Вадим Викторович ТАРАСОВ[1]

УДК 536-34

ВЫВОД РАСЧЕТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В РЕЗЕРВУАРЕ ПОСТОЯННОГО ОБЪЕМА ПРИ ЕГО АДИАБАТИЧЕСКОМ ИСТЕЧЕНИИ

[1] кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной графики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
midav-5491@mail.ru

Аннотация

Расчет истечения газов из резервуара конечного объема является актуальной инженерной задачей. В общем случае, когда рассматривается истечение реального газа с учетом внешнего теплообмена и переменности коэффициента расхода выходного насадка, решить такую задачу трудно — требуется разработка сложной математической модели. В ряде частных случаев, близких к реальным условиям, решение упрощается, например, если рассматривать адиабатическое истечение идеального газа при постоянном коэффициенте расхода. Кроме того, полученное в таких случаях решение можно использовать в определенных математических моделях в качестве первого приближения.

Данная статья является продолжением работы автора, опубликованной во 2-м выпуске журнала «Вестник ТюмГУ. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика» за 2016 г. Там было рассмотрено решение задачи, позволяющее определить время истечения идеального газа из резервуара постоянного объема при адиабатическом процессе. Было отмечено, что основные трудности при решении данной задачи возникают при рассмотрении режима докритического истечения, поэтому для этой области были предложены приближенные, но достаточно точные формулы, позволяющие определить как полное время истечения газа из резервуара, так и зависимость,

Цитирование: Тарасов В. В. Вывод расчетной зависимости для определения давления идеального газа в резервуаре постоянного объема при его адиабатическом истечении / В. В. Тарасов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 4. С. 80-88.
DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-4-80-88

связывающую время истечения с давлением в резервуаре — $t(p)$. Нахождение наиболее востребованной в инженерных расчетах зависимости $p(t)$ предлагалось проводить путем обратного пересчета по полученной формуле. Естественно, что такой подход усложняет весь процесс расчета и, кроме того, приводит к дополнительным погрешностям. Поэтому в данной работе была поставлена задача получения прямой зависимости $p(t)$. При решении этой задачи в качестве промежуточного параметра было использовано значение числа Маха, определяемого по скорости истечения газа на выходе из резервуара — M_2. В результате расчетно-аналитического исследования была получена формула, позволяющая определить приближенное, но достаточно точное значение давления в резервуаре в зависимости от времени истечения.

Ключевые слова

Адиабатический процесс, истечение, расход, давление, температура, объем, скорость, число Маха.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-4-80-88

Задача расчета адиабатического истечения газа из резервуара постоянного объема при критическом режиме имеет точное решение [4; 5]. Поэтому далее будет рассматриваться только докритический режим.

В работе [4] для описания истечения в докритической области было получено следующее интегральное уравнение:

$$J(z) = A\int_{t_1}^{t_2} dt\,, \tag{1}$$

где $J(z) = \int_1^{z_1} \frac{z^q}{\sqrt{z-1}}dz$, $A = \frac{f_{en}\,a_0}{V}\sqrt{\frac{2(k-1)}{\pi_0^{\frac{k-1}{k}}}}$, $z = \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$, $q = \frac{2-k}{k-1}$, t_1 — время начала докритического истечения, t_2 — полное время истечения, k — показатель адиабаты, f_{en} — эффективная площадь проходного сечения простого насадка на выходе из резервуара, $a_0 = \sqrt{kRT_0}$, $\pi_0 = p_0/p_2$; индексы: 0 — начальные параметры газа в резервуаре, 1 — параметры газа в момент окончания критического режима истечения и начала докритического режима, 2 — параметры газа в момент окончания процесса истечения.

Т. к. при адиабатическом процессе $(p/p_2)^{\frac{k-1}{k}} = T/T_2$, то $z = T/T_2 = \bar{T}$ $\left(z_1 = \bar{T}_1 = \dfrac{k+1}{2} = \pi_{\text{кр}}^{\frac{k-1}{k}}\right)$. Тогда интеграл $J(z)$ в формуле (1) принимает вид

$$J(\bar{T}) = \int_1^{\bar{T}_1} \frac{\bar{T}^q}{\sqrt{\bar{T}-1}}d\bar{T}, \tag{2}$$

т. е. он фактически определяет закон изменения температуры в резервуаре для случая докритического адиабатического истечения идеального газа.

В соответствие с известными соотношениями термодинамики для адиабатического процесса [1; 5], связывающими температуру, давление и плотность газа, интеграл (2) может быть преобразован к 2-м другим видам:

$$J(\bar{p}) = \frac{k-1}{k}\int_1^{\bar{p}_1}\frac{1}{\bar{p}^{\frac{k-1}{k}}\sqrt{\bar{p}^{\frac{k-1}{k}}-1}}d\bar{p} \quad \left(p_1 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \pi_{\text{кр}}\right), \tag{3}$$

$$J(\bar{\rho}) = (k-1)\int_1^{\bar{\rho}_1}\frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}^{k-1}-1}}d\bar{\rho} \quad \left(\rho_1 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \pi_{\text{кр}}^{\frac{1}{k}}\right). \tag{4}$$

Используя соответствующие подстановки, полученные соотношения (2)–(4) можно объединить одним общим интегралом

$$J(\theta) = 2\int_0^{\theta_1}(1+\theta^2)^q\, d\theta, \tag{5}$$

где верхний предел $\theta_1 = \sqrt{(k-1)/2}$.

При $\theta = \sqrt{\bar{T}-1}$ получим уравнение (2), при $\theta = \sqrt{\bar{p}^{\frac{k-1}{k}}-1}$ — уравнение (3), а при $\theta = \sqrt{\bar{\rho}^{\,k-1}-1}$ — уравнение (4).

Определим физический смысл величины θ. Т. к. при адиабатическом процессе истечения газа отсутствуют внешний теплообмен и техническая работа, то весь теплоперепад преобразуется в кинетическую энергию вытекающего из резервуара газа, т. е. $\sim w_2^2/2$ (w_2 — скорость на выходе из насадка). В этом случае, полагая, что скорость газа в самом резервуаре значительно меньше w_2, воспользуемся известным соотношением термодинамики [1]:

$$\bar{T} = \frac{T}{T_2} = \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 + \frac{k-1}{2}M_2^2,$$

где $M_2 = w_2/a_2$ — число Маха в выходном сечении насадка, $a_2 = \sqrt{kRT_2}$ — скорость звука при температуре газа T_2.

При адиабатическом процессе скорость звука a_2 — величина постоянная, т. к. $T_2 = T_0/\pi_0^{\frac{k-1}{k}} = const$, а скорость истечения газа из простого насадка w_2 при дозвуковом режиме будет меняться от максимального значения $w_2 = w_1\left(w_1 = \sqrt{kRT_1}\right)$ в момент окончания критического режима до 0 при завершении истечения. Таким образом, если при критическом режиме истечения число Маха на выходе постоянно ($M_2 = M_1 = 1$), то при докритическом режиме истечения газа значение числа Маха на выходе из резервуара будет являться функцией времени: $M_{2t}(t) = w_{2t}(t)/a_2$ (индекс 2t соответствует переменной по времени величине параметра газа в выходном сечение).

Поскольку, с одной стороны, было принято, что $\bar{T} = 1+\theta^2$, а с другой — $\bar{T} = 1 + \dfrac{k-1}{2}M_{2t}^2$, то $\theta = \sqrt{(k-1)/2}\cdot M_{2t}$. Т. е. θ — параметр, прямо пропорциональный числу Маха на выходе, причем коэффициент пропорциональности зависит только от k.

Выразив θ через M_{2t}, из уравнения (5) получим

$$J_M(M_{2t}) = \sqrt{2(k-1)}\cdot\int_0^1\left(1+\frac{k-1}{2}M_{2t}^2\right)^q dM_{2t}. \tag{6}$$

В полученном уравнении верхний предел интеграла, равный $M_{2t} = 1$, соответствует (при $\pi_0 \geq \pi_{\text{кр}}$) моменту окончания критического режима истечения и началу докритического режима истечения, а нижний предел $M_{2t} = 0$ — моменту окончания истечения.

Рассмотрим возможный вариант решения интегрального уравнения (6). Для этого сначала воспользуемся соотношением (5). Табличное решение интеграла в этом случае возможно только при целочисленном значении степени q [2]. Для получения более общего решения при произвольном q, а следовательно, и k, воспользуемся разложением подынтегральной функции в ряд, используя бином Ньютона [2]. В результате разложения и последующего интегрирования ряда получим функцию следующего вида:

$$J_\theta(\theta) = 2\theta \cdot \alpha_\theta(\theta),$$

где $\alpha_\theta(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\prod_{m=1}^{n}(q+1-m)}{(2n+1)\cdot n!} \cdot \theta^{2n}$.

В данном ряде, если q — целое положительное число, то $N = q$, т. е. число членов ряда ограничено, в противном случае $N = \infty$ — ряд бесконечен.

Подставив в $\alpha_\theta(\theta)$ вместо q его значение через k, а также учитывая, что $\theta^2/(k-1) = M^2/2$, определим функцию $\alpha_M(M_{2t})$:

$$\alpha_M(M_{2t}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\prod_{m=1}^{n}[1-m(k-1)]}{2^n(2n+1)n!} M_{2t}^{2n}\right]. \quad (7)$$

Таким образом, функция $J_M(M_{2t})$ (6) может быть определена из равенства:

$$\alpha_M(M_{2t}) = \sqrt{2(k-1)} \cdot M_{2t} \cdot \alpha_M(M_{2t}). \quad (8)$$

Анализ ряда (7) показал, что он сходится достаточно быстро. Поэтому верхний предел суммы ряда можно заменить с ∞ на конечное число членов ряда N. При расчете $\alpha_M(M_{2t})$ с заданной степенью точности для оценки необходимого числа N можно воспользоваться линейной зависимостью $N(k)$, поскольку при уменьшении k необходимое N увеличивается. Например, чтобы получить точность расчета порядка 10^{-5} при максимальном значении $M_{2t} = 1$ надо (в зависимости от величины k) принять, что N равно округленному до целой части числу, определенному по формуле $N = 9 - 4k$. Т. е. при $k = 1{,}1$ имеем $N = 5$, при $k = 1{,}4$ — $N = 3$, а при $k = 1{,}8$ — $N = 2$. При точности расчета $\alpha_M(M_{2t})$ с порядком 10^{-3} и $k = 1{,}4$ потребуется вычислить уже всего 2 члена ряда. Таким образом, при необходимости компьютерное вычисление интеграла в формуле (6) можно заменить ручным расчетом по формуле (8).

Для проверки полученного соотношения (8) были сопоставлены функции $J_M(M_{2t})$ и $J(z)$. Обе должны быть равны правой части уравнения (1). Формулы для $J(z)$ [4] и $z = 1 + \frac{k-1}{2} M_{2t}^2$ позволяют получить необходимое равенство:

$$z^{\frac{2-k}{k-1}} \left[1 + \sum_{n=1}^{N} \left\{(-1)^n \left(\frac{2}{k-1}\right)^n \left[\prod_{m=1}^{n}\left(\frac{1-m(k-1)}{2m+1}\right)\right] \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n\right\}\right] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{k-1}\right)^n \left[\frac{\prod_{m=1}^{n}[1-m(k-1)]}{2^n(2n+1)n!}(z-1)^n\right].$$

Расчеты показали, что это верное равенство.

Зависимость между значением числа Маха на выходе и временем истечения газа при докритическом режиме можно установить заменив в уравнении (1) $J(z)$ на $J_M(M_{2t})$. Тогда получим

$$\sqrt{2(k-1)}\int_0^1\left(1+\frac{k-1}{2}M_{2t}^2\right)^q dM_{2t}=A\int_{t_1}^{t_2}dt. \quad (9)$$

Интегрирование уравнения (9) приводит к соотношению

$$J_M(1)-J_M(0)=A(t_2-t_1), \quad (10)$$

где, согласно (8), при $M_{2t}=1$ $J_M(1)=\sqrt{2(k-1)}\cdot\alpha_M(1)$, а $J_M(0)=0$.
Из уравнения (10) с учетом (7) для $\alpha_M(1)$ и значения коэффициента A найдем формулу для определения полного времени истечения t_2:

$$t_2=t_1+K_a\sqrt{\pi_0^{\frac{k-1}{k}}}\cdot\alpha_M(1), \quad (11)$$

где $K_a=\frac{f_{en}\sqrt{kRT_0}}{V}$, $\alpha_M(1)=1+\sum_{n=1}^N\left[\frac{\prod_{m=1}^n[1-m(k-1)]}{2^n(2n+1)n!}\right]$.
Для упрощения расчета по формуле (11) заменим коэффициент на его приближенное значение. Для этого воспользуемся формулой $\tilde{\alpha}(z)$ из работы [4] при $z_{\text{кр}}$ $(M=1)-\tilde{\alpha}_1=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{0.645q}$. Тогда $\tilde{\alpha}_M(1)=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{0.357q}$.

Чтобы получить более точные значения функции $J_M(M_{2t})$ при малых значениях k и граничном условии $M_{2t}=1$, в формулу было введено уточнение — число 0,355 в показателе степени заменено на 0,357.

Подставив $\tilde{\alpha}_M(1)$ в формулу (11), приходим к тому же результату, что и в работе [4], т. е. приближенное значение полного времени истечения можно определить по формуле

$$\tilde{t}_2=t_1+K_a\pi_{\text{кр}}^{0.357\frac{2-k}{k}}\sqrt{\pi_0^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (12)$$

Таким образом, подтвержден ранее полученный в [4] результат по расчету времени t_2.

Переходим к нахождению искомой зависимости $p(t)$. Для этого необходимо получить функцию $M_{t2}(t)$ в явном виде.

Из уравнения (10), вводя текущее значение $J_M(M_{2t})$ вместо $J_M(0)$, получим следующее равенство: $J_M(M_{2t})=J_M(1)-A(t-t_1)$, или, с учетом соотношения (8):

$$\sqrt{2(k-1)}\cdot M_{2t}\cdot\alpha_M(M_{2t})=\sqrt{2(k-1)}\cdot\alpha_M(1)-A(t-t_1).$$

Подставив в последнее соотношение значение коэффициента A, мы найдем

$$M_{2t}\cdot\alpha_M(M_{2t})=\alpha_M(1)-\frac{1}{K_a\sqrt{\pi_0^{\frac{k-1}{k}}}}(t-t_1). \quad (13)$$

Как видно, из соотношения (13) нельзя выделить M_{2t} в явном виде. Поэтому было принято решение о нахождении приближенной, но достаточно точной аппроксимирующей зависимости, заменяющей соотношение (13) и позволяющей найти функцию $M_{2t}(t)$.

В правой части соотношения (13) заменим точное значение $\alpha_M(1)$ на приближенное — $\tilde{\alpha}_M(1) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{0,357q}$, а левую часть аппроксимируем степенной функцией: $b(k)M_{2t}^{c(k)}$, у которой коэффициенты $b(k)$ и $c(k)$ являются функциями только показателя адиабаты k. Коэффициент $b(k)$ определяется однозначно, т. к. при $M_{2t} = 1$ коэффициент $b(k) = \alpha_M(1) \approx \tilde{\alpha}_M(1)$. Для определения $c(k)$ было проведено расчетно-аналитическое исследование левой части уравнения (9) с использованием вычислительной программы MathCAD 15. В результате исследования было рассмотрено несколько функций $c(k)$, обеспечивающих получение достаточно точных результатов расчетов по приближенным зависимостям. В итоге был принят вариант, при котором $c(k) = b(k)$, что дает возможность построить достаточно простую расчетную формулу при сохранении высокой степени точности расчетов.

Принятая аппроксимация позволяет определить из соотношения (13) приближенную зависимость для $\tilde{M}_{2t}(t)$:

$$\tilde{M}_{2t}(t) = \left[1 - \frac{1}{b_k K_a \sqrt{\pi_0^{\frac{k-1}{k}}}}(t - t_1)\right]^{\frac{1}{b_k}}, \tag{14}$$

где $b_k = \tilde{\alpha}_M(1) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{0.357q} = \pi_{\text{кр}}^{0.357\frac{2-k}{k}}$.

Формула (14) и соотношение $(p/p_2)^{\frac{k-1}{2}} = 1 + \frac{k-1}{2}M_{2t}^2$ дают возможность найти приближенную зависимость между давлением газа в резервуаре и временем его истечения при докритическом режиме:

$$\tilde{p}(t) = p_2 \left\{1 + \frac{k-1}{2}\left[1 - \frac{1}{b_k K_a \sqrt{\pi_0^{\frac{k-1}{k}}}}(t - t_1)\right]^{\frac{2}{b_k}}\right\}^{\frac{k}{k-1}} \tag{15}$$

Далее было проведено сопоставление результатов расчетов: $\tilde{p}(t)$ — по приближенной зависимости (15) и точных значений $p(t)$, полученных с использованием уравнения (13). При расчетах была использована программа MathCAD 15. В качестве примера была выбрана та же задача, что и рассмотренная в работе [1].

На рис. 1 представлен результат выполненного расчета для докритического режима истечения — график $p(t)$. На этом же рисунке вверху (шкала справа) показано изменение относительного отклонения точного расчета от приближенного (15). Ошибка, как видно, в данном случае не превышает 1%.

Помимо представленного примера были проведены другие расчеты, которые также подтвердили возможность определения давления по полученной приближенной зависимости $\tilde{p}(t)$ с достаточно высокой степенью точности.

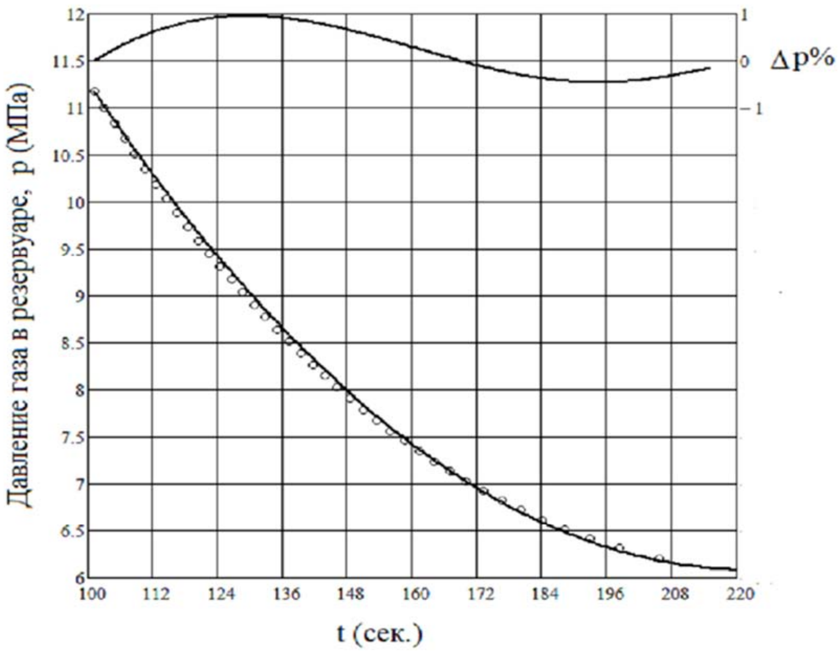

Рис. 1. Изменение давления газа в резервуаре при докритическом режиме истечения (линия — точно, кружки — приближенно)

Fig. 1. The change of the gas pressure in the tank at the subcritical mode of expiration (line — exact value, circles — approximate)

Выводы

В принятой постановке задачи полученную формулу (15) можно рекомендовать для определения давления (а следовательно, и других термодинамических параметров) газа в резервуаре в процессе его истечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика / Г. Н. Абрамович. М.: Наука, 1969. 824 с.
2. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. М.: Наука, 1983. 180 с.
3. Курбатов Е. С. Газодинамика процесса истечения из резервуаров со сжатыми газами / Е. С. Курбатов // Молодой ученый. 2014. № 8. С. 49.
4. Тарасов В. В. Расчет времени истечения идеального газа из резервуара постоянного объема в среду с постоянным давлением при адиабатическом процессе / В. В. Тарасов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. № 2. Том 2. С. 84-95.
5. Техническая термодинамика / под ред. В. И. Крутова. М.: Высшая школа, 1981. 472 с.

Vadim V. TARASOV[1]

WITHDRAWAL OF THE CALCULATED DEPENDENCE TO DETERMINE THE PRESSURE OF THE IDEAL GAS IN THE TANK OF A CONSTANT VOLUME DURING ITS ADIABATIC OUTFLOW

[1] Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor,
Department of Engineering Graphics,
Bauman Moscow State Technical University
midav-5491@mail.ru

Abstract

The calculation of the gases outflow from the tank of finite volume is an essential engineering problem. In general, when one considers the outflow of a real gas accounting for external heat exchange and the variability of the output nozzle flow rate, solving this problem is rather difficult — the development of complex mathematical models is required. In some special cases (close to the real conditions), the solution is simplified, e. g., if one considers the adiabatic outflow of an ideal gas at a constant flow rate. Furthermore, the resulting in such cases solution can be used in certain mathematical models as a first approximation.

This article continues the author's work published in the 2nd issue of the journal "TSU Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy" in 2016. The article reviewed the solution to the problem, allowing to determine the outflow time of an ideal gas from a reservoir of constant volume during the adiabatic process. It was noted that the main difficulties in this task arise during the consideration of the subcritical regime expiration. Therefore, for this region an approximate, though a rather accurate formula was proposed to determine both the total time of expiry gas from the tank and the functional dependence between the outflow time and the pressure in the tank — $t(p)$. To find the most demanded among engineers functional dependence $p(t)$, the obtained inverse conversion formula was proposed to be used. Naturally, this approach complicates the whole calculation process, and, in addition, it leads to more errors. Therefore, this work's task was formulated as the retrieval of the direct

Citation: Tarasov V. V.2016. "Withdrawal of the Calculated Dependence to Determine the Pressure of the Ideal Gas in the Tank of a Constant Volume during Its Adiabatic Outflow". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 4, pp. 80-88.
DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-4-80-88

dependencies $p(t)$. In this task, the author used as an intermediate parameter the values of Mach number (determined by the gas velocity at the outlet of the tank). The analytical research led to obtaining the formula for determining the approximate, but rather accurate value of the pressure in the tank depending on the outflow time.

Keywords

Adiabatic process, outflow, expense, pressure, temperature, volume, velocity, Mach number.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-4-80-88

REFERENCES

1. Abramovich G. N. 1969. Prikladnaya gazovaya dinamika [Applied Gas Dynamics]. Moscow: Nauka.
2. Dwight H. B. 1983. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly [Tables of Integrals and Other Mathematical Data]. Moscow: Nauka.
3. Krutov V. I. (ed.). 1981. Tekhnicheskaya termodinamika [Technical Thermodynamics]. Moscow: Vysshaya shkola.
4. Kurbatov E. S. 2014. “Gazodinamika protsessa istecheniya iz rezervuarov so szhatymi gazami” [Gasdynamics Process Expiry of the Tanks with Compressed Gases]. Molodoy uchenyy, no 8, p. 49.
5. Tarasov V. V. 2016. “Raschet vremeni istecheniya ideal'nogo gaza iz rezervuara postoyannogo ob"ema v sredu s postoyannym davleniem pri adiabaticheskom protsesse” [Calculating the Time of an Ideal Gas Expiration from the Tank of Constant Volume in an Environment with Constant Pressure in an Adiabatic Process]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 2, pp. 84-95.