

**Рамиль Фаизырович ШАРАФУТДИНОВ<sup>1</sup>**  
**Тимур Раильевич ХАБИРОВ<sup>2</sup>**  
**Артем Маратович ШАРИПОВ<sup>3</sup>**

УДК 532.685

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ В ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИНАХ  
С ПЕРЕМЕННОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ  
ОБРАТНЫХ ПОТОКОВ**

<sup>1</sup> доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры геофизики,  
Башкирский государственный университет (г. Уфа)  
gframil@inbox.ru

<sup>2</sup> кандидат физико-математических наук,  
ассистент кафедры геофизики,  
Башкирский государственный университет (г. Уфа)  
khabirovtr@mail.ru

<sup>3</sup> кандидат физико-математических наук,  
ООО «Газпромнефть НТЦ»

**Аннотация**

В статье представлены математические модели теплопереноса для расчета объемного содержания, скорости фаз, распределения температуры в стволе горизонтальной скважины. Рассматриваются случаи сонаправленного потока воды и нефти и при наличии противотока воды, предполагается, что режим течения расслоенный. При расчете гидродинамической задачи учитывается влияние силы тяжести, межфазного трения и трения о стенку скважины. При расчете температурной задачи учитывается конвективный перенос тепла, межфазный теплообмен и теплообмен со стенкой скважины.

---

**Цитирование:** Шарафутдинов Р. Ф. Исследование термогидродинамических процессов в горизонтальных скважинах с переменной траекторией при наличии обратных потоков / Р. Ф. Шарафутдинов, Т. Р. Хабиров, А. М. Шарипов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2017. Том 3. № 4. С. 110-121.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-110-121

---

В настоящее время, математические модели сонаправленных двухфазных и трехфазных потоков в горизонтальной скважине достаточно хорошо исследованы. Гораздо меньше изучены термогидродинамические поля при наличии обратного потока. Геофизические исследования, проводимые в горизонтальных скважинах, показывают, что из-за сложности траектории, очень часто встречаются скважины, в которых вероятность возникновения обратных потоков очень высока. В связи с этим актуальными являются исследования, направленные на изучение особенностей формирования объемных содержаний фаз, распределения температуры при наличии противотока.

Условия возникновения обратного потока были изучены на основании эксперимента: определялся граничный угол, при котором возникает противоток для различных дебитов нефти и воды. Представлены результаты расчета термогидродинамических полей для реальных траекторий горизонтальных скважин. Показано, что доля обратного потока в сечении скважины мала, за счет этого скорость обратного потока может быть значительной. В связи с этим обратный поток оказывает слабое влияние на распределение температуры, т. к. быстро принимает температуру восходящего потока.

#### **Ключевые слова**

Горизонтальная скважина, двухфазный поток воды и нефти, трехслойный поток, обратный поток, моделирование многофазных потоков, противоток, теплоперенос.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-110-121**

#### **Введение**

В настоящее время бурится очень большое количество горизонтальных скважин. Но их исследование для геофизиков является очень сложной задачей. Во-первых, из-за особенностей бурения, ствол горизонтальной скважины не является идеально ровным. Как правило, есть восходящие, горизонтальные и нисходящие участки. От угла наклона скважины зависят скорости фаз и толщины слоев. Во-вторых, при совместном течении нефти и воды возможны различные режимы течения: двухслойный параллельный поток, двухслойный при наличии противотока, трехслойный при наличии противотока, пузырьковый и неустойчивый режимы. Какой будет вид течения зависит от дебита нефти и воды, угла наклона и радиуса скважины. В-третьих, из-за различия коэффициентов Джоуля — Томсона, температура нефти на выходе из пласта отличается от температуры воды. Это приводит к теплообмену между фазами при движении в стволе скважины.

В данной работе рассматриваются математические модели сонаправленного потока и с учетом противотока. Они позволяют определить скорости и объемное содержание фаз по стволу скважины, распределение температуры в различные моменты времени.

#### **Модели двухслойного сонаправленного потока и трехслойного потока при наличии противотока**

В первой модели рассматривается случай сонаправленного течения нефти и воды по стволу скважины (рис. 1).

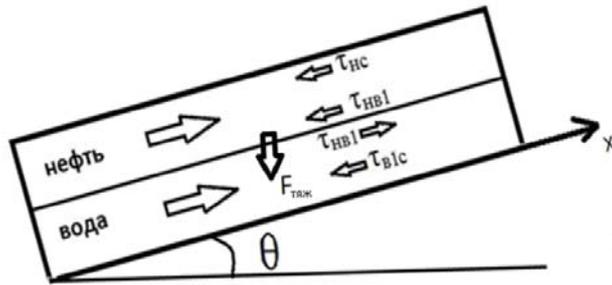


Рис. 1. Геометрия сонаправленного потока  
Fig. 1. Geometry of the co-directional flow

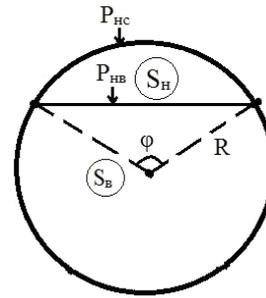


Рис. 2. Сечение трубы  
Fig. 2. Cross section of the pipe

При решении этой задачи были использованы следующие предположения: жидкости несжимаемы и не смешиваются, толщины и скорости фаз вдоль скважины с одинаковым наклоном со временем не изменяются (стационарный случай), теплообмен осуществляется по закону Ньютона, нет разогрева за счет трения, режим течения — расслоенный.

Используя закон сохранения импульса, можно составить следующую систему уравнений [1]:

$$-S_n \cdot \frac{dp}{dx} = \tau_{нс} \cdot P_{нс} + \tau_{нв} \cdot P_{нв} + \rho_n \cdot g \cdot S_n \cdot \sin\theta, \quad (1)$$

$$-S_v \cdot \frac{dp}{dx} = -\tau_{нв} \cdot P_{нв} + \tau_{вс} \cdot P_{вс} + \rho_v \cdot g \cdot S_v \cdot \sin\theta, \quad (2)$$

где  $\tau_{нс}$ ,  $\tau_{вс}$  — напряжения трения жидкостей о стенку;  $\tau_{нв}$  — напряжение трения на межфазной границе;  $P_{нс}$ ,  $P_{вс}$  — периметры, которые смачивают жидкости в сечении трубы (рис. 2);  $P_{нв}$  — периметр межфазной границы;  $S_n$ ,  $S_v$  — площади жидкостей в сечении трубы;  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — гравитационная постоянная,  $p$  — давление. Корреляции для коэффициентов трения были использованы согласно [2]:

$$\tau_{ic} = \frac{1}{2} \cdot f_i \cdot \rho_i \cdot v_i^2, \quad \tau_{нв} = f_n \cdot \frac{\rho_n \cdot (v_n - v_v)^2}{2},$$

$$f_i = \frac{\lambda_i}{4}, \lambda_i = \frac{64}{Re_i}, \quad f_i = \frac{16 \cdot \mu_i}{\rho_i \cdot v_i \cdot D_i}, \quad (3)$$

$$D_n = \frac{4 \cdot S_n}{P_{нс} + P_{нв}}, \quad D_v = \frac{4 \cdot S_v}{P_{вс}}$$

где  $i$  — обозначает фазу (нефть или вода);  $v$  — скорость течения жидкости;  $Re$  — число Рейнольдса;  $D$  — гидравлический диаметр жидкости;  $\mu$  — вязкость жидкости,  $\theta$  — угол наклона скважины.

Значения периметров, площадей и гидравлические диаметры можно задать через угол  $\phi$  (рис. 2). Таким образом, получаются два уравнения и два неизвестных параметра (градиент давления и угол  $\phi$ ). Такая система является раз-

решимой. Трудность аналитического решения этой задачи связана с тем, что уравнения являются нелинейными относительно угла  $\phi$ . Чтобы их решить, из каждого уравнения исключается  $dp/dx$ , получается одно общее уравнение, которое зависит только от одной переменной — центрального угла  $\phi$ . Полученное уравнение решалось численно с помощью метода хорд.

Уравнения теплопереноса для нефти и воды можно записать, согласно [4]:

$$\alpha_n \cdot c_n \cdot \rho_n \cdot \left( \frac{dT_n}{dt} + v_n \cdot \frac{dT_n}{dx} \right) = -a1 \cdot (T_n - T_e) \cdot \frac{P_{ng}}{S} - a0 \cdot (T_n - T_0) \cdot \frac{P_{nc}}{S}, \quad (4)$$

$$\alpha_e \cdot c_e \cdot \rho_e \cdot \left( \frac{dT_e}{dt} + v_e \cdot \frac{dT_e}{dx} \right) = a1 \cdot (T_n - T_e) \cdot \frac{P_{ng}}{S} - a0 \cdot (T_e - T_0) \cdot \frac{P_{ec}}{S}, \quad (5)$$

Здесь  $\alpha = S_i/S$  — доля занимаемая каждой жидкостью в сечении трубы,  $c$  — теплоемкость жидкости,  $a1$  — коэффициент теплообмена между нефтью и водой,  $a0$  — коэффициент теплообмена со стенкой. Корреляции для коэффициентов теплообмена были выбраны согласно [3]:

$$a1 = \frac{h_n \cdot h_e}{h_n + h_e}, \quad h_i = \frac{\lambda_i \cdot Nu_i}{D_i}, \quad (6)$$

$$Nu_i = 0,023 \cdot Re_i^{0,8} \cdot Pr_i^{0,4}, \quad Pr_i = \frac{\mu_i \cdot c_i}{\lambda_i},$$

где  $Nu$  — число Нуссельта,  $Pr$  — число Прандтля,  $h$  — коэффициент теплоотдачи,  $\lambda$  — теплопроводность жидкости.

Дифференциальные уравнения (4), (5) решались численно с использованием явной схемы, согласно [4]:

$$Tn_i^{t+1} = dt \cdot \left( \frac{-a1_i^t \cdot (Tn_i^t - Te_i^t) \cdot Pn\_e_i^t}{c_n \cdot \rho_n \cdot S n_i^t} - \frac{a0 \cdot (Tn_i^t - T0) \cdot Pn\_c_i^t}{c_n \cdot \rho_n \cdot S n_i^t} + \frac{v n_i^t \cdot (Tn_{i+1}^t - Tn_i^t)}{dx} \right) + Tn_i^t, \quad (7)$$

$$Te_i^{t+1} = dt \cdot \left( \frac{a1_i^t \cdot (Tn_i^t - Te_i^t) \cdot Pn\_e_i^t}{c_e \cdot \rho_e \cdot S e_i^t} - \frac{a0 \cdot (Te_i^t - T0) \cdot Pe\_c_i^t}{c_e \cdot \rho_e \cdot S e_i^t} + \frac{v e_i^t \cdot (Te_{i+1}^t - Te_i^t)}{dx} \right) + Te_i^t, \quad (8)$$

На рисунке 3 представлена иллюстрация расчетной сетки. Направления потока и оси координат выбраны в противоположном направлении из-за особенностей считывания траектории.

На левой границе расчетной сетки задаются граничные значения температуры жидкостей, которые равны температуре нефти и воды на выходе из пласта. В остальных точках задается начальное значение температуры, которое равно температуре стенок.

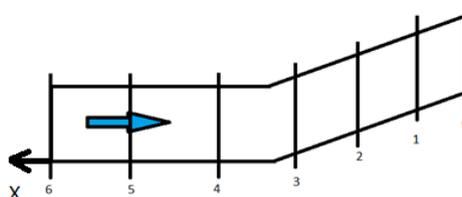


Рис. 3. Расчетная сетка

Fig. 3. Calculation grid

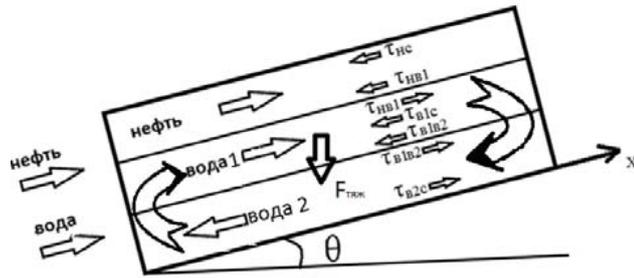


Рис. 4. Геометрия обратного потока  
Fig. 4. The geometry of the return flow

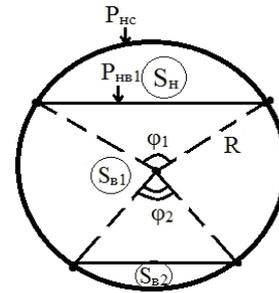


Рис. 5. Сечение трубы  
Fig. 5. The pipe's cross section

При достаточно больших углах наклона скважины возникает обратный поток (рис. 4).

Используя закон сохранения импульса, можно составить следующую систему уравнений с учетом обратного потока [1]:

$$-S_n \cdot \frac{dp}{dx} = \tau_{nc} \cdot P_{nc} + \tau_{нв1} \cdot P_{нв1} + \rho_n \cdot g \cdot S_n \cdot \sin \theta, \quad (9)$$

$$-S_{e1} \cdot \frac{dp}{dx} = -\tau_{нв1} \cdot P_{нв1} + \tau_{e1e2} \cdot P_{e1e2} + \tau_{e1c} \cdot P_{e1c} + \rho_e \cdot g \cdot S_{e1} \cdot \sin \theta, \quad (10)$$

$$-S_{e2} \cdot \frac{dp}{dx} = -\tau_{e1e2} \cdot P_{e1e2} - \tau_{e2c} \cdot P_{e2c} + \rho_e \cdot g \cdot S_{e2} \cdot \sin \theta, \quad (11)$$

В уравнениях (9)-(11) не учитывается условие циркуляции жидкости, чтобы его учесть задавалось дополнительное граничное условие:

$$Q_{e1} = Q_e + Q_{e2}, \quad (12)$$

где  $Q_{в1}$  — дебит воды, которая движется вверх;  $Q_{в2}$  — дебит обратного потока,  $Q_{в}$  — дебит воды на выходе из пласта. Корреляции для коэффициентов трения были выбраны аналогично (3).

В системе уравнений (9)-(12) скорости жидкостей, угол  $\theta$ , радиус трубы  $R$  считаются заданными. Значение периметров, площадей и гидравлические диаметры можно задать через углы  $\phi 1$ ,  $\phi 2$  (рис. 5). Таким образом, получается три уравнения и три неизвестных параметра (градиент давления и 2 угла). Такая система является разрешимой. Трудность аналитического решения этой задачи связана с тем, что уравнения являются нелинейными относительно углов  $\phi 1$  и  $\phi 2$ . Чтобы их решить, из каждого уравнения исключается  $dp/dx$ , получаются два уравнения, которые зависят от двух переменных — углов  $\phi 1$ ,  $\phi 2$ . Полученная система уравнений решалась численно методом перебора углов  $\phi 1$  и  $\phi 2$ .

Уравнения теплопереноса для нефти, воды и обратного потока можно записать согласно [4]:

$$\alpha_n \cdot c_n \cdot \rho_n \cdot \left( \frac{dT_n}{dt} + v_n \cdot \frac{dT_n}{dx} \right) = -a1 \cdot (T_n - T_{e1}) \cdot \frac{P_{нв1}}{S} - a0 \cdot (T_n - T_0) \cdot \frac{P_{нс}}{S}, \quad (13)$$

$$\alpha_{e1} \cdot c_e \cdot \rho_e \cdot \left( \frac{dT_{e1}}{dT} + v_{e1} \cdot \frac{dT_{e1}}{dx} \right) = a1 \cdot (T_n - T_{e1}) \cdot \frac{P_{ne1}}{S} - a0 \cdot (T_{e1} - T0) \cdot \frac{P_{e1c}}{S} - a2 \cdot (T_{e1} - T_{e2}) \cdot \frac{P_{e1e2}}{S}, \quad (14)$$

$$\alpha_{e2} \cdot c_e \cdot \rho_e \cdot \left( \frac{dT_{e2}}{dt} + v_{e2} \cdot \frac{dT_{e2}}{dx} \right) = -a0 \cdot (T_{e2} - T0) \cdot \frac{P_{e2c}}{S} + a2 \cdot (T_{e1} - T_{e2}) \cdot \frac{P_{e1e2}}{S}. \quad (15)$$

Корреляции для коэффициентов теплообмена были выбраны аналогично (6). Дифференциальные уравнения (13)-(15) решались численно с использованием явной расчетной схемы.

Для расчета распределения температуры воды 1 (вода, которая движется вверх) на левой границе задается граничное условие смешивания с обратным потоком (рис. 6):

$$T_{e1\_лев\_сп} = \frac{Q_{e2} * T_{e2\_лев\_сп} + Q_{e1} * T_{e1\_лев\_сп+1}}{Q_{e1} + Q_{e2}}. \quad (16)$$

Для расчета температуры воды 2 (противоток) на правой границе задается граничное условие циркуляции воды (рис. 6):

$$T_{e2\_пр\_сп} = T_{e1\_пр\_сп}. \quad (17)$$

**Экспериментальное определение граничного угла, при котором возникает обратный поток**

Обратный поток возникает при определенном граничном угле. Величина граничного угла зависит от дебитов нефти и воды, диаметра трубы. Чтобы определить, когда возникает обратный поток, был проведен эксперимент. На рис. 7 показана установка для исследования многофазных потоков.

Чтобы увидеть обратный поток, нижний слой воды подкрашивался краской. При помощи впускных кранов фиксировались дебиты нефти и воды. Сначала скважина устанавливалась горизонтально. Затем угол увеличивался на 1 градус до тех пор, пока не возникнет обратный поток. В таблице 1 приведены результаты экспериментов.

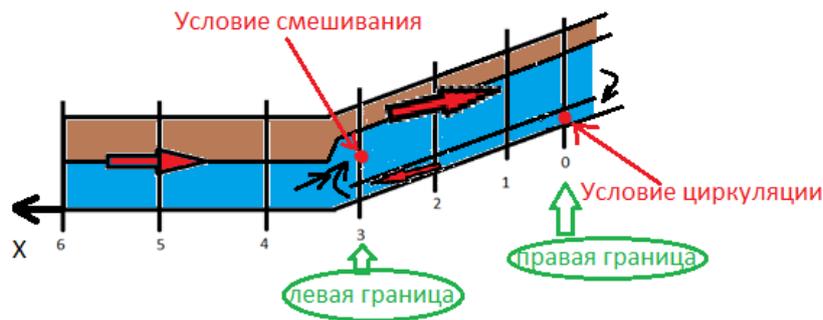


Рис. 6. Задание граничных значений для обратного потока

Fig. 6. Setting the limit values for the reverse flow

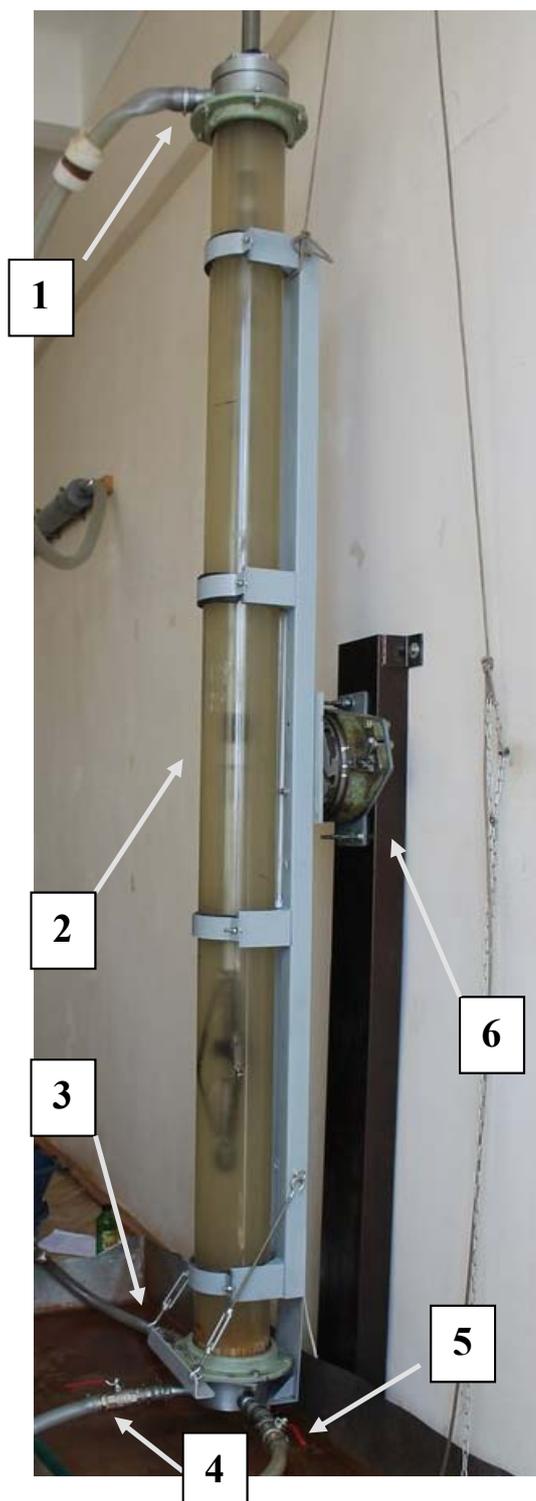


Рис. 7. Вертикально-наклонная скважина. Гидродинамический стенд

- 1 — Сливной канал
- 2 — Ствол скважины
- 3 — Канал подачи нефти
- 4 — Обратный сливной шланг
- 5 — Канал подачи воды
- 6 — Шкив для изменения угла наклона скважины

Fig. 7. Vertically tilted well

Hydrodynamic stand

- 1 — drain channel
- 2 — wellbore
- 3 — oil supply channel
- 4 — return drain hose
- 5 — water supply channel
- 6 — pulley for changing the angle of the borehole

Таблица 1

Результаты эксперимента

Table 1

Results of the experiment

№	Дебит нефти, м <sup>3</sup> /сут	Дебит воды, м <sup>3</sup> /сут	Граничный угол, град
Изменение дебита нефти			
1	55.2	60	4
2	48	60	4
3	36	60	4
4	24	60	4
5	55.2	62.4	4
Изменение дебита воды			
6	12	24	3
7	12	28.8	3
8	12	36	4
9	12	48	4
10	12	57.6	3
Изменение дебита нефти			
11	24	24	3
12	21.6	24	3
13	16.8	24	3
14	7.2	24	3
15	45.6	24	3
16	12	24	3
Изменение дебита воды			
17	48	48	4
18	48	36	3
19	48	12	2
20	18	10.8	3
21	10.08	22.08	5
22	36	36	3

### Результаты расчета

На рисунках 8, 9 представлены результаты расчета сонаправленного потока для дебита нефти = 10,08 м<sup>3</sup>/сут, дебита воды = 22,08 м<sup>3</sup>/сут, диаметра скважины 15 см, температура нефти на выходе из пласта = 50 С, температура воды на выходе из пласта = 48, начальная температура = 45.

На рис. 8 показана траектория скважины и объемное содержание фаз, стрелкой указано направление потока. Нефть, как более легкая фаза, на подъеме движется с большей скоростью, чем вода, поэтому ее объемное содержание уменьшается ( $S = Q/v$ ). На спуске, наоборот, сила тяжести ускоряет воду. На рис. 9 приведено распределение температуры по стволу скважины.

Волнообразный характер распределения температуры объясняется изменением объемного содержания и скорости жидкостей по стволу скважины.

На рис. 10 показаны траектория скважины и объемное содержание фаз для случая возникновения противотока. Граничный угол возникновения обратного потока определялся экспериментально, в данном примере = 5 град. Величина противотока находилась с помощью варьирования дебита обратного потока и нахождения минимума градиента давления.

Из рис. 10 видно, что доля обратного потока мала (около 5%). Поэтому скорость обратного потока больше скорости воды, движущейся вверх.

В распределении температуры (рис. 11) отмечается, что температура обратного потока мало отличается от температуры воды вверх. Это связано с тем, что происходит быстрый разогрев жидкости противотока за счет межфазного теплообмена (так как доля обратного потока мала).

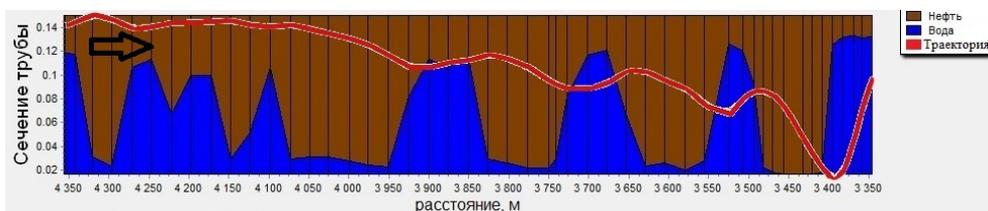


Рис. 8. Траектория (красная кривая) и распределение объемного содержания фаз

Fig. 8. Trajectory (red curve) and distribution of the volume content of phases

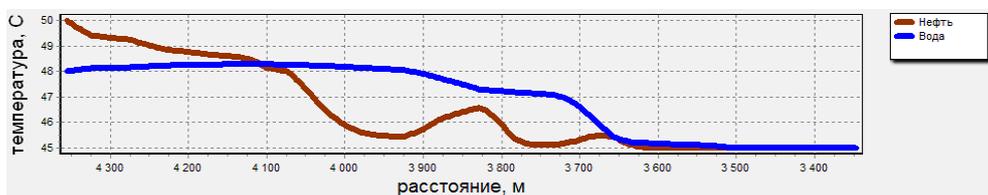


Рис. 9. Распределение температуры по стволу скважины через 6 часов

Fig. 9. Distribution of temperature along the wellbore after 6 hours

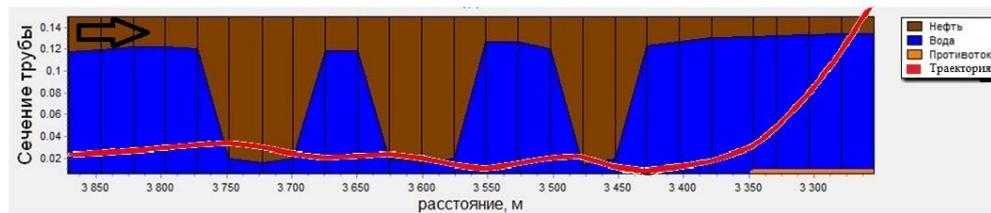


Рис. 10. Траектория (красная кривая) и распределение объемного содержания фаз с учетом противотока

Fig. 10. Trajectory (red curve) and distribution of the volume content of phases taking into account the counterflow

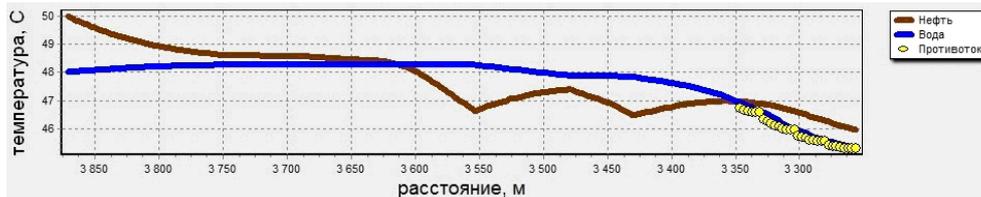


Рис. 11. Распределение температуры с учетом обратного потока через 6 часов

Fig. 11. Temperature distribution taking into account the return flow after 6 hours

## Заключение

1. Показано, что изменение объемного содержания и скоростей фаз по стволу скважины приводит к волнообразному распределению температуры.
2. По результатам расчета с учетом обратного потока показано, что доля обратного потока очень мала (около 5%). За счет этого скорость обратного потока может быть значительна.
3. По результатам эксперимента были определены углы наклона скважины при которых возникает обратный поток. Например, при дебите нефти =  $10 \text{ м}^3/\text{сут}$ , воды =  $22 \text{ м}^3/\text{сут}$  граничный угол составил 5 градусов.
4. По результатам расчета показано, что обратный поток оказывает слабое влияние на распределение температуры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. М.: Атомиздат, 1979.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар; пер. с англ. под ред. В. Д. Виленского. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 124.
3. Bonizzi M. Flow Regime Independent, High Resolution Multi-Field Modelling of Near-Horizontal Gas-Liquid Flows in Pipelines / M. Bonizzi, P. Andreussi, S. Banerjee // International Journal of Multiphase Flow 35, 34-46. 2009.  
DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2008.09.001
4. Liang-Biao Ouyang. Mechan. and Simp. Models for Oil — Water Countercurrent Flow / Liang-Biao Ouyang // (SPE). 77501. 4-6 (2002).

**Ramil F. SHARAFUTDINOV<sup>1</sup>**

**Timur R. KHABIROV<sup>2</sup>**

**Artem M. SHARIPOV<sup>3</sup>**

**INVESTIGATION OF THERMOHYDRODYNAMIC  
PROCESSES IN HORIZONTAL WELLS  
WITH VARIABLE TRAJECTORY IN THE PRESENCE  
OF REVERSE FLOWS**

<sup>1</sup> Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,  
Department of Geophysics, Bashkir State University (Ufa)  
gframil@inbox.ru

<sup>2</sup> Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assistant,  
Department of Geophysics, Bashkir State University (Ufa)  
khabirovtr@mail.ru

<sup>3</sup> Cand. Sci. (Phys.-Math.),  
Gazpromneft NTC

**Abstract**

This article presents mathematical models of heat and mass transfer for calculating the volume content, phase velocity, temperature distribution in the trunk of a horizontal well. The authors consider the cases of a co-directional flow of water and oil, and in the presence of a counterflow of water, they assume the flow regime to be stratified. The calculation of the hydrodynamic problem takes into account the influence of gravity, interfacial friction and friction on the wall of the borehole. When calculating the temperature problem, the authors take into account convective heat transfer, interfacial heat transfer, and heat exchange with the borehole wall.

At present, mathematical models of co-directional two-phase and three-phase flows in a horizontal well have been thoroughly investigated, while thermohydrodynamic fields in the presence of a reverse flow are much less studied. Geophysical studies in horizontal wells show that, due to the complexity of the trajectory, very often there are wells in which the

---

**Citation:** Sharafutdinov R. F., Khabirov T. R., Sharipov A. M. 2017. "Investigation of Thermohydrodynamic Processes in Horizontal Wells with Variable Trajectory in the Presence of Reverse Flows". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 3, no 4, pp. 110-121.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-110-121

---

probability of backflows is very high. In connection with this, studies of the features of the formation of volumetric phase contents and the temperature distribution in the presence of countercurrent are becoming relevant.

The conditions for the emergence of the reverse flow were studied on the basis of an experiment: a boundary angle was determined, at which a countercurrent appeared for various oil and water rates. The results of calculation of thermohydrodynamic fields for real trajectories of horizontal wells show that the fraction of the backflow in the borehole section is small; due to this, the rate of the return flow can be significant. In this regard, the return flow has little effect on the temperature distribution, as it quickly takes the temperature of the ascending stream.

### **Keywords**

Horizontal well, two-phase flow of water and oil, three-layer flow, reverse flow, multiphase flow modeling, counterflow, heat and mass transfer.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-110-121**

### **REFERENCES**

1. Kutateladze S. S. 1979. *Osnovy teorii teploobmena* [The Fundamentals of the Theory of Heat Transfer]. Moscow: Atomizdat.
2. Patankar S. 1984. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical Methods for Solving Problems of Heat Transfer and Fluid Dynamics]. Translated from English, edited by V. D. Vilenskiy. P. 124. Moscow: Energoatomizdat
3. Bonizzi M., Andreussi P., Banerjee S. 2009. "Flow Regime Independent, High Resolution Multi-Field Modelling of Near-Horizontal Gas-Liquid Flows in Pipelines". *International Journal of Multiphase Flow*, no 35, pp. 34-46.  
DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2008.09.001
4. Ouyang L.-B. 2002. "Mechan. and Simp. Models for Oil — Water Countercurrent Flow". *SPE*. 77501. 4-6 (2002).