

Ирина Юрьевна КРУТОВА<sup>1</sup>

УДК 533.6

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ ЗАКРУТКИ ГАЗА В ПРИДОННОЙ ЧАСТИ ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА

<sup>1</sup> кандидат физико-математических наук,  
заведующая кафедрой высшей и прикладной математики,  
Снежинский физико-технический институт,  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
iykrutova@mephi.ru

### Аннотация

В работе в дифференциальной форме рассматриваются физические законы сохранения: закон сохранения массы в виде уравнения неразрывности, закон сохранения импульса, передающийся векторным уравнением движения, и закон сохранения энергии, представленный уравнением энергии, которое в рассматриваемом в статье случае выполняется тождественно. Данный факт связан с тем, что в работе исследуются течения газа при постоянном значении энтропии. Эта система квазилинейных уравнений с частными производными в случае отсутствия эффектов вязкости и теплопроводности является системой уравнений газовой динамики. В работе рассматривается случай газа с уравнениями состояния, соответствующими политропному газу. Тогда получается система из четырех нелинейных уравнений с частными производными для четырех искомых функций. При этом в качестве независимых переменных выступают полярный радиус, полярный круг и вертикальная независимая переменная. Т. е. в декартовой системе координат, вращающейся вместе с Землей, введены цилиндрические координаты. Это приводит к появлению в правых частях уравнений в рассматриваемой системе слагаемых, учитывающих ускорение Кориолиса и ускорение силы тяжести. В работе приводится одна газодинамическая задача, соответствующая течениям в торнадо и тропических циклонах: задача о радиальном притоке, не имеющем закрутку газа как в начальный

**Цитирование:** Крутова И. Ю. Возникновение закрутки газа в придонной части восходящего закрученного потока / И. Ю. Крутова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 3. С. 68-83.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-68-83

момент времени, так и на границе притока. В этом случае соответствующая математическая задача является задачей Коши с начальными данными, заданными на контактной характеристике кратности два, а также с двумя краевыми условиями на границе притока. Начальные данные обеспечивают непротекание газа через горизонтальную плоскость  $z = 0$ . Краевые условия согласованы с начальными условиями и определяют значения двух компонент вектора скорости газа: радиальную и окружную. Эти значения обеспечивают радиальный приток газа в рассматриваемую область течения и отсутствие закрутки газа на этом радиусе притока. Показано, что в случае аналитичности всех входных данных поставленная задача попадает под действие соответствующего аналога теоремы Ковалевской и поэтому имеет единственное решение, представимое в виде бесконечных сходящихся рядов. Затем исследуются свойства решения как в случае неучета вращения Земли вокруг своей оси, так и при учете этого факта.

#### **Ключевые слова**

Восходящий закрученный поток, система уравнений газовой динамики, характеристическая задача Коши.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-68-83**

#### **Введение**

Многие исследователи давно изучают восходящие закрученные потоки, которые в природе встречаются в виде торнадо, тропических циклонов и огненных вихрей. Однако до работы С. П. Баутина [10] и последующих работ членов его научного коллектива [4, 7, 8] не было дано научно обоснованного объяснения причин возникновения в этих течениях закрутки воздуха и ее направления, отличающегося для разных полушарий, а также для торнадо и огненных вихрей. Также до работ указанного коллектива было общее непонимание причин продолжительного существования природных восходящих закрученных потоков и источников энергии на их движение. Специалист по тропическим циклонам К. А. Эмануэль в своей работе отмечает: «За последние два десятилетия мы стали свидетелями существенного навыка в прогнозировании пути тропического циклона. В то же время практически никакого улучшения не достигнуто в прогнозировании изменения интенсивности тропического циклона; прогнозы любой сложности сегодня предсказывают, вряд ли более чем на 24 ч. Скорее всего, это отражает наше коллективное непонимание динамики тропического циклона, в том числе его взаимодействие с нижележащим океаном» [14, с. 1139].

Естественно, что в данных природных потоках проявляются очень разные физические факторы: движение воздуха, процессы конденсации, электромагнитные явления. Однако, выделяя главные элементы этого природного явления, С. П. Баутин предложил [10] в первую очередь рассматривать газодинамические процессы. Оказалось, что математическое моделирование течений в восходящих закрученных потоках, как и в [7], с помощью системы уравнений газовой дина-

мики или с помощью полной системы уравнений Навье — Стокса позволило не только адекватно передать реальные течения в рассматриваемых потоках, но и обоснованно ответить (см., например, [2, 3, 5-8]) на главные для этих потоков отмеченные выше вопросы. Система дифференциальных уравнений газовой динамики [13] правильно передает законы сохранения импульса, энергии и массы. Далее, через учет уравнений состояния для построенных течений выполняются законы термодинамики. Система уравнений газовой динамики в нестационарном случае имеет гиперболический вид, в случае стационарных дозвуковых течений — эллиптический тип [13].

Полная система уравнений Навье — Стокса так же, как и система уравнений газовой динамики (см. об этом [7, 8, 11]), точно учитывает фундаментальные законы сохранения и законы термодинамики, а также свойства вязкости и теплопроводности сжимаемого газа, что приводит к смешанному типу этой системы уравнений с частными производными — гиперболически-параболическому [11]. Учет вязкости и теплопроводности позволяет успешно вести трехмерные нестационарные расчеты изучаемых течений [7].

Расчеты, проведенные по двум указанным математическим моделям, не только совпали с данными натурных наблюдений за природными восходящими закрученными потоками [15] и с данными экспериментов [1, 9, 12], но и позволили выявить ряд фундаментальных свойств восходящих закрученных потоков.

#### **Постановка газодинамической задачи**

Исследование любого процесса начинается с постановки физической задачи, ее модели или, выражаясь языком газовой динамики, с задания газодинамической конфигурации.

Глядя на фотографию тропического циклона, сделанного из космоса (см. рис. 1), можно сделать вывод об определенной симметричности потока относительно его центра. Кроме этого, достаточно определенно можно высказать предположение, что основное течение, имеющее конечный радиус  $r = r_{in}$ , вращается, а во внешней по отношению к вращающейся части области большее движение не наблюдается. И, наконец, в центральной части потока, имеющей свой радиус  $r = r_0$ , серьезное движение воздуха не фиксируется. Также принципиальным является тот факт, что поток расположен над непроницаемой для воздуха подстилающей поверхностью воды или суши.

Если предположить, что восходящий закрученный поток имеет структуру, изображенную на рис. 2, то наблюдаемое течение (см. рис. 1) является придонной частью восходящего закрученного потока, которая на рис. 2 затемнена.

#### **Постановка задачи с начальными и краевыми условиями**

Постановка математической задачи с начальными и краевыми условиями, решение которой моделирует описанное течение, следующая.

Для системы уравнений газовой динамики, в которой присутствуют слагаемые, учитывающие вращение Земли вокруг своей оси, при учете действия силы



Рис. 1. Вид тропического циклона из космоса

Fig. 1. The view of a tropical cyclone from space

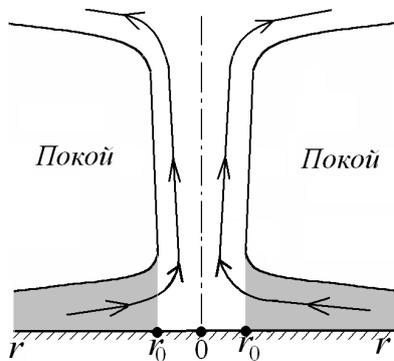


Рис. 2. Структура восходящего закрученного потока

Fig. 2. The structure of the upward twisted flow

тяжести и Кориолиса делается переход к цилиндрическим координатам  $(r, \varphi, z)$  для изэнтропических течений политропного газа. Тогда система уравнений примет вид [4, 7, 8, 10]:

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma - 1)}{2}c \left( u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_r = av - bwc\cos\varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma - 1)r}c c_\varphi = -au + bws\sin\varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_z = buc\cos\varphi - bvs\sin\varphi - g. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) введены следующие обозначения для искоемых функций [7]:  $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$  — скорость звука газа;  $\rho$  — плотность газа;  $\gamma = \text{const} > 1$  — показатель политропы газа;  $u, v, w$  — радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа соответственно;  $a = 2\Omega \sin\psi$ ;  $b = 2\Omega \cos\psi$ ;  $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$  — модуль вектора угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси. Угол  $\psi$  задает широту точки на поверхности Земли, в которой находится начало цилиндрической системы координат, вращающейся вместе с Землей. В работе полагается, что  $\sin\psi \neq 0$  и рассматриваемая точка не лежит на экваторе.

В системе (1) стандартным образом вводятся безразмерные переменные [7]. При этом учитываются равенства:  $u_{00} = c_{00}$ ,  $t_{00} = r_{00}/u_{00}$ . В работе в качестве масштабов скорости и расстояния при введении безразмерных переменных взяты  $u_{00} = c_{00} = \frac{1}{3} \cdot 10^3$  м/с,  $r_{00} = 10^3$  м.

В качестве начальных данных на плоскости  $z = 0$  для системы (1) задаются следующие соотношения:

$$\begin{cases} c(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = c_0(t, r, \varphi), \\ u(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = u_0(t, r, \varphi), \\ v(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = v_0(t, r, \varphi), \\ w(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где функции  $c_0(t, r, \varphi)$ ,  $u_0(t, r, \varphi)$ ,  $v_0(t, r, \varphi)$  считаются аналитическими в области

$$\Omega: \{t \geq 0; r_0 \leq r \leq r_{in}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}; \quad 0 < r_0 < r_{in},$$

пока не определены, но с обязательным условием:  $c_0 \geq c_{00} = \text{const} > 0$  в области  $\Omega$ .

В начальных условиях (2) последнее равенство обеспечивает то, что газ через плоскость  $z = 0$  не протекает. Следовательно, поверхность  $z = 0$  является контактной поверхностью. В случае изоэнтропических течений газа контактная поверхность для системы уравнений газовой динамики является характеристикой кратности два [11] и задача (1)-(2) является задачей Коши с данными на характеристической поверхности [11].

Для обеспечения единственности решения характеристической задачи Коши (1)-(2) необходимо задать два дополнительных условия [11], например, вида

$$\begin{cases} u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z); \quad u^o(0, \varphi_0, 0) = u_{in} = \text{const} < 0; \\ v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z) \end{cases} \quad (3)$$

с аналитическими функциями  $u^o(t, \varphi, z)$ ,  $v^o(t, \varphi, z)$ , согласованными с условиями (2) при  $z = 0$ ,  $r = r_{in}$ . Неравенство

$$u^o(0, \varphi_0, 0) = u_{in} = \text{const} < 0$$

обеспечивает приток газа снаружи в область  $\Omega$ . Область  $\Omega$ , в которой будет строиться решение поставленной задачи без учета изменения переменной  $t$ , схематично изображена на рис. 3.

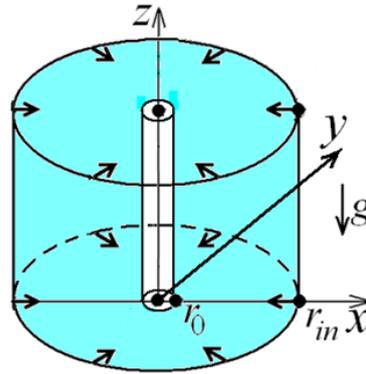


Рис. 3. Область построения решения характеристической задачи Коши

Fig. 3. The plotting area for the solution of Cauchy problem

Для того чтобы поставленная задача (1)-(3) имела решение, необходимо выполнение условий разрешимости характеристической задачи Коши [11].

Полагая в системе (1)  $z = 0$  и учитывая начальные условия (2), получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} + w_1 \right) = 0, \\ u_{0t} + u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0, \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -a u_0, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_1 = b u_0 \cos \varphi - b v_0 \sin \varphi - g, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}|_{z=0}; \quad \mathbf{U}_1 = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}|_{z=0}; \quad \mathbf{U} = (c, u, v, w).$$

Из первого и четвертого уравнения определяются  $w_1$  и  $c_1$ :

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left( c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} \right) - u_{0r} - \frac{u_0}{r} - \frac{v_{0\varphi}}{r}, \\ c_1 &= \frac{(\gamma - 1)}{2c_0} (b u_0 \cos \varphi - b v_0 \sin \varphi - g). \end{aligned} \quad (5)$$

Второе и третье соотношения

$$\begin{cases} u_{0t} + u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0, \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -a u_0 \end{cases} \quad (6)$$

являются необходимыми условиями разрешимости для этой рассматриваемой характеристической задачи Коши. Как следует из теории уравнений с частными производными, условия из (6) накладывают следующие ограничения на первые три условия из начальных данных (2). А именно, заданные функции  $c_0, u_0, v_0$  не могут быть произвольными потому, что они необходимо должны удовлетворять соотношениям (6).

### Теорема о существовании и единственности решения поставленной математической задачи

**Теорема.** Задача (1)-(3), как соответствующие задачи в [7], есть характеристическая задача Коши стандартного вида с данными на характеристике кратности два, имеющая в случае аналитичности всех входных данных единственное аналитическое решение при выполнении необходимых условий разрешимости характеристической задачи Коши (6) с аналитическими функциями  $u^o(t, r, \varphi), v^o(t, r, \varphi)$ , согласованными с условиями (2) при  $z = 0, r = r_{in}$ :

$$\begin{cases} u_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z)|_{z=0}; \\ v_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z)|_{z=0}. \end{cases} \quad (7)$$

Аналитическое решение существует в некоторой окрестности точки  $M_0$  с координатами  $(t = 0, r = r_{in}, \varphi = \varphi_0, z = 0)$ , где  $\varphi_0$  — любое значение из отрезка  $[0, 2\pi]$ .

Если известно решение задачи (1)-(3), то оно определяет течение газа в окрестности непроницаемой плоскости  $z = 0$ , когда через поверхность вертикального цилиндра заданного ненулевого радиуса  $r = r_{in}$  осуществляется заданный приток газа (рис. 2). В частности, условия (3) можно брать такими:

$$u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u_{in} = \text{const} < 0; \quad v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = 0 \quad (8)$$

при соответствующих условиях согласования

$$u_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u_{in}, \quad v_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = 0. \quad (9)$$

Первое соотношение из условий (9) определяет то, что на поверхности цилиндра  $r = r_{in}$  имеет место заданный постоянный приток газа во внутреннюю область, ограниченную этим цилиндром. Второе соотношение из (9) говорит о том, что на поверхности цилиндра притока  $r = r_{in}$  окружная скорость есть нуль и газ закрутку не имеет.

Чтобы доказать данную теорему, необходимо свести эту задачу (1)-(3) к соответствующему аналогу теоремы Ковалевской [11]. Вначале четвертое уравнение в системе (1) переставляется на первое место и делается следующая замена независимых переменных  $t = t'; \zeta = r - r_0; \varphi = \varphi'; z = z'$  и переставляются слагаемые в уравнениях.

В результате вместо задачи (1)-(3) получается следующая, эквивалентная ей, задача (10)-(12):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{(\gamma-1)} cc_z + ww_z + uw_\zeta + \frac{v}{\zeta+r_0} w_\varphi + w_t = \\ & = b\cos\varphi - b\sin\varphi - g, \\ & wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2} cw_z + uc_\zeta + \frac{(\gamma-1)}{2} cu_\zeta + \frac{v}{\zeta+r_0} c_\varphi + \\ & + \frac{(\gamma-1)}{2} c \frac{v_\varphi}{\zeta+r_0} + c_t = -\frac{(\gamma-1)}{2} \frac{u}{\zeta+r_0}, \\ & wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)} cc_\zeta + uu_\zeta + \frac{v}{\zeta+r_0} u_\varphi + u_t = \\ & = av - bw\cos\varphi + \frac{v^2}{\zeta+r_0}, \\ & wv_z + uv_\zeta + \frac{2}{(\gamma-1)} \frac{c}{\zeta+r_0} c_\varphi + \frac{v}{\zeta+r_0} v_\varphi + v_t = \\ & = -au + bw\sin\varphi - \frac{uv}{\zeta+r_0}, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\mathbf{W}|_{z=0} = \mathbf{W}_0; \quad (11)$$

$$u|_{\zeta=0} = u^0; \quad v|_{\zeta=0} = v^0; \quad (12)$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} c \\ w \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

где штрихи у независимых переменных опущены для облегчения написания.

В векторно-матричной форме система (10) такая

$$A \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z} + B \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \zeta} + C \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varphi} + D \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{F},$$

где матрицы  $A, B$  имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{(\gamma-1)}c & w & 0 & 0 \\ w & \frac{(\gamma-1)}{2}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ u & 0 & \frac{(\gamma-1)}{2}c & 0 \\ \frac{2}{(\gamma-1)}c & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

При  $z = 0$  и учете начальных условий, в том числе  $w_0 = 0$ , в матрице  $A|_{z=0}$  минор размеров  $2 \times 2$ , стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, поскольку  $c_0 \geq c_{00} > 0$ , а все остальные элементы в матрице  $A|_{z=0}$ , окаймляющие этот минор, тождественно равны нулю.

В матрице  $B|_{M_0}$  отличен от нуля тот минор размеров  $2 \times 2$ , который стоит в правом нижнем углу:  $u|_{M_0} < 0$  (см. (3) и (8)).

Вид характеристической задачи Коши (1)-(3) оказался относительно простым и поэтому искать матрицы  $T_1$  и  $T_2$ , как того требует переход к характеристической задаче Коши стандартного вида [11], не надо. Роль этих матриц была выполнена указанными перестановками уравнений в системе и перестановками слагаемых в уравнениях.

Таким образом доказано, что для задачи (10)-(12) имеет место соответствующий аналог теоремы Ковалевской [11]. Следовательно, доказана и рассматриваемая теорема.

### Свойства решений и роль вращения Земли вокруг своей оси

Доказанный факт существования и единственности решения начально-краевой задачи (10)-(12), т. е. задачи (1)-(3) позволяет установить, что только из-за вращения Земли вокруг своей оси воздух закручивается в придонных частях восходящих потоков.

Это устанавливается при анализе единственного решения в двух случаях:  $\Omega = 0$  и  $\Omega \neq 0$ . Первый случай соответствует тому, что при построении решения задачи (1)-(3) не учитывается действие силы Кориолиса и, следовательно, не учитывается факт вращения Земли вокруг своей оси. А второй случай — когда учитывается.

Будем пользоваться фактом, что нужное решение задачи (10)-(12) представимо в виде сходящегося ряда

$$\mathbf{W}(z, \zeta, \varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{W}_k(\zeta, \varphi, t) \frac{z^k}{k!}.$$

Предположим, что начальные и краевые условия не зависят от переменной  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} = \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} = 0,$$

и закрутки воздуха на радиусе притока нет:

$$v^0|_{\zeta=r_{in}-r_0} = 0.$$

Вначале рассматривается случай  $\Omega = 0$  и поэтому  $a = b = 0$ . В этом случае последнее уравнение системы (10), рассмотренное при  $z = 0$ , обращается в тождество при  $v_0 = 0$ . А из единственности решения задачи (10)-(12) следует, что другой функции  $v_0$  быть не может.

Делается предположение индукции: коэффициенты  $\mathbf{W}_l$  при  $l = 0, \dots, k$  не зависят от переменной  $\varphi$ , а также все  $v_l$  равны нулю.

Если первое и второе уравнение системы (10) продифференцировать  $k$  раз по  $z$ , положить  $z = 0$  и учесть индуктивное предположение, то функции  $c_{k+1}, w_{k+1}$  определяются в явном виде и правые части соотношений, из которых эти коэффициенты определяются, не зависят от  $\varphi$ . Следовательно,  $c_{k+1}, w_{k+1}$  не зависят от  $\varphi$ .

Если четвертое уравнение системы (10) продифференцировать  $(k+1)$  раз по  $z$ , положить  $z = 0$  и учесть индуктивное предположение, то функция  $v_{k+1}$ ,

равная нулю, удовлетворяет полученному после дифференцирования этому уравнению. А из единственности решения задачи (10)-(13) следует, что  $v_{k+1}$  другой быть не может.

После этого третье уравнение системы (10) также последовательно дифференцируется  $(k+1)$  раз по  $z$ , полагается  $z = 0$ , принимаются во внимание установленные свойства коэффициентов  $c_{k+1}$ ,  $w_{k+1}$ ,  $v_{k+1}$  и индуктивное предположение. В результате устанавливается, что коэффициент  $u_{k+1}$  не зависит от переменной  $\varphi$ .

Таким образом, методом математической индукции доказано, что в случае  $\Omega = 0$  единственное решение задачи (10)-(12) не зависит от  $\varphi$  и  $v \equiv 0$ , т. е. закрутки газа в этом случае нет.

В другом случае  $\Omega \neq 0$  четвертое уравнение системы (10) при  $z = 0$  в качестве единственного решения имеет следующую функцию:

$$v_0 = \frac{a(r_{in}^2 - r^2)}{2r}, \quad v(r_{in}) = 0, \quad v_0(r) \neq 0 \quad \text{при } r \neq r_{in},$$

удовлетворяющую краевому условию.

А раз  $v_0(r) \neq 0$  при  $r \neq r_{in}$ , то в случае  $\Omega \neq 0$  в течении газа обязательно имеет место закрутка. И если начало цилиндрической системы координат лежит в Северном полушарии, то  $\sin\psi > 0$ ,  $a > 0$ . И поэтому при  $r_0 < r < r_{in}$  имеем, что  $v_0 > 0$ . Поэтому в течении газа в случае Северного полушария имеет место закрутка в положительном направлении — против хода часовой стрелки. В случае Южного полушария закрутка газа идет в противоположном направлении — в отрицательном, т. е. по ходу часовой стрелки, поскольку там  $\sin\psi < 0$ .

#### Ложность одной гипотезы, связанной с числом Россби

При описании движения как воздушных масс в атмосфере Земли, так и движения отдельных материальных тел относительно поверхности Земли всегда возникал вопрос о влиянии вращения Земли вокруг своей оси на эти движения.

Многие исследователи (см. [12]) при изучении восходящих закрученных потоков вводят  $Ro$  — число Россби, которое задается какой-либо одной из двух следующих формул:

$$Ro = \frac{U}{2\Omega L}; \quad Ro = \frac{U}{2\Omega L \sin\psi}. \quad (14)$$

Величина  $U$  характеризует скорость потока;  $L$  — линейный размер потока;  $\sin\psi \neq 0$ .

Этими исследователями выдвигается следующее предположение:

- если  $Ro \geq 1$ , то отсутствует влияние вращения Земли на восходящий поток;
- если  $Ro \leq 1$ , вращение Земли оказывает существенное влияние на рассматриваемое движение воздуха;
- а если  $Ro \approx 1$ , то влияние вращения Земли пренебрежимо мало.

Данное суждение эти исследователи основывают на следующих рассуждениях. Из векторного уравнения движения

$$V_t + (V \cdot \nabla)V + \frac{1}{\rho} \nabla p = g - 2\Omega \times V \quad (15)$$

системы уравнений газовой динамики берутся вторые слагаемые из левой и из правой частей этого уравнения

$$(V \cdot \nabla)V = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}; \quad 2\Omega \times V$$

и формально они заменяются на такие два выражения:

$$\frac{U^2}{L}; \quad 2\Omega U.$$

Из сравнения этих двух выражений и сформулировано предположение выше, которое позволяет сделать вывод о том, что слагаемое  $2\Omega \times V$  в системе уравнений газовой динамики из уравнения движения можно удалить, если  $Ro \geq 1$ , поскольку оно на движение практически не влияет.

Естественно, что приведенное суждение не является доказанным фактом и даже более того: оно основывается не на изучении свойств решений (решения этими исследователями при учете указанного слагаемого не строятся), да еще при этом допускается грубая математическая ошибка — частная производная  $du/dx$  заменяется даже не приближением  $\Delta u/\Delta x$ , а просто дробью  $u/x$ , что является искажением (profonatio) математического понятия производной.

Приведенное суждение не соответствует данным экспериментов:

- 1) с маятником Фуко, в котором число Россби порядка 700 и который демонстрирует влияние вращения Земли вокруг своей оси на движение подвешенного шара;
- 2) проведенных в Москве под руководством А. Ю. Вараксина и в Екатеринбурге под руководством С. П. Баутина. В этих экспериментах потоки закручивались без какого-либо принудительного воздействия, а только благодаря вращению Земли вокруг своей оси. При этом число Россби составляло 70 000 [1, 12] и 7 000 [9].

Также приведенное суждение не соответствует построенному решению (13), в котором при учете вращения Земли вокруг своей оси имеет место закрутка газа, а число Россби в этом решении может принимать любые положительные значения.

Из установленных свойств построенных решений, в том числе о влиянии вращения Земли вокруг своей оси на придонные части восходящих закрученных

потоков, следует, что если убрать из уравнения движения в системе уравнений газовой динамики слагаемое  $(-2\Omega \times \mathbf{V})$ , то вообще не найти ответа на вопрос, откуда берется кинетическая энергия вращательного движения воздуха в торнадо и в тропических циклонах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин К. В. Экспериментальное подтверждение возможности создания потока воздуха, закрученного силой Кориолиса / К. В. Баутин, С. П. Баутин, В. Н. Макаров // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2013. № 2 (18). С. 27-33.
2. Баутин С. П. Закрутка газа вокруг нагревающегося цилиндра при учете сил тяжести и Кориолиса / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 1 (1). С. 112-126.
3. Баутин С. П. Математическое моделирование и численный расчет течений в придонной части тропического циклона / С. П. Баутин, А. Г. Обухов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2012. № 4. С. 175-182.
4. Баутин С. П. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей / С. П. Баутин, А. Г. Обухов. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
5. Баутин С. П. Моделирование трехмерного стационарного течения в придонной части тропического циклона / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика, 2013. № 7. С. 124-132.
6. Баутин С. П. О геометрических, скоростных и энергетических характеристиках придонных частей торнадо и тропических циклонов / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, О. В. Опрышко // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 1. С. 55-67. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-1-55-67
7. Баутин С. П. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов. Екатеринбург: Издательство Уральского государственного университета путей сообщения, 2017. 335 с.
8. Баутин С. П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов, К. В. Баутин. Новосибирск: Наука, 2013. 216 с.
9. Баутин С. П. Создания потока воздуха, закрученного силой Кориолиса при использовании трубы двухметрового диаметра / С. П. Баутин, В. В. Макаров // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2016. № 4 (32). С. 39-45.
10. Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса / С. П. Баутин. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
11. Баутин С. П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике / С. П. Баутин. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

12. Вара́ксин А. Ю. Торнадо / А. Ю. Вара́ксин, М. Э. Ромаш, В. Н. Копейцев. М.: Физматлит, 2011. 312 с.
13. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики / Л. В. Овсянников. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.
14. Emanuel K. A. A Statistical Analysis of Tropical Cyclone Intensity / K. A. Emanuel // Journal of the Atmospheric Sciences. 2000. Vol. 128. Pp. 1139-1152.
15. Tatom F. B. The Transfer of Energy from Tornado into the Ground / F. B. Tatom, S. J. Witton // Seismological Research Letter. 2001. Vol. 72. No 1. Pp. 12-21.  
DOI: 10.1785/gssrl.72.1.12

**Irina Yu. KRUTOVA<sup>1</sup>**

UDC 533.6

## **THE APPEARANCE OF A GAS TWIST IN THE BOTTOM PART OF THE ASCENDING SWIRLING FLOW**

<sup>1</sup> Cand. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Snezhinsk Physic Institute of the National Research Nuclear University MEPhI  
iykrutova@mephi.ru

### **Abstract**

This article considers the differential form of physical conservation laws: a) the law of conservation of mass in the form of the continuity equation; b) the momentum conservation law is transferred by the vector equation of motion; c) and the law of conservation of energy is transferred by the energy equation, which in the case considered in the article is fulfilled identically. This relates to gas flows in at a constant value of entropy. The author studies the case of a gas with the equations of state corresponding to a polytropic gas. She has obtained a system of four nonlinear partial differential equations for the four unknown functions.

This paper deals with one gas-dynamic problem corresponding to flows in tornadoes and tropical cyclones: the problem of a radial inflow, which does not have a twist of gas both at the initial time and at the inflow boundary. The author shows that in the case of analyticity of all input data the problem posed falls under the action of the corresponding analogue of the Kowalevski theorem and, therefore, has a unique solution that can be represented as infinite convergent series. The properties of the solution are investigated in two cases: 1) neglecting the rotation of the Earth around its axis; and 2) accounting for it.

Thus, the author proves that the twist of the gas arising in the inflow problem is caused only by the rotation of the Earth around its axis. The direction of this twist is unequivocally established: anti-clockwise, if the gas flow is located in the Northern Hemisphere, and clockwise in the case of a current located in Southern hemisphere.

---

**Citation:** Krutova I. Yu. 2018. "The Appearance of a Gas Twist in the Bottom Part of the Ascending Swirling Flow". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 4, no 3, pp. 68-83.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-68-83

---

In addition, this article discusses the hypothesis adopted by many authors about the effect of the rotation of the Earth around its axis on the flow of a continuous medium on its surface.

### **Keywords**

Upward swirling flow, a system of gas equations dynamics, characteristic problem of Cauchy.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-68-83**

### **REFERENCES**

1. Bautin K. V., Bautin S. P., Makarov V. N. 2013. "Eksperimental'noye podtverzheniye vozmozhnosti sozdaniya potoka vozdukha, zakruchennogo siloy Koriolisa" [Experimental Confirmation of the Possibility of Creating an Airflow Swirling Coriolis Force]. Herald of the Ural State University of Railway Transport, no 2 (18), pp. 27-33.
2. Bautin S. P., Krutova I. Yu. 2015. "Zakrutka gaza vokrug nagrevayushchegosya tsilindra pri uchete sil tyazhesti i Koriolisa" [Twist around Heating Gas Cylinder Taking Into Account the Forces of Gravity and Coriolis]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 1 (1), pp. 112-126.
3. Bautin S. P., Obuhov A. G. 2012. "Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye raschet techeniy v pridonnoy chasti tropicheskogo tsyklona" [The Mathematical Modeling and Numerical Calculation of the Flows in a Lower Part of a Tropical Cyclone]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, no 4, pp. 175-182.
4. Bautin S. P., Obukhov A. G. 2012. Matematicheskoye modelirovaniye razrushitel'nykh atmosferykh vikhrey [Mathematical Modeling Destructive Atmospheric Vortices]. Novosibirsk: Nauka.
5. Bautin S. P., Krutova I. Yu. 2013. "Simulation of Three-Dimensional Steady-State Flow in the Bottom of a Tropical Cyclone". Tyumen State University Herald, no 7, pp. 111-118.
6. Bautin S. P., Krutova I. Yu., Opryshko O. V. 2018. "On the Geometry, Velocity, and Energy Characteristics of the Bottom Parts of Tornadoes and Tropical Cyclones". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 4, no 1, pp. 55-67. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-1-55-67
7. Bautin S. P., Deraybin S. L., Krutova I. Yu., Obukhov A. G. 2017. Razrushitel'nyye atmosferynye vikhri i vrashcheniye Zemli vokrug svoey osi [Destructive Atmospheric Vortices and the Earth's Rotation around Its Axis]. Yekaterinburg: Publishing house of the Ural State University of Railway Transport.
8. Bautin S. P., Krutova I. Yu., Obukhov A. G., Bautin K. V. 2013. Razrushitel'nyye atmosferynye vikhri: teoremy, raschety, eksperimenty [Destructive Atmospheric Vortices: The Theorems, Calculations, and Experiments]. Novosibirsk: Nauka.
9. Bautin S. P., Makarov V. V. 2016. "Sozdaniya potoka vozdukha, zakruchennogo siloy Koriolisa pri ispol'zovanii trubyy dvukhmetrovogo diametra" [Creating a Flow of Air Swirled by Coriolis Force Using a Pipe of Two-Meter Diameter]. Herald of the Ural State University of Railway Transport, no 4 (32), pp. 39-45.
10. Bautin S. P. 2008. Tornado i sila Koriolisa [Tornado and the Coriolis Force]. Novosibirsk: Nauka.

11. Bautin S. P. 2009. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i eye prilozheniya v gazovoy dinamike [The Characteristic Cauchy Problem and It's Applications in Gas Dynamics]. Nauka. Novosibirsk.
12. Varaksin A. Yu., Romash M. E., Kopeytsev V. N. 2011. Tornado. Moscow: Fizmatlit.
13. Ovsyannikov L. V. 2003. Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki [Lectures on the Basics of Gas Dynamics]. Moscow; Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy.
14. Emanuel K. A. 2000. "A Statistical Analysis of Tropical Cyclone Intensity". Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 128, pp. 1139-1152.
15. Tatom F. B., Witton S. J. 2001. "The Transfer of Energy from Tornado into the Ground". Seismological Research Letter, vol. 72, no 1, pp. 12-21. DOI: 10.1785/gssrl.72.1.12