

## **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ**

**Алексей Сергеевич ГУБКИН<sup>1</sup>**  
**Дмитрий Евгеньевич ИГОШИН<sup>2</sup>**  
**Дмитрий Владимирович ТРАПЕЗНИКОВ<sup>3</sup>**

УДК 532.5

### **ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ДВУМЕРНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ СО СКЕЛЕТОМ ИЗ СЛУЧАЙНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ДИСКОВ<sup>1</sup>**

- <sup>1</sup> младший научный сотрудник, Тюменский филиал  
Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН;  
старший преподаватель кафедры механики многофазных систем,  
Тюменский государственный университет  
alexshstil@gmail.com
- <sup>2</sup> кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Тюменский филиал  
Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН;  
доцент кафедры математического моделирования  
и кафедры механики многофазных систем,  
Тюменский государственный университет  
igoshinde@gmail.com
- <sup>3</sup> студент 2 курса магистратуры Физико-технического института,  
Тюменский государственный университет  
d.man7xl@gmail.com

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-29-15119.

---

**Цитирование:** Губкин А. С. Численный расчет проницаемости в двумерной пористой среде со скелетом из случайно расположенных пересекающихся дисков / А. С. Губкин, Д. Е. Игошин, Д. В. Трапезников // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 4. С. 54-68. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-4-54-68

---

**Аннотация**

В работе предложена двумерная модель пористой среды со случайными микро-неоднородностями. Приведены примеры численного расчета однофазного течения ньютоновской жидкости через модельную пористую среду. По результатам расчетов на основе уравнения Дарси найдены коэффициенты абсолютной проницаемости в продольном и поперечном направлениях. Принцип построения скелета среды состоит в том, что на область в виде прямоугольника со сторонами  $L_x$  и  $L_y$  случайным образом набрасываются диски со случайными радиусами из диапазона от  $R_{min}$  до  $R_{max}$ . Алгоритм включает в себя два модельных параметра:  $\delta_{in}$  и  $\delta_{out}$ , задающих минимальное наложение перекрывающихся дисков и минимальное расстояние между неперекрывающимися дисками. Таким образом, скелет пористой среды формировался до достижения наперед заданного значения пористости. Далее поровое пространство получено путем процедуры вычитания скелета из рассматриваемой области. Геометрия задачи и расчетная сетка построены в открытом пакете Salome, численное решение системы уравнений Навье-Стокса при заданном перепаде давления на границах рассмотренной области проведено в открытом пакете OpenFOAM. Отличие найденных значений коэффициентов абсолютной проницаемости в продольном и поперечном направлениях не более чем в полтора раза говорит о том, что объем расчетной области близок к представительному.

**Ключевые слова**

Пористая среда, пористость, проницаемость, фильтрация, случайная структура, микро-неоднородность, моделирование, вычислительная гидродинамика, цифровой керн, закон Дарси, OpenFOAM, Salome, paraView.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-4-54-68

**Введение**

Течение флюидов через пористые среды имеет важное практическое значение в различных отраслях промышленности. Понимание фильтрационных процессов необходимо в технологии городского строительства при использовании различных методов и средств защиты от подтопления [25] и в химической технологии для увеличения скорости каталитических реакций в пористых мембранах [19]; оно также позволяет улучшить технологические показатели фильтрующих элементов и повысить эффективность методов извлечения нефти и газа [21]. В связи с этим развиваются экспериментальные методы определения свободного объема в материалах с внутренней структурой [31]. Определяющая роль микроструктуры дисперсных систем в формировании их объемно-реологических свойств показана в [27]. Все чаще свойства микроструктуры пористых сред экспериментально определяют методами ЯМР-томографии [16; 18]. Однако экспериментальное изучение свойств пористых сред, составляющих горные породы, связано с большими временными затратами (до года), дороговизной исследований и приборов [2]. В последние годы в связи с увеличением доли трудноизвлекаемых запасов нефти

в общей добыче [30] растет интерес к развитию математических моделей, описывающих фильтрационные процессы в пористой среде.

В настоящее время основным математическим инструментом для описания процесса течения флюида через пористую среду являются осредненные модели на основе дифференциальных уравнений в частных производных, записанных относительно насыщенностей и давлений [1]. Следует отметить, что на макроуровне фильтрационно-емкостные параметры пористых сред существенно неоднородны. Численное исследование влияния этих неоднородностей на процессы миграции и аккумуляции нефти проведено в [7] применительно к двумерному модельному геологическому объекту. Повышение эффективности моделирования фильтрационных процессов неразрывно связано с учетом микроструктуры пористой среды, что позволяет выявить многие динамические эффекты, не видимые на осредненных моделях.

Существует несколько способов представления пористой среды. Поровое пространство можно представить, как регулярными, так и нерегулярными или стохастическими структурами [23; 29]. Математические модели для статистического определения механических свойств пористых материалов разработаны в [24]. Первыми моделями были регулярные модели идеального грунта, состоящего из параллельных цилиндрических капилляров и фиктивного грунта, состоящего из одинаковых шаровых частиц. В [20] описан метод Козени, позволяющий перейти от фиктивного грунта к идеальному. Обобщением модели идеального грунта является модель, состоящая из осесимметричных каналов [3; 5; 10] либо каналов, имеющих вращательную симметрию [15]. Модель, составленная из примыкающих друг к другу шаровых сегментов [9; 11; 12], обобщает модель фиктивного грунта. Обобщение подхода Козени на случай грунта, составленного из шаровых сегментов, проведено в [4]. Там же приведены примеры расчетов для структур, описанных в [9; 11].

При стохастическом описании пористой среды используются сетевые модели, в которых поры представлены телами простой формы, располагающимися в пространстве произвольно и соединены трубочками между собой. Это позволяет свести гидродинамическую задачу к гидравлической и описать течение флюида в масштабе нескольких тысяч пор. При этом алгоритм построения порового пространства сетевой стохастической модели должен учитывать измеряемые физические параметры воспроизводимой пористой среды: например, кривые капиллярного давления, снятые с керна [6]. С помощью предложенной в [26] сетевой кластерной модели пористой среды разработана методика расчета потерь давления при течении водонефтяной смеси в поровых каналах [28]. Существуют также перколяционные модели описания порового пространства [17]. В таких системах анализ капиллярных явлений проводят на основе определения фрактальной размерности объектов [22].

При описании течения флюидов в пористой среде широкое распространение получили методы вычислительной гидродинамики, которые сводятся либо к прямому интегрированию уравнений Навье–Стокса [32], либо к моделированию

потока ньютоновской жидкости дискретным кинетическим уравнением Больцмана [33]. Используя неструктурированные вычислительные сетки и метод конечных элементов (МКЭ) или метод контрольных объемов (МКО), стало возможным моделировать течение флюидов на уровне пор. В [13; 14] проведено численное определение проницаемости периодических структур, описанных в [9; 11], с помощью открытого пакета прямого гидродинамического моделирования, использующего метод конечного объема.

Один из путей получения представительного объема пористой среды — создание порового пространства из элементов в виде случайных неоднородностей с заданным набором легко измеряемых свойств (пористость, гранулометрический состав). В данной статье предложен алгоритм построения цифровой двумерной модели порового пространства, приведен пример расчета однофазного стационарного течения вязкой жидкости в ней. По результатам численного решения системы уравнений Навье-Стокса определен коэффициент проницаемости в продольном и поперечном направлениях.

### Плоская стохастическая модель пористой среды

Скелет плоской пористой ячейки сформирован с помощью специального алгоритма (рис. 1), в рамках которого в прямоугольной области размером  $L_x \times L_y$  (рис. 2) случайным образом размещаются диски с координатами центра  $(x_i, y_i)$  и случайным радиусом  $i$ -го диска из диапазона значений  $R_i \in [R_{min}, R_{max}]$ . В процессе работы алгоритма отбираются те диски, координаты центров  $(x_i, y_i)$  и радиусы  $R_i$  которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} (R_i + R_j) - d_{ij} = \Delta_{in,ij} \geq \delta_{in} \geq 0, \\ d_{ij} - (R_i + R_j) = \Delta_{out,ij} \geq \delta_{out} \geq 0, \end{cases} \quad j \in [1, i - 1]. \quad (1)$$

Первое условие соответствует пересекающимся дискам, второе — непересекающимся, индекс  $j$  пробегает все уже имеющиеся на плоскости диски.

Алгоритм размещает диски, пока значение пористости не достигнет наперед заданной величины  $\phi_0$ . Поровый объем получается вычитанием геометрической фигуры, состоящей из множества отобранных дисков (скелет), из прямоуголь-

<b>Исходные параметры:</b> $L_x, L_y, \phi_0, R_{min}, R_{max}, \delta_{in}, \delta_{out}$ .	
<b>Результат:</b> Плоская модель пористой среды.	
1	до тех пор, пока $\phi > \phi_0$ <b>выполнять</b>
2	назначить параметры $x_i, y_i, R_i$ ;
3	<b>если условие (1) верно, тогда</b>
4	получить промежуточный скелет пористой среды;
5	вычислить текущую пористость $\phi$ ;
6	<b>иначе</b>
7	перейти к назначению параметров $x_i, y_i, R_i$ ;
8	<b>конец</b>
9	<b>конец</b>

Рис. 1. Алгоритм построения плоского скелета

Fig. 1. The algorithm for constructing a flat skeleton

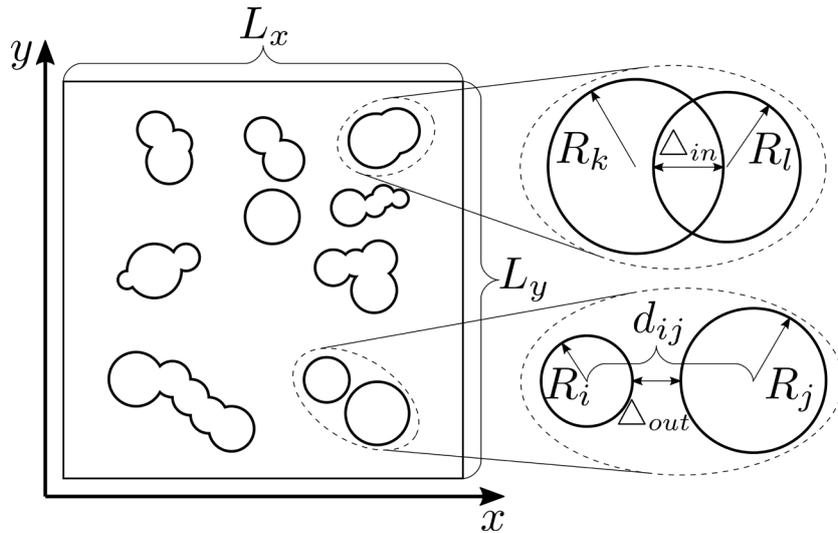


Рис. 2. Схема расположения дисков в расчетной области. Справа показаны случаи пересекающихся и непересекающихся дисков

Fig. 2. The scheme of disks' disposition in the calculation area. On the right: the cases of overlapping and non-overlapping disks

ника размером  $L_x \times L_y$ . Далее производится отсев замкнутых пор. Затем строится треугольная призматическая вычислительная сетка (рис. 3) высотой  $h$ . Как видно из рисунка, поровые каналы имеют высокую извилистость, которая сказывается на их гидравлическом сопротивлении [8].

### Математическая модель

В каналах построенной пористой среды проведено численное моделирование плоского ламинарного течения несжимаемой однородной линейно-вязкой жидкости. Использована система уравнений Навье-Стокса в стационарной постановке:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \\ (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \mu \Delta \vec{v}, \end{aligned} \quad (2)$$

с граничными условиями, соответствующими прилипанию на поверхности скелета, непротеканию на боковой поверхности и заданному давлению на входе и выходе:

вход	$\frac{d\vec{v}}{dn} = 0, \quad p = p_{in},$	(3)
выход	$\frac{d\vec{v}}{dn} = 0, \quad p = p_{out},$	
поверхность скелета	$v = 0, \quad \frac{dp}{dn} = 0,$	
боковая поверхность	$v_n = 0, \quad \frac{dp}{dn} = 0.$	

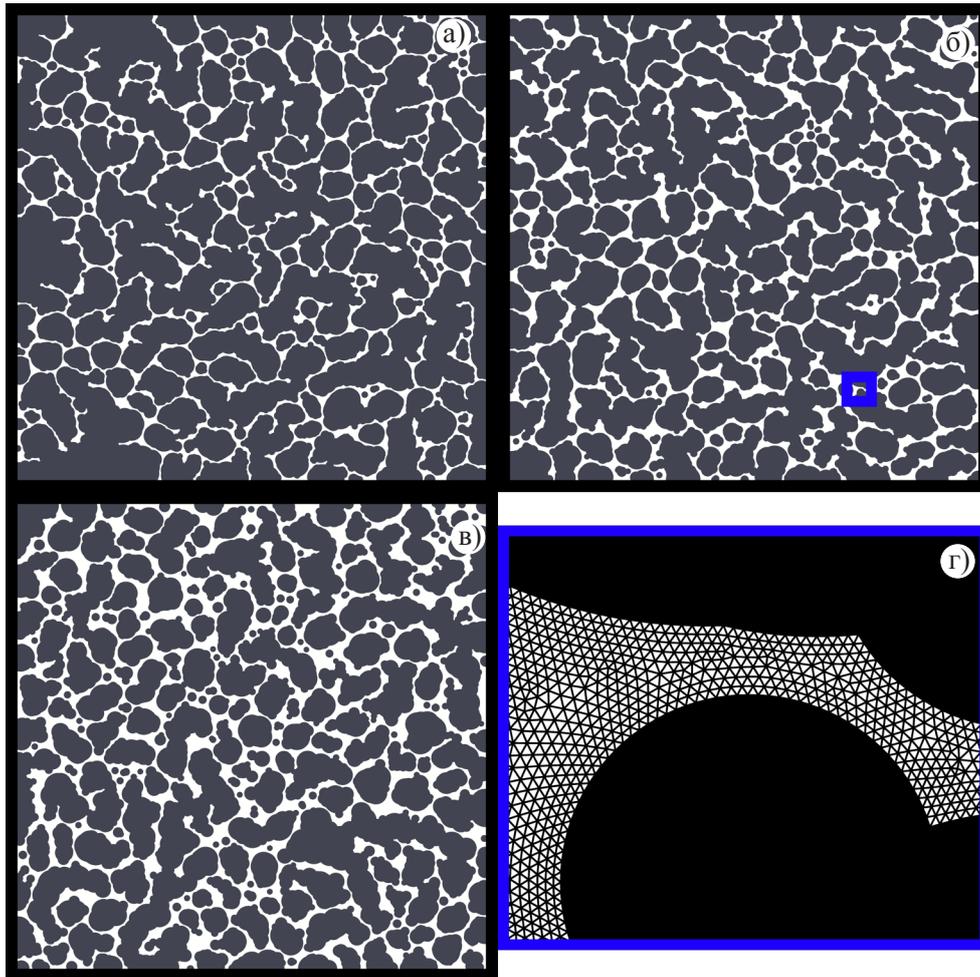


Рис. 3. Расчетные области при  $\phi_0 = 15\%$  (а),  $\phi_0 = 20\%$  (б) и  $\phi_0 = 25\%$  (в), участок сетки с области (б) под увеличением (г)

Fig. 3. The calculation areas at  $\phi_0 = 15\%$  (а),  $\phi_0 = 20\%$  (б) и  $\phi_0 = 25\%$  (в), the net section of the area (б) in zoom (г)

Для численного решения системы (2) применен стандартный решатель simpleFoam открытого и свободно распространяемого пакета OpenFOAM. В simpleFoam дискретизация системы (2) выполнена по методу контрольного объема. Для связи полей скорости и давления использована процедура SIMPLE. Для аппроксимации конвективных членов системы уравнений (2) использована линейная интерполяция с ограничителем наклона vanLeer. Диффузионные члены аппроксимированы по схеме 2-го порядка с неортогональной коррекцией.

Фильтрация флюида через пористую среду в направлении оси  $Ox$  описывается уравнением Дарси

$$u_x = \frac{k_x \Delta p}{\mu L_x}, \quad (4)$$

где  $\Delta p = p_1 - p_2$  — перепад давления,  $L_x$  — протяженность,  $k_x$  — проницаемость среды в направлении оси  $Ox$ ,  $\mu$  — динамическая вязкость флюида.

Скорость одномерной фильтрации в направлении оси  $Ox$ :

$$u_x = \frac{Q_x}{S_x} = \frac{Q_x}{L_y h} \quad (5)$$

где  $Q_x$  — объемный расход флюида через поперечное сечение среды площадью  $S_x$ . Определяя расход по результатам численного решения системы (2)–(3), из (4)–(5) найдем проницаемость рассмотренной среды. Рассуждая аналогично, приведем также выражение для проницаемости среды вдоль оси  $Oy$ :

$$k_x = \frac{L_x}{L_y} \frac{\mu Q_x}{h(p_{in} - p_{out})}, \quad k_y = \frac{L_y}{L_x} \frac{\mu Q_y}{h(p_{in} - p_{out})} \quad (6)$$

### Результаты

В расчетах были приняты следующие значения геометрических параметров:  $L_x = L_y = L = 10^{-3}$  м,  $h = 10^{-5}$  м,  $R_{min} = 6 \cdot 10^{-6}$  м,  $R_{max} = 3 \cdot 10^{-5}$  м,  $\delta_{in} = 3 \cdot 10^{-6}$  м,  $\delta_{out} = 2,4 \cdot 10^{-6}$  м. Параметры жидкости:  $\mu = 10^{-3}$  Па·с,  $\rho = 1\,000$  кг/м<sup>3</sup>. Расчеты выполнены для трех значений пористости  $\phi_0$ : 15, 20 и 25 % (рис. 3). Давление на входе  $p_{in} = 1$  Па, давление на выходе  $p_{out} = 0$  Па.

С учетом приведенных параметров численное значение коэффициента проницаемости (6) в системе СИ принимает следующий вид:

$$k = 10^2 \cdot Q. \quad (7)$$

На рис. 4 показаны поля скорости и давления для продольного и поперечного направлений основного течения. Из рисунка видно, что значительная часть каналов заканчивается тупиками, что приводит к неоднородной картине течения с ярко выраженной канальной структурой. Можно предположить, что обобщение предложенной модели на трехмерный случай позволит получить проницаемые среды при существенно меньших значениях пористости.

Значения коэффициента проницаемости, рассчитанные по соотношению (6), приведены в таблице 1. Отличие полученных значений проницаемости в продольном и поперечном направлениях составляет 9,5%, 41,6% и 6,0% соответственно. Этот факт говорит о том, что объем расчетной области близок к представительному объему, но несколько меньше его.

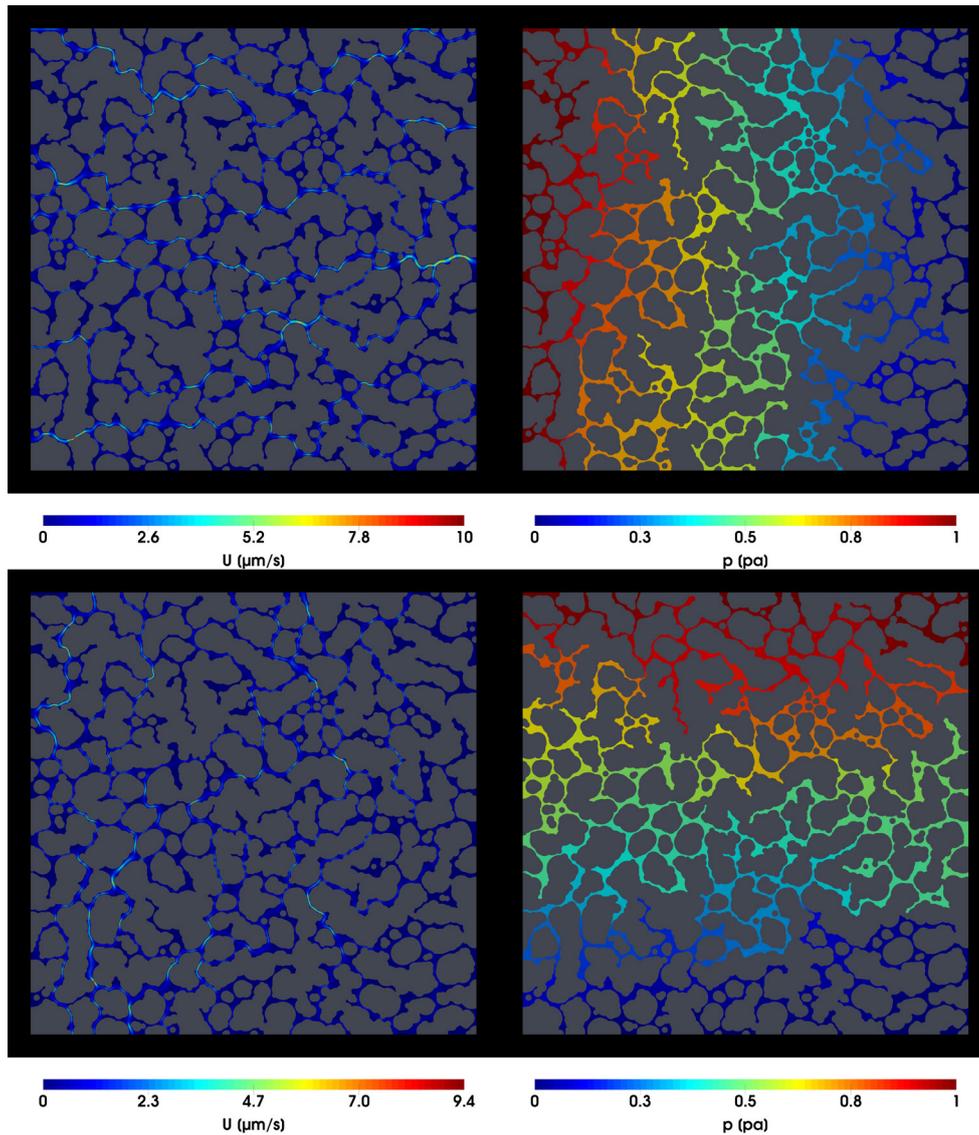
Таблица 1

Проницаемость

Table 1

Permeability

$\phi_0$	15%	20%	25%
$k_x, 10^{-12} \text{ м}^2$	35,68	96,29	150,41
$k_y, 10^{-12} \text{ м}^2$	32,57	68,00	159,38
$\varepsilon, \%$	9,5	41,6	6,0



*Рис. 4.* Поля скорости (слева) и давления (справа) для течения вдоль оси  $Ox$  (сверху) и вдоль оси  $Oy$  (снизу) при  $\phi_0 = 20\%$

*Fig. 4.* The velocity (left) and pressure (right) fields for the current along the  $Ox$  axis (above) and along the  $Oy$  axis (below) with  $\phi_0 = 20\%$

### Выводы

В работе предложен алгоритм построения двумерной пористой среды, скелет которой составлен из случайно расположенных пересекающихся дисков. Для построенной модельной среды приведены примеры численного расчета однофазного течения ньютоновской жидкости в продольном и поперечном направлениях. По результатам расчетов на основе уравнения Дарси найдены коэффи-

циенты абсолютной проницаемости. Для модельных сред с тестовыми пористостями 15%, 20% и 25% отличие полученных значений проницаемости в продольном и поперечном направлениях составляет 9,5%, 41,6% и 6,0% соответственно. Этот факт говорит о том, что объем расчетной области близок к представительному, но несколько меньше его.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. 2004.
2. Алтунина Л. К. Физико-химические методы увеличения нефтеотдачи пластов нефтяных месторождений / Л. К. Алтунина, В. А. Кувшинов // Успехи химии. 2007. Том 76. № 10. С. 1034-1052.
3. Губайдуллин А. А. Моделирование динамики капли нефти в капилляре с сужением / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. 2013. № 7. С. 71-77.
4. Губайдуллин А. А. Обобщение подхода Козени к определению проницаемости модельных пористых сред из твердых шаровых сегментов / А. А. Губайдуллин, Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 2. С. 105-120.
5. Губайдуллин А. А. Собственные частоты продольных колебаний капли в сужении капилляра / А. А. Губайдуллин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 2. С. 85-91.
6. Жижимонтов И. Н. Метод расчета коэффициентов пористости и проницаемости горной породы на основе кривых капиллярного давления / И. Н. Жижимонтов, А. В. Мальшаков // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 1. С. 72-81.
7. Журавлев А. С. Влияние неоднородностей фильтрационно-емкостных параметров на процессы миграции и аккумуляции углеводородов в естественных геологических системах / А. С. Журавлев, Е. С. Журавлев // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 1. С. 101-109.
8. Игошин Д. Е. Гидравлическое сопротивление извилистых каналов / Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник кибернетики. 2016. № 3(23). С. 8-17.
9. Игошин Д. Е. Моделирование пористой среды регулярными упаковками пересекающихся сфер / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова, П. Я. Мостовой // Вестник Тюменского государственного университета. 2014. №7. С. 34-42.
10. Игошин Д. Е. Основные фильтрационные свойства пористой среды, образованной сообщающимися осесимметричными каналами / Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 4(4). С. 69-79.
11. Игошин Д. Е. Проницаемость пористой среды периодической структуры с разветвляющимися каналами / Д. Е. Игошин, О. А. Никонова // Вестник

- Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 2(2). С. 131-141.
12. Игошин Д. Е. Фильтрационно-емкостные свойства периодической среды ромбоэдрической структуры со скелетом из шаровых сегментов / Д. Е. Игошин, Н. А. Хромова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 3. С. 107-127.
  13. Игошин Д. Е. Численное исследование зависимости проницаемости от пористости среды, образованной каналами регулярной структуры / Д. Е. Игошин, Р. С. Сабуров // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 1(1). С. 84-90.
  14. Игошин Д. Е. Численное определение проницаемости в среде периодической структуры, образованной разветвляющимися каналами / Д. Е. Игошин // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2015. № 12. С. 30-33.
  15. Игошин Д. Е. Численные и аналитические оценки проницаемости пористой среды, образованной каналами, имеющими вращательную симметрию / Д. Е. Игошин, А. Ю. Максимов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 3(3). С. 112-121.
  16. Ишкова З. А. Определение капиллярных свойств мелкопористой среды методом начала кристаллизации воды / З. А. Ишкова, В. С. Колунин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 1. С. 19–25.
  17. Кадет В. В. Методы теории перколяции в подземной гидромеханике / В. В. Кадет. М.: Изд-во ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. 96 с.
  18. Кислицын А. А. Исследование распределения пор по размерам в пористой среде с помощью ядерного магнитного резонанса / А. А. Кислицын, А. Г. Потапов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 3(3). С. 52–59.
  19. Курчатov И.М. Природа анизотропии проницаемости и каталитической активности / И. М. Курчатov, Н. И. Лагунцов, М. В. Цодиков, А. С. Федотов, И. И. Моисеев // Кинетика и катализ. 2008. Том 49. № 1. С. 129-134.9
  20. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л. С. Лейбензон. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 244 с.
  21. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 640 с.
  22. Ролдугин В. И. Свойства фрактальных дисперсных систем / В. И. Ролдугин // Успехи химии. 2003. Том 72. № 11. С. 1027-1054.
  23. Ромм Е. С. Структурные модели порового пространства горных пород / Е. С. Ромм. Л.: Недра, 1985. 240 с.
  24. Сидняев Н. И. Численное моделирование получения проницаемых порошковых материалов формирующихся при спекании / Н. И. Сидняев // Механика композиционных материалов и конструкций. 2004. Том 10. № 1. С. 93-107.

25. Сологаев В. И. Фильтрационные расчеты и компьютерное моделирование при защите от подтопления в городском строительстве / В. И. Сологаев // Монография. Омск, 2002.
26. Степанов С. В. Вычислительная технология для определения функции межфазного взаимодействия на основе моделирования течения в капиллярном кластере / С. В. Степанов, А. Б. Шабаров, Г. С. Бембель // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 1. С. 63-71.
27. Урьев Н. Б. Моделирование динамического состояния дисперсных систем / Н. Б. Урьев, И. В. Кучин // Успехи химии. 2006. Том 75. № 1. С. 36-63.
28. Шабаров А. Б. Потери давления при течении водонефтяной смеси в поровых каналах / А. Б. Шабаров, А. В. Шаталов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 2. С. 50-72.
29. Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред / М. И. Швидлер. М.: Недра, 1985. 288 с.
30. Энергетическая стратегия России на период до 2035 года / Минэнерго России, 2015.
31. Ямпольский Ю. П. Методы изучения свободного объема в полимерах / Ю. П. Ямпольский // Успехи химии. 2007. Том 76. № 1. С. 66-87.
32. Anderson J. D. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications / J. D. Anderson. McGraw-Hill Science, 1995. 574 pp.
33. Succi S. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond / S. Succi. Oxford University Press, 2001. 304 pp.

Aleksey S. GUBKIN<sup>1</sup>  
Dmitriy E. IGOSHIN<sup>2</sup>  
Dmitriy V. TRAPEZNIKOV<sup>3</sup>

## THE NUMERICAL CALCULATION OF PERMEABILITY IN TWO-DIMENSIONAL POROUS MEDIA WITH SKELETON OF RANDOMLY ARRANGED OVERLAPPING DISKS<sup>1</sup>

- <sup>1</sup> Junior Researcher, Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS; Senior Lecturer, Department of Mechanics of Multiphase Systems, Tyumen State University  
alexshstil@gmail.com
- <sup>2</sup> Cand. Sci. (Phys-Math.), Researcher, Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS; Assistant Professor, Department of Mathematical Modeling, Department of Mechanics of Multiphase Systems, Tyumen State University  
igoshinde@gmail.com
- <sup>3</sup> Master's Degree Student, Institute of Physics and Technology, Tyumen State University  
d.man7xl@gmail.com

### Abstract

The article presents the two-dimensional model of a porous medium with random micro-inhomogeneities and the results of numerical calculation of single-phase flow of a Newtonian fluid through a model porous medium. The results of calculations based on Darcy's equation allowed to find the absolute permeability coefficients in the longitudinal and transverse directions. The principle of the skeleton constructing the medium is that the region in the form of a rectangle with sides  $L_x$  and  $L_y$  is randomly cast with disks of random radius in the range

---

<sup>1</sup> The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research in terms of the project no 16-29-15119.

---

**Citation:** Gubkin A. S., Igoshin D. E., Trapeznikov D. V. 2016. "The Numerical Calculation of Permeability in Two-Dimensional Porous Media with Skeleton of Randomly Arranged Overlapping Disks". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 4, pp. 54-68.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-4-54-68

---

from  $R_{min}$  to  $R_{max}$ . The algorithm includes two model parameters:  $\delta_{in}$  and  $\delta_{out}$  giving the minimum imposition of overlapping disks and the minimum distance between the non-overlapping discs. Thus, the skeleton of the porous medium was formed until achieving the preassigned value of porosity. Then the pore space is obtained by subtracting the skeleton from the treated area. The geometry of the problem and the computational grid were built in open package Salome, the numerical solution of the Navier-Stokes equations for a given pressure drop at the boundaries of the area was considered in the open package OpenFOAM. The difference founded values of the absolute permeability in the longitudinal and transverse directions is no more than half which speaks of the volume of the calculated area being close to the representative.

### Keywords

Porous medium, porosity, permeability, filtration, random structure, microinhomogeneity, modeling, computational fluid dynamics, digital rock, Darcy's law, OpenFOAM, Salome, paraView.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-4-54-68

### REFERENCES

1. Altunina L. K., Kuvshinov V. A. 2007. "Fiziko-khimicheskie metody uvelicheniya nefteotdachi plastov neftyanykh mestorozhdeniy" [Physico-Chemical Methods of Enhanced Oil Recovery of Oil Deposits]. Russian Chemical Reviews, vol. 76, no 10, pp. 1034-1052.
2. Anderson J. D. 1995. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications. McGraw-Hill Science.
3. Aziz Kh., Settari E. 2004. "Matematicheskoe modelirovanie plastovykh system" [Mathematical Modeling of Reservoir Systems].
4. Gubaidullin A. A., Igoshin D. Ye., Khromova N. A. 2016. "Obobshchenie podkhoda Kozeny k opredeleniyu pronitsaemosti modelnykh poristyykh sred iz tverdykh sharovykh segmentov" [The Generalization of the Kozeny Approach to Determining the Permeability of the Model Porous Media Made of Solid Spherical Segments]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 2, pp. 105-120.
5. Gubajdullin A. A., Maksimov A. Ju. 2015. "Sobstvennyye chastoty prodolnykh kolebaniy kapli v suzhenii kapilljara" [Natural Frequencies of Longitudinal Oscillations of a Droplet in the Constriction of the Capillary Tube]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 2, pp. 85-91.
6. Gubaydullin A. A., Maksimov A. Yu. 2013. "Modelirovanie dinamiki kapli nefi v kapillyare s suzheniem" [Modeling the Dynamics of the Oil Droplets in the Capillary with the Restriction]. Tyumen State University Herald, no 7, pp. 71-77.
7. Igoshin D. E. 2015. "Chislennoe opredelenie pronitsaemosti v srede periodicheskoy struktury, obrazovannoy razvetvlyayushchimisya kanalami" [Numerical Determination of Permeability in the Medium with a Periodic Structure Formed by Branching Channels]. Avtomatizatsiya, telemekhanizatsiya i svyaz v neftyanoi promyshlennosti, no 12, pp. 30-33.
8. Igoshin D. E., Khromova N. A. 2015. "Osnovnye filtratsionnye svoystva poristoy sredy, obrazovannoy soobshchayushchimisya osesimmetrichnymi kanalami" [Main Filtration

- Properties of the Porous Medium Formed Communicating Axially Symmetric Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 4, pp. 69-79.
9. Igoshin D. Ye., Khromova N. A. 2016. "Fil'tratsionno-emkostnye svoystva periodicheskoy poristoy sredy romboedricheskoy struktury so skeletom iz sharovykh segmentov" [Filtration-Capacitive Properties of the Periodic Porous Medium Rhombohedral Structure of the Skeleton of the Ball Segments]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 3, pp. 107-127.
  10. Igoshin D. E., Khromova N. A. 2016. "Gidravlicheskie soprotivleniya izvlistykh kanalov" [Hydraulic Resistance of Tortuous Channels]. Proceedings in Cybernetics, no 3 (23), pp. 8-17.
  11. Igoshin D. E., Maksimov A. Yu. 2015. "Chislennyye i analiticheskiye otsenki pronitsaemosti poristoy sredy, obrazovannoy kanalami, imeyushchimi vrashchatelnuyu simmetriyu" [Numerical and Analytical Assessment of the Permeability of a Porous Medium Formed by Channels Having Rotational Symmetry]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 3, pp. 112-121.
  12. Igoshin D. E., Nikonova O. A. 2015. "Pronitsaemost poristoy sredy periodicheskoy struktury s razvetvlyayushchimisya kanalami" [Permeability of the Porous Medium Periodic Structure with Branching Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 2, pp. 131-141.
  13. Igoshin D. E., Nikonova O. A., Mostovoy P. Ya. 2014. "Modelirovaniye poristoy sredy regul'yarnymi upakovkami peresekayushchikh sfer" [Modeling Porous Medium Regular Packages Intersecting Spheres]. Tyumen State University Herald, no 7, pp. 34-42.
  14. Igoshin D. E., Saburov R. S. 2015. "Chislennoye issledovaniye zavisimosti pronitsaemosti ot poristoy sredy, obrazovannoy kanalami regul'yarnoy struktury" [Numerical Study Depending on the Permeability of the Porous Medium, Formed a Regular Structure of Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 1, pp. 84-90.
  15. Ishkova Z. A., Kolunin V. S. 2016. "Opredeleniye kapillyarnykh svoystv melkoporistoy sredy metodom nachala kristallizatsii vody" [The Determination of Capillary Properties of Finely Porous Medium by the Onset of Water Crystallization]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 1, pp. 19-25.
  16. Kadet V. V. 2008. "Metody teorii perkolyatsii v podzemnoy gidromekhanike" [percolation theory methods in underground fluid mechanics]. Moscow: TsentrLitNefteGaz.
  17. Kislitsyn A. A., Potapov A. G. 2015. "Issledovaniye raspredeleniya por po razmeram v poristoy srede s pomoshch'yu yadernogo magnitnogo rezonansa" [The Study of Pores Distribution According to Their Sizes in Porous Media by Nuclear Magnetic Resonance]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 3(3), pp. 52-59.
  18. Kurchatov I.M., Laguntsov N. I., Tsodikov M. V., Fedotov A. S., Moiseev I. I. 2008. "Priroda anizotropii pronitsaemosti i kataliticheskoy aktivnosti" [Nature of permeability anisotropy and catalytic activity]. Kinetics and Catalysis, vol. 49, no 1, pp. 129-134.9
  19. Leybenzon L. S. 1947. Dvizheniye prirodnykh zhidkostey i gazov v poristoy srede [Movement of Natural Fluids in Porous Media]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury.

20. Masket M. 2006. "Techenie odnorodnykh zhidkostey v poristoy srede" [The flow of homogeneous fluids in porous media]. Moscow-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy.
21. Ministry of Energy of Russia. 2015. "Energeticheskaya strategiya Rossii na period do 2035 goda" [Energy Strategy of Russia for the period to 2035].
22. Roldugin V. I. 2003. "Svoystva fraktal'nykh dispersnykh system" [Fractal Properties of Disperse Systems]. Russian Chemical Reviews, vol. 72, no 11, pp. 1027-1054.
23. Romm E. S. 1985. "Strukturnye modeli porovogo prostranstva gornykh porod" [Structural Model of the Pore Space of Rocks]. Leningrad: Nedra.
24. Shabarov A. B., Shatalov A. V. 2016. "Poteri davleniya pri techenii vodoneftjanoy smesi v porovykh kanalakh" [Pressure Drops in Water-Oil Mixture Flow in Porous Channels]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 2, pp. 50-72.
25. Shvidler M. I. 1985. "Statisticheskaya gidrodinamika poristykh sred" [Statistical Hydrodynamics of Porous Media]. Moscow: Nedra.
26. Sidnyaev N. I., 2004. "Chislennoe modelirovanie polucheniya pronitsaemykh poroshkovykh materialov formiruyushchikhsya pri spekanii" [Numerical Simulation of Producing Permeable Powder Material Formed by Sintering]. Journal on Composite Mechanics and Design, vol. 10, no 1, pp. 93-107.
27. Sologaev V. I. 2002. "Fil'tratsionnye raschety i komp'yuternoe modelirovanie pri zashchite ot podtopleniya v gorodskom stroitel'stve" [Filtration Calculations and Computer Modeling in the Protection against Flooding in Urban Construction]. Omsk.
28. Stepanov S. V., Shabarov A. B., Bembel G. S. 2016. "Vychislitel'naya tehnologiya dlja opredeleniya funktsii mezhfaznogo vzaimodejstviya na osnove modelirovaniya techeniya v kapilljarnom klustere" [Computer Technology for Determination of Interphase Interaction Function Based on Flow Simulation in Capillary Cluster]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 1, pp. 63-71.
29. Succi S. 2001. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Oxford University Press.
30. Uryev N. B., Kuchin I. V. 2006. "Modelirovanie dinamicheskogo sostoyaniya dispersnykh system" [Modeling of the Dynamic State of Disperse Systems]. Russian Chemical Reviews, vol. 75, no 1, pp. 36-63.
31. Yampol'skiy Yu. 2007. P. "Metody izucheniya svobodnogo ob'ema v polimerakh" [Methods of Study of the Free Volume in Polymers]. Russian Chemical Reviews, vol. 76, no 1, pp. 66-87.
32. Zhizhimontov I. N., Malshakov A. V. 2016. "Metod rascheta koefitsientov poristosti i pronicaemosti gornoj porody na osnove krivykh kapilljarnogo davleniya" [The Method of Determining the Coefficients of Porosity and Permeability of the Rock on the Basis of Capillary Pressure Curves]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 1, pp. 72-81.
33. Zhuravlev A. S., Zhuravlev E. S. 2016. "Vlijanie neodnorodnostej filtratsionno-emkostnykh parametrov na processy migratsii i akkumuljatsii uglevodorodov v estestvennykh geologicheskikh sistemah" [The Heterogeneity Effect of Reservoir Properties on Migration and Accumulation of Hydrocarbons in Natural Geological Systems]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 1, pp. 101-109.