ТЕПЛОФИЗИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА

Борис Гаврилович АКСЕНОВ[1]
Юрий Евгеньевич КАРЯКИН[2]

УДК 536.12

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ МНОГОФРОНТОВЫХ ЗАДАЧ СТЕФАНА

[1] доктор физико-математических наук,
профессор кафедры промышленной теплоэнергетики,
Тюменский индустриальный университет
aksenov_bg@me.com

[2] кандидат технических наук,
доцент кафедры информационных систем,
Тюменский государственный университет
y.e.karyakin@utmn.ru

Аннотация

Теплообмен с фазовым переходом традиционно описывается задачей Стефана, которая представляет из себя систему дифференциальных уравнений параболического типа с обычными краевыми условиями и дополнительным условием на границе фазового перехода. Можно формально перейти к одному уравнению типа теплопроводности, но тогда в одном из коэффициентов появляется дельта-функция, отражающая выделение Джоулева тепла при температуре фазового перехода. Широко распространенный метод «сквозного счета», заключающийся в замене дельта-функции на дельтообразную функцию, сводит задачу Стефана к краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности. Но

Цитирование: Аксенов Б. Г. Численное моделирование одномерных многофронтовых задач Стефана / Б. Г. Аксенов, Ю. Е. Карякин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2017. Том 3. № 3. С. 8-16.
DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-3-8-16

при таком подходе результатом расчетов является поле температур, по которому трудно идентифицировать положение границы фазового перехода. Между тем расчет часто производится главным образом для установления динамики фазовых превращений. Поэтому разработано большое количество методов решения задачи Стефана, в которых искомой величиной является именно координата фронта. Общим недостатком этих методов является то, что они мало пригодны для ситуаций, когда фронтов несколько, когда эти фронты появляются и исчезают, меняют направление движения, сливаются друг с другом. В этом случае следить за движением каждого фронта становится нелегким делом. В данной статье на примере задачи о промерзании — оттаивании влажного грунта под воздействием сезонных колебаний температуры поверхности изложен метод решения задачи Стефана, позволяющий получать координату фронта как нулевую изотерму. В этом методе исключена необходимость специального контроля за эволюцией каждого фронта. Задача Стефана рассматривается как предельный случай более общей задачи о фазовом переходе в некотором диапазоне температур. Стандартные преобразования и применение функции Грина позволяют записать эту задачу в виде интегрального уравнения. Приближенное решение получается в виде рекуррентной формулы. В статье приводится пример расчета. Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с расчетами по методу «сквозного счета». Но здесь мы получаем не поле температур, а зависимость положения границы фронта от времени. Численные эксперименты показывают, что изложенный в настоящей работе метод является удобным способом моделирования многофронтовых задач Стефана. Отметим, что оценки в виде системы функций, поочередно мажорирующих искомое решение сверху и снизу (если таковые нужны), можно получить только для монотонных задач Стефана. Для немонотонных задач это сделать не удается. Здесь требуется дополнительное исследование.

Ключевые слова

Численное моделирование, многофронтовые задачи Стефана, граница фазового перехода, поле температур, нулевая изотерма, интегральное уравнение, рекуррентная формула, немонотонные задачи.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-3-8-16

Введение

Процессы теплообмена при наличии фазовых переходов, например, сезонные теплофизические процессы во влажных грунтах, описываются обычно задачей Стефана [5, 9]. Точные решения задачи Стефана либо получены при очень ограничительных предпосылках [9], либо совершенно непригодны для практических расчетов [6]. В инженерной практике используются различные приближенные методы [10], а при необходимости строгого подхода — численные методы. Но применение обычных математических приемов численного моделирования дифференциальных уравнений (в частности, переход к конечным разностям) затрудняется в данном случае наличием фронта фазового перехода (в уравнении это дельта-функция). Широко распространенный метод А. А. Самарского, заключающийся в замене дельта-функции на дельтообразную функцию, т. е. в «размазывании» фронта, снимает эти проблемы, поскольку решается просто нелинейное уравнение теплопроводности, фронт как таковой из рассмотрения выпадает. Но при таком подходе результатом расчетов является поле температур, по которому трудно идентифицировать положение границы фазового перехода. Нулевая изотерма не является при «размазанном» фронте специфической линией, на которой выделяется (поглощается) теплота фазового перехода. А так как «размазанный» фронт должен охватывать несколько точек дискретизации по пространственной координате, то определение положения фронта возможно лишь с большой погрешностью, хотя погрешность в определении температуры мала. Между тем расчет поля температур часто производится главным образом для установления динамики фазовых превращений. Сама по себе температура имеет меньшее значение. Поэтому разработано большое количество методов решения задачи Стефана, в которых искомой величиной является именно координата фронта [3, 7]. Общим недостатком этих методов является то, что они мало пригодны для ситуаций, когда фронтов несколько, когда эти фронты появляются и исчезают, меняют направление движения, сливаются друг с другом. В этом случае следить за движением каждого фронта становится нелегким делом.

В данной статье на примере задачи о промерзании — оттаивании влажного грунта под воздействием сезонных колебаний температуры поверхности изложен метод решения задачи Стефана, позволяющий получать координату фронта как нулевую изотерму (фронт не «размазывается»). В этом методе исключена необходимость специального контроля за эволюцией каждого фронта.

Основная часть

Задачу Стефана рассмотрим как предельный случай более общей задачи о фазовом переходе в некотором диапазоне температур. В [2] эта задача формулируется следующим образом:

$$c(t)\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x})-\kappa\frac{\partial W(t(x,\tau))}{\partial \tau}, \qquad (1)$$
$$\tau>0, x>0;$$

$$t(0,\tau)=F(\tau), t(x,0)=t_н=const, |t(x,\tau)|<M, \qquad (2)$$

где t, c, λ, τ, x, κ — соответственно температура, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, время, пространственная координата, скрытая теплота фазового перехода воды, умноженная на плотность грунта; W — содержание незамерзшей влаги; $F(\tau)$ — произвольная, например, периодическая, функция с ограниченной вариацией; M — положительная константа.

Уравнение (1) с помощью подстановок Кирхгофа и Голанта приводится к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=K\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-\frac{\partial V}{\partial \tau},$$

где u, V — некоторые функции от t, $K = const$. Для простоты изложения полагаем, что эти преобразования уже выполнены.

Сохраняя обозначения переменных из (1) и полагая $c(t) = c = const$, $\lambda(t) = \lambda = const$, $a = \lambda / c$, уравнение (1) используем в виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \frac{\kappa}{c}\cdot\frac{\partial W(t(x,\tau))}{\partial \tau} \tag{3}$$

с граничными условиями (2).

Решение этой задачи, как показано в [1, 4], можно записать в виде интегрального уравнения

$$t(x,\tau) = t_0(x,\tau) - \frac{\kappa}{c}\int_0^\infty\int_0^\tau G(x,\xi,\tau-y)\,\frac{\partial W(t(\xi,y))}{\partial \tau}\,d\xi dy, \tag{4}$$

где функция Грина:

$$G(x,\xi,\tau-y) = \frac{\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a(\tau-y)}\right] - \exp\left[-\dfrac{(x+\xi)^2}{4a(\tau-y)}\right]}{2\sqrt{\pi a(\tau-y)}},$$

а $t_0(x,\tau)$ — решение уравнения $\dfrac{\partial t_0}{\partial \tau} = a\dfrac{\partial^2 t_0}{\partial x^2}$ при условиях вида (2).

Из (2), (3) получаем задачу Стефана, полагая, что $\partial W/\partial\tau$ на движущейся границе перехода равно произведению влажности W_0 на дельта-функцию и равно нулю во всех остальных точках. Определим функцию $p(x)$ как решение уравнения $t(x, \tau) = t_ф$ относительно τ, где $t_ф$ — температура фазового перехода. В дальнейшем полагаем $t_ф = 0$.

При условиях (2) $p(x)$ неоднозначна, но ее можно разложить на конечное число однозначных ветвей: $p_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n(x)$, где $p_i(x^*)$ — это моменты времени, в которые фронты фазовых переходов проходят точку x^*.

Для учета направления фазового перехода определим также функции $z(p_i) = sign(\partial t/\partial\tau|_{\tau=p_i})$, $i = 1, 2, ..., n(x)$. Тогда уравнение (3) переходит в

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \frac{\kappa W_0}{c}\cdot z(p(x))\delta(p(x)), \tag{5}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; а уравнение (4) — в

$$t(x,\tau) = t_0(x,\tau) - \frac{\kappa W_0}{c}\int_0^{x_m}\left[\sum_{i=1}^{n(\xi)} z(p_i(\xi))G(x,\xi,\tau-p_i(\xi))\right]d\xi, \tag{6}$$

где x_m — максимальное значение координаты фронта.

Из (6) легко получается метод приближенного решения задачи с помощью рекуррентной формулы:

$$t_{j+1}(x,\tau) = t_0(x,\tau) - \frac{\kappa W_0}{c}\int_0^{x_m}\left[\sum_{i=1}^{n_j(\xi)} z(p_{ji}(\xi))G(x,\xi,\tau-p_{ji}(\xi))\right]d\xi, \tag{7}$$

$$i = 1, ..., n(x), \quad j = 1, 2, ...$$

За начальное приближение принимается $t_0(x, \tau)$, по которому определяются $p_{0i}(x)$, $i = 1, 2, ..., n_0(x)$ как однозначные ветви решения уравнения $t_0(x, \tau) = 0$, а также $z(p_{0i})$ по формуле $z(p_{0i}) = sign\left(\partial t_0/\partial\tau|_{\tau=p_{0i}}\right)$.

Из последующих приближений аналогичным образом находятся p_{ji}, $z(p_{ji})$. p_{ji} находится, например, одним из методов интерполяции по известному полю температур $t_j(x, \tau)$. Процедура (7) дает хорошие результаты и легко реализуется на ЭВМ. Однако существенным препятствием к ее применению для расчета длительных процессов с большой точностью является необходимость хранения в памяти машины двумерного массива температур $t_j(x, \tau)$, используемого для расчета $t_{j+1}(x, \tau)$. Поэтому целесообразно итерационную формулу (7) применять на каждом временном шаге, а результат считать начальным условием для следующего шага по времени.

Итак, рассматриваем моменты $0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$, где $\tau_k = \Delta\tau\cdot k$; $\Delta\tau$ — шаг дискретизации по времени. Допустим, что поле температур в момент времени τ_k известно: $t(x, \tau_k)$. Тогда для определения $t(x, \tau_{k+1})$ можно записать интегральное уравнение

$$t(x,\tau_{k+1}) = t_k(x,\tau_{k+1}) - \frac{\kappa W_0}{c}\int_0^{x_m}\left[\sum_{i=1}^{n(\xi)} z(p_i(\xi))G(x,\xi,\tau-p_i(\xi))\right]d\xi, \qquad (8)$$

где $t_k(x, \tau)$ — решение задачи

$$\frac{\partial t_k}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2 t_k}{\partial x^2},\ \tau > \tau_k,\ x > 0;$$
$$t_k(0,\tau) = F(\tau);\ t_k(x,\tau_k) = t(x,\tau_k);\ |t_k(x,\tau)| < M. \qquad (9)$$

Решение задачи (9) хорошо известно [9].

Уравнение (8) решается методом последовательных приближений при начальном приближении $t_k(x, \tau)$. Рекуррентная процедура начинается с $t(x, 0) = t_н$. Нетрудно показать (следуя, например, методике [8]), что итерационный процесс (8) сходится на некотором достаточно малом отрезке $\tau_k \le \tau \le \tau^*$. Поэтому всегда можно взять $\Delta\tau < \tau^*$, что и обеспечивает получение решения. Использование формулы (8) вместо (7) существенно повышает скорость счета.

Пример расчета

В таблице 1 приведены результаты расчета при следующих значениях исходных данных:

$$F(\tau) = t_н + t_c\sin(\omega\tau + \varepsilon);\ t_н = 0{,}7\ ^\circ C;\ t_c = 15\ ^\circ C;$$
$$\omega = 1{,}9722\cdot 10^{-7}\ 1/c;\ \varepsilon = 3{,}1416;\ a = 0{,}56\cdot 10^{-6}\ м^2/c;$$
$$c = 2\ 093\frac{кДж}{м^3\cdot K};\ \kappa = 1\ 339\ 776\ \frac{кДж}{м^3};\ W_0 = 0{,}4.$$

В таблице 1 приведены значения температуры при различных x и τ.

Таблица 1

Результаты численного моделирования

Table 1

Results of the numeric simulation

τ, час	x, м									
	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0
730	–2,0	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6	0,6
2 190	–9,6	–7,1	–4,1	–0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5
3 650	–5,6	–4,8	–3,8	–2,7	–1,5	–0,1	0,3	0,3	0,4	0,4
5 110	2,6	–0,3	–0,3	–0,2	–0,2	–0,1	0,2	0,3	0,3	0,3
6 570	11,2	7,4	3,7	0,1	–0,2	–0,1	0,1	0,3	0,3	0,3
8 030	6,9	5,6	4,2	2,7	1,1	0,0	0,2	0,3	0,3	0,3
9 490	–2,0	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,2	0,2	0,3	0,3
10 950	–9,6	–7,1	–4,1	–0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3
12 410	–5,6	–4,8	–3,9	–2,8	–1,6	–0,2	0,2	0,2	0,3	0,3
13 870	2,6	–0,3	–0,3	–0,3	–0,3	–0,2	0,1	0,2	0,3	0,3
15 330	11,1	7,3	3,6	0,0	–0,2	–0,2	–0,1	0,1	0,3	0,3
Решение по методу Самарского										
5 110	2,6	0,0	–0,1	–0,3	–0,2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,3
13 870	2,6	0,1	–0,1	–0,3	–0,2	–0,1	0,0	0,2	0,3	0,3

Для сравнения при двух значениях τ приведены результаты параллельного расчета по методу Самарского.

Заключение

Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с расчетами по методу А. А. Самарского при нахождении температуры (десятые доли градуса).

Если в методе Самарского считать за границу раздела фаз нулевую изотерму, то расхождение получается очень значительное, как и следовало ожидать.

Отметим, что формулы (7), (8) получены как обобщение на задачу Стефана методов, использованных в работах [1, 2, 4] для получения оценок задач промерзания — оттаивания в виде системы функций, поочередно мажорирующих искомое решение сверху и снизу. Для монотонных задач Стефана построение оценок (если таковые нужны) и их последовательное уточнение принципиальных возражений не вызывает. Следует в качестве первых приближений взять приближенные решения, например, полученные по методу Лейбензона, обладающие свойствами оценок, а затем использовать (7) или (8). Однако непосредственно применить методики [1], [4] к немонотонным задачам Стефана не удается, так что для получения оценок таких задач требуется провести дополнительное исследование.

Численные эксперименты показывают, что изложенный в настоящей работе метод является удобным способом моделирования многофронтовых задач Стефана на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов Б. Г. Приближенное решение нелинейных немонотонных задач теории фильтрации / Б. Г. Аксенов, Ю. С. Даниэлян // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4.
2. Аксенов Б. Г. Приближение решения задачи радиационно-кондуктивного теплообмена / Б. Г. Аксенов, Ю. С. Даниэлян, Н. А. Рубцов // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1984. № 4. Вып. 1.
3. Беляев Н. М. Методы теории теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. М.: Высшая школа, 1982. Ч. 2.
4. Даниэлян Ю. С. Построение оценок решений некоторых немонотонных задач нелинейного теплообмена / Ю. С. Даниэлян, Б. Г. Аксенов // Изв. АН СССР. ТВТ. 1985. Т. 23. № 5.
5. Достовалов Б. Н. Общее мерзлотоведение / Б. Н. Достовалов, В. А. Кудрявцев. М.: Изд-во МГУ, 1967.
6. Любов Б. А. Теория кристаллизации в больших объемах / Б. А. Любов. М.: Наука, 1975.
7. Никитенко Н. Н. Исследование нестационарных процессов тепло- и массообмена методом сеток / Н. Н. Никитенко. Киев: Наукова думка, 1971.
8. Тихонов А. Н. Об остывании тел при лучеиспускании, следующем закону Стефана — Больцмана / А. Н. Тихонов // Изв. АН СССР. Сер. географии и геофизики. 1937. № 3.
9. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1966.
10. Фельдман Г. М. Прогноз температурного режима грунтов и развития криогенных процессов / Г. М. Фельдман. Новосибирск: Наука, 1977.

Boris G. AKSENOV[1]
Yuri E. KARYAKIN[2]

NUMERICAL SIMULATION OF STEFAN'S ONE-DIMENSIONAL MULTI-FRONT PROBLEMS

[1] Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Department of Industrial Thermal Power Engineering,
Industrial University of Tyumen
aksenov_bg@me.com

[2] Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor,
Department of Information Systems, University of Tyumen
y.e.karyakin@utmn.ru

Abstract

Heat transfer with the phase transition is traditionally described with the Stefan problem which consists of a system of parabolic differential equations with usual boundary conditions and an extra condition at the phase transition front. It is formally possible to use one equation of heat transfer type but then a delta-function appears in one of the coefficients which corresponds to the latent heat of phase transition emission at the temperature of phase transition. The widely used method of "continuous calculation" involves the substitution of delta-function by a delta-shaped function. It transforms the Stefan problem into a boundary problem for non-linear equation of heat transfer. Yet, in this approach the result of calculations is the temperature field, and identifying the position of the phase transition front is difficult. Meanwhile, the point of calculations is often the estimation of the dynamic of phase transition. That is why there have been developed many methods of the Stefan problem solution to find the front coordinates. A general disadvantage of these methods is the fact that they cannot be used when there are several fronts appearing, disappearing, changing directions, and joining. Following the dynamic of each front is difficult in this case.

In this paper we examine the Stefan problem as the problem of moist soil freezing and melting. A method of solving the Stefan problem which identifies the front as a zero isotherm is developed in this article. This method excludes the necessity to follow the evolution of each front. The Stefan problem is considered as the limiting case of the more general problem of phase transition in some temperature range. A number of standard transformations and Green's function help to

Citation: Aksenov B. G., Karyakin Yu. E. 2017. "Numerical Simulation of Stefan's One-Dimensional Multi-Front Problems". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 3, no 3, pp. 8-16.
DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-3-8-16

present the Stefan problem as an integral equation. Approximate solution is given by a recurrence formula with an example of numerical simulation. The results correspond with the results of the “continuous calculation” method. However, here we have not the temperature field, but the evolution of the front in time. The numeric simulation shows that the method presented here is convenient for multi-front Stefan problems solution. It should be noted that estimators in form of a system of functions, which majorize the required solution alternately above and below (if we need such estimators), may be obtained only for monotonous Stefan problems. For non-monotonous problems, it is not possible. This issue requires additional investigating.

Keywords

Numeric simulation, multi-front Stefan problems, phase transition front, temperature field, zero isotherm, integral equation, recurrence formula, non-monotonous problems.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-3-8-16

REFERENCES

1. Aksenov B. G., Danielyan Yu. S. 1985. “Priblizhennoe reshenie nelineynykh nemonotonnykh zadach teorii fil'tratsii” [An Approximate Solution of Nonlinear Nonmonotonous Problems in Filtration Theory]. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza, no 4.
2. Aksenov B. G., Danielyan Yu. S., Rubtsov N. A. 1984. “Priblizhenie resheniya zadachi radiatsionno-konduktivnogo teploobmena” [Approximation of the Solution of the Radiation-Conductive Heat Transfer Problem]. Izvestiya SO AN SSSR. Seriya tekhnicheskie nauki, vol. 4, no 1.
3. Belyaev N. M., Ryadno A. A. 1982. Metody teorii teploprovodnosti [Methods of the Theory of Heat Conductivity], vol. 2. Moscow: Vysshaya shkola.
4. Danielyan Yu. S., Aksenov B. G. 1985. “Postroenie otsenok resheniy nekotorykh nemonotonnykh zadach nelineynogo teploobmena” [Construction of Estimates for the Solutions of Certain Nonmonotonous Problems of Nonlinear Heat Transfer]. Izvestiya AN SSSR. TVT, vol. 23, no 5.
5. Dostovalov B. N., Kudryavtsev V. A. 1967. Obshchee merzlotovedenie [General Permafrost Studies]. Moscow: Izd-vo MGU,
6. Lyubov B. A. 1975. Teoriya kristallizatsii v bol'shikh ob"emakh [Theory of Crystallization in Large Volumes]. Moscow: Nauka.
7. Nikitenko N. N. 1971. Issledovanie nestatsionarnykh protsessov teplo- i massoobmena metodom setok [Investigation of Non-Stationary Processes of Heat and Mass Transfer by the Grid Method]. Kiev: Nauk, dumka.
8. Tikhonov A. N. 1937. “Ob ostyvanii tel pri lucheispuskanii, sleduyushchem zakonu Stefana-Bol'tsmana” [Cooling of Bodies with Radiation, the Following Stefan-Boltzmann’s Law]. Izvestiya AN SSSR. Seriya geografii i geofiziki, no 3.
9. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. 1966. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka.
10. Feldman G. M. 1977. Prognoz temperaturnogo rezhima gruntov i razvitiya kriogennykh protsessov [Forecast of the Temperature Regime of Soils and the Development of Cryogenic Processes]. Novosibirsk: Nauka.