Сергей Петрович БАУТИН[1]

УДК 533.6

ТЕОРЕМА О КРАТНЫХ ЧАСТОТАХ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

[1] доктор физико-математических наук,
профессор кафедры естественнонаучных дисциплин,
Уральский государственный университет путей сообщения (г. Екатеринбург)
SBautin@usurt.ru

Аннотация

Аналитическое построение точных и приближенных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа вызывает большие трудности. Ранее была предложена методика моделирования одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа, в которой газодинамические параметры представлены в виде бесконечных сумм гармоник от пространственной переменной с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. Для искомых коэффициентов получены бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При учете конечного числа слагаемых в тригонометрических рядах соответствующие конечные системы интегрируются численно. В данной работе этой методикой исследованы частные случаи трехмерных нестационарных периодических течений. Для искомых коэффициентов бесконечных тригонометрических рядов получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлено конкретное свойство решений этой системы — теорема о кратных частотах, описывающая множество частот, возникающих в решении.

Ключевые слова

Трехмерные нестационарные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа, полная система уравнений Навье-Стокса, теорема о кратных частотах.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-1-111-123

Цитирование: Баутин С. П. Теорема о кратных частотах для трехмерных нестационарных течений газа / С. П. Баутин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2017. Том 3. № 1. С. 111-123. DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-1-111-123

Введение

Аналитическое построение точных и приближенных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа вызывает большие трудности [1; 6-8] и является актуальным в настоящее время, особенно при использовании для математического моделирования адекватных моделей, являющихся нелинейными системами уравнений с частными производными. В работах [2; 4; 5; 9; 10] предложена новая методика моделирования одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа при построении решений полной системы уравнений Навье–Стокса. При этом газодинамические параметры представлены в виде бесконечных сумм гармоник от пространственной переменной с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. Для искомых коэффициентов получены бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При учете конечного числа слагаемых в тригонометрических рядах соответствующие конечные системы интегрируются численно. Цель данной работы — исследовать частные случаи трехмерных нестационарных периодических течений указанной методикой; для искомых коэффициентов бесконечных тригонометрических рядов получить бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений; установить конкретные свойства системы, позволяющие описать множество частот, возникающих в решении. В том числе впервые для трехмерных нестационарных течений доказать теорему о кратных частотах.

Основная часть

Течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа описываются решениями полной системы уравнений Навье-Стокса, которая в безразмерных переменных имеет следующий вид [2; 7]:

$$\delta_t = -u\delta_x - v\delta_y - w\delta_z + \delta(u_x + v_y + w_z),$$

$$u_t = -uu_x - vu_y - wu_z - \frac{1}{\gamma}\delta p_x +$$
$$+\mu_0\delta\left[\frac{1}{4}(v_{xy} + w_{xz}) + u_{xx} + \frac{3}{4}(u_{yy} + u_{zz})\right],$$

$$v_t = -uv_x - vv_y - wv_z - \frac{1}{\gamma}\delta p_y +$$
$$+\mu_0\delta\left[\frac{1}{4}(u_{xy} + w_{yz}) + v_{yy} + \frac{3}{4}(v_{xx} + v_{zz})\right], \qquad (1)$$

$$w_t = -uw_x - vw_y - ww_z - \frac{1}{\gamma}\delta p_z +$$
$$+\mu_0\delta\left[\frac{1}{4}(u_{xz} + v_{yz}) + w_{zz} + \frac{3}{4}(w_{xx} + w_{yy})\right],$$

$$p_t = -up_x - vp_y - wp_z - \gamma p(u_x + v_y + w_z) +$$

$$
\begin{gathered}
+\kappa_0 p\left(\delta_{xx}+\delta_{yy}+\delta_{zz}\right)+2\kappa_0\left(p_x\delta_x+p_y\delta_y+p_z\delta_z\right)+\\
+\kappa_0\delta\left(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}\right)+\mu_0\gamma(\gamma-1)\times\\
\times\left\{\frac{1}{2}\left[\left(u_x-v_y\right)^2+(u_x-w_z)^2+\left(v_y-w_z\right)^2\right]+\right.\\
\left.+\frac{3}{4}\left[\left(u_y+v_x\right)^2+(u_z+w_x)^2+\left(v_z+w_y\right)^2\right]\right\},
\end{gathered}
$$

где t — время, $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$ — независимые пространственные переменные, для которых используются оба набора обозначений. Далее, $\delta = 1/\rho$ — удельный объем газа, ρ — плотность газа, p — давление, $\mathbf{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси координат Ox_1, Ox_2, Ox_3. Постоянные коэффициенты в уравнениях μ_0, κ_0 — коэффициенты вязкости и теплопроводности, $\gamma > 1$ — показатель политропы идеального газа с уравнениями состояния, записанными в безразмерных переменных:

$$p=\rho T,\; e=T.$$

Здесь T — температура, e — внутренняя энергия.

Решение системы (1) представляется в виде бесконечных сумм гармоник [3]:

$$
\begin{gathered}
\delta(t,x_1,x_2,x_3)=1+\delta_0(t)+\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta_{i,k,1}(t)\cos(kx_i)+\delta_{i,k,2}(t)\sin(kx_i)\right]\right\},\\
u(t,x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{i,k,1}(t)\cos(kx_i)+u_{i,k,2}(t)\sin(kx_i)\right]\right\},\\
v(t,x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[v_{i,k,1}(t)\cos(kx_i)+v_{i,k,2}(t)\sin(kx_i)\right]\right\},\\
w(t,x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[w_{i,k,1}(t)\cos(kx_i)+w_{i,k,2}(t)\sin(kx_i)\right]\right\},\\
p(t,x_1,x_2,x_3)=1+p_0(t)+\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[p_{i,k,1}(t)\cos(kx_i)+p_{i,k,2}(t)\sin(kx_i)\right]\right\},
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $\delta_0(t)$, $\delta_{i,k,q}(t)$, $u_{i,k,q}(t)$, $v_{i,k,q}(t)$, $w_{i,k,q}(t)$, $p_0(t)$, $p_{i,k,q}(t)$ — искомые функции.

Значения индексов у коэффициентов $f_{i,k,q}(t)$ определяются следующим образом. Первый индекс $i = 1, 2, 3$ задает номер пространственной переменной, от которой зависит гармоника и перед которой стоит этот коэффициент $f_{i,k,q}(t)$. Значение второго индекса $k = 1, 2, ...$ определяется частотой гармоники, перед которой стоит данный коэффициент. Третий индекс q равен единице, если коэффициент стоит перед косинусом, и равен двойке — если перед синусом.

Для системы (1) начальные данные заданы в аналогичном виде:

$$
\begin{gathered}
\delta|_{t=0}=\delta^o(x)=1+\delta_0^o+\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta_{i,k,1}^o(t)\cos(kx_i)+\delta_{i,k,2}^o(t)\sin(kx_i)\right]\right\},\\
u|_{t=0}=u^o(x)=\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{i,k,1}^o(t)\cos(kx_i)+u_{i,k,2}^o(t)\sin(kx_i)\right]\right\},
\end{gathered}
\tag{3}
$$

$$v|_{t=0} = v^o(x) = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[v_{i,k,1}^o(t)\cos(kx_i) + v_{i,k,2}^o(t)\sin(kx_i) \right] \right\},$$

$$w|_{t=0} = w^o(x) = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[wv_{i,k,1}^o(t)\cos(kx_i) + w_{i,k,2}^o(t)\sin(kx_i) \right] \right\}, \qquad (3)$$

$$p|_{t=0} = p^o(x) = 1 + p_0^o + \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{i,k,1}^o(t)\cos(kx_i) + p_{i,k,2}^o(t)\sin(kx_i) \right] \right\}.$$

Через δ_0^o, $\delta_{i,k,q}^o$, $u_{i,k,q}^o$, $v_{i,k,q}^o$, $w_{i,k,q}^o$, p_0^o, $p_{i,k,q}^o$ обозначены константы, при которых бесконечные тригонометрические ряды из (3) сходятся; $i = 1, 2, 3$; $q = 1, 2$; $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Решение задачи Коши (1), (3) описывает процесс стабилизации при $t \to +\infty$ трехмерного, периодического по пространственным переменным течения от начального неоднородного состояния (3) к состоянию однородного покоя.

В работах [12; 13] с использованием специальных представлений тригонометрических рядов в виде степенных рядов от экспонент с комплексными показателями для случая общих трехмерных пространственных периодических течений доказано, что при определенных условиях малости начальных данных решение задачи Коши (1), (3) существует в малом по времени.

В данной работе сходимость рядов из представлений (2) не исследуется и преобразования этих рядов делаются формально. Заметим, что в одномерном случае подобные ряды показали «машинную» сходимость [2].

Для того чтобы получить бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для зависящих только от времени искомых коэффициентов $\delta_0(t)$, $p_0(t)$, $f_{i,k,q}(t)$ $(f - \delta, u, v, w, p)$; $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3, \ldots$; $q = 1, 2$, представления (2) подставляются в систему (1) и затем каждое уравнение проецируется на систему базисных функций [3]. То есть после подстановки каждое уравнение последовательно умножается на функцию $\cos(lx_i)$ или на $\sin(lx_i)$, $l = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, 3$ и интегрируется по переменным x_1, x_2, x_3 в кубе:

$$(Q) : \{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]\}.$$

Кроме этого первое и последнее уравнения системы (1) после подстановки в них представлений (2) интегрируются в кубе (Q), то есть эти уравнения проецируются еще и на единицу. Уравнения со второго по четвертое из системы (1) на единицу не проецируются. Это связано с тем, что в представлениях (2) для искомых *u, v, w* отсутствуют слагаемые, не содержащие гармоники.

Прежде чем рассматривать результат указанного проецирования, приводятся значения некоторых тройных интегралов.

Если под тройным интегралом нет гармоник, то:

$$\iiint\limits_{(Q)} dx_i dx_j dx_q = 8\pi^3.$$

Если под тройным интегралом стоит одна гармоника, то есть $\cos(kx_i)$ или $\sin(kx_i)$, то значение интеграла равно нулю. Например:

$$\iiint\limits_{(Q)} \cos(kx_i)dx_i dx_j dx_q = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(kx_i)\,dx_i \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx_j dx_q = 0 \cdot 4\pi^2 = 0\,.$$

Если под тройным интегралом стоит произведение двух гармоник, то он равен нулю за исключением случаев: аргументы и частоты у обеих гармоник одинаковые, а также и сами гармоники одинаковые, то есть под интегралом стоит четная функция:

$$\iiint\limits_{(Q)} \cos(kx_i)\cos(kx_i)\,dx_i dx_j dx_q = \iiint\limits_{(Q)} \sin(kx_i)\sin\cos(kx_i)\,dx_i dx_j dx_q = 4\pi^3.$$

Если под тройным интегралом стоит произведение трех гармоник, то он равен нулю всегда, за исключением двух случаев:

$$\iiint\limits_{(Q)} \cos(kx_i)\cos(mx_i)\cos(lx_i)dx_i dx_j dx_q = 2\pi^3 a_{k,m,l},$$

$$\iiint\limits_{(Q)} \sin(kx_i)\sin(mx_i)\cos(lx_i)dx_i dx_j dx_q = 2\pi^3 b_{k,m,l},$$

где для констант $a_{k,m,l}$ и $b_{k,m,l}$ ($k, m, l > 0$) имеют место равенства:

$$a_{k,m,l} = \begin{cases} 1, \text{если } l = k + m \text{ или } l = |k - m|; \\ 0, \text{в остальных случаях}; \end{cases} \tag{4}$$

$$b_{k,m,l} = \begin{cases} 1, \text{если } l = |k - m|; \\ -1, \text{если } l = k + m; \\ 0, \text{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, константы $a_{k,m,l}$ и $b_{k,m,l}$ не равны нулю только тогда, когда один из индексов равен сумме или разности двух других индексов.

Для краткости далее приведена только часть бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для искомых коэффициентов представлений (2) [3]:

$$\begin{aligned} \delta_0'(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\{&-u_{1,k,1}(t)\delta_{1,k,2}(t) + u_{1,k,2}(t)\delta_{1,k,1}(t) - v_{2,k,1}(t)\delta_{2,k,2}(t) + \\ &+v_{2,k,2}(t)\delta_{2,k,1}(t) - w_{3,k,1}(t)\delta_{3,k,2}(t) + w_{3,k,2}(t)\delta_{3,k,1}(t) + \\ &+\delta_{1,k,1}(t)u_{1,k,2}(t) - \delta_{1,k,2}(t)u_{1,k,1}(t) + \delta_{2,k,1}(t)v_{2,k,2}(t) - \\ &-\delta_{2,k,2}(t)v_{2,k,1}(t) + \delta_{3,k,1}(t)w_{3,k,2}(t) - \delta_{3,k,2}(t)w_{3,k,1}(t)\}; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,l,1}'(t) = [1 + \delta_0(t)]lu_{1,l,2}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m[&-a_{k,m,l}u_{1,k,1}(t)\delta_{1,m,2}(t) + \\ +b_{k,m,l}u_{1,k,2}(t)\delta_{1,m,1}(t)+a_{k,m,l}\delta_{1,k,1}(t)u_{1,m,2}(t) &- b_{k,m,l}\delta_{1,k,2}(t)u_{1,m,1}(t)]; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,l,2}'(t) = -[1 + \delta_0(t)]lu_{1,l,1}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m[&b_{m,l,k}u_{1,k,1}(t)\delta_{1,m,1}(t) - \\ -b_{k,l,m}u_{1,k,2}(t)\delta_{1,m,2}(t)-b_{m,l,k}\delta_{1,k,1}(t)u_{1,m,1}(t) &+ b_{k,l,m}\delta_{1,k,2}(t)u_{1,m,2}(t)]; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\delta'_{2,l,1}(t) = [1 + \delta_0(t)]lv_{2,l,2}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\big[-a_{k,m,l}v_{2,k,1}(t)\delta_{2,m,2}(t) + \\ +b_{k,m,l}v_{2,k,2}(t)\delta_{2,m,1}(t) + a_{k,m,l}\delta_{2,k,1}(t)v_{2,m,2}(t) - b_{k,m,l}\delta_{2,k,2}(t)v_{2,m,1}(t)\big]; \quad (9)$$

$$\delta'_{2,l,2}(t) = -[1 + \delta_0(t)]lv_{2,l,1}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\big[b_{m,l,k}v_{2,k,1}(t)\delta_{2,m,1}(t) - \\ -b_{k,l,m}v_{2,k,1}(t)\delta_{2,m,1}(t) - b_{m,l,k}\delta_{2,k,1}(t)v_{2,m,1}(t) + b_{k,l,m}\delta_{2,k,2}(t)v_{2,m,2}(t)\big]; \quad (10)$$

$$\delta'_{3,l,1}(t) = [1 + \delta_0(t)]lw_{3,l,2}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\big[-a_{k,m,l}w_{3,k,1}(t)\delta_{3,m,2}(t) + \\ +b_{k,m,l}w_{3,k,2}(t)\delta_{3,m,1}(t) + a_{k,m,l}\delta_{3,k,1}(t)w_{3,m,2}(t) - b_{k,m,l}\delta_{3,k,2}(t)w_{3,m,1}(t)\big]; \quad (11)$$

$$\delta'_{3,l,2}(t) = -[1 + \delta_0(t)]lw_{3,l,1}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\big[b_{m,l,k}w_{3,k,1}(t)\delta_{3,m,1}(t) - \\ -b_{k,l,m}w_{3,k,2}(t)\delta_{3,m,2}(t) - b_{m,l,k}\delta_{3,k,1}(t)w_{3,m,1}(t) + b_{k,l,m}\delta_{3,k,2}(t)w_{3,m,2}(t)\big]; \quad (12)$$

$l = 1, 2, \ldots$.

Аналогичные бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений получены для: $p_0(t)$, $g_{i,l,q}(t)$, $i = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, \ldots$; $q = 1, 2$; символ g принимает значения u, v, w, p [3].

В правой части уравнения (6) стоят функции, у которых в качестве первого индекса присутствуют и единица, и двойка, и тройка. То есть в правой части уравнения (6) присутствуют искомые коэффициенты, стоящие в представлениях (2) перед гармониками, аргументами которых являются и x_1, и x_2, и x_3. Аналогичным свойством обладает и уравнение для $p_0(t)$, которое здесь не приводится ввиду громоздкости.

Также имеют место следующие свойства [3]:

1. В правых частях каждого из уравнений (7)–(12) присутствуют искомые коэффициенты $\delta_{i,k,q}, u_{i,k,q}, v_{i,k,q}, w_{i,k,q}, p_{i,k,q}$, имеющие в качестве первого индекса только то значение, которое стоит первым индексом у производных $\delta'_{i,l,q}(t)$ из левых частей уравнений (7)–(12). Следовательно, система обыкновенных дифференциальных уравнений для $\delta'_{i,l,q}(t)$ ($i = 1, 2, 3$, $q = 1, 2$) расщепляется по первому индексу: в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $\delta'_{i,l,q}(t)$ не входят искомые функции, у которых первый индекс не равен первому индексу у коэффициента $\delta'_{i,l,q}(t)$, стоящего в левой части уравнения (7)–(12).

2. Присутствующий в правых частях уравнений (7)–(12) искомый коэффициент $\delta_0(t)$ входит только сомножителем перед линейными слагаемыми с $u_{1,l,q}(t), v_{2,l,q}(t), w_{3,l,q}(t)$.

3. Все линейные слагаемые из правых частей в качестве второго индекса имеют такое же значение, что и второй индекс у производной из левой части.

4. Все нелинейные слагаемые из правых частей уравнений (7)–(12) обязательно в качестве сомножителя имеют либо константу (4), либо константу

(5) с соответствующими индексами, один из которых обязательно есть l, являющийся частотой гармоники, на которую производится проецирование.

Свойства 1–4 имеют место и для остальных бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $g_{i,l,q}(t)$ $(g - u, v, w, p)$ [3].

Теорема о кратных частотах. *Пусть заданы три набора целых положительных чисел* $n1_i$, $n2_j$, $n3_q$, *где* $1 \le i \le N1$, $1 \le j \le N2$, $1 \le q \le N3$, *и их наибольшие делители:*

$$d_1 = \text{НОД}(n1_1, n1_2, \cdots, n1_{N1});\ d_2 = \text{НОД}(n2_1, n2_2, \cdots, n2_{N2});$$
$$d_3 = \text{НОД}(n3_1, n3_2, \cdots, n3_{N3}).$$

Пусть при $t = 0$ начальные данные (3) содержат конечное число гармоник, причем гармоники, зависящие от x_1, имеют частоты $n1_1, n1_2, \cdots, n1_{N1}$; *зависящие от x_2 — частоты* $n2_1, n2_2, \cdots, n2_{N2}$; *зависящие от x_3 — частоты* $n3_1, n3_2, \cdots, n3_{N3}$. *Тогда в решении бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений все коэффициенты* $\delta_{i,l,q}$, $u_{i,l,q}$, $v_{i,l,q}$, $w_{i,l,q}$, $p_{i,l,q}$, *у которых второй индекс l не кратен числу d_i, будут тождественными нулями.*

Теорема говорит о том, что в решении, представленном в виде (2) и содержащим в начальный момент времени только конечное число гармоник, при $t > 0$ могут присутствовать гармоники от x_i только с частотами, кратными d_i, $i = 1, 2, 3$.

Следовательно, для рассматриваемых течений имеет место разделение частот по направлениям: при разделении пространственных переменных в начальных условиях получается, что в решении частоты гармоник оказываются также разделенными по пространственным переменным.

Теорема доказывается методикой, предложенной в [2; 10] для случая одномерных течений. Основной момент доказательства следующий.

Например, пусть l_* не кратен d_1. В группе уравнений (7), (8) полагается:

$$f_{1,l_*,q} \equiv 0;\ q = 1, 2;\ f\ :\ \delta, u.$$

Тогда эта группа уравнений обратится в тождества: слева нуль, справа линейные слагаемые тоже нули, а нелинейные слагаемые занулятся из-за присутствия нулевых сомножителей (4), (5). Равенство этих коэффициентов нулю в рассматриваемом случае обеспечивают леммы из [2; 10].

Лемма 1. *Коэффициенты* $a_{k,m,l}$, $b_{r,m,l}$ *не равны нулю, когда любой их индекс равен сумме или разности двух других индексов, и равны нулю, если это не выполняется.*

Лемма 2. *Пусть* $C_{k,m,l}$ *— массив чисел, состоящий из констант* $a_{k,m,l}$, $b_{r,m,l}$. *Также пусть имеются два любых бесконечных набора чисел*

$$(g_1, g_2, \dots),\ (h_1, h_2, \dots),$$

в которых отличны от нуля только числа с индексами, кратными d, то есть с индексами d, $2d$, $3d$, ..., а остальные числа равны нулю. Тогда, если l не делится на d, то двойная сумма:

$$S_l = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m,l} g_k h_m \tag{13}$$

равна нулю.

Замечание 1. Теорема о кратных частотах справедлива и для системы уравнений газовой динамики, которая получается из системы (1), если в ней положить $\mu_0 = 0$, $\kappa_0 = 0$.

Замечание 2. Из теоремы следует, что решения вида (2) не обладают свойством «удвоение частот», которое иногда предполагают в течениях вязкой сплошной среды [11].

Замечание 3. Автору приведенной теоремы о кратных частотах неизвестны работы, в которых хотя бы для формальных решений конкретных нелинейных уравнений с частными производными был бы доказан факт, соответствующий данной теореме.

Замечание 4. Теорема говорит о том, каких частот не будет в решении при $t > 0$. Численное построение разностными методами решений задачи Коши для системы (1) с периодическими начальными данными, содержащими конечное число гармоник, показывает, что при $t > 0$ в решении появляются новые гармоники с частотами, кратными d_i. В одномерном случае этот факт доказан в [10].

В качестве иллюстрирующего примера в двумерном случае решение задачи Коши для системы (1) с начальными данными:

$$\delta|_{t=0} = 1, u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0, p|_{t=0} = 1 + 0.05\cos(2x) + 0.05\cos(3y)$$

было проведено разностными методами.

На рис. 1–5 приведены результаты расчетов давления в моменты времени $t = 0; 5{,}2; 11{,}3; 15{,}2; 20$ — поверхности в левых частях рисунков. Результаты численного проецирования этих поверхностей на конечное число базисных функций: 1; $\cos(kx)$; $\sin(ky)$; $k = 1, 2, \dots, 20$ — приведены в правых частях рисунков как значения модулей коэффициентов, стоящих перед гармониками с соответствующими частотами.

Расчеты разностными методами показали, что с ростом времени в течении появляются новые гармоники: от x_1 с частотами $2k$, от x_2 с частотами $3k$. Амплитуды этих гармоник, как и в одномерном случае [2; 4; 5; 9; 10], ведут себя немонотонно.

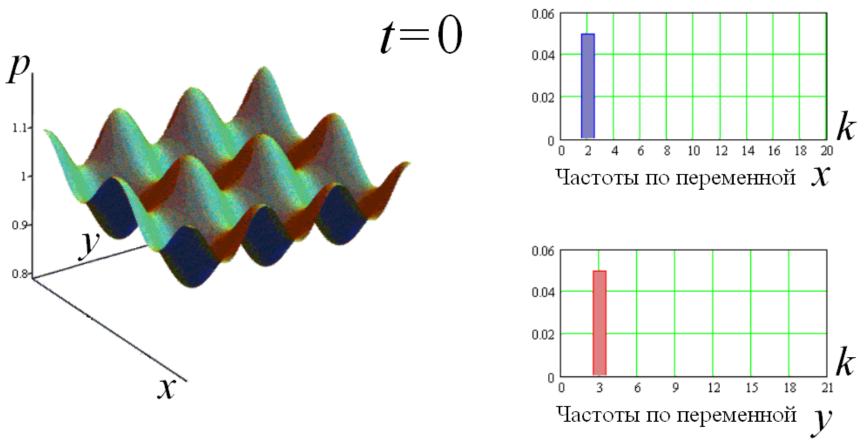

Рис. 1. Давление при $t = 0$ *Fig. 1.* Pressure at $t = 0$

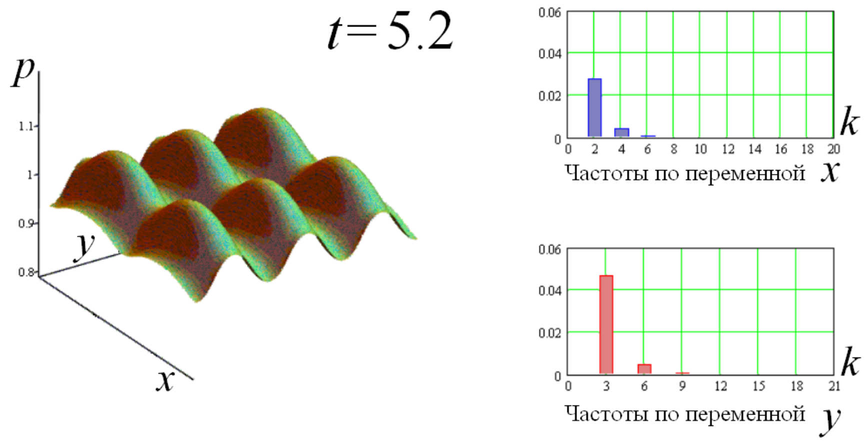

Рис. 2. Давление при $t = 5{,}2$ *Fig. 2.* Pressure at $t = 5.2$

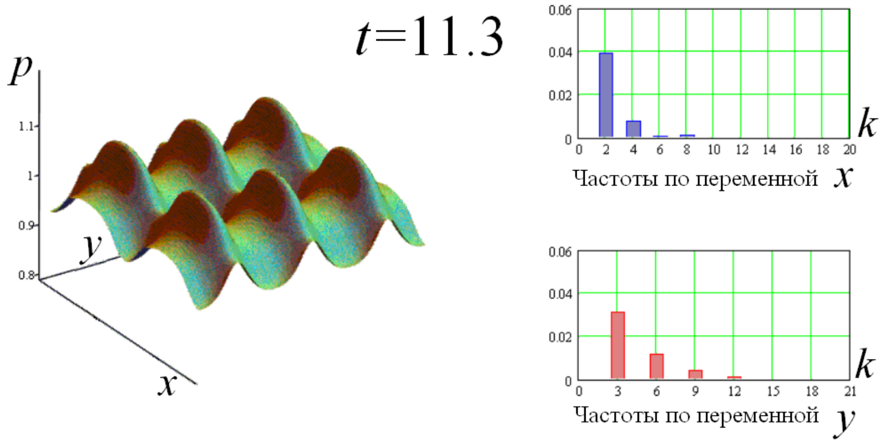

Рис. 3. Давление при $t = 11{,}3$ *Fig. 3.* Pressure at $t = 11.3$

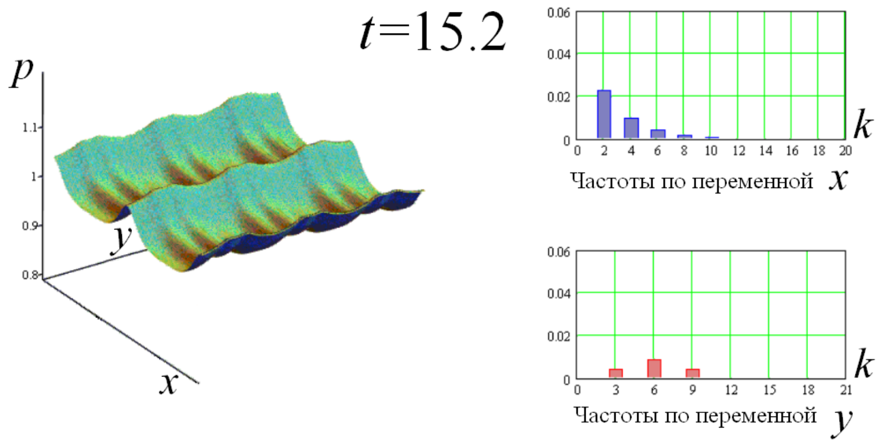

Рис. 4. Давление при $t = 15{,}2$ *Fig. 4.* Pressure at $t = 15.2$

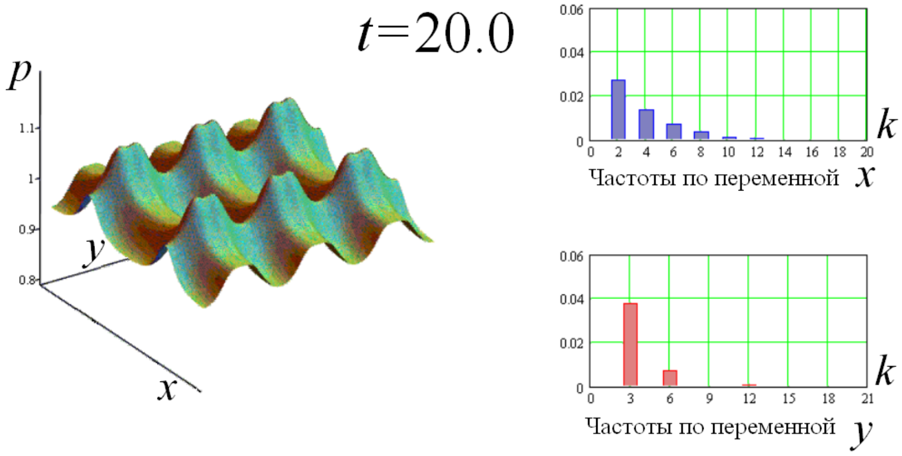

Рис. 5. Давление при $t = 20$ *Fig. 5.* Pressure at $t = 20$

Автор благодарит В. Е. Замыслова за полезные обсуждения и П. П. Скачкова за проведение численных расчетов.

Заключение

В данной работе впервые газодинамические параметры сжимаемых вязких теплопроводных течений представлены в виде бесконечных сумм гармоник от пространственной переменной с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. Для этих коэффициентов получены бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, анализ которых позволил доказать теорему о кратных частотах. В частности, тем самым установлен факт разделения независимых пространственных переменных в полученных решениях. Аналитические результаты, установленные теоремой о кратных частотах, проиллюстрированы разностными расчетами.

Представляется, что построенные решения можно использовать для приближенного построения различных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

Разрабатываемая методика представления решений полной системы уравнений Навье-Стокса показала свою эффективность при аналитических исследованиях.

Список литературы

1. Баутин С. П. Аналитическое построение течений вязкого газа с помощью последовательности линеаризованных систем Навье-Стокса / С. П. Баутин // Прикладная математика и механика. 1988. Том 52. № 4. С. 579-589.
2. Баутин С. П. Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа / С. П. Баутин, В. Е. Замыслов, П. П. Скачков. Новосибирск: Наука, 2014. 90 с.
3. Баутин С. П. Одно представление периодических трехмерных нестационарных решений полной системы уравнений Навье-Стокса / С. П. Баутин. Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2015. 46 с.

4. Баутин С. П. Одномерные периодические течения вязкого теплопроводного газа / С. П. Баутин, В. Е. Замыслов // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2013. № 1 (17). С. 4-13.
5. Баутин С. П. Представление приближенных решений полной системы уравнений Навье-Стокса в одномерном случае / С. П. Баутин, В. Е. Замыслов // Вычислительные технологии. 2012. Том 17. № 3. С. 3-12.
6. Баутин С. П. Представление решений системы уравнений Навье-Стокса в окрестности контактной характеристики / С. П. Баутин // Прикладная математика и механика. 1987. Том 51. № 4. С. 574-584.
7. Баутин С. П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике / С. П. Баутин. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
8. Баутин С. П. Характеристические поверхности в течениях газа / С. П. Баутин // Прикладная математика и механика. 2001. Том 65. № 5. С. 862-875.
9. Замыслов В. Е. Сравнение двух приближенных методов решения одной начально-краевой задачи газовой динамики с учетом вязкости и теплопроводности / В. Е. Замыслов, П. П. Скачков // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2012. № 4 (16). С. 29-38.
10. Замыслов В. Е. Стоячие волны как решения полной системы уравнений Навье-Стокса в одномерном случае / В. Е. Замыслов // Вычислительные технологии. 2013. Том 18. № 2. С. 33-45.
11. Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988. 736 с.
12. Титов С. С. Пространственно-периодические решения полной системы Навье-Стокса / С. С. Титов // Доклады АН. 1999. Том. 365. № 6. С. 761-763.
13. Титов С. С. Решение уравнений с особенностью в аналитических шкалах банаховых пространств / С. С. Титов. Препринт. Екатеринбург: Уральская государственная архитектурно-художественная академия, 1999. 264 с.

Sergei P. BAUTIN[1]

A THEOREM ON MULTIPLE FREQUENCIES FOR THREE-DIMENSIONAL UNSTEADY GAS FLOWS

[1] Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Department of Natural Sciences,
Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg)
SBautin@usurt.ru

Abstract

The analytical construction of the exact and approximate flows of the compressible viscous heat conducting gas causes great difficulties. We propose a technique for simulating one-dimensional flows of a compressible viscous heat-conducting gas in which gas-dynamic parameters are presented as infinite sums of harmonics from a spatial variable with unknown coefficients depending on time. For the unknown coefficients, infinite systems of ordinary differential equations are obtained. When the finite number of terms in the trigonometric series is taken into account, the corresponding finite systems are numerically integrate. In this paper, this method investigates the special cases of three-dimensional non-stationary periodic flows. For the unknown coefficients of infinite trigonometric series, an infinite system of ordinary differential equations is obtained. A concrete property of the solutions of this system is established: the multiplicity theorem describing the set of frequencies arising in the solution.

Keywords

Three-dimensional non-stationary flows of compressible viscous heat conducting gas, complete system of Navier-Stokes equations, multiple frequency theorem.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-1-111-123

REFERENCES

1. Bautin S. P. 1988. “Analiticheskoe postroenie techeniy vyazkogo gaza s pomoshch’yu posledovatel’nosti linearizovannykh sistem Nav’e-Stoksa” [Analytical Construction

Citation: Bautin S. P. 2017. “A Theorem on Multiple Frequencies for Three-Dimensional Unsteady Gas Flows”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 3, no 1, pp. 111-123.
DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-1-111-123

of Flows of Viscous Gas with the Help of Sequences of the Navier-Stokes Linear Systems]. Prikladnaya matematika i mekhanika, vol. 52, no 4, pp. 579-589.

2. Bautin S. P., Zamyslov V. E., Skachkov P. P. 2014. Matematicheskoe modelirovanie trigonometricheskimi ryadami odnomernykh techeniy vyazkogo teploprovodnogo gaza [Mathematical Modeling by Trigonometric Series of One-Dimensional Flows of Viscous Heat-Conducting Gas]. Novosibirsk: Science.
3. Bautin S. P. 2015. Odno predstavlenie periodicheskikh trekhmernykh nestatsionarnykh resheniy polnoy sistemy uravneniy Nav'e-Stoksa [One Representation of Periodic Three-Dimensional Non-Stationary Solutions of the Complete System of Navier-Stokes Equations]. Yekaterinburg: UrGUPS.
4. Bautin S. P., Zamyslov V. E. 2013. "Odnomernye periodicheskie techeniya vyazkogo teploprovodnogo gaza" [One-Dimensional Periodic Flows of Viscous Heat-Conducting Gas]. Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya, no 1 (17), pp. 4-13.
5. Bautin S. P., Zamyslov V. E. 2012. "Predstavlenie priblizhennykh resheniy polnoy sistemy uravneniy Nav'e-Stoksa v odnomernom sluchae" [Representation of Approximate Solutions of the Complete System of Navier-Stokes Equations in One-Dimensional Case]. Computational Technologies, vol. 17, no 3, pp. 3-12.
6. Bautin S. P. 1987. "Predstavlenie resheniy sistemy uravneniy Nav'e-Stoksa v okrestnosti kontaktnoy kharakteristiki" [Representation of Solutions of the Navier-Stokes equation system Neighborhood of the Contact Characteristic]. Prikladnaya matematika i mekhanika, vol. 51, no 4, pp. 574-584.
7. Bautin S. P. 2009. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoy dinamike [Characteristic problem of Cauchy and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Science.
8. Bautin S. P. 2001. "Kharakteristicheskie poverkhnosti v techeniyakh gaza" [Characteristic Surfaces in Gas Flows]. Prikladnaya matematika i mekhanika, vol. 65, no 5, pp. 862-875.
9. Zamyslov V. E., Skachkov P. P. 2012. "Sravnenie dvukh priblizhennykh metodov resheniya odnoy nachal'no-kraevoy zadachi gazovoy dinamiki s uchetom vyazkosti i teploprovodnosti" [Comparing Two Approximate Methods for Solving an Initial Boundary Value Problem of Gas Dynamics with Account of Viscosity and Thermal Conductivity]. Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya, no 4 (16), pp. 29-38.
10. Zamyslov V. E. 2013. "Stoyachie volny kak resheniya polnoy sistemy uravneniy Nav'e-Stoksa v odnomernom sluchae" [Standing Waves as a Solution of the Complete Navier - Stokes Equations in the One-Dimensional Case]. Computational Technologies, vol. 18, no 2, pp. 33-45.
11. Landau L. D., Lifshitz E. M. 1988. Teoreticheskaya fizika. Tom VI. Gidrodinamika [Theoretical Physics. Volume VI Hydrodynamics]. Moscow: Nauka.
12. Titov S. S. 1999. "Prostranstvenno-periodicheskie resheniya polnoy sistemy Nav'e-Stoksa" [Spatial Periodic Solutions of the Complete Navier-Stokes System]. Reports of the Academy of Sciences, vol. 365, no 6, pp. 761-763.
13. Titov S. S. (1999). "Reshenie uravneniy s osobennost'yu v analiticheskikh shkalakh banakhovykh prostranstv" [Solving of Equations with Singularity in Analytic Scales of Banach Spaces]. Working paper. Yekaterinburg: Ural State Architectural and Artistic Academy.