

Дарья Дмитриевна БАРАННИКОВА¹
Александр Геннадьевич ОБУХОВ²

УДК 533.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОГНЕННЫХ ВИХРЕЙ*

¹ старший преподаватель кафедры алгебры и математической логики,
Тюменский государственный университет
d.d.barannikova@utmn.ru

² доктор физико-математических наук, профессор
кафедры алгебры и математической логики,
Тюменский государственный университет
aobukhov@tsogu.ru

Аннотация

Рассматривается математическое численное моделирование закрученного течения воздуха вокруг плавно нагреваемой вертикальной цилиндрической области в условиях действия сил тяжести и Кориолиса. Математической моделью выбрана полная система нелинейных дифференциальных уравнений Навье — Стокса. Она представляет собой дифференциальную форму основных законов сохранения импульса, массы и энергии. Кроме того, в ней учитываются основные законы термодинамики и диссипативные свойства вязкости и теплопроводности сжимаемого вязкого политропного газа. Численно решается полная система дифференциальных уравнений Навье — Стокса и учитывается постоянство коэффициентов вязкости и коэффициента теплопроводности. Начальные условия представляют собой функции, которые описывают находящийся в покое газ в поле силы тяготения. Эти функции представляют собой точное решение указанной системы дифференциальных урав-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, проект № 1.4539.2017/8.9.

Цитирование: Баранникова Д. Д. Математическое численное моделирование огненных вихрей / Д. Д. Баранникова, А. Г. Обухов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2017. Том 3. № 2. С. 60-71.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-2-60-71

нений. Выполнены расчеты всех газодинамических параметров: плотности, температуры, давления и трех компонент скорости частиц газа для различных моментов времени в начальной стадии формирования потока воздуха. Построены мгновенные линии тока, соответствующие траекториям движения частиц в возникающем течении. Установлено отрицательное направление закрутки течения воздуха, возникающего при нагревании вертикальной цилиндрической области.

Ключевые слова

Система нелинейных дифференциальных уравнений, нестационарные течения газа, разностный метод.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-2-60-71

Введение

Наблюдаемые в природе огненные вихри имеют закрутку противоположную той, которая присуща тропическим циклонам и торнадо. Экспериментально удалось получить близкие по свойствам природным огненным вихрям течения газа. Кроме того, было найдено решение системы дифференциальных уравнений газовой динамики, определяющее направление закрутки в таких течениях. В настоящей работе предпринята попытка численно смоделировать закрученное течение воздуха, возникающее при нагреве центральной вертикальной области газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса. Представляется, что такое течение в некотором смысле моделирует реальное течение, возникающее в соответствующем физическом эксперименте.

Основная часть

В экспериментальных работах [9] с тепловыми восходящими потоками воздуха, кроме вертикального движения воздуха, отмечается и закрученное его движение. При этом закрутка имеет положительное направление для Северного полушария Земли и отрицательное направление для Южного. Аналогичное поведение воздуха наблюдается в тропических циклонах и торнадо [11]. Результаты работ [1, 3, 6, 7] аналитически моделируют течения воздуха в разрушительных вихрях с помощью решения системы дифференциальных уравнений газовой динамики. Показано, что при появлении стока газа внутрь вертикального цилиндра во внешнем течении появляется закрученное течение воздуха. Направления закрутки совпадают с направлениями закрутки атмосферных закрученных потоков.

Наряду с этим в работе [12] по численному моделированию тепловых восходящих закрученных потоков была обнаружена одна особенность движения газа в начале формирования восходящего закрученного потока при нагреве части нижней плоскости. Она заключается в том, что на границе области нагрева возникают встречные потоки с противоположными направлениями закрутки. Это приводит к появлению в этой области нескольких вихревых образований с противоположным направлением вращения.

Часто в природе возникают огненные торнадо [10], в которых закрутка имеет противоположное направление. В Северном полушарии они имеют отрицательное направление закрутки, а в Южном положительное.

Математическое описание решения системы дифференциальных уравнений газовой динамики, передающего возникновение течения с закруткой в соответствующем направлении при нагреве поверхности вертикального цилиндра, приведено в работе [2].

В частности, если в покоящемся в поле силы тяжести газе начинает нагреваться поверхность вертикального цилиндра, то кроме радиального движения газа под действием силы Кориолиса появляется и закрученное его движение. Направление этой закрутки противоположно направлению закрутки, наблюдающейся у тропических циклонов и торнадоподобных вихрей.

Экспериментально [8] удалось получить течения, близкие по свойствам к природным огненным вихрям. При этом было продемонстрировано создание огненных вихрей в условиях лаборатории без применения специальных закручивающих устройств.

В настоящей работе численно смоделировано закрученное течение воздуха, возникающее при постепенном нагреве центральной, вертикально расположенной области газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса. Представляется, что такое численно построенное течение в определенном смысле моделирует реальное течение, возникающее в соответствующем физическом эксперименте [8].

Для описания сложных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа с диссипативными свойствами используется полная система нелинейных дифференциальных уравнений Навье — Стокса. Эта система в безразмерных переменных при учете сил тяжести и Кориолиса имеет вид [6]:

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right], \\ T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + \right. \\ \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты вязкости и теплопроводности в безразмерном виде $\mu_0 = 0,001$, $\kappa_0 \approx 1,46 \mu_0$.

В представленной выше системе (1): t — безразмерное значение времени; x, y, z — координаты в прямоугольной системе; ρ — безразмерная плотность газа; $\mathbf{V} = (u, v, w)$ — скорость; T — температура; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — ускорение; $\gamma = 1,4$ — показатель адиабаты; $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (av - bw, -au, bu)$ — ускорение Кориолиса, где $a = 2\Omega \sin \psi$, $b = 2\Omega \cos \psi$, $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$, $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость Земли; ψ — широта начала прямоугольной системы координат $Oxyz$.

За начальные условия приняты функции, являющиеся точным решением [5] системы (1):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad T_0(z) = 1 - kz,$$

$$k = l \frac{x_{00}}{T_{00}}, \quad l = 0.0065 \frac{\text{К}}{\text{м}}, \quad x_{00} = 50 \text{ м}, \quad T_{00} = 288 \text{ К}, \quad (2)$$

$$\rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}, \quad \nu = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Расчетной областью являлся прямоугольный параллелепипед с длинами сторон $x^0 = 1$, $y^0 = 1$ и $z^0 = 0,2$ вдоль осей координат.

На четырех боковых гранях расчетной области для плотности и температуры брались значения из стационарного начального распределения, а для всех остальных газодинамических параметров на всех гранях — условия непрерывности [4]. Постепенный осесимметричный нагрев до температуры 300 °С в центре вертикальной части расчетной области для каждого дискретного значения высоты моделировался с помощью функции

$$T(x, y, t) = 1 + 0.99(1 - e^{-10t})e^{\left(-\frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{r_0^2}\right)}. \quad (4)$$

Здесь r_0 — безразмерный эффективный радиус нагрева.

Расчетная область заполнена сеткой узлов пересечением плоскостей $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$, где $x_i = i \cdot \Delta x$, $y_j = j \cdot \Delta y$, $z_k = k \cdot \Delta z$, $0 \leq i \leq L$, $0 \leq j \leq M$, $0 \leq k \leq N$. Расчетные шаги равны соответственно $\Delta x = x^0 / L$, $\Delta y = y^0 / M$, $\Delta z = z^0 / N$. Расчетный шаг по времени постоянный $\Delta t = 0,001$.

Масштабные значения характеристик: $\rho_{00} = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $u_{00} = 333 \text{ м/с}$, $x_{00} = 50 \text{ м}$, $t_{00} = x_{00} / u_{00} = 0,15 \text{ с}$.

Расчетные шаги по пространству $\Delta x = \Delta y = 0,005$, $\Delta z = 0,01$.

На рис. 1-3 приведены термодинамические характеристики потока воздуха для средних значений высоты и момента времени 5 мин. Этот момент времени наступил после совершения двух миллионов шагов по времени при расчетах. По осям Ox и Oy безразмерные расстояния.

На рис. 1 приведено распределение температуры для фиксированного момента времени в виде графика функции двух пространственных переменных. Температура в процессе расчета изменяется в соответствии с заданным соотношением (4). Периферийные безразмерные значения остаются равными масштабной единице (размерное значение 288 К или 15 °С). В центре температура плавно изменяется до максимального безразмерного значения 1,99 (573 К или 300 °С). Подобное распределение температуры принято для всех дискретных значений высоты, и тем самым моделируется вертикальный осесимметричный нагрев всей расчетной области.

Тепловое возмущение передается в виде колец, распространяющихся от центральной области нагрева к боковым граням.

На рис. 2 представлено распределение плотности газа в тот же конкретный фиксированный момент времени. Поведение плотности в процессе начального формирования потока нагревающегося газа характеризуется колебаниями безразмерных значений около единичного масштабного и постепенным расширением этих колебаний к периферийным областям. Кроме того, наблюдается па-

дение плотности до минимального значения 0,65 (размерное 0,84 кг/м³) в центре вертикальной области нагрева.

На рис. 3 приведено распределение давления газа в тот же фиксированный момент времени. Поскольку давление газа в безразмерных переменных представляет собой произведение температуры на плотность, то поведение давления во многом определяется поведением этих термодинамических характеристик. В частности, наблюдаются колебания значений давления, распространяющиеся в виде колец от центральной области нагрева. В центральной части расчетной области происходит кольцеобразное понижение давления до минимального значения 0,9 (размерное $0,9 \cdot 10^5$ Па). В центре области нагрева в последующие моменты времени образуется локальный максимум давления со значением 1,29 (размерное $1,29 \cdot 10^5$ Па).

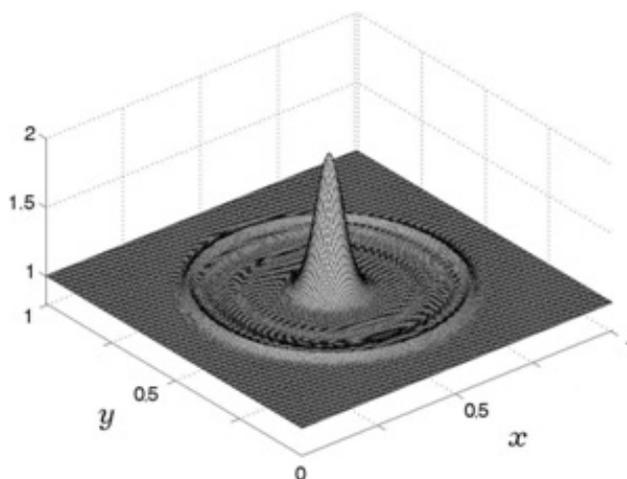


Рис. 1. Распределение температуры

Fig. 1. Temperature distribution

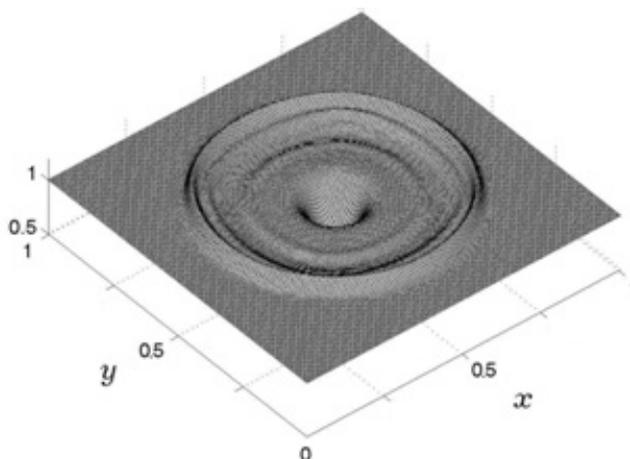


Рис. 2. Распределение плотности

Fig. 2. Density distribution

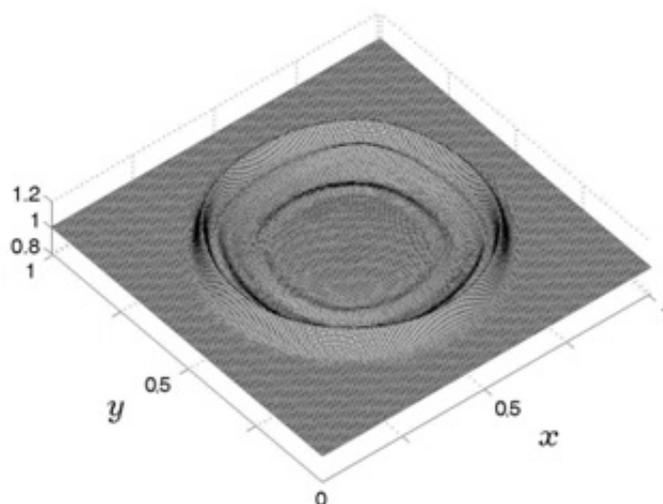


Рис. 3. Распределение давления

Fig. 3. Pressure distribution

На рис. 4-6 приведены результаты расчета компонент скорости возникающих при нагреве потока воздуха для центральной части расчетной области в тот же конкретный фиксированный момент времени.

Поведение x -ой компоненты скорости частиц газа, представленной на рис. 4, может быть охарактеризовано следующим образом. В начальный момент времени эта компонента скорости, так же как и две другие, равна нулю. С течением времени в области нагрева возникают два основных противоположно направленных от центра потока, которые характеризуются возрастающими по абсолютной величине и противоположными по направлению скоростями. Модули этой компоненты скорости возрастают до значений 0,03 (размерное 9,99 м/с).

Кроме того, возникают области с противоположными по знаку значениями скоростей, которые четко говорят о наличии закрученного движения газа вокруг центра нагрева в отрицательном направлении. Подобное поведение наблюдается и для второй компоненты скорости, представленной на рис. 5.

И, наконец, на рис. 6 приведена поверхность, графически изображающая вертикальную компоненту скорости частиц газа в тот же фиксированный момент времени. В начальный момент времени третья компонента скорости во всех узлах расчетной области была равна нулю. С течением времени в центральной части начинает формироваться кольцеобразная область с положительными и отрицательными значениями вертикальной составляющей скорости частиц газа. Несмотря на существенно меньшие значения, данная компонента скорости показывает, что формирующийся при нагревании поток газа расположен не в горизонтальной плоскости, а под некоторым наклоном. Причем угол наклона потока газа непрерывно меняется, о чем свидетельствуют результаты расчета данной компоненты скорости.

Различные по знаку и величине рассчитанные вертикальные скорости, приведенные на рис. 6 для фиксированной высоты расчетной области, очевидно, указывают на интенсивное перемешивание частиц газа в формирующемся тепловом потоке.

О сложном характере движения газа в таком потоке говорят и построенные на рис. 7 мгновенные линии тока (вид сверху) движущихся частиц газа. Представлены несколько линий тока, которые выпущены на средней высоте из центральной части расчетной области. Вдоль осей Ox и Oy отложены безразмерные расстояния.

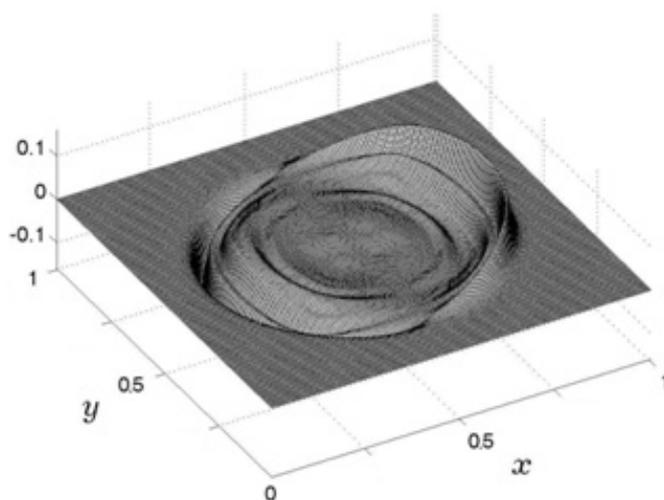


Рис. 4. Распределение первой компоненты скорости

Fig. 4. The distribution of the first velocity component

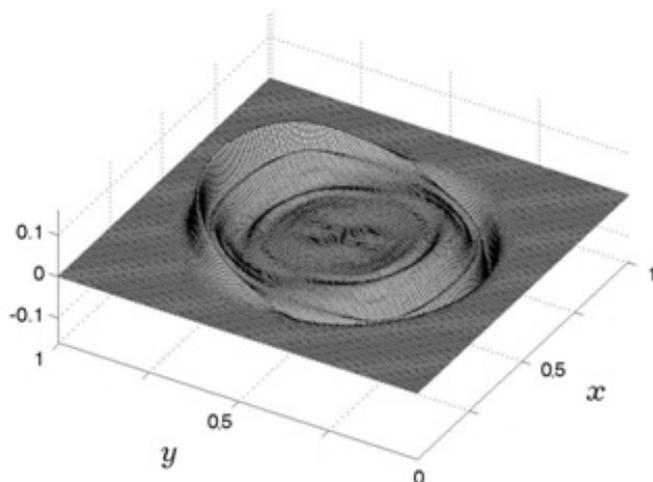


Рис. 5. Распределение второй компоненты скорости

Fig. 5. The distribution of the second velocity component

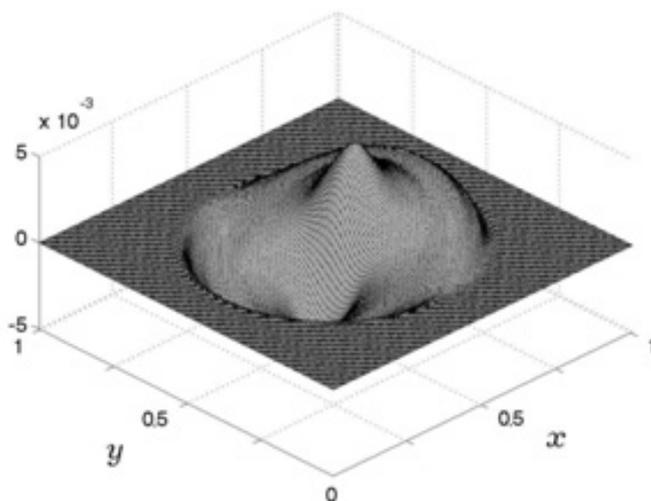


Рис. 6. Распределение третьей компоненты скорости

Fig. 6. The distribution of the third velocity component

Вид линий тока позволяет судить о том, что закрученный в отрицательную сторону поток формируется в некоторую цилиндрическую поверхность, интенсивно меняющуюся со временем. Это еще раз говорит о том, что рассчитывается принципиально нестационарный и трехмерный поток, моделирующий формирование огненного вихря. Среднее значение диаметра цилиндрической поверхности совпадает с диаметром эффективного нагрева вертикальной области.

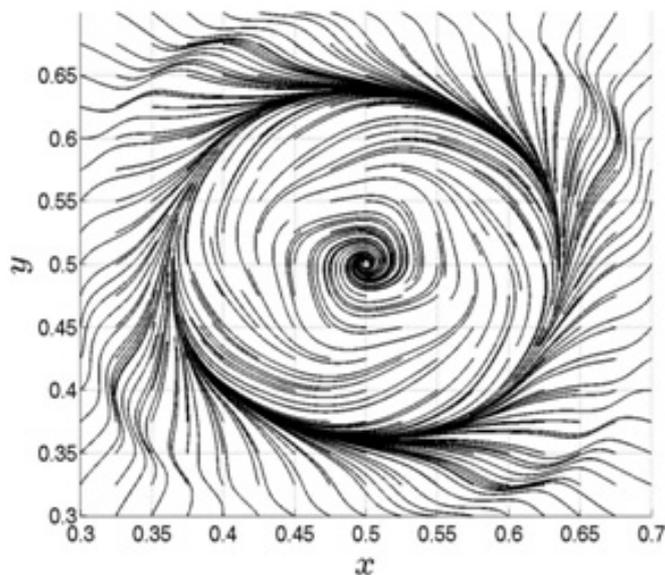


Рис. 7. Мгновенные линии тока (вид сверху)

Fig. 7. Instantaneous streamlines (top view)

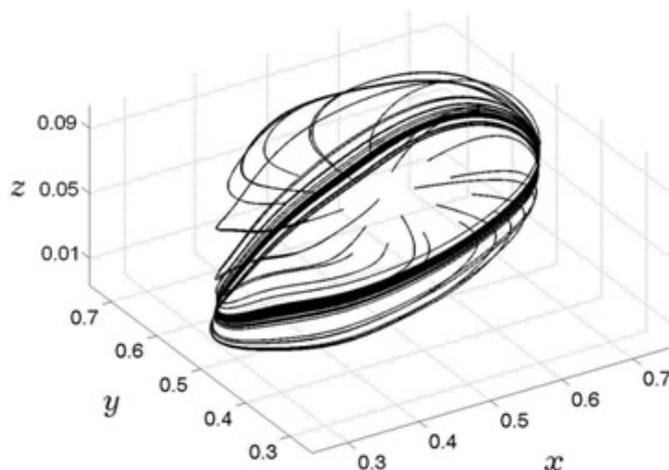


Рис. 8. Мгновенные линии тока
(вид под углом)

Fig. 8. Instantaneous streamlines
(view at an angle)

На рис. 8 видно, как выпущенные из центра мгновенные линии тока, кроме закрутки в отрицательном направлении, еще и постепенно дрейфуют в вертикальном направлении. Хорошо фиксируется угол, под которым наклонены плоскости отдельных витков. Левая часть линий тока соответствует отрицательным значениям вертикальной скорости, а правая часть положительным. Кроме того, с течением времени наблюдается вращение плоскости витков вокруг вертикальной оси в положительном направлении.

Существенным моментом является обнаруженное в расчете сложное поведение полученного теплового вихря: в процессе расчета он меняет свои размеры, перемещается вдоль горизонтальной плоскости, в некоторые моменты времени исчезает, а затем вновь возникает. Внутри основного вихря могут возникать одна или несколько вихревых структур меньших размеров и также с отрицательной закруткой.

Заключение

Результаты выполненных расчетов свидетельствуют о сложной структуре возникающего течения, его ярко выраженной нестационарности. Рассчитаны все газодинамические параметры течений в произвольные моменты времени, построены линии тока таких течений. В результате установлено возникновение отрицательного направления закрутки течения воздуха при нагревании вертикальной цилиндрической области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С. П. Закрутка газа при плавном стоке в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова // Теплофизика высоких температур. 2012. Том 50. № 3. С. 473-475.
2. Баутин С. П. Закрутка огненного вихря при учете сил тяжести и Кориолиса / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов. Теплофизика высоких температур. 2015. Том 53. № 6. С. 961-964. DOI:10.7868/S0040364415050038
3. Баутин С. П. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей / С. П. Баутин, А. Г. Обухов. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
4. Баутин С. П. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа / С. П. Баутин, А. Г. Обухов // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 5. С. 55-63.
5. Баутин С. П. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики / С. П. Баутин, А. Г. Обухов // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 4. С. 81-86.
6. Баутин С. П. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов. Екатеринбург: УрГУПС, 2017. 336 с.
7. Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса / С. П. Баутин. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
8. Вараксин А. Ю. О возможной генерации огненных вихрей без использования принудительной закрутки / А. Ю. Вараксин, М. Э. Ромаш, В. Н. Копейцев, М. А. Горбачев // Доклады Академии Наук. 2014. Том 456. № 2. С. 159-161. DOI: 10.7868/S0869565214140102
9. Вараксин А. Ю. Торнадо / А. Ю. Вараксин, М. Э. Ромаш, В. Н. Копейцев. М.: Физматлит, 2011. 312 с.
10. Наливкин Д. В. Смерчи / Д. В. Наливкин. М.: Наука, 1984. 112 с.
11. Наливкин Д. В. Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность / Д. В. Наливкин. Л.: Наука, 1969. 487 с.
12. Обухов А. Г. Особенности течения газа в начальной стадии формирования теплового восходящего закрученного потока / А. Г. Обухов, Д. Д. Баранникова // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2014. № 6. С. 65-70.

Darya D. BARANNIKOVA¹
Alexandr G. OBUKHOV²

MATHEMATICAL NUMERICAL SIMULATION OF FIRE VORTICES*

¹ Senior Lecturer, Department of Algebra
and Mathematical Logic,
Tyumen State University
d.d.barannikova@utmn.ru

² Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Department of Algebra and Mathematical Logic,
Tyumen State University
aobukhov@tsogu.ru

Abstract

This article considers mathematical numerical simulation of a swirling flow of air around a smoothly heated vertical cylindrical region under the action of gravity and Coriolis. The mathematical model is the complete system of nonlinear differential Navier-Stokes equations. It is a differential form of the basic laws of conserving momentum, mass, and energy. In addition, the authors take into account the basic laws of thermodynamics and the dissipative properties of the viscosity and thermal conductivity of a compressible viscous polytropic gas. The complete system of Navier-Stokes differential equations is solved numerically and the constancy of the viscosity coefficients and the thermal conductivity coefficient is taken into account. The initial conditions are functions that describe the gas at rest in the gravitational field. These functions represent an exact solution of the above system of differential equations. All gas-dynamical parameters — density, temperature, pressure, and three components of the velocity of gas particles are calculated for different time instants in the initial stage of air flow formation. Instantaneous streamlines corresponding to the particle trajectories in the emerging flow are constructed. A negative direction of the twisting of the air flow, which occurs when the vertical cylindrical region is heated, is established.

* The work was carried out with the financial support of the Ministry of Education and Science of Russia, project No 1.4539.2017/8.9.

Citation: Barannikova D. D., Obukhov A. G. 2017. “Mathematical Numerical Simulation of Fire Vortices”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 3, no 2, pp. 60-71.
DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-2-60-71

Keywords

System of nonlinear differential equations, nonstationary gas flows, difference method.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-2-60-71

REFERENCES

1. Bautin S. P., Krutova I. Yu. 2012. "Zakrutka gaza pri plavnom stoke v usloviyakh deystviya sil tyazhesti i Koriolisa" [The Swirling of Gas in a Smooth Flow under the Conditions of Gravity and Coriolis Forces]. *Thermophysics of High Temperatures*, vol. 50, no 3, pp. 473-475.
2. Bautin S. P., Krutova I. Yu., Obukhov A. G. 2015. "Zakrutka ognennogo vikhrya pri uchete sil tyazhesti i Koriolisa" [The Twisting of a Fiery Vortex When Gravity and Coriolis are Taken into Account]. *Thermal Physics of High Temperatures*, vol. 53, no 6, pp. 961-964. DOI:10.7868/S0040364415050038
3. Bautin S. P., Obukhov A. G. 2012. *Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nykh atmosferykh vikhrey* [Mathematical Modeling of Destructive Atmospheric Vortices]. Novosibirsk: Nauka.
4. Bautin S. P., Obukhov A. G. 2013. "Ob odnom vide kraevykh usloviy pri raschete trekhmernykh nestatsionarnykh techeniy szhimaemogo vyazkogo teploprovodnogo gaza" [On a Form of Boundary Conditions in the Calculation of Three-Dimensional Unsteady Flows of a Compressible Viscous Heat-Conducting Gas]. *Izvestiya Vuzov. Oil and gas*, no 5, pp. 55-63.
5. Bautin S. P., Obukhov A. G. 2013. "Oдно tochnoe stacionarnoe reshenie sistemy uravneniy gazovoy dinamiki" [One Exact Stationary Solution of the System of Equations of Gas Dynamics]. *Izvestiya Vuzov. Oil and gas*, no 4, pp. 81-86.
6. Bautin S. P., Deryabin S. L., Krutova I. Yu., Obukhov A. G. 2017. *Razrushitel'nye atmosferynye vikhri i vrashchenie Zemli vokrug svoey osi* [Destructive Atmospheric Vortices and the Rotation of the Earth Around Its Axis]. Yekaterinburg: USURT.
7. Bautin S. P. 2008. *Tornado i sila Koriolisa* [Tornado and the Coriolis Force]. Novosibirsk: Nauka.
8. Varaksin A. Yu., Romash M. E., Kopeytsev V. N., Gorbachev M. A. 2014. "O vozmozhnoy generatsii ognennykh vikhrey bez ispol'zovaniya prinuditel'noy zakrutki" [On the Possible Generation of Fiery Vortices without the Use of Forced Twist]. *Reports of the Academy of Sciences*, vol. 456, no 2, pp. 159-161. DOI: 10.7868/S0869565214140102
9. Varaksin A. Yu., Romash M. E., Kopeytsev V. N. 2011. *Tornado* [Tornado]. Moscow: Fizmatlit.
10. Nalivkin D. V. 1984. *Smerchi* [Tornadoes]. Moscow: Nauka.
11. Nalivkin D. V. 1969. *Uragany, buri i smerchi. Geograficheskie osobennosti i geologicheskaya deyatel'nost'* [Hurricanes, Storms and Tornadoes. Geographical Features and Geological Activity]. Leningrad: Nauka.
12. Obukhov A. G., Barannikova D. D. 2014. "Osobennosti techeniya gaza v nachal'noy stadii formirovaniya teplovogo voskhodyashchego zakruchennogo potoka" [Peculiarities of Gas Flow in the Initial Stage of the Formation of a Thermal Ascending Swirling Flow]. *Izvestiya Vuzov. Oil and gas*, no 6, pp. 65-70.