворяют дуги подобных эллипсов с центрами в точках E и A_1 и малыми полуосями $b_1 = EG$ и $b_2 = A_1G_1$ соответственно, при этом касательные к кривым в точке F совпадают. Найдем малые полуоси эллипсов. По построению $A_1G_1 = AG = r_*$. Из $\triangle AEB$ сторона $AE = L \cos(\theta/2)$, $EG = AE - AG = L \cos(\theta/2) - r_*$. С учетом (4), используя формулу косинуса двойного угла, найдем малые полуоси эллипсов

$$b_1 = EG = \frac{L \cos \theta}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = r_* \cos \theta, \quad b_2 = A_1G_1 = \frac{L}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = r_*. \quad (14)$$

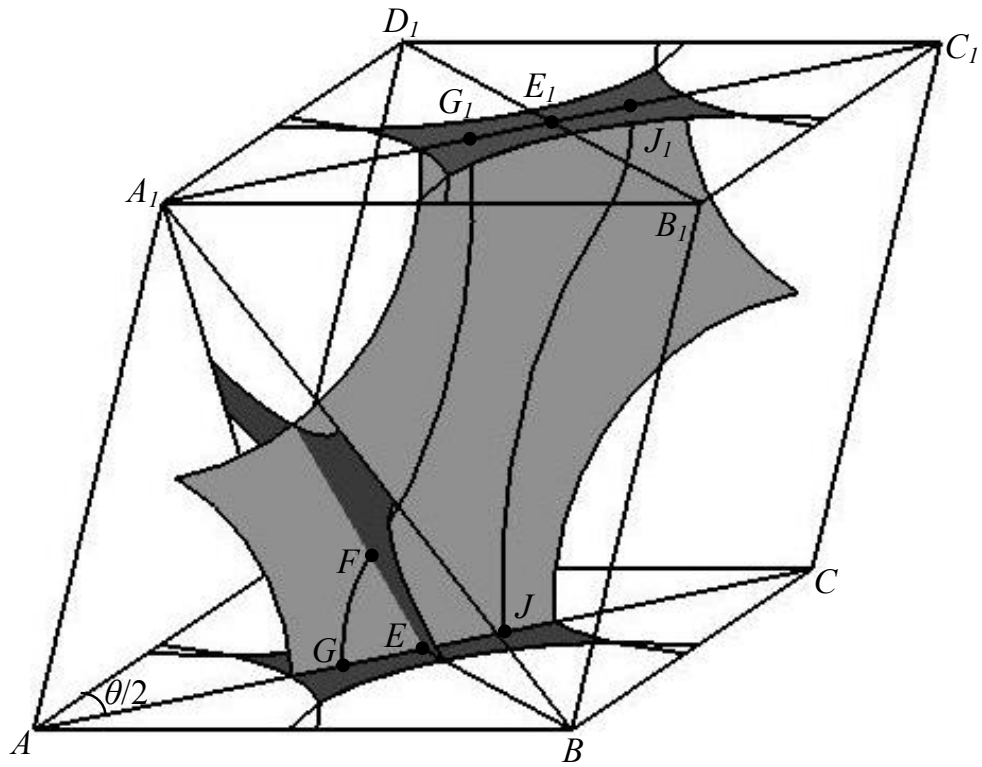


Рис. 6. Ромбоэдрическая ячейка при $\theta = 75^\circ$ и $\alpha = 0,1$

Fig. 6. Rhombohedral cell with $\theta = 75^\circ$ and $\alpha = 0.1$

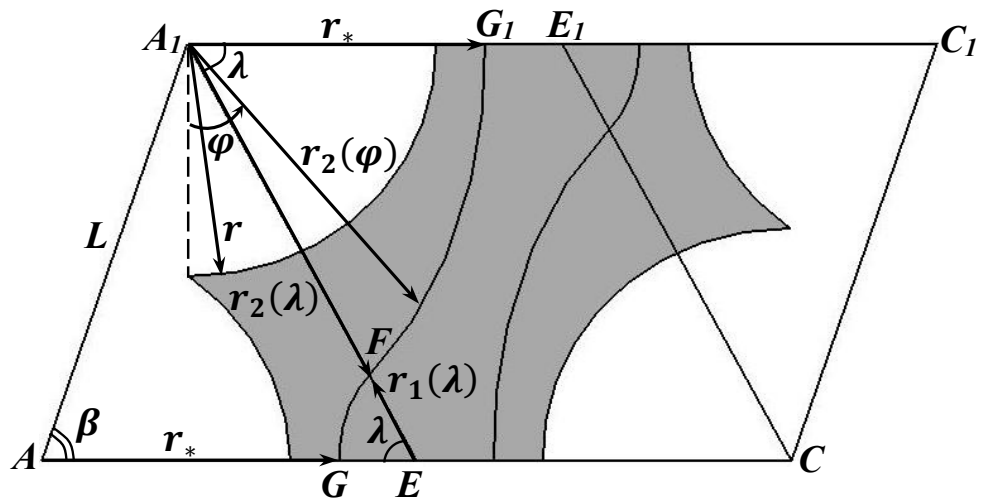


Рис. 7. Диагональное сечение ромбоэдрической ячейки при $\theta = 75^\circ$ и $\alpha = 0,1$

Fig. 7. Diagonal cross-section of the rhombohedral cell with $\theta = 75^\circ$ and $\alpha = 0.1$

Найдем радиусы эллипсов в точке F . В равностороннем треугольнике ΔA_1BD высота $A_1E = L \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - \cos \theta)$. В силу подобия эллипсов

$$r_1(\lambda) + r_2(\lambda) = L \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - \cos \theta), \quad \frac{r_1(\lambda)}{r_2(\lambda)} = \cos \theta,$$

откуда

$$r_1(\lambda) = \frac{L \cos \theta \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - \cos \theta)}{1 + \cos \theta}, \quad r_2(\lambda) = \frac{L \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - \cos \theta)}{1 + \cos \theta}. \quad (15)$$

По теореме косинусов в ΔAA_1E угол λ

$$\lambda = \arccos \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{3}(1 + \cos \theta)} \right). \quad (16)$$

Воспользовавшись связью между длиной малой полуоси эллипса и его радиусом [16], найдем длины больших полуосей эллипсов

$$a_1 = \frac{r_1(\lambda) b_1 \sin \lambda}{\sqrt{b_1^2 - r_1^2(\lambda) \sin^2 \lambda}}, \quad a_2 = \frac{r_2(\lambda) b_2 \sin \lambda}{\sqrt{b_2^2 - r_2^2(\lambda) \sin^2 \lambda}}. \quad (17)$$

Длину дуги эллипса вычислим с учетом соотношений (14)–(17) по формуле длины кривой [16] интегрированием

$$L_e = b \int_{\frac{\pi}{2} - \lambda}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} + \frac{e^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi)^3}} d\varphi = bI, \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (18)$$

где e — эксцентриситет эллипса. Полная длина кривой GG_i

$$L_{\kappa} = L_{e1} + L_{e2} = r_*(1 + \cos \theta)I = \frac{1 + \cos \theta}{2 \cos \frac{\theta}{2}} IL. \quad (19)$$

В [17] показано, что высота ячейки

$$H = L \sin \beta = \frac{\sin \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{1 + \cos \theta} L, \quad (20)$$

тогда выражение для оценки извилистости (13) с учетом (19) и (20) примет вид

$$\tau = \frac{L_{\kappa}}{H} = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}} I. \quad (21)$$

Ниже показаны зависимости от угла θ приведенной длины канала $\tilde{L} = L_{\kappa}/L$ и извилистости τ (рис. 8). При $\theta = 60^\circ$ извилистость и приведенная длина принимают наибольшее значение, однако приведенная длина меньше отличается от единицы, поскольку высота ячейки в силу (20) минимальна. При $\theta = 90^\circ$ извилистость и приведенная длина равны единице, потому что ромбоэдр переходит в куб [8].

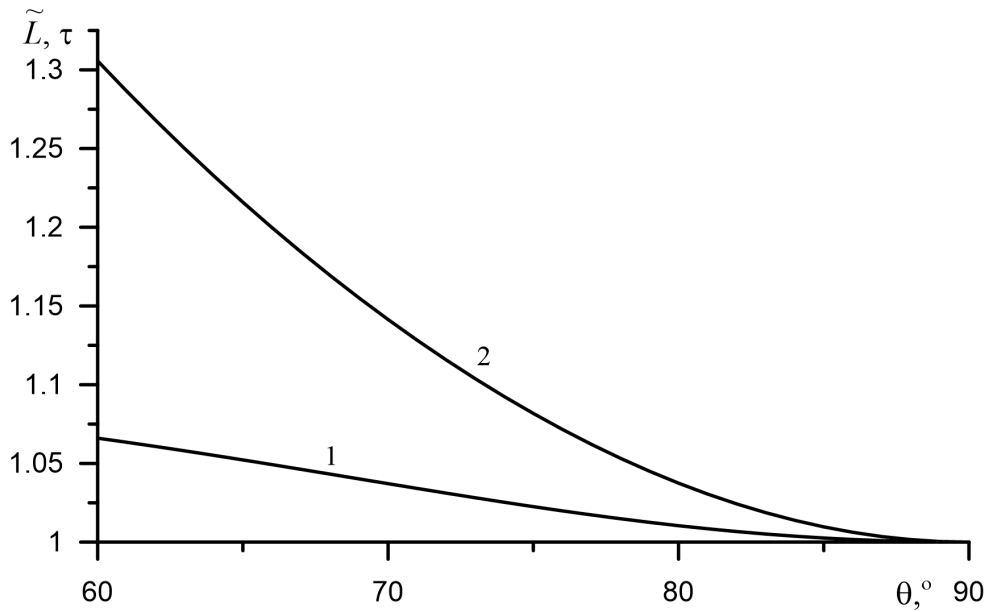


Рис. 8. Приведенная длина канала \tilde{L} (линия 1) и извилистость τ (линия 2) в зависимости от угла θ

Fig. 8. The reduced length of the canal \tilde{L} (line 1) and the sinuosity τ (line 2) depending on the angle θ

Проницаемость

Одномерная фильтрация флюида через пористую среду описывается уравнением Дарси

$$u = \frac{k \Delta p}{\mu l}, \quad (22)$$

где $\Delta p = p_1 - p_2$ — перепад давления, l — протяженность среды, k — проницаемость среды, μ — динамическая вязкость флюида. С другой стороны, скорость фильтрации по определению

$$u = \frac{Q}{S}, \quad (23)$$

где Q — объемный расход флюида через поперечное сечение среды площадью S .

Перейдем от фиктивного грунта, описанного в предложенной модели, к идеальному грунту, поровое пространство которого состоит из каналов постоянного сечения. В [18] показано, что объемный расход через каналы, поперечное сечение которых представляет собой равносторонний треугольник и прямоугольник, находится по соответствующим формулам

$$Q_{\Delta} = \frac{a^4 \sqrt{3} \Delta p}{320 \mu l_k}, \quad (24)$$

$$Q_{\square} = \frac{\Delta p}{4 \mu l_k} \kappa h^4 f(\kappa),$$

$$f(\kappa) = \frac{16}{3} - \frac{1024}{\pi^5 \kappa} \left(\operatorname{th} \frac{\pi \kappa}{2} + \frac{1}{3^5} \operatorname{th} \frac{3\pi \kappa}{2} + \dots \right),$$

где a — сторона треугольника, параметр $\kappa > 1$ представляет собой отношение ширины прямоугольного сечения $2\kappa h$ к его высоте $2h$. В предложенной модели величину κ зададим следующим образом

$$\kappa = \frac{d_1 - 2r}{d_2 - 2r} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{1-\alpha}}{2 \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{1-\alpha}}. \quad (25)$$

Сечения каналов на гранях ячейки имеют криволинейную форму, напоминающую прямоугольник при $\theta \rightarrow 90^\circ$ и два равносторонних треугольника при $\theta \rightarrow 60^\circ$. При остальных углах θ форма сечения более сложная, поиск аналитического решения уравнения Пуассона для нее затруднен. Поэтому объемный расход через ячейку представим приближенно в виде взвешенной суммы объемного расхода через канал прямоугольного и двух треугольных сечений

$$Q = Q_{\square} \omega_{\square} + 2Q_{\Delta}(1 - \omega_{\square}), \quad (26)$$

$$\omega_{\square} = \frac{\theta(^{\circ})}{30} - 2,$$

где ω_{\square} — вес расхода через канал прямоугольного сечения, равномерно возрастающий от 0 при $\theta = 60^\circ$ до 1 при $\theta = 90^\circ$. Величину угла θ следует брать в градусах.

Полагая в (22) $l = H$, в (23) $S = L^2 \sin \theta$, в (24) $l_{\kappa} = \tau H$, из системы (22)–(26) найдем оценку проницаемости рассмотренной среды

$$k = \left(\frac{\kappa f(\kappa) h^4}{4} \omega_{\square} + \frac{a^4 \sqrt{3}}{160} (1 - \omega_{\square}) \right) \frac{1}{\tau L^2 \sin \theta}. \quad (27)$$

Найдем связь между h и a с модельными параметрами L и n . Критерием эквивалентности при переходе от фиктивного грунта к идеальному является равенство площадей просвета для сечения модельного канала и канала прямоугольного сечения либо пары каналов треугольного сечения соответственно

$$nL^2 \sin \theta = 4h^2 \kappa, \quad nL^2 \sin \theta = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2. \quad (28)$$

Подставляя h и a из соотношений (28) в выражение (27), получим оценку проницаемости через модельные параметры L и n

$$k = \frac{1}{\tau \sin \theta} \left(\frac{f(\kappa) \sin^2 \theta}{\kappa} \omega_{\square} + \frac{2\sqrt{3}}{5} (1 - \omega_{\square}) \right) \left(\frac{nL}{8} \right)^2. \quad (29)$$

На рис. 9 представлена зависимость приведенной (безразмерной) проницаемости $\tilde{k} = k/L^2$ от угла θ и степени пересечения сфер α в виде изолиний. Видно, что проницаемость падает быстрее всего при одновременном уменьшении угла θ и увеличении безразмерного параметра α . При $\theta \rightarrow 90^\circ$ проницаемость слабо зависит от угла в силу малой скошенности ячейки.

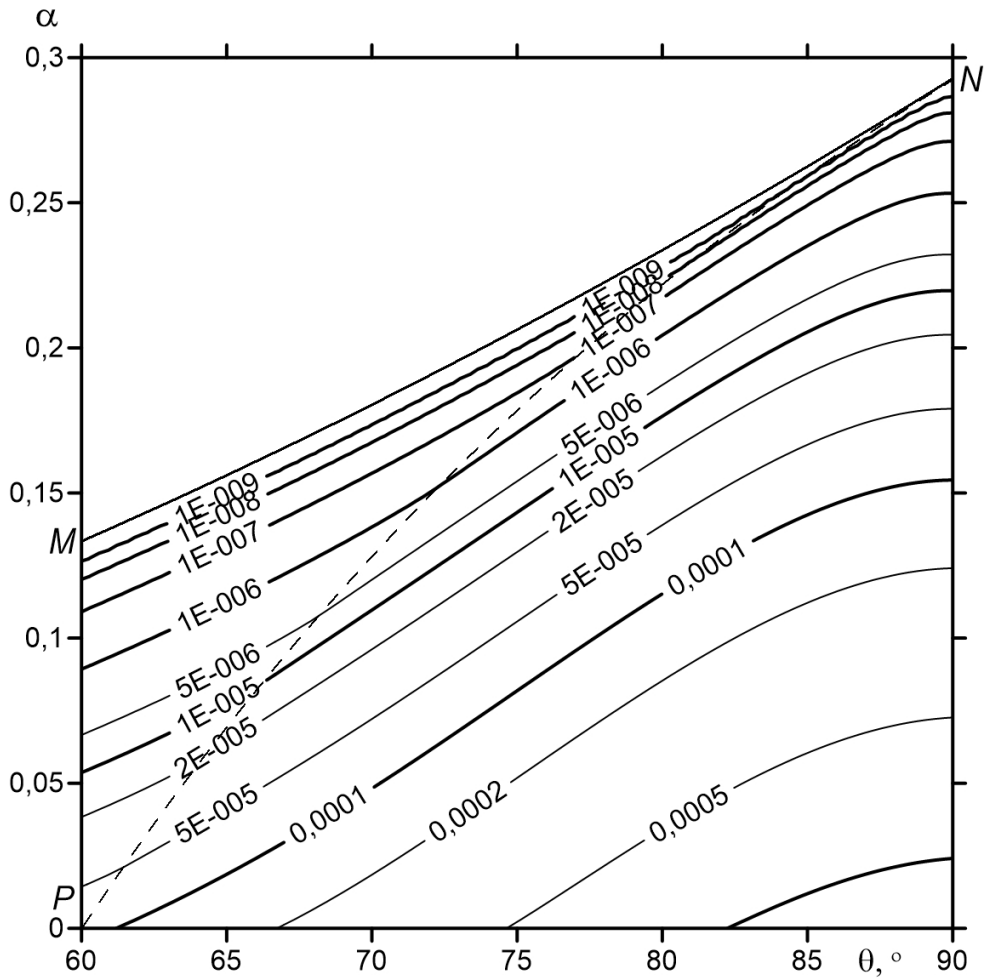


Рис. 9. Приведенная проницаемость \tilde{k} в зависимости от угла θ и степени пересечения сфер α в виде изолиний

Fig. 9. Reduced permeability \tilde{k} depending on the angle θ and spheres cross-section degree α in the form of isolines

На рис. 10 представлены те же результаты расчетов, но в зависимости от пористости при различных углах θ (рис. 10а) и параметрах α (рис. 10б). Такое представление удобно для практического применения результатов расчетов при сравнении с экспериментальными данными. Множество значений пористости и проницаемости, описываемое предложенной моделью, представляет собой двумерную область, что соответствует разбросу экспериментальных значений, полученных на керновом материале. Это обстоятельство позволяет рассчитывать на эффективное применение предложенной модели для более точного описания свойств горных пород.

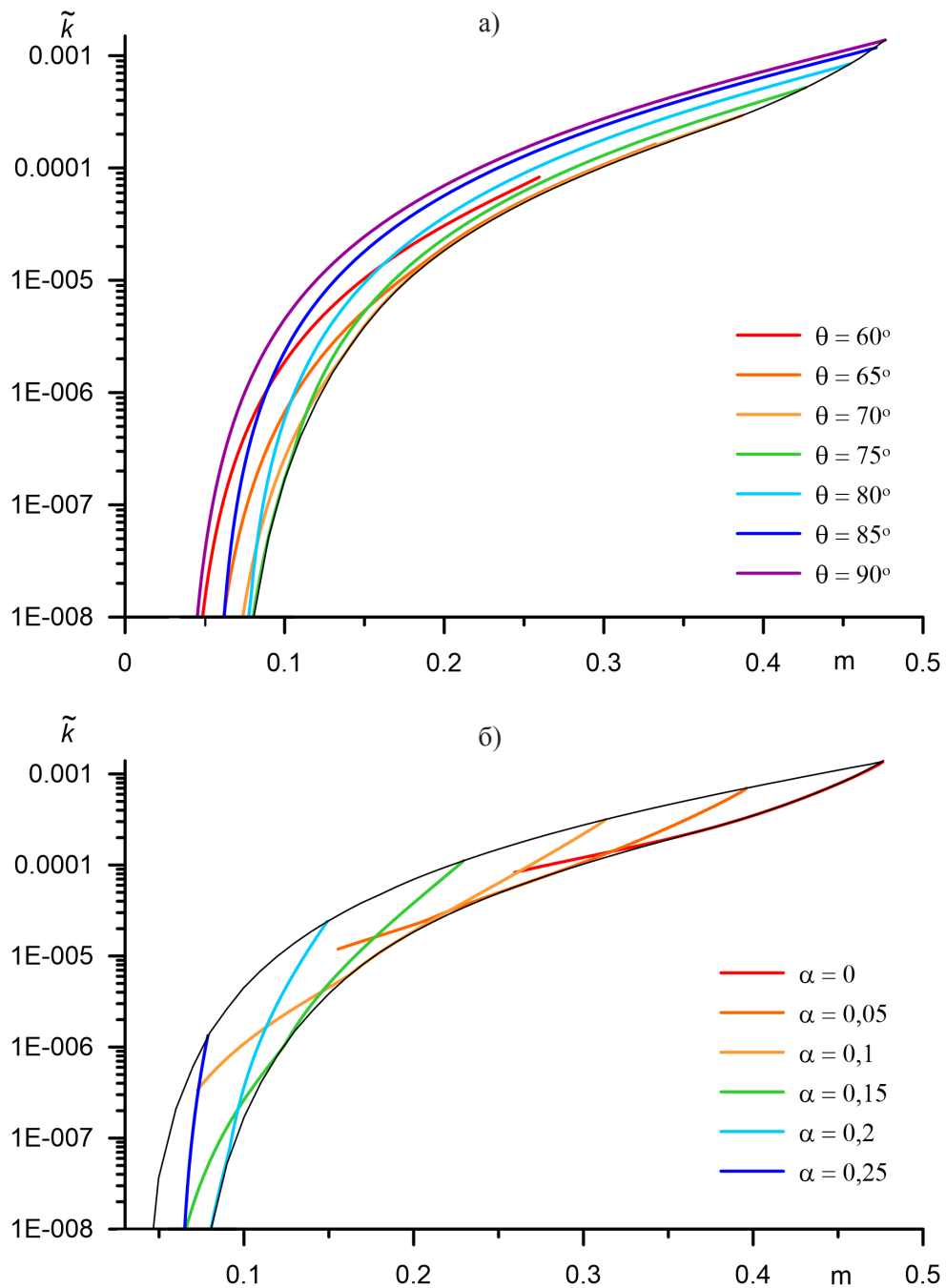


Рис. 10. Приведенная проницаемость \tilde{k} в зависимости от пористости при различных значениях угла θ (а) и степени пересечения сфер α (б)

Fig. 10. Reduced permeability \tilde{k} depending on the porosity with different values of the angle θ (а) and spheres cross-section degree α (б)

Выводы

Разработана трехпараметрическая модель пористой среды на основе ромбоэдрической структуры. Обобщение модели Слихтера состоит в том, что скелет пористой среды составлен из шаровых сегментов, примыкающих друг к другу. Для рассмотренной структуры аналитически получено точное значение пористости и минимальной просветности. Получены оценки проницаемости с учетом извилистости каналов. Показано, что при $\theta = 90^\circ$ значение проницаемости хорошо согласуется с соответствующим значением для кубической простой структуры, а при $\theta = 60^\circ$ — с соответствующим значением для кубической гранецентрированной структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губайдуллин А. А. Моделирование динамики капли нефти в капилляре с сужением / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. 2013. № 7. С. 71–77.
2. Губайдуллин А. А. Обобщение подхода Козени к определению проницаемости модельных пористых сред из твердых шаровых сегментов / А. А. Губайдуллин, Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 2. С. 105–120. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-105-120
3. Губайдуллин А. А. Собственные частоты продольных колебаний капли в сужении капилляра / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 2. С. 85–91.
4. Жижимонтов И. Н. Метод расчета коэффициентов пористости и проницаемости горной породы на основе кривых капиллярного давления / И. Н. Жижимонтов, А. В. Мальшаков // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 1. С. 72–81. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-1-72-81
5. Журавлев А. С. Влияние неоднородностей фильтрационно-емкостных параметров на процессы миграции и аккумуляции углеводородов в естественных геологических системах / А. С. Журавлев, Е. С. Журавлев // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 1. С. 101–109. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-1-101-109
6. Загальская Ю. Г. Геометрическая кристаллография / Ю. Г. Загальская, Г. П. Литвинская, Ю. К. Егоров-Тисменко. М.: Изд-во МГУ, 1986. 168 с.
7. Игошин Д. Е. Гидравлическое сопротивление извилистых каналов / Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник кибернетики. 2016. № 3(23). С. 8–17.
8. Игошин Д. Е. Моделирование пористой среды регулярными упаковками пересекающихся сфер / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова, П. Я. Мостовой // Вестник Тюменского государственного университета. 2014. №7. С. 34–42.
9. Игошин Д. Е. Основные фильтрационные свойства пористой среды, образованной сообщающимися осесимметричными каналами / Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова //

- Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 4(4). С. 69–79.
10. Игошин Д. Е. Проницаемость пористой среды периодической структуры с разветвляющимися каналами / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 2(2). С. 131–141.
 11. Игошин Д. Е. Численное исследование зависимости проницаемости от пористости среды, образованной каналами регулярной структуры / Д. Е. Игошин, Р. С. Сабуров // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 1(1). С. 84–90.
 12. Игошин Д. Е. Численное определение проницаемости в среде периодической структуры, образованной разветвляющимися каналами / Д. Е. Игошин // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2015. № 12. С. 30–33.
 13. Игошин Д. Е. Численные и аналитические оценки проницаемости пористой среды, образованной каналами, имеющими вращательную симметрию / Д. Е. Игошин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 3(3). С. 112–121.
 14. Ишкова З. А. Определение капиллярных свойств мелкопористой среды методом начала кристаллизации воды / З. А. Ишкова, В. С. Колунин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 1. С. 19–25. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-1-19-25
 15. Кислицын А. А. Исследование распределения пор по размерам в пористой среде с помощью ядерного магнитного резонанса / А. А. Кислицын, А. Г. Потапов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 3(3). С. 52–59.
 16. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1974. 832 с.
 17. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л. С. Лейбензон. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 244 с.
 18. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
 19. Степанов С. В. Вычислительная технология для определения функции межфазного взаимодействия на основе моделирования течения в капиллярном кластере / С. В. Степанов, А. Б. Шабаров, Г. С. Бембель // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 1. С. 63–71. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-1-63-71
 20. Шабаров А. Б. Потери давления при течении водонефтяной смеси в поровых каналах / А. Б. Шабаров, А. В. Шаталов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 2. С. 50–72. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-50-72
 21. Энергетическая стратегия России на период до 2035 года / Минэнерго России, 2015.
 22. Anderson J. D. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications. McGraw-Hill Science, 1995. 574 pp.
 23. Succi S. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Oxford University Press, 2001. 304 pp.

Dmitriy Ye. IGOSHIN¹
Nadezhda A. KHROMOVA²

**FILTRATION-CAPACITIVE PROPERTIES
OF THE PERIODIC POROUS MEDIUM
RHOMBOHEDRAL STRUCTURE
OF THE SKELETON OF THE BALL SEGMENTS¹**

¹ Cand. Sci. (Phys-Math.), Researcher,
Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical
and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS;
Assistant Professor, Department of Mathematical Modeling,
Department of Mechanics of Multiphase Systems,
Tyumen State University
igoshinde@gmail.com

² Research Engineer,
Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical
and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS
khromova.n.a@gmail.com

Abstract

In the previous works the authors considered two-parameter models of periodic porous media. The unit cell size and a dimensionless parameter — the degree of the intersection of spheres — act as model parameters. In such models the porosity of the material is connected one-to-one with the permeability for a fixed unit cell size, i. e. graphically many points of the medium in the axes “porosity-permeability” are located on the curve. However, in real earth material the experimental values of porosity and permeability are located in these axes in a “cloud” even for a single lithology type material taken from a single well. In this regard, it is essential to develop a three-parameter model porous medium, for which the region values

¹ The study has been carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research in terms of the project no 16-29-15119.

Citation: Igoshin D. Ye., Khromova N. A. 2016. “Filtration-Capacitive Properties of the Periodic Porous Medium Rhombohedral Structure of the Skeleton of the Ball Segments”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 3, pp. 107-127.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-107-127

of the permeability will match better the experimental data. The aim of this article is the development of the previously reviewed models in the event of a broadcast angle different from a right angle. The model periodic structure based on the rhombohedral lattice system is considered as an example. For the described structure exact porosity and minimal luminal are obtained analytically. Permeability estimation is obtained taking into account the sinuous channels. It is shown that when $\theta = 90^\circ$ permeability value agrees well with the corresponding value for the cubic simple structure, and at $\theta = 60^\circ$ — with the appropriate value for the face-centered cubic structure.

Keywords

Porous medium, luminal, porosity, permeability, periodic structure, perfect soil, fictitious soil, spherical segment, rhombohedral cell, sinuosity.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-107-127

REFERENCES

1. Anderson J. D. 1995. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill Science.
2. Gubaidullin A. A., Igoshin D. Ye., Khromova N. A. 2016. “Obobshchenie podkhoda Kozeni k opredeleniyu pronitsaemosti modelnykh poristyykh sred iz tverdykh sharovykh segmentov” [The Generalization of the Kozeny Approach to Determining the Permeability of the Model Porous Media Made of Solid Spherical Segments]. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, vol. 2, no 2, pp. 105–120. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-105-120
3. Gubaydullin A. A., Maksimov A. Yu. 2013. “Modelirovanie dinamiki kapli nefi v kapillyare s suzheniem” [Modeling the Dynamics of the Oil Droplets in the Capillary with the Restriction]. *Tyumen State University Herald*, no 7, pp. 71–77.
4. Gubaydullin A. A., Maksimov A. Yu. 2015. “Sobstvennye chastoty prodolnykh kolebaniy kapli v suzhenii kapillyara” [Natural Frequencies of Longitudinal Oscillations of a Droplet in the Constriction of the Capillary Tube]. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, vol. 1, no 2, pp. 85–91.
5. Igoshin D. Ye. 2015. “Chislennoe opredelenie pronitsaemosti v srede periodicheskoy struktury, obrazovannoy razvetvlyayushchimisya kanalami” [Numerical Determination of Permeability in the Medium with a Periodic Structure Formed by Branching Channels]. *Avtomatizatsiya, telemekhanizatsiya i svyaz v neftyanoi promyshlennosti*, no 12, pp. 30–33.
6. Igoshin D. Ye., Khromova N. A. 2015. “Osnovnye filtratsionnye svoystva poristoy sredy, obrazovannoy soobshchayushchimisya osesimmetrichnymi kanalami” [Main Filtration Properties of the Porous Medium Formed Communicating Axially Symmetric Channels]. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, vol. 1, no 4, pp. 69–79.
7. Igoshin D. Ye., Khromova N. A. 2016. “Gidravlichesкое soprotivlenie izvilistykh kanalov” [Hydraulic Resistance of Tortuous Channels]. *Proceedings in Cybernetics*, no 3(23), pp. 8–17.

8. Igoshin D. Ye., Maksimov A. Yu. 2015. "Chislennyye i analiticheskiye otsenki pronitsaemosti poristoy sredy, obrazovannoy kanalami, imeyushchimi vrashchatelnuyu simmetriyu" [Numerical and Analytical Assessment of the Permeability of a Porous Medium Formed by Channels Having Rotational Symmetry]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 3, pp. 112–121.
9. Igoshin D. Ye., Nikonova O. A. 2015. "Pronitsaemost poristoy sredy periodicheskoy struktury s razvetvlyayushchimisya kanalami" [Permeability of the Porous Medium Periodic Structure with Branching Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 2, pp. 131–141.
10. Igoshin D. Ye., Nikonova O. A., Mostovoy P. Ya. 2014. "Modelirovaniye poristoy sredy regulyarnymi upakovkami peresekayushchikhsya sfer" [Modeling Porous Medium Regular Packages Intersecting Spheres]. Tyumen State University Herald, no 7, pp. 34–42.
11. Igoshin D. Ye., Saburov R. S. 2015. "Chislennoe issledovanie zavisimosti pronitsaemosti ot poristoy sredy, obrazovannoy kanalami regulyarnoy struktury" [Numerical Study Depending on the Permeability of the Porous Medium, Formed a Regular Structure of Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 1, pp. 84–90.
12. Ishkova Z. A., Kolunin V. S. 2016. "Opreddenie kapillyarnykh svoystv melkoporistoy sredy metodom nachala kristallizatsii vody" [The Determination of Capillary Properties of Finely Porous Medium by the Water Crystallization Onset]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 1, pp. 19–25. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-1-19-25
13. Kislicyn A. A., Potapov A. G. 2015. "Issledovanie raspredeleniya por po razmeram v poristoy srede s pomoshhyu yadernogo magnitnogo rezonansa" [Study of Pore Size Distribution in Porous Medium by Nuclear Magnetic Resonance]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 3, pp. 52–59.
14. Korn G., Korn T. 1974. Spravochnik po matematike [Mathematical Handbook]. Moscow: Nauka.
15. Leybenzon L. S. 1947. Dvizhenie prirodnykh zhidkostey i gazov v poristoy srede [Movement of Natural Fluids in Porous Media]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury.
16. Loytsyanskiy L. G. 2003. Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of Liquid and Gas]. Moscow: Drofa.
17. Ministry of Energy of Russia. 2015. "Energeticheskaya strategiya Rossii na period do 2035 goda" [Energy Strategy of Russia for the period to 2035].
18. Shabarov A. B., Shatalov A. V. 2016. "Poteri davleniya pri techenii vodoneftyanoy smesi v porovykh kanalakh" [Pressure Drops in Water-Oil Mixture Flow in Porous Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 2, pp. 50–72. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-50-72
19. Stepanov S. V., Shabarov A. B., Bembel G. S. 2016. "Vychislitel'naya tehnologiya dlya opredeleniya funktsii mezhfaznogo vzaimodeystviya na osnove modelirovaniya techeniya v kapillyarnom klustere" [Computer Technology for Determination of Interphase Interaction Function Based on Flow Simulation in Capillary Cluster].

- Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 1, pp. 63–71. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-1-63-71
20. Succi S. 2001. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press.
 21. Zagalskaya Y. G., Litvinskaya G. P., Egorov-Tismenko Y. K. 1986. *Geometricheskaya kristallografiya* [Geometrical crystallography]. Moscow: MGU.
 22. Zhizhimontov I. N., Malshakov A. V. 2016. “Metod rascheta koeffitsientov poristosti i pronicaemosti gornoy porody na osnove krivyh kapillyarnogo davleniya” [The Method of Determining the Coefficients of Porosity and Permeability of the Rock on the Basis of Capillary Pressure Curves]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 1, pp. 72–81. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-1-72-81
 23. Zhuravlev A. S., Zhuravlev E. S. 2016. “Vliyanie neodnorodnostey filtracionno-emkostnykh parametrov na processy migratsii i akkumulyatsii uglevodorodov v estestvennykh geologicheskikh sistemah” [The Heterogeneity Effect of Reservoir Properties on Migration and Accumulation of Hydrocarbons in Natural Geological Systems]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 1, pp. 101–109. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-1-101-109