

Александр Иванович ФИЛИППОВ¹
Оксана Валентиновна АХМЕТОВА²
Алексей Алексеевич КОВАЛЬСКИЙ³
Ильшат Фазелькавиевич КАБИРОВ⁴

УДК 536.242

**ТЕПЛООБМЕН ПРИ ОТБОРЕ
ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОГО ИЛИ
РАДИОАКТИВНОГО ФЛЮИДА
ИЗ ПРОДУКТИВНОГО ПЛАСТА***

¹ доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой общей и теоретической физики,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
filiprovai@rambler.ru

² кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей и теоретической физики,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
ahoksana@yandex.ru

³ кандидат физико-математических наук, директор
Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета
aakov68@mail.ru

⁴ младший научный сотрудник,
Институт стратегических исследований
республики Башкортостан (г. Уфа)
kabirov.ilshat@bk.ru

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-08-00548 А,
№ 16-08-00728 А, № 17-48-020517 р_а).

Цитирование: Филиппов А. И. Теплообмен при отборе химически активного или радиоактивного флюида из продуктивного пласта / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский, И. Ф. Кабиров // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2017. Том 3. № 1. С. 58-78.
DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-1-58-78

Аннотация

Целью исследования является разработка физическо-математической модели температурного поля при отборе химически активного флюида из продуктивного карбонатосодержащего пласта с учетом возмущений температуры, вызванных предшествующими технологическими процессами. Источниками указанных возмущений температуры выступают флюид, содержащий соляную кислоту или радиоактивные примеси в растворенном состоянии, и сопутствующие теплофизические процессы.

Предложен способ построения решения задачи сопряжения о температурном поле при отборе химически активного флюида из продуктивного пласта, являющийся развитием «в среднем точного» асимптотического метода применительно к задачам сопряжения с ненулевыми начальными условиями, что является существенным достижением в актуальном направлении математической физики и гидродинамики. Реализованный в статье способ включает специально разработанную процедуру отыскания нелокального среднеинтегрального условия в начальный момент времени, которое определено из требования тривиальности решения интегрально осредненной задачи для остаточного члена после нулевого коэффициента асимптотического разложения.

Построено асимптотическое решение задач сопряжения о температурном поле при отборе химически активного флюида из продуктивного пласта для нулевого и первого коэффициентов асимптотического разложения. Показано, что решение в нулевом асимптотическом приближении представляет осредненное по центральной ограниченной области значение температуры, а из первого приближения следует значение для установившегося температурного поля. Найденные аналитические формулы можно использовать для расчетов в условиях многократного циклического солянокислотного воздействия на нефтегазовые пласты. Представлены пространственно-временные зависимости температурного поля, осложненного начальными возмущениями, при отборе химически активного флюида из продуктивного пласта.

Ключевые слова

Теплофизика, асимптотический метод, конвекция, отбор, повышение нефтеотдачи, кислотная обработка призабойной зоны, химическая реакция.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-1-58-78

Введение

Для повышения дебитов скважин и в качестве методов увеличения нефтеотдачи широко применяются различные технологии кислотной обработки пластов. Например, суть метода, об эффективности которого свидетельствуют данные с месторождения Жаножол [1], заключается в последовательном нагнетании раствора кислоты и выдержки с последующим отбором. При этом происходит очистка призабойной зоны пласта, в окрестности скважины создаются высокопроводящие каналы растворения за счет выноса на поверхность растворенной части породы, пластового цемента и материала, загрязняющего призабойную зону пласта, что эквивалентно увеличению эффективного радиуса скважины и способствует повышению дебита [3].

Одним из достоверных источников информации о протекании химических процессов взаимодействия соляной кислоты с карбонатной составляющей скелета является температурное поле, которое регистрируется с помощью термометров. Задача о температурном поле в таких условиях, которая лежит в основе интерпретации температурных кривых, осложнена необходимостью учета повторения этапов закачки, выдержки и отбора. Модели, описывающие температурные поля при однократной закачке кислотного раствора, рассмотрены в работах [4; 5]. Новизна данной работы заключается в том, что температурное поле при отборе химически активного (или радиоактивного) флюида из продуктивного пласта рассматривается как часть цикла (последовательность трех этапов: закачка, выдержка и отбор). В результате учитываются температурные возмущения от предыдущих технологических этапов (закачка и выдержка).

Полагается, что задача обладает осевой симметрией. В рассматриваемой задаче движение жидкости (фильтрация в пористой среде) происходит в радиальном направлении от периферии к скважине. С практической точки зрения это соответствует этапу отбора. Функция источников не зависит от вертикальной координаты z_d , т. е. $Q_d = Q_d(r_d, t)$.

1. Постановка задачи

В цилиндрической системе координат среда представлена тремя областями с плоскими границами раздела $z_d = \pm h$ перпендикулярными оси z_d (рис. 1). Среда в первой области имеет плотность ρ_1 , удельную теплоемкость c_1 , теплопроводности $\lambda_{r1}, \lambda_{z1}$, температуропроводности a_{r1}, a_{z1} . Вторая область характеризуется параметрами $\lambda_{r2}, \lambda_{z2}, a_{r2}, a_{z2}, \rho_2, c_2$. Средняя область толщины $2h$ имеет следующие параметры: $\lambda_r, \lambda_z, a_r, a_z, \rho, c$. Среда считается сильно анизотропной, так что $\lambda_r \ll \lambda_z, \lambda_{r1} \ll \lambda_{z1}, \lambda_{r2} \ll \lambda_{z2}$. Это позволяет при записи уравнений теплопроводности для всех областей пренебречь слагаемым, содержащим радиальную теплопроводность.

Математическая постановка задачи для покрывающего и подстилающего массивов представляется уравнениями теплопроводности:

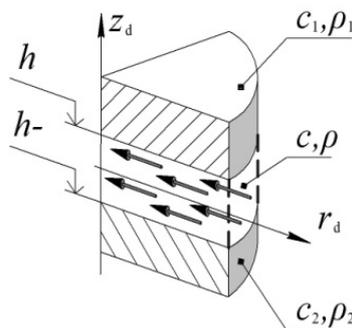


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Geometry of the problem

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_{z1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2}, \quad z_d > h, \quad r_d > 0, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_{z2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z_d^2}, \quad z_d < -h, \quad r_d > 0, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

уравнением конвективной теплопроводности в пласте:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_d(r_d, t) \frac{\partial \theta}{\partial r_d} - a_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} = Q_d(r_d, t), \quad |z_d| < h, \quad r_d > 0, \quad t > 0. \quad (1.3)$$

На границах раздела заданы условия равенства температур и тепловых потоков:

$$\theta|_{z_d=h} = \theta_1|_{z_d=h}, \quad \theta|_{z_d=-h} = \theta_2|_{z_d=-h}, \quad (1.4)$$

$$\lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h} = \lambda_{z1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h}, \quad \lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h} = \lambda_{z2} \frac{\partial \theta_2}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h}. \quad (1.5)$$

Температурные возмущения в начальный момент времени аддитивны к стационарному естественному температурному полю Земли:

$$\begin{aligned} \theta|_{t=0} &= D(r_d, z_d) + \theta_0 - \Gamma z_d, \\ \theta_1|_{t=0} &= D_1(r_d, z_d) + \theta_0 - \Gamma h - \Gamma_1(z_d - h), \\ \theta_2|_{t=0} &= D_2(r_d, z_d) + \theta_0 + \Gamma h - \Gamma_2(z_d + h). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Граничные условия представлены в виде:

$$\begin{aligned} \theta|_{r+z_d \rightarrow \infty} &\rightarrow \theta_0 - \Gamma z_d, \quad \theta_1|_{r+z_d \rightarrow \infty} \rightarrow \theta_0 - \Gamma h - \Gamma_1(z_d - h), \\ \theta_2|_{r-z_d \rightarrow \infty} &\rightarrow \theta_0 + \Gamma h - \Gamma_2(z_d + h). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Решение предполагается ограниченным во всех точках $r_d > 0$, и функция источников $Q(r_d, t)$ не зависит от температуры. Источники тепла $Q(r_d, t)$ в рассматриваемой задаче локализованы в ограниченной области, поэтому начальное распределение температуры сохраняется в течение любого конечного промежутка времени в достаточно удаленных от источника областях.

В постановке задачи предполагается, что раствор движется в радиальном направлении и имеет одну отличную от нуля радиальную координату, которая не зависит от z : $\vec{u} = (0, 0, u_r)$, $u_r = u_d(r_d, t)$. Флюид, содержащий раствор кислоты и продукты реакции, перемещается из бесконечности к полярной оси, т. е. $u_d < 0$.

С использованием соотношений:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_d}{h}, \quad z = \frac{z_d}{h}, \quad \text{Fo} = \frac{t a_{z1}}{h^2}, \quad u = \frac{u_d \cdot h}{a_{z1}}, \quad Q(r, \text{Fo}) = \frac{h^2}{\theta_{11} a_{z1}} Q_d(r_d, t), \\ \Lambda &= \frac{\lambda_{z1}}{\lambda_z}, \quad \lambda = \frac{\lambda_{z2}}{\lambda_{z1}}, \quad \chi = \frac{c_1 \rho_1}{c \rho}, \quad \alpha^{-2} = \frac{a_{z2}}{a_{z1}}, \quad u = -J/(2r), \\ J &= 2u_0 r_0 / a_{z1}, \quad T = \frac{\theta - \theta_0 + \Gamma z_d}{\theta_{11}}, \\ T_1 &= \frac{\theta_1 - \theta_0 + \Gamma h + \Gamma_1(z_d - h)}{\theta_{11}}, \quad T_2 = \frac{\theta_2 - \theta_0 - \Gamma h + \Gamma_1(z_d + h)}{\theta_{11}}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

задача (4.1.1) – (4.1.7) приводится к безразмерному виду:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q(r, \text{Fo}), \quad (1.11)$$

$$-1 < z < 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0,$$

$$T|_{z=1} = T_1|_{z=1}, \quad T|_{z=-1} = T_2|_{z=-1}, \quad (1.12)$$

$$\varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \lambda \Lambda \varepsilon \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (1.13)$$

$$T|_{\text{Fo}=0} = T_p(r, z), \quad T_1|_{\text{Fo}=0} = T_{p1}(r, z), \quad T_2|_{\text{Fo}=0} = T_{p2}(r, z), \quad (1.14)$$

$$T_1|_{r+z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

2. Определение нулевого коэффициента разложения

Аналитическое решение задачи (1.9)–(1.15) построено на основе асимптотического метода [6]. Для этого в задаче формально введен параметр асимптотического разложения ε путем замены Λ на $\Lambda \varepsilon$. При $\varepsilon = 1$ задача сводится к исходной.

Такое введение формального параметра в задаче имеет физический смысл, заключающийся в том, что устремление его к нулю $\varepsilon \rightarrow 0$ формально соответствует возрастанию вертикальной компоненты теплопроводности до бесконечности $\lambda_z \rightarrow \infty$.

Ниже показано, что это устремление приводит к тому, что нулевое приближение в пласте не зависит от вертикальной координаты («мгновенное выравнивание») и определяет осредненные по толщине пласта значения температуры. Представим решение задачи в виде асимптотического ряда по параметру ε :

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \varepsilon^2 T_j^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T_j^{(n)} + \Theta_j^{(n)}, \quad (2.1)$$

где нижние индексы у безразмерной температуры T относятся к номеру области, а верхние соответствуют порядковому номеру приближения.

Процедуру отыскания коэффициентов асимптотического разложения можно повторять до получения требуемого количества слагаемых. Однако чаще всего приходится ограничиваться нулевым и первым слагаемым в асимптотическом разложении.

Подставляя (2.1) в (1.9)–(1.15), получим:

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial Fo} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial Fo} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad (2.3)$$

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \cdot \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} - Q(r, Fo) \right) +$$

$$+ \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad (2.4)$$

$$T^{(0)} \Big|_{z=1} - T_1^{(0)} \Big|_{z=1} + \varepsilon \left(T^{(1)} \Big|_{z=1} - T_1^{(1)} \Big|_{z=1} \right) + \dots = 0,$$

$$T^{(0)} \Big|_{z=-1} - T_2^{(0)} \Big|_{z=-1} + \varepsilon \left(T^{(1)} \Big|_{z=-1} - T_2^{(1)} \Big|_{z=-1} \right) + \dots = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=1} + \dots = 0,$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=-1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=-1} + \dots = 0, \quad (2.6)$$

$$T^{(0)} \Big|_{Fo=0} + \varepsilon T^{(1)} \Big|_{Fo=0} + \dots = T_p(r, z),$$

$$T_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} + \varepsilon T_1^{(1)} \Big|_{Fo=0} + \dots = T_{p1}(r, z), \quad (2.7)$$

$$T_2^{(0)} \Big|_{Fo=0} + \varepsilon T_2^{(1)} \Big|_{Fo=0} + \dots = T_{p2}(r, z),$$

$$T_1^{(i)} \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(i)} \Big|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Задача для остаточного члена строится далее с учетом полученных выражений для коэффициентов разложения.

Из (2.4) для нулевого приближения имеем $\partial^2 T^{(0)}/\partial z^2 = 0$. Отсюда следует, что производная от нулевого приближения по координате z не зависит от координаты z , то есть $\partial T^{(0)}/\partial z = \text{const}$. Так как для нулевого приближения из (2.6) следует, что $\partial T^{(0)}/\partial z \Big|_{z=1} = 0$ и $\partial T^{(0)}/\partial z \Big|_{z=-1} = 0$, то получим $\partial T^{(0)}/\partial z = 0$. Последнее означает, что $T^{(0)}$ не зависит от z и является функцией только от r и Fo , то есть $T^{(0)} = T^{(0)}(r, Fo)$. Приравнявая к нулю выражение перед множителем первого порядка по ε в (2.4), получим:

$$\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} = A(r, Fo), \quad (2.9)$$

где

$$A(r, Fo) = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - Q(r, Fo) \right) \quad (2.10)$$

не зависит от z .

Уравнение (2.9) с учетом (2.10) является «зацепленным» в том смысле, что оно через (2.10) содержит коэффициенты разложения нулевого и первого порядков $T^{(0)}$

и $T^{(1)}$. Это затрудняет решение соответствующих задач. Ниже описаны преобразования, позволившие «расцепить» уравнение (2.9), исключив из него $T^{(1)}$.

Так как $T^{(0)}$ не зависит от координаты z , то $A(r, Fo)$ согласно (2.10) также не зависит от z . Проинтегрировав дважды (2.9), получим выражение для температуры в пласте в первом приближении:

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = z \cdot A(r, Fo) + B(r, Fo), \quad T^{(1)} = \frac{z^2}{2} A(r, Fo) + zB(r, Fo) + E(r, Fo), \quad (2.11)$$

где $B(r, Fo)$ и $E(r, Fo)$ не зависят от z . Приравняв к нулю выражения перед сомножителем первого порядка по ε в (2.6), получим:

$$\left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad \left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1} = \Lambda \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1}. \quad (2.12)$$

Запишем выражение (2.11) для градиента температуры $\partial T^{(1)}/\partial z$ при $z = 1$ и $z = -1$, затем воспользовавшись условиями (2.12), получим систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $A(r, Fo)$ и $B(r, Fo)$:

$$A(r, Fo) + B(r, Fo) = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad -A(r, Fo) + B(r, Fo) = \Lambda \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1}. \quad (2.13)$$

Решая систему (2.13) относительно $A(r, Fo)$ и $B(r, Fo)$, имеем:

$$\begin{aligned} A(r, Fo) &= \frac{\Lambda}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right), \\ B(r, Fo) &= \frac{\Lambda}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} + \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Подставив полученное выражение (2.14) для $A(r, Fo)$ в (2.10), получим уравнение, содержащее коэффициенты разложения только нулевого порядка:

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) = Q(r, Fo). \quad (2.15)$$

Итак, реализованная выше последовательность преобразований позволила «расцепить» исходное уравнение (2.9), содержащее коэффициенты разложения нулевого и первого порядков $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$.

Трудности окончательной формулировки задачи для нулевого коэффициента разложения связаны с противоречивостью условия (1.6) при $\varepsilon = 0$, поскольку оно предполагает приравнивание двух величин, одна из которых $T^{(0)}$ не зависит от z . Однако эта трудность не является непреодолимой, поскольку в рассматриваемой области определения задачи вблизи начала отсчета времени локализован вязкий погранслой в математическом смысле. В этом случае для нахождения соответствующих интегральных условий следует рассмотреть задачу для остаточного члена.

3. Задача для нулевого остаточного члена и ее осреднение

Далее строится задача для остаточного члена с учетом полученных выражений для коэффициентов разложения. Для этого асимптотические выражения:

$$T = T^{(0)} + \Theta^{(0)}, T_1 = T_1^{(0)} + \Theta_1^{(0)}, T_2 = T_2^{(0)} + \Theta_2^{(0)} \quad (3.1)$$

подставляются в исходную параметризованную задачу (1.9)–(1.15). С учетом полученных ранее выражений для нулевого коэффициента разложения, получим:

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 \Theta_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \Theta_2^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Theta_2^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial r} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{\partial^2 \Theta^{(0)}}{\partial z^2} = - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} + Q(r, \text{Fo}), \quad (3.4)$$

$$-1 < z < 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0,$$

$$\Theta^{(0)}|_{z=1} = \Theta_1^{(0)}|_{z=1}, \quad \Theta^{(0)}|_{z=-1} = \Theta_2^{(0)}|_{z=-1}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} = \left. \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad (3.6)$$

$$\lambda \Lambda \varepsilon \left. \frac{\partial \Theta_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} = \left. \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} - \lambda \Lambda \varepsilon \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1},$$

$$T^{(0)} + \Theta^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = T_p(r, z), \quad \Theta_1^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_2^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (3.7)$$

$$\Theta_2^{(0)}|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \Theta_2^{(0)}|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Усредним задачу для остаточного члена (3.2)–(3.8) по z в пределах от -1 до 1 в интервале центрального пласта по формуле $\langle \Theta \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Theta dz$. Для осреднения уравнения (3.4) использовано соотношение, следующее из (3.6):

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \Theta^{(0)}}{\partial z^2} dz = \left. \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \left. \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} = \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} + \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \Lambda \varepsilon \left. \frac{\partial \Theta_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} - \lambda \Lambda \varepsilon \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1}. \quad (3.9)$$

Окончательно получим:

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 \Theta_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \Theta_2^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Theta_2^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \langle \Theta^{(0)} \rangle_a}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial \langle \Theta^{(0)} \rangle_a}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\left. \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial \Theta_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) = 0, \quad (3.12)$$

$$-1 < z < 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0,$$

$$\left\langle \langle \Theta^{(0)} \rangle_a \right\rangle|_{z=1} = \Theta_1^{(0)}|_{z=1}, \quad \left\langle \langle \Theta^{(0)} \rangle_a \right\rangle|_{z=-1} = \Theta_2^{(0)}|_{z=-1}, \quad (3.13)$$

$$\left\langle \left\langle \Theta^{(0)} \right\rangle_a \right\rangle_{\text{Fo}=0} = \left\langle T_p(r, z) \right\rangle - T^{(0)}|_{\text{Fo}=0}, \quad \Theta_1^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_2^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (3.14)$$

$$\Theta_2^{(0)}|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta_2^{(0)}|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

Отсюда следует, что решение задачи для «асимптотически осредненного» остаточного члена $\langle \Theta^{(0)} \rangle_a$ является тривиальным при выполнении следующего условия:

$$T^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = \left\langle T_p(r, z) \right\rangle. \quad (3.16)$$

Ниже это условие использовано в задаче для нулевого коэффициента. Показано, что задача для нулевого коэффициента с такими условиями имеет ненулевое единственное решение, а осредненная задача для остаточного члена имеет только тривиальное решение $\langle \Theta^{(0)} \rangle_a = 0$.

Использованное в данной работе асимптотическое разложение обладает важным свойством, заключающимся в том, что решение осредненной задачи для остаточного члена является тривиальным при любых значениях формального параметра ε . Это естественно определяет критерий близости точного решения и найденного асимптотического, нулевой коэффициент которого является решением осредненной задачи. Отсюда следует, что найденное ниже решение для нулевого приближения относится к классу «в среднем точных».

Итак, асимптотическое решение параметризованной задачи (1.9)–(1.15), построенное при условии, что решение осредненной задачи для нулевого остаточного члена тривиально, является «в среднем точным» в нулевом приближении.

4. Задача для нулевого коэффициента

Выписав из (2.2)–(2.6) слагаемые нулевого порядка ε , с учетом (2.15) и (3.16) получим задачу, содержащую только нулевые коэффициенты разложения:

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = Q(r, \text{Fo}), \quad (4.3)$$

$$|z| < 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0,$$

$$T_1^{(0)}|_{z=1} = T_2^{(0)}|_{z=-1} = T^{(0)}, \quad (4.4)$$

$$T^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = \left\langle T_p(r, z) \right\rangle, \quad T_1^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = T_{p1}(r, z), \quad T_2^{(0)}|_{\text{Fo}=0} = T_{p2}(r, z). \quad (4.5)$$

$$T_1^{(0)}|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(0)}|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Начальное условие (4.5) для нулевого коэффициента разложения $T^{(0)}$ также содержит процедуру усреднения, т. е. не является локальным, поэтому задача

для нулевого коэффициента, как и для остаточного члена, относится к классу задач с нелокальными граничными условиями.

5. Осреднение задачи отбора флюида в интервале продуктивного пласта

Так как аналитическое решение исходной задачи (2.2)–(2.8) классическими методами затруднено, то в большинстве случаев при решении подобных задач отыскивают значения функции, осредненной по некоторому параметру. После осреднения температуры в задаче (4.1)–(4.6) по z в пределах от -1 до 1 по формуле $\langle T \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T dz$ получим:

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, r > 0, Fo > 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial Fo} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, r > 0, Fo > 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = Q(r, Fo), \quad (5.3)$$

$$|z| < 1, r > 0, Fo > 0,$$

$$T_1|_{z=1} = T_2|_{z=-1} = \langle T \rangle, \quad (5.4)$$

$$\langle T \rangle|_{Fo=0} = \langle T_p(r, z) \rangle, \quad T_1|_{Fo=0} = T_{p1}(r, z), \quad T_2|_{Fo=0} = T_{p2}(r, z), \quad (5.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle T \rangle = 0, \quad \lim_{r+z \rightarrow \infty} T_1 = 0, \quad \lim_{r+|z| \rightarrow \infty} T_2 = 0, \quad (5.6)$$

где для осреднения уравнения (5.3) использовано соотношение:

$$\frac{1}{2} \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial z^2} dz = \frac{1}{2} \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = \frac{\chi}{2} \cdot \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right). \quad (5.7)$$

Нетрудно заметить, что постановки задач (4.1)–(4.6) и (5.1)–(5.6) совпадают. Из единственности решения получим $T^{(0)} = \langle T \rangle_a$, то есть решения задач для нулевого коэффициента осредненных значений температуры совпадают. Отсюда следует, что процесс отыскания нулевого коэффициента разложения полностью соответствует процедуре построения осредненного решения. Этот факт имеет важное значение для построения решений аналогичных задач с переменными коэффициентами или нелинейными уравнениями, возникающими, например, при фазовых переходах в рассматриваемом слое. Классическая процедура интегрального осреднения в этом случае не приводит к рациональному конечному выражению, а нахождение среднего значения путем решения задачи в асимптотическом нулевом приближении возможно чаще, и этот путь решения приводит к приемлемому результату.

6. Решение задачи для нулевого коэффициента разложения

Предположим, что скорость конвективного переноса тепла не зависит от времени, то есть $u = u(r)$, и трансформируем задачу (5.1)–(5.6) в пространство изображений Лапласа–Карсона:

$$pT_1^{(0)u} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)u}}{\partial z^2} = pT_{p_1}(r, z), \quad z > 1, r > 0, \quad (6.1)$$

$$pT_2^{(0)u} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(0)u}}{\partial z^2} = pT_{p_2}(r, z), \quad z < -1, r > 0, \quad (6.2)$$

$$pT^{(0)u} + u(r) \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = Q^u(r, p) + p \langle T_p(r, z) \rangle, \quad (6.3)$$

$$T_1^{(0)u} \Big|_{z=1} = T_2^{(0)u} \Big|_{z=-1} = T^{(0)u}, \quad (6.4)$$

$$T^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_1^{(0)u} \Big|_{r+z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(0)u} \Big|_{r+|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (6.5)$$

Решения уравнений (6.1) и (6.2) с учетом граничного условия (6.4) представляются как:

$$\begin{aligned} T_1^{(0)u} &= \left(T^{(0)u} + \frac{\sqrt{p}}{2} \int_{\infty}^1 T_{p_1}(r, x') e^{-\sqrt{p}(x'-1)} dx' \right) e^{-\sqrt{p}(z-1)} - \\ &- \frac{\sqrt{p}}{2} \left[e^{\sqrt{p}z} \int_{\infty}^z T_{p_1}(r, x') e^{-\sqrt{p}(x'-z)} dx' - \int_1^z T_{p_1}(r, x') e^{\sqrt{p}(x'-z)} dx' \right], \\ T_2^{(0)u} &= \left(T^{(0)u} - \frac{\alpha\sqrt{p}}{2} \int_{-\infty}^{-1} T_{p_2}(r, x') e^{\alpha\sqrt{p}(x'+1)} dx' \right) e^{\alpha\sqrt{p}(z+1)} - \\ &- \frac{\alpha\sqrt{p}}{2} \left[\int_{-\infty}^z T_{p_2}(r, x') e^{\alpha\sqrt{p}(x'-z)} dx' - \int_{-1}^z T_{p_2}(r, x') e^{\alpha\sqrt{p}(x'+z)} dx' \right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

С учетом этого выражения (2.14) в пространстве изображений после нахождения в них частных производных от решений в первой и второй областях (6.6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1^{(0)u}}{dz} \Big|_{z=1} &= -\sqrt{p}T^{(0)u} + p \int_1^{\infty} T_{p_1}(r, x') e^{-\sqrt{p}(x'-1)} dx', \\ \frac{dT_2^{(0)u}}{dz} \Big|_{z=-1} &= \alpha\sqrt{p}T^{(0)u} - \alpha^2 p \int_{-\infty}^{-1} T_{p_2}(r, x') e^{\alpha\sqrt{p}(x'+1)} dx', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^u(r, p) &= -\Lambda \text{Fi}_+ \sqrt{p} T^{(0)u} + \\ &+ \frac{\Lambda}{2} p \left(\int_1^{\infty} T_{p_1}(r, x') e^{-\sqrt{p}(x'-1)} dx' + \alpha^2 \lambda \int_{-\infty}^{-1} T_{p_2}(r, x') e^{\alpha\sqrt{p}(x'+1)} dx' \right), \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} B^u(r, p) &= \Lambda \text{Fi}_- \sqrt{p} T^{(0)u} + \\ &+ \frac{\Lambda}{2} p \left(\int_1^{\infty} T_{p_1}(r, x') e^{-\sqrt{p}(x'-1)} dx' - \alpha^2 \lambda \int_{-\infty}^{-1} T_{p_2}(r, x') e^{\alpha\sqrt{p}(x'+1)} dx' \right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $Fi_+ = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \lambda \sqrt{\frac{a_{z1}}{a_{z2}}} \right)$ и $Fi_- = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \lambda \sqrt{\frac{a_{z1}}{a_{z2}}} \right)$ — коэффициенты асимметрии.

Уравнение (6.3) преобразуем к виду:

$$\left(p + \chi \sqrt{p} Fi_+ \right) T^{(0)u} + \frac{\partial T^{(0)u}}{\partial \tau} = \tilde{Q}^u(\tau, p), \text{ где } \tau = \int_a^r \frac{dr''}{u(r'')}, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^u(r, p) = & Q(r, p) + p \langle T_p(r, z) \rangle + \\ & + \frac{\chi p}{2} \left(\int_1^\infty T_{p1}(r, x') e^{-\sqrt{p}(x'-1)} dx' + \alpha^2 \lambda \int_{-\infty}^{-1} T_{p2}(r, x') e^{\alpha \sqrt{p}(x'+1)} dx' \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Величина a является произвольной. Отсюда получаем аналитическое решение уравнения (7.9) в изображениях для средней области:

$$\begin{aligned} T^{(0)u} = & \int_r^\infty \tilde{Q}^u(\tau, p) \cdot \exp \left[\left(p + \chi \sqrt{p} Fi_+ \right) \cdot (\tau' - \tau) \right] d\tau' = \\ = & - \int_r^\infty \tilde{Q}^u(r', p) \cdot \exp \left[\left(p + \chi \sqrt{p} Fi_+ \right) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')} \right] \frac{dr'}{u(r')}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

С помощью (6.11) легко найти решение в изображениях для первой и второй областей:

$$\begin{aligned} T_1^{(0)u} = & e^{-\sqrt{p}(z-1)} \left(- \int_r^\infty \tilde{Q}^u(r', p) \cdot \exp \left[\left(p + \chi \sqrt{p} Fi_+ \right) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')} \right] \frac{dr'}{u(r')} + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{p}}{2} \int_\infty^1 T_{p1}(r, x') e^{-\sqrt{p}(x'-1)} dx' \right) - \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$- \frac{\sqrt{p}}{2} \left[\int_\infty^z T_{p1}(r, x') e^{-\sqrt{p}(x'-z)} dx' - \int_1^z T_{p1}(r, x') e^{\sqrt{p}(x'-z)} dx' \right],$$

$$\begin{aligned} T_2^{(0)u} = & e^{\alpha \sqrt{p}(z+1)} \left(- \int_r^\infty \tilde{Q}^u(r', p) \cdot \exp \left[\left(p + \chi \sqrt{p} Fi_+ \right) \cdot \int_r^{r'} \frac{dr''}{u(r'')} \right] \frac{dr'}{u(r')} - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha \sqrt{p}}{2} \int_{-\infty}^{-1} T_{p2}(r, x') e^{\alpha \sqrt{p}(x'+1)} dx' \right) + \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$+ \frac{\alpha \sqrt{p}}{2} \left(\int_{-\infty}^z T_{p2}(r, x') e^{\alpha \sqrt{p}(x'-z)} dx' - \int_{-1}^z T_{p2}(r, x') e^{\alpha \sqrt{p}(x'+z)} dx' \right).$$

В частном случае $u(r) = -J/(2r)$, $T_p(r, z) = 0$, $T_{p1}(r, z) = 0$, $T_{p2}(r, z) = 0$, получим:

$$T^{(0)u} = \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty \tilde{Q}^u(r', p) \cdot \exp \left(- \frac{p + \chi \sqrt{p} Fi_+}{J} \cdot (r'^2 - r^2) \right) r' dr', \quad (6.14)$$

$$T_1^{(0)u} = \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty Q^u(r', p) \cdot \exp\left(-\frac{p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+}{J} \cdot (r'^2 - r^2) - \sqrt{p}(z-1)\right) r' dr', \quad (6.15)$$

$$T_2^{(0)u} = \frac{2}{J} \cdot \int_r^\infty Q^u(r', p) \cdot \exp\left(-\frac{p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+}{J} \cdot (r'^2 - r^2) + \alpha\sqrt{p}(z+1)\right) r' dr'. \quad (6.16)$$

Выполнив переход в пространство оригиналов, имеем [2]:

$$T^{(0)} = \frac{2}{J} \int_r^\infty \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} Q(r', \text{Fo} - \tau) \text{erfc}\left(\frac{\chi\text{Fi}_+(r'^2 - r^2)}{2\sqrt{J(J \cdot \tau + r^2 - r'^2)}}\right) \Phi\left(\tau - \frac{r'^2 - r^2}{J}\right) r' d\tau dr', \quad (6.17)$$

$$T_1^{(0)} = \frac{2}{J} \int_r^\infty \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} Q(r', \text{Fo} - \tau) \text{erfc}\left(\frac{\chi\text{Fi}_+(r'^2 - r^2) + J(z-1)}{2\sqrt{J(J \cdot \tau + r^2 - r'^2)}}\right) \Phi\left(\tau - \frac{r'^2 - r^2}{J}\right) r' d\tau dr', \quad (6.18)$$

$$T_2^{(0)} = \frac{2}{J} \int_r^\infty \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} Q(r', \text{Fo} - \tau) \text{erfc}\left(\frac{\chi\text{Fi}_+(r'^2 - r^2) - \alpha J(z+1)}{2\sqrt{J(J \cdot \tau + r^2 - r'^2)}}\right) \Phi\left(\tau - \frac{r'^2 - r^2}{J}\right) r' d\tau dr', \quad (6.19)$$

где $\Phi(x)$ — единичная функция Хевисайда.

В более общем случае $u(r) = -J/(2r)$, $\int_r^\infty \frac{dr''}{u(r'')} = -\frac{r'^2 - r^2}{J}$, $T_p(r, z) \neq 0$, $T_{p1}(r, z) \neq 0$, $T_{p2}(r, z) \neq 0$ получим решение в изображениях для пласта:

$$\begin{aligned} T^{(0)u} &= \int_r^\infty \tilde{Q}^u(\tau, p) \cdot \exp\left[(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+) \cdot (\tau' - \tau)\right] d\tau' = \\ &= \frac{2}{J} \int_r^\infty \tilde{Q}^u(r', p) \cdot \exp\left[-(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+) \cdot \frac{r'^2 - r^2}{J}\right] r' dr', \end{aligned} \quad (6.20)$$

первой:

$$\begin{aligned} T_1^{(0)u} &= \exp(-\sqrt{p}(z-1)) \left(\frac{2}{J} \int_r^\infty \tilde{Q}^u(r', p) \cdot \exp\left[-(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+) \cdot \frac{r'^2 - r^2}{J}\right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{p}}{2} \int_\infty^1 T_{p1}(r, x') \exp(-\sqrt{p}(x'-1)) dx' \right) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{p}}{2} \left[\int_\infty^z T_{p1}(r, x') \exp(-\sqrt{p}(x'-z)) dx' - \int_1^z T_{p1}(r, x') \exp(\sqrt{p}(x'-z)) dx' \right] \end{aligned} \quad (6.21)$$

и второй областей:

$$\begin{aligned} T_2^{(0)u} &= \exp(\alpha\sqrt{p}(z+1)) \left(\frac{2}{J} \int_r^\infty \tilde{Q}^u(r', p) \cdot \exp\left[-(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+) \cdot \frac{r'^2 - r^2}{J}\right] r' dr' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha\sqrt{p}}{2} \int_{-\infty}^{-1} T_{p2}(r, x') \exp(\alpha\sqrt{p}(x'+1)) dx' \right) + \\ &\quad + \frac{\alpha\sqrt{p}}{2} \left(\int_{-\infty}^z T_{p2}(r, x') \exp(\alpha\sqrt{p}(x'-z)) dx' - \int_{-1}^z T_{p2}(r, x') \exp(\alpha\sqrt{p}(x'+z)) dx' \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Из (6.20)–(6.22) с учетом выражения для источников (6.10) получим решение в пространстве изображений для пласта:

$$\begin{aligned}
 T^{(0)u} = & \frac{2}{J} \int_r^\infty Q(r', p) \cdot \exp\left[-(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+) \cdot \frac{r'^2 - r^2}{J}\right] r' dr' + \\
 & + \frac{2}{J} \int_r^\infty p \langle T_p(r', z) \rangle \cdot \exp\left[-(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+) \cdot \frac{r'^2 - r^2}{J}\right] r' dr' + \\
 & + \frac{\alpha^2 \lambda \chi}{J} \int_{r=-\infty}^\infty \int_{r=-\infty}^{-1} T_{p2}(r', x') dx' \cdot p \exp\left[-(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+) \cdot \frac{r'^2 - r^2}{J} + \alpha\sqrt{p}(x' + 1)\right] r' dr' \\
 & + \frac{\chi}{J} \int_{r=1}^\infty \int_{r=1}^\infty T_{p1}(r', x') dx' \cdot p \exp\left[-(p + \chi\sqrt{p}\text{Fi}_+) \cdot \frac{r'^2 - r^2}{J} - \sqrt{p}(x' - 1)\right] r' dr',
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

первой:

$$\begin{aligned}
 T_1^{(0)u} = & \frac{2}{J} \int_r^\infty Q^u(r', p) \cdot \exp\left[-p \frac{r'^2 - r^2}{J} - \sqrt{p}\left(\chi\text{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} + z - 1\right)\right] r' dr' + \\
 & + \frac{2}{J} \int_r^\infty p \langle T_p(r', z) \rangle \cdot \exp\left[-p \frac{r'^2 - r^2}{J} - \sqrt{p}\left(\chi\text{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} + z - 1\right)\right] r' dr' + \\
 & + \frac{\chi p}{J} \int_r^\infty r' dr' \int_1^\infty T_{p1}(r, x') dx' \cdot \exp\left[-p \frac{r'^2 - r^2}{J} - \sqrt{p}\left(\chi\text{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} + x' + z - 2\right)\right] + \\
 & + \frac{\alpha^2 \lambda \chi}{J} \int_{r=-\infty}^\infty \int_{r=-\infty}^{-1} T_{p2}(r', x') dx' \cdot p \exp\left[-p \frac{r'^2 - r^2}{J} - \sqrt{p}\left(\chi\text{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} - \alpha(x' + 1) + z - 1\right)\right] r' dr' + \\
 & + \frac{\sqrt{p}}{2} \int_{-\infty}^1 T_{p1}(r, x') \exp\left[-\sqrt{p}(x' - 1 + z - 1)\right] dx' - \\
 & - \frac{\sqrt{p}}{2} \left(\int_{-\infty}^z T_{p1}(r, x') \exp\left(-\sqrt{p}(x' - z)\right) dx' - \int_1^z T_{p1}(r, x') \exp\left(\sqrt{p}(x' - z)\right) dx' \right)
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

и второй областей:

$$\begin{aligned}
 T_2^{(0)u} = & \frac{2}{J} \int_r^\infty Q^u(r', p) \cdot \exp\left[-p \frac{r'^2 - r^2}{J} - \sqrt{p}\left(\chi\text{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} - \alpha(z + 1)\right)\right] r' dr' + \\
 & + \frac{2}{J} \int_r^\infty p \langle T_p(r', z) \rangle \cdot \exp\left[-p \frac{r'^2 - r^2}{J} - \sqrt{p}\left(\chi\text{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} - \alpha(z + 1)\right)\right] r' dr' + \\
 & + \frac{\chi p}{J} \int_r^\infty r' dr' \int_1^\infty T_{p1}(r, x') dx' \cdot \exp\left[-p \frac{r'^2 - r^2}{J} - \sqrt{p}\left(\chi\text{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} - \alpha(z + 1) - (x' - 1)\right)\right] + \\
 & + \frac{\alpha^2 \lambda \chi}{J} \int_{r=-\infty}^\infty \int_{r=-\infty}^{-1} T_{p2}(r', x') dx' \cdot p \exp\left[-p \frac{r'^2 - r^2}{J} - \sqrt{p}\left(\chi\text{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} - \alpha(x' + z + 2)\right)\right] r' dr' +
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

$$-\frac{\alpha\sqrt{p}}{2} \int_{-1}^{-\infty} T_{p2}(r, x') \exp[\sqrt{p}\alpha(x' + z + 2)] dx' - \\ + \frac{\alpha\sqrt{p}}{2} \left[\int_{-\infty}^z T_{p2}(r, x') e^{-\sqrt{p}(x'-z)} dx' - \int_{-1}^z T_{p2}(r, x') e^{\alpha\sqrt{p}(x'-z)} dx' \right].$$

Для стационарных источников тепла, когда функция источников зависит только от радиальной координаты $Q(r', p) = Q(r')$, получим следующее решение задачи в пространстве оригиналов [2]:

$$T^{(0)} = \frac{2}{J} \int_r^\infty Q(r') \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \operatorname{Fi}_+ (r'^2 - r^2)}{2J\sqrt{\operatorname{Fo} - (r'^2 - r^2)}/J} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' + \\ + \frac{2}{J} \int_r^\infty \langle T_p(r', z') \rangle \Psi \left(\chi \operatorname{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J}, \operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' - \\ + \frac{\chi}{J} \int_r^\infty r' dr' \int_1^\infty T_{p1}(r', z') dz' \Psi \left(\chi \operatorname{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} + z' - 1, \operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) - \\ + \frac{\chi \alpha^2}{J} \int_r^\infty r' dr' \int_{-\infty}^{-1} T_{p2}(r', z') dz' \Psi \left(\chi \operatorname{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} - \alpha(z' + 1), \operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right), \quad (6.26)$$

$$T_1^{(0)} = \frac{2}{J} \int_r^\infty Q(r') \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \operatorname{Fi}_+ (r'^2 - r^2)/J + z - 1}{2\sqrt{\operatorname{Fo} - (r'^2 - r^2)}/J} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' + \\ + \frac{2}{J} \int_r^\infty \langle T_p(r', z') \rangle \Psi \left(\chi \operatorname{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} + z - 1, \operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' + \\ + \frac{\chi}{J} \int_r^\infty \int_1^\infty T_{p1}(r', x') \Psi \left(\chi \operatorname{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} + z + x' - 2, \operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) dx' \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' + \\ + \frac{\lambda \chi \alpha^2}{J} \int_r^\infty \int_{-\infty}^{-1} T_{p2}(r', x') \Psi \left(\chi \operatorname{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} + z - 1 - \alpha(x' + 1), \operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) dx' \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi \operatorname{Fo}}} \int_{-\infty}^1 T_{p1}(r, x') \exp \left(-\frac{[(x' - 1) + (z - 1)]^2}{4\operatorname{Fo}} \right) dx' - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi \operatorname{Fo}}} \left[\int_{-\infty}^z T_{p1}(r, x') \exp \left(-\frac{(x' - z)^2}{4\operatorname{Fo}} \right) dx' - \int_1^z T_{p1}(r, x') \exp \left(-\frac{(x' - z)^2}{4\operatorname{Fo}} \right) dx' \right], \quad (6.27)$$

$$T_2^{(0)} = \frac{2}{J} \int_r^\infty Q(r') \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \operatorname{Fi}_+ (r'^2 - r^2)/J - \alpha(z + 1)}{2\sqrt{\operatorname{Fo} - (r'^2 - r^2)}/J} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' + \\ + \frac{2}{J} \int_r^\infty \langle T_p(r, z') \rangle \Psi \left(\chi \operatorname{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} - \alpha(z + 1), \operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' + \\ + \frac{\chi}{J} \int_r^\infty \int_1^\infty T_{p1}(r', x') \Psi \left(\chi \operatorname{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} - \alpha(z + 1) + x' - 1, \operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) dx' \Phi \left(\operatorname{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' + \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda \chi \alpha^2}{J} \int_{r=-\infty}^{\infty} \int_{x'=-1}^{-1} T_{p2}(r', x') \Psi \left(\chi \text{Fi}_+ \frac{r'^2 - r^2}{J} - \alpha(z+1) - \alpha(x'+1), \text{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) dx' \Phi \left(\text{Fo} - \frac{r'^2 - r^2}{J} \right) r' dr' + \\
& - \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi \text{Fo}}} \int_{-\infty}^{-1} T_{p2}(r, x') \exp \left(-\frac{\alpha^2 [(x'+1) + (z+1)]^2}{4\text{Fo}} \right) dx' - \\
& + \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi \text{Fo}}} \left[\int_{-\infty}^z T_{p2}(r, x') \exp \left(-\frac{(x'-z)^2}{4\text{Fo}} \right) dx' - \int_{-1}^z T_{p2}(r, x') \exp \left(-\frac{\alpha^2 (x'-z)^2}{4\text{Fo}} \right) dx' \right],
\end{aligned}$$

где $\Psi(x, y) = \frac{x}{2y\sqrt{\pi y}} \exp \left(-\frac{x^2}{4y} \right)$.

7. Анализ результатов расчетов температурных полей в процессе отбора флюида из продуктивного пласта

На рис. 2–4 представлены нормированные на максимальное значение температуры \tilde{T} изотермы поля начальных возмущений, рассчитанных на основании формул (6.26)–(6.28) при $Q(r) = 0$.

Рисунки дают представление о динамике пространственных изменений поля, вызванных, предшествующими отбору жидкой фазы раствора кислоты с продуктами реакции, технологическими процессами, представленными в рассматриваемой модели начальными возмущениями температуры. В расчетах приняты следующие параметры: $\alpha = 1$, $\chi = 1$, $\lambda = 1$, $\text{Fi}_+ = 1$, $J = 30$. Температурные возмущения, вызванные предшествующими технологическими операциями, заданы формулами $T_p = T_0 \cdot \exp(-r)$, $T_{p1} = T_0 \cdot \exp(-r-z+1)$, $T_{p2} = T_0 \cdot \exp(-r+z+1)$.

На рис. 2–4, *a* изображены пространственные зависимости температуры от координат r и z , а на 2–4, *б* — плоское изображение линий равной температуры того же, что и на *a*, температурного поля. Сопоставление этих зависимостей обеспечивает более наглядное представление полей температуры.

В расчетах принято, что максимальное значение начального возмущения температуры локализовано в скважине в интервале пласта ($r = 0$, $-1 < z < 1$). Кривые для малых времен закачки $\text{Fo} = 0.1$, представленные на рис. 2, дают представление о начальной стадии эволюции поля, которое в некотором смысле повторяет его исходное состояние. Максимальное значение температуры достигается при $r = 0$ в интервале пласта.

Рис. 3 свидетельствует о возникновении максимальных значений температуры в окружающей пласт среде при $\text{Fo} = 0.5$. В окружающих породах в этом случае максимум температуры достигается при $z = \pm 1.55$ вблизи скважины $r = 0$.

Такое поведение поля объясняется влиянием конвективного потока тепла из пласта в скважину, приводящим к ускоренному снижению температуры в пласте в сравнении с окружающими породами, где конвекция отсутствует.

С увеличением времени отбора $\text{Fo} = 1$ (рис. 4) максимальные значения температуры в окружающих породах, локализованные вблизи скважины $r = 0$, наблюдаются при $z = \pm 2.02$. Таким образом, максимальные значения температуры в породах продвигаются вдоль скважины, удаляясь от границ пласта $z = \pm 1$.

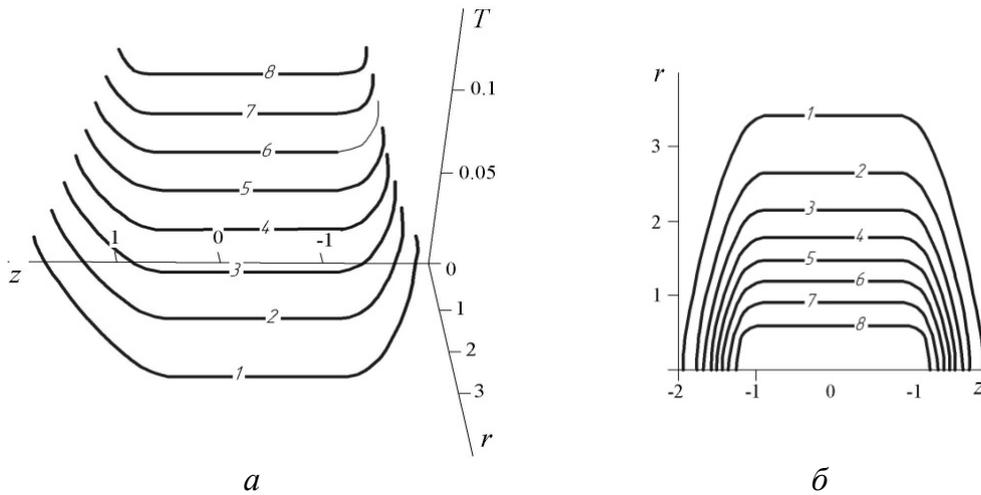


Рис. 2. Изотермы поля начальных возмущений (сплошные линии — передний фронт температурных возмущений, штриховые — задний фронт) при $Fo = 0,1$: 1 — $T/\tilde{T} = 0,017$; 2 — 0,034; 3 — 0,051; 4 — 0,068; 5 — 0,085; 6 — 0,102; 7 — 0,12; 8 — 0,137

Fig. 2. Isotherms of the field of the initial perturbations (solid lines is the anterior front of the temperature perturbations, and dashed is the rear front of the temperature perturbations) at $Fo = 0.1$: 1 — $T/\tilde{T} = 0.017$; 2 — 0.034; 3 — 0.051; 4 — 0.068; 5 — 0.085; 6 — 0.102; 7 — 0.12; 8 — 0.137

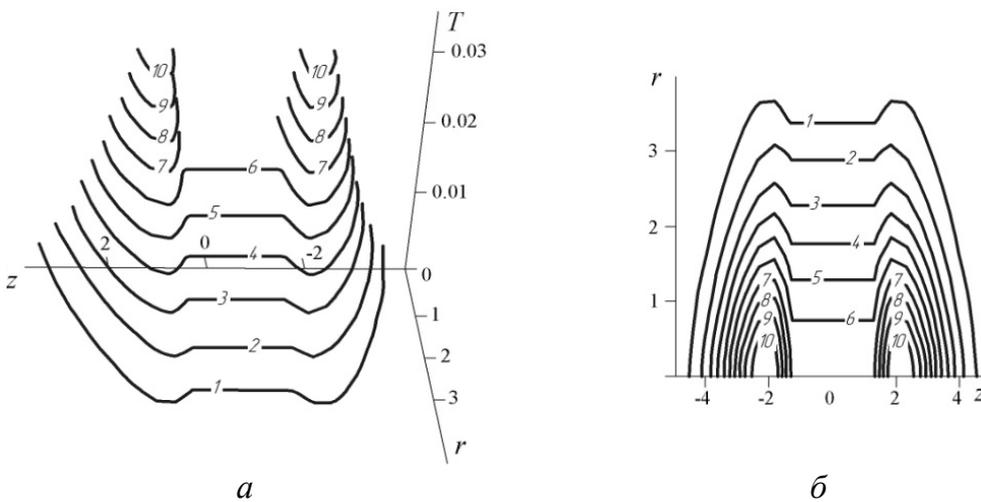


Рис. 3. То же, что и на рис. 2 при $Fo = 0,5$: 1 — $T/\tilde{T} = 0,003$; 2 — 0,006; 3 — 0,009; 4 — 0,012; 5 — 0,015; 6 — 0,018; 7 — 0,022; 8 — 0,025; 9 — 0,028; 10 — 0,031

Fig. 3. The same as in the fig. 2 at $Fo = 0.5$: 1 — $T/\tilde{T} = 0.003$; 2 — 0.006; 3 — 0.009; 4 — 0.012; 5 — 0.015; 6 — 0.018; 7 — 0.022; 8 — 0.025; 9 — 0.028; 10 — 0.031

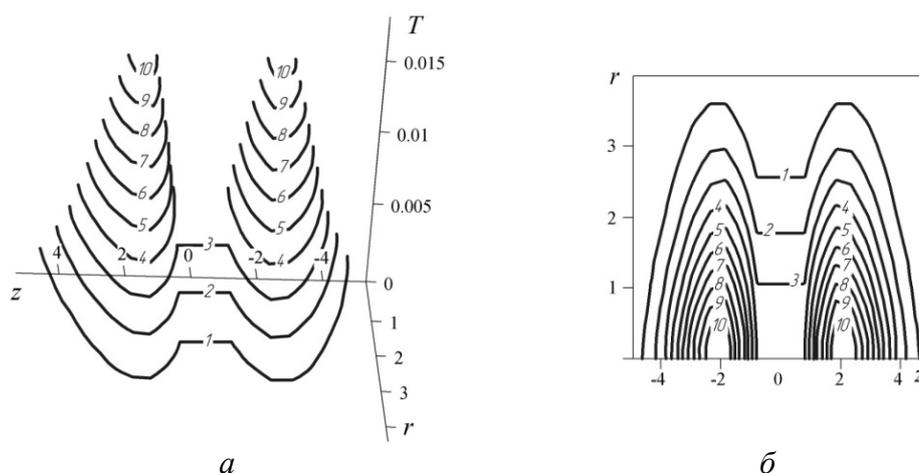


Рис. 4. То же, что и на рис. 2 при $Fo = 1$: 1 — $T/\tilde{T} = 0,0125$; 2 — 0,025; 3 — 0,0375; 4 — 0,05; 5 — 0,0625; 6 — 0,075; 7 — 0,0875; 8 — 0,1; 9 — 0,1125; 10 — 0,125

Fig. 4. The same as in the fig. 2 at $Fo = 1$: 1 — $T/\tilde{T} = 0.0125$; 2 — 0.025; 3 — 0.0375; 4 — 0.05; 5 — 0.0625; 6 — 0.075; 7 — 0.0875; 8 — 0.1; 9 — 0.1125; 10 — 0.125

Заключение

Таким образом, на примере задачи о температурном поле при отборе раствора кислоты с продуктами реакции ортотропного пласта с учетом предыдущих технологических воздействий проиллюстрирована модификация «в среднем точного» асимптотического метода, созданная авторами для решения задач с ненулевыми начальными условиями. Полученные приближенные решения позволяют оценивать динамику температурного поля при отборе химически активного флюида из продуктивного пласта.

Список обозначений

a — температуропроводность, m^2/c ; c — удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); Fi_+ , Fi_- — коэффициенты асимметрии; Fo — число Фурье; h — полутолщина проницаемого слоя, м; J — конвективный параметр движения жидкости в проницаемой среде; $Q(r, Fo)$ — безразмерная функция источников тепла; r, z — безразмерные цилиндрические координаты; T — безразмерная температура; t — время, с; $u(r)$ — функция скорости конвективного переноса тепла; ε — параметр асимптотического разложения; $\theta_j^{(n)}$ — безразмерный остаточный член асимптотического разложения температуры; $\theta, \theta_1, \theta_2$ — температура проницаемого, настилающего и подстилающего пластов, соответственно, К; θ_0 — размерная температура закачиваемой жидкости, К; θ_{11} — максимальный перепад температуры, К; λ — теплопроводность проницаемого, настилающего и подстилающего пластов, соответственно, Вт/(м·К); ρ, ρ_1, ρ_2 — плотность проницаемого, настилающего и подстилающего пластов, соответственно, кг/м³; $\Phi(x)$ — единичная функция Хевисайда.

Индексы: нижние: d — размерный (dimension), цифра — номер среды; верхние: *u* — изображение, цифра — порядковый номер коэффициента асимптотического разложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глущенко В. Н. Нефтепромысловая химия. Изд. в 5-ти томах. Т. 4. Кислотная обработка скважин / В. Н. Глущенко, М. А. Силин; под ред. И. Т. Мищенко. М.: Интерконтакт, Наука, 2010. 709 с.
2. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высшая школа, 1963. 466 с.
3. Закиров Т. Р. Моделирование кислотного воздействия на нефтяные пласты при заводнении / Т. Р. Закиров, А. И. Никифоров // Нефтяное хозяйство. 2012. № 6. С. 62-65.
4. Кремлева Т. А. Моделирование процесса кислотной обработки карбонатных пластов с учетом эффекта образования каналов-червоточин / Т. А. Кремлева, А. С. Смирнов, К. М. Федров // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. № 5. С. 76-84.
5. Филиппов А. И. Температурные поля при кислотной обработке нефтяных пластов / А. И. Филиппов, П. Н. Михайлов, Н. В. Пестова, А. Г. Крупинов // Теоретические основы химических технологий. 2008. Том 42. № 5. С. 570-578.
DOI: 10.1134/S0040579508050126
6. Filippov A. I. Temperature Field of Heat Sources during Fluid Injection in an Anisotropic Inhomogeneous Reservoir / A. I. Filippov, O. V. Akhmetova, I. F. Kabirov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. Vol. 54. No 6. Pp. 945-951.
DOI: 10.1134/S0021894413060102

Aleksandr I. FILIPPOV¹
Oksana V. AKHMETOVA²
Aleksey A. KOVALSKIY³
Ilshat F. KABIROV⁴

**HEAT TRANSFER DURING THE EXTRACTION
OF A CHEMICALLY ACTIVE OR RADIOACTIVE FLUID
FROM A RESERVOIR***

- ¹ Dr. Sci. (Tech.), Professor,
Head of the Department of General and Theoretical Physics,
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University
filippovai@rambler.ru
- ² Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor
of the Department of General and Theoretical Physics,
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University
ahoksana@yandex.ru
- ³ Cand. Sci. (Phys.-Math), Director
of the Sterlitamak Branch of the Bashkir State University
aakov68@mail.ru
- ⁴ Junior Researcher, Institute for Strategic Studies
of the Republic of Bashkortostan (Ufa)
kabirov.ilshat@bk.ru

Abstract

The aim of the study is to develop the physical-mathematical model of the temperature field at the extraction of a chemically active fluid from the productive carbonate-bearing reservoir taking into account temperature perturbations caused by previous technological processes. The first source of these temperature perturbations is the fluid containing hydrochloric acid

* The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants no 16-08-00548 A, 16-08-00728 A, 17-48-020517 p_a).

Citation: Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskiy A. A., Kabirov I. F. 2017. "Heat Transfer during the Extraction of a Chemically Active or Radioactive Fluid from a Reservoir". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 3, no 1, pp. 58-78.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-1-58-78

or radioactive impurities in the dissolved state, and the second source is the accompanying thermophysical processes.

The method for constructing the solution of the conjugation problem about the temperature field at the extraction of a chemically active fluid from a productive formation is developed. This method is the development of the "the average exact" asymptotic method with regard to the conjugation problems with nonzero initial conditions, which is an important achievement in the actual trend of mathematical physics and hydrodynamics. The method implemented in the article includes a specially developed procedure for finding the nonlocal average integral condition at the initial time, which is determined from the requirement that the solution of the integrally averaged problem for the remainder term must be trivial after the zero coefficient of asymptotic expansion.

The asymptotic solution of the conjugation problems about the temperature field during the extraction of a chemically active fluid from a reservoir is constructed for the zero and first coefficients of the asymptotic expansion. It is shown that the solution in the zero asymptotic approximation represents the temperature value averaged over the central bounded region, and the first approximation implies the value for the steady-state temperature field. The analytical formulas can be used for calculations under conditions of multiple cyclic hydrochloric acid impact on the oil and gas reservoirs. Space-time dependences of the temperature field complicated by initial perturbations when selecting a chemically active fluid from a productive formation are presented.

Keywords

Thermophysics, asymptotic method, convection, extraction, enhanced oil recovery, acid treatment of bottomhole zone, chemical reaction.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-1-58-78

REFERENCES

1. Glushchenko V. N., Silin M. A. 2010. *Neftepromyslovaya khimiya. Izd. v 5-ti tomakh. T. 4. Kislottaya obrabotka skvazhin* [Oilfield Chemistry. Ed. in 5 Volumes. Vol. 4. Acid treatment of wells], edited by Mishchenko I. T. Moscow: Interkontakt, Nauka.
2. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. 1963. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Operational Calculus Handbook]. Moscow: Vysshaya shkola.
3. Zakirov T. R., Nikiforov A. I. 2012. "Modelirovanie kislottogo vozdeystviya na neftyanye plasty pri zavodnenii" [Modeling Acid Impact in Water Flooding Oil Reservoir]. *Oil Industry*, no 6, pp. 62-65.
4. Kremleva T. A., Smirnov A. S., Fedrov K. M. 2011. "Modelirovanie protsessov kislottnoy obrabotki karbonatnykh plastov s uchetom effekta obrazovaniya kanalov chervotochin" [Modeling of the Processes of the Acid Treatment of Carbonate Layers Taking into Account the Effect of the Formation of Wormhole Channels]. *Fluid Dynamics*, no 5, pp. 76-84.
5. Filippov A. I., Mikhailov P. N., Pestova N. V., Krupinov A. G. 2008. "Temperature Fields in the Oil Reservoir Rocks Being Treated with an Acid". *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, vol. 42, no 5, pp. 556-564. DOI: 10.1134/S0040579508050126
6. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kabirov I. F. 2013. "Temperature Field of Heat Sources during Fluid Injection in an Anisotropic Inhomogeneous Reservoir". *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 945-951. DOI: 10.1134/S0021894413060102