Сергей Петрович БАУТИН[1]

УДК 517.95

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ СИЛ ТЯЖЕСТИ И КОРИОЛИСА

[1] доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра высшей и прикладной математики,
Снежинский физико-технический институт,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
sbautin@usurt.ru

Аннотация

Для системы уравнений газовой динамики рассматривается случай изоэнтропических течений, когда уравнение энергии, записанное для энтропии, выполняется тождественно и получается система из четырех нелинейных уравнений с частными производными для четырех искомых функций. В качестве искомых функций здесь выступают квадрат скорости звука газа и декартовые компоненты вектора скорости газа. Кроме системы уравнений газовой динамики также рассматривается полная система уравнений Навье — Стокса, решения которой описывают течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа и также удовлетворяют законам сохранения массы, импульса, энергии и термодинамическим законам. Данная система является системой из пяти нелинейных уравнений с частными производными для пяти искомых функций, в которой уравнение энергии записано для температуры. В случае полной системы уравнений Навье — Стокса кроме температуры в качестве искомых функций выступает плотность газа и также декартовые компоненты вектора скорости газа. Кроме указанных физических эффектов обе системы — система уравнений газовой динамики и полная система уравнений Навье — Стокса — учитывают влияние силы тяжести и записаны в прямоугольной системе координат, вращающейся вместе с Землей. Это приводит к появлению в правых частях обеих систем слагаемых, учитывающих ускорение Кориолиса и ускорение силы тяжести. В работе для каждой из

Цитирование: Баутин С. П. Построение точного стационарного решения системы уравнений газовой динамики в условиях действия сил тяжести и Кориолиса / С. П. Баутин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 3. С. 84-89.
DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-84-89

рассмотренных систем приведено свое точное решение. В случаях обеих систем уравнений с частными производными в каждом точном решении декартовые компоненты вектора скорости газа постоянны, причем третья компонента вдоль вертикальной оси равна нулю. В случае системы уравнений газовой динамики искомая функция — квадрат скорости звука, а в случае полной системы уравнений Навье — Стокса искомая функция — температура, которые являются линейными функциями от пространственных переменных. В этих линейных функциях коэффициенты перед независимыми переменными зависят от модуля вектора угловой скорости вращения Земли, от широты точки, в которой рассматривается поток, а также и от постоянных ненулевых компонентов вектора скорости газа в горизонтальном направлении. Следовательно, построенные точные решения в явном виде учитывают вращение Земли вокруг своей оси.

Ключевые слова

Система уравнений газовой динамики, ускорение свободного падения, ускорение Кориолиса, точное решение.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-84-89

В случае изэнтропических потенциальных течений политропного идеального газа хорошо известно стационарное точное решение уравнения для потенциала, описывающее покоящийся в поле тяжести газ [4]. В этом случае квадрат скорости звука есть линейная функция от пространственной переменной z, убывающая с ростом этой переменной. Показано [1, 2], что в общем случае пространственных течений также имеется стационарное точное решение системы уравнений газовой динамики, у которого все компоненты вектора скорости газа нулевые, температура есть линейная функция от высоты. Это решение хорошо согласуется с данными физических экспериментов и наблюдений за атмосферой до высоты в 10 км. А именно, различие значений давления у этого точного решения и у данных натурных наблюдений за давлением на высотах в пять и в десять километров составляют соответственно менее одного процента и три процента.

В данной работе исследуются течения идеального газа с политропным уравнением состояния при постоянном значении энтропии. Также учитывается ускорение свободного падения и ускорение Кориолиса. Такие течения моделируются соответствующими решениями системы уравнений газовой динамики, в которой введены безразмерные переменные [1-3]:

$$\begin{cases} \vartheta_t + u\vartheta_x + v\vartheta_y + w\vartheta_z + (\gamma - 1)\vartheta\left(u_x + v_y + w_z\right) = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \dfrac{1}{(\gamma - 1)}\vartheta_x = 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \dfrac{1}{(\gamma - 1)}\vartheta_y = -2\Omega_3 u, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \dfrac{1}{(\gamma - 1)}\vartheta_z = 2\Omega_2 u - g. \end{cases} \tag{1}$$

В системе (1), как и в работе [1], независимые переменные: t — время; x, y, z — пространственные декартовы координаты.

Искомыми функциями являются: $\vartheta = c^2$ — квадрат скорости звука, который связан с ρ плотностью газа соотношением $\vartheta = \rho^{(\gamma-1)}$; u, v, w — проекции вектора скорости газа на декартовые оси.

Константы, входящие в систему (1), как и в работе [1], следующие: $\gamma > 1$ — показатель политропы газа; $g > 0$ — ускорение свободного падения; $\Omega_2 = \Omega \cos\psi$; $\Omega_3 = \Omega \sin\psi$, где Ω — модуль вектора угловой скорости вращения Земли; ψ — широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат $Oxyz$, вращающейся вместе с Землей. Для Северного полушария $0 < \psi \le \pi/2$, для Южного: $-\pi/2 \le \psi < 0$, на экваторе $\psi = 0$.

Следующий набор функций:

$$\begin{cases} \vartheta = 2(\gamma-1)\Omega_3 v_0 x - 2(\gamma-1)\Omega_3 u_0 y + \\ \quad +(\gamma-1)(2\Omega_2 u_0 - g)z + \vartheta_{00}, \\ u = u_0 = \text{const}, \\ v = v_0 = \text{const}, \\ w = 0 \end{cases} \tag{2}$$

является точным стационарным решением системы (1), где $\vartheta_{00} = \vartheta|_{x=y=z=0} = \text{const} > 0$, а постоянные компоненты вектора скорости u_0, v_0 могут быть ненулевыми.

Этот факт устанавливается прямой подстановкой функций (2) в систему (1) с учетом следующих значений частных производных искомых функций:

$$\vartheta_t = u_t = v_t = w_t = 0;$$
$$\vartheta_x = 2(\gamma-1)\Omega_3 v_0; \quad u_x = v_x = w_x = 0;$$
$$\vartheta_y = -2(\gamma-1)\Omega_3 u_0; \quad u_y = v_y = w_y = 0;$$
$$\vartheta_z = (\gamma-1)(2\Omega_2 u_0 - g); \quad u_z = v_z = w_z = 0.$$

Система уравнений газовой динамики переходит в полную систему уравнений Навье — Стокса [1, 2, 4] в случае, если газ обладает свойствами вязкости и теплопроводности:

$$\begin{cases} \rho_t + \mathrm{V}\cdot\nabla\rho + \rho \operatorname{div}\mathrm{V} = 0, \\ \mathrm{V}_t + (\mathrm{V}\cdot\nabla)\mathrm{V} + \dfrac{T}{\gamma\rho}\nabla\rho + \dfrac{1}{\gamma}\nabla T = \mathrm{g} - 2\Omega\times\mathrm{V} + \\ +\dfrac{\mu_0}{\rho}\left[\dfrac{1}{4}\nabla(\operatorname{div}\mathrm{V}) + \dfrac{3}{4}\Delta\mathrm{V}\right], \\ T_t + \mathrm{V}\cdot\nabla T + (\gamma-1)\,T\operatorname{div}\mathrm{V} = \dfrac{\kappa_0}{\rho}\Delta T + \\ +\dfrac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho}\left\{\left[\left(u_x - v_y\right)^2 + (u_x - w_z)^2 + \left(v_y - w_z\right)^2\right] + \right. \\ \left. +\dfrac{3}{2}\left[\left(u_y + v_x\right)^2 + (u_z + w_x)^2 + \left(v_z + w_y\right)^2\right]\right\}, \end{cases} \tag{3}$$

где V= (u, v, w) — вектор скорости газа, T — температура; μ_0, κ_0 — постоянные положительные коэффициенты вязкости и теплопроводности.

Эта система также имеет одно точное стационарное решение:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 = \text{const}; \\ u = u_0 = \text{const}; \\ v = v_0 = \text{const}; \\ w = 0; \\ T = 2\gamma\Omega_3 v_0 x - 2\gamma\Omega_3 u_0 y + \gamma(2\Omega_2 u_0 - g)z + T_{00}, \end{cases} \tag{4}$$

где $T_{00} = T|_{x=y=0} > 0$, а постоянные компоненты вектора скорости u_0, v_0 могут быть ненулевыми.

Этот факт также проверяется прямой подстановкой функций (4) в систему (3).

Заметим, что если в системе (3) положить $\mu_0 = \kappa_0 = 0$, то получится система уравнений газовой динамики в случае, когда за независимые термодинамические параметры взяты плотность и температура, а не плотность и энтропия, как в случае эквивалентной ей системы (1). Естественно, что в случае $\mu_0 = \kappa_0 = 0$ решения (2) и (4) эквивалентны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С. П. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов // Екатеринбург: Уральский государственный университет путей сообщения, 2017. 336 с.
2. Баутин С. П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов, К. В. Баутин // Новосибирск: Наука, 2013. 216 с.
3. Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса / С. П. Баутин. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
4. Баутин С. П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике / С. П. Баутин. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

Sergei P. BAUTIN[1]

UDC 517.95

AN EXACT STATIONARY DECISION FOR THE EQUATION SYSTEM OF GAS DYNAMICS UNDER GRAVITY AND CORIOLIS FORCE

[1] Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Department of Higher and Applied Mathematics,
Snezhinsk Physic Institute of the National Research Nuclear University MEPhI
sbautin@usurt.ru

Abstract

This article considers the isentropic flow case for a system of gas equations, when the energy equation written for entropy is satisfied identically and a system of four nonlinear partial differential equations is obtained for the four unknown functions. The square of the sound velocity of the gas and the Cartesian components of the gas velocity vector are used as the unknown functions. In addition to the system of equations of gas dynamics, the author considers the complete system of Navier — Stokes equations, the solutions of which describe the flows of a compressible viscous heat conducting gas and satisfy the laws of conservation of mass, momentum, energy, and thermodynamic laws. This system is a system of five nonlinear partial differential equations for five unknown functions, in which the energy equation is written for temperature.

This work presents exact solutions for each of the considered systems. In the cases of both systems of partial differential equations in each exact solution, the Cartesian components of the gas velocity vector are constant, and the third component along the vertical axis is zero. In the case of a system of equations of gas dynamics, the desired function is the square of the speed of sound, and in the case of a complete system of Navier — Stokes equations, the unknown function-temperature is a linear function of the spatial variables. In these linear functions, the coefficients in front of independent variables depend on the modulus of the angular velocity vector of the Earth's rotation, on the latitude of the point at which the flow is considered, and on the constant non-zero components of the gas velocity vector in the

Citation: Bautin S. P. 2018. "An Exact Stationary Decision for the Equation System of Gas Dynamics under Gravity and Coriolis Force". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 4, no 3, pp. 84-89.
DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-84-89

horizontal direction. Consequently, the constructed exact solutions explicitly accounts for the rotation of the Earth around its axis.

Keywords

Gas dynamics equations, gravity and Coriolis forces, exact solution.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-84-89

REFERENCES

1. Bautin S. P. 2009. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i eye prilozheniya v gazovoy dinamike [The Characteristic Cauchy Problem and Its Applications in Gas Dynamics]. Nauka. Novosibirsk.
2. Bautin S. P., Krutova I. Yu., Obukhov A. G., Bautin K. V. 2013. Razrushitel'nyye atmosfernyye vikhri: teoremy, raschety, eksperimenty [Destructive Atmospheric Vortices: The Theorems, Calculations, and Experiments]. Novosibirsk: Nauka.
3. Bautin S. P., Deraybin S. L., Krutova I. Yu., Obukhov A. G. 2017. Razrushitel'nyye atmosfernyye vikhri i vrashcheniye Zemli vokrug svoyey osi [Destructive Atmospheric Vortices and the Earth's Rotation around Its Axis]. Yekaterinburg: Ural State University of Railway Transport.
4. Bautin S. P. 2008. Tornado i sila Koriolisa [Tornado and the Coriolis Force]. Novosibirsk: Nauka.